

ĐỒNG DƯ THỨC

A. Kiến thức

1. Định nghĩa: Nếu hai số nguyên a và b khi chia cho số nguyên dương m có cùng số dư thì ta nói a đồng dư với b theo môđun m

Kí hiệu: $a \equiv b \pmod{m}$

- Như vậy $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (a-b):m$

- Hệ thức có dạng $a \equiv b \pmod{m}$ gọi là một đồng dư thức

Trong đó, ta có: a là vế trái, b là vế phải, m là môđun

- Nếu $a \equiv 0 \pmod{m}$ thì $a:m$

***) Chú ý:** Nếu a chia cho b dư r thì $a \equiv r \pmod{b}$

2. Tính chất: Dựa vào $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (a-b):m$

Với a, b, c nguyên, m là số nguyên dương, ta có:

+) **Tính chất 1:** Ta có $a \equiv a \pmod{m}$ (tính chất phản xạ)

+) **Tính chất 2:** Nếu $a \equiv b \pmod{m}$ thì $b \equiv a \pmod{m}$ (tính chất đối xứng)

+) **Tính chất 3:** Nếu $a \equiv b \pmod{m}; b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$ (tính chất bắc cầu)

+) **Tính chất 4:** Cộng hai vế của một đồng dư với cùng một số

$$\text{Nếu } a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + c \pmod{m} \\ a - c \equiv b - c \pmod{m} \end{cases}$$

+) **Tính chất 5:** Cộng, trừ từng vế của nhiều đồng dư có cùng môđun

$$\text{Nếu } a \equiv b \pmod{m}; c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d \pmod{m} \\ a - c \equiv b - d \pmod{m} \end{cases}$$

+) **Tính chất 6:** Nhân hai vế của một đồng dư với cùng một số

$$\text{Nếu } a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bc \pmod{m} \\ ac \equiv bc \pmod{m \cdot c} \end{cases}, (c \in \mathbb{Z})$$

+) **Tính chất 7:** Nhân từng vế của nhiều đồng dư có cùng môđun

$$\text{Nếu } a \equiv b \pmod{m}; c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$$

Mở rộng: Với $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ là các số nguyên

Nếu $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, \dots, a_n \equiv b_n \pmod{m}$ thì $(a_1, \dots, a_n) \equiv (b_1, \dots, b_n) \pmod{m}$

+) Tính chất 8: Nâng hai vế của một đồng dư thức với cùng một lũy thừa

Nếu $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m} (k \in \mathbb{N})$

+) Tính chất 9: Chia hai vế của một đồng dư với cùng một số nguyên tố cùng nhau với môđun

Nếu $ac \equiv bc \pmod{m}; (c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

Ví dụ: $20 \equiv 8 \pmod{3} \Rightarrow 5.4 \equiv 2.4 \pmod{3}, (3, 4) = 1 \Rightarrow 5 \equiv 2 \pmod{3}$

3. Định lý Fermat: Với p là số nguyên tố, a là số nguyên ta có: $a^p \equiv a \pmod{p}$

Đặc biệt: Nếu $(a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

B. Một số ứng dụng của lý thuyết đồng dư

Ứng dụng 1: Ứng dụng trong bài toán chứng minh chia hết

Định hướng dạng toán: Để chứng minh số nguyên A chia hết cho số nguyên m ta đi chứng minh $A \equiv 0 \pmod{m}$. Ý tưởng là như vậy nhưng trong thực tế việc chứng minh này không phải đơn giản. Đòi hỏi người làm toán phải có sự quan sát tinh tế và những biến đổi thông minh, tỉ mỉ mới giải quyết tốt bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $41^{2020} - 1$:7 chia hết cho 7 | b) $2^{4n+1} - 2 (n \in \mathbb{N})$ chia hết cho 15 |
| c) $3^{76} - 2^{76}$ chia hết cho 31 | d) $24^{1917} + 14^{1917}$ chia hết cho 19 |
| e) $2^{2019} + 15$ chia hết cho 31 | f) $2019^{2020} - 9$ chia hết cho 13 |

Lời giải

a) Ta có: $41 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 41^{2020} \equiv (-1)^{2020} \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$

$\Rightarrow 41^{2020} - 1 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow (41^{2020} - 1):7$

b) Ta có: $2^4 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow (2^4)^n \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 2^{4n}.2 \equiv 2$

$\Rightarrow 2^{4n+1} \equiv 2 \pmod{15} \Rightarrow 2^{4n+1} - 2 \equiv 0 \pmod{15} \Rightarrow (2^{4n+1} - 2):15$

c) Ta có: $3^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (3^3)^{25} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{75} \equiv 1 \pmod{13}$

$$\Rightarrow 3^{75} \equiv 3 \pmod{13} \Rightarrow 3^{76} \equiv 3 \pmod{13}$$

$$\text{Lại có: } 2^6 \equiv 12 \pmod{13} \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow (2^6)^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{76} \equiv 16 \pmod{13} \equiv 3 \pmod{13}$$

$$\text{Do đó: } 3^{76} - 2^{76} \equiv 3 - 3 \pmod{13} \Rightarrow 3^{76} - 2^{76} \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow (3^{76} - 2^{76}) : 13$$

$$\text{d) Ta có: } 24 \equiv 5 \pmod{19} \Rightarrow 24^{1917} \equiv 5^{1917} \pmod{19} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } 14 \equiv -5 \pmod{19} \Rightarrow 14^{1917} \equiv -5^{1917} \pmod{19} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow 24^{1917} + 14^{1917} \equiv 5^{1917} + (-5^{1917}) \pmod{19} \equiv 0 \pmod{19}$$

Hay $24^{1917} + 14^{1917}$ chia hết cho 19

$$\text{e) Ta có: } 2^5 \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow (2^5)^{405} \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow 2^{2015} \equiv 1 \pmod{31}$$

$$\Rightarrow 2^{2015} \cdot 2^4 \equiv 1 \cdot 2^4 \pmod{31} \Rightarrow 2^{2019} \equiv 16 \pmod{31} \Rightarrow 2^{2019} + 15 \equiv 16 + 15 \pmod{31} \Rightarrow 2^{2019} + 15 \equiv 0 \pmod{31}$$

hay $2^{2019} + 15$ chia hết cho 31.

$$\text{f) Ta có: } 2019 \equiv 4 \pmod{13} \Rightarrow 2019^{2020} \equiv 4^{2020} \pmod{13}$$

$$\text{Có: } 4^3 \equiv -1 \pmod{13}; 2020 = 673 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 2019^{2020} \equiv 4^{2020} \pmod{13} \equiv (4^3)^{679} \cdot 4 \pmod{13} \equiv -4 \pmod{13}$$

$$2019^{2020} - 9 \equiv -4 - 9 \pmod{13} \equiv -13 \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13}$$

Vậy $2019^{2020} - 9$ chia hết cho 13

Bài 2: Chứng minh rằng

$$\text{a) } 11^{10} - 1 \text{ chia hết cho } 100$$

$$\text{b) } 20^{15} - 1 \text{ chia hết cho } 341$$

$$\text{c) } 1991^{1997} - 1997^{1996} \text{ chia hết cho } 10$$

$$\text{d) } 2^9 + 2^{99} \text{ chia hết cho } 100$$

$$\text{e) } 13^{123456789} - 1 \text{ chia hết cho } 183$$

$$\text{f) } 1979^{1979} - 1981^{1981} + 1982 \text{ chia hết cho } 1980$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } 11 \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow 11^{10} \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow (11^{10} - 1) : 4 \quad (1)$$

$$11^2 \equiv 21 \pmod{25} \Rightarrow 11^2 \equiv -4 \pmod{25} \Rightarrow (11^2)^2 \equiv (-4)^2 \pmod{25} \equiv -9 \pmod{25}$$

$$11^4 \cdot 11 \equiv -9 \cdot 11 \pmod{25} \equiv -99 \pmod{25} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow 11^5 \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow (11^5)^2 \equiv 1 \pmod{25}$$

$$\Rightarrow 11^{10} \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow (11^{10} - 1) : 25 \quad (2)$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow 11^{10} - 1$ chia hết cho 25

b) Ta có: $341 = 11 \cdot 31; 20 \equiv -2 \pmod{11} \Rightarrow 20^{15} \equiv (-2)^{15} \pmod{11} \equiv [(-2)^5]^3 \pmod{11}$

$\Rightarrow 20^{15} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 20^{15} - 1$ chia hết cho 11 (1)

Lại có: $20^3 \equiv 2 \pmod{31} \Rightarrow 20^{15} \equiv 2^5 \pmod{31} \equiv 1 \pmod{31} \Rightarrow 20^{15} - 1$ chia hết cho 31 (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow 20^{15} - 1$ chia hết cho 341.

c) Cách 1: Chứng minh hai số có tận cùng giống nhau

Áp dụng với $\forall a, k \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$a \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow a^k \equiv 0 \pmod{10}$$

$$a \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow a^k \equiv 1 \pmod{10}$$

$$a \equiv 5 \pmod{10} \Rightarrow a^k \equiv 5 \pmod{10}$$

$$a \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow a^k \equiv 6 \pmod{10}$$

Áp dụng:

$$1991 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 1991^{1997} \equiv 1 \pmod{10} \quad (1)$$

$$1997 \equiv -3 \pmod{10} \Rightarrow 1997^{1996} \equiv (-3)^{1996} \pmod{10} \Rightarrow 1997^{1996} \equiv [(-3)^4]^{499} \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10} \quad (2)$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow 1991^{1997} - 1997^{1996} \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow 1991^{1997} - 1997^{1996}$ chia hết cho 10.

Cách 2: Chứng minh chia hết cho 2 và 5

Ta có: $1991 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow 1991^{1997} \equiv 1 \pmod{2} \quad (1)$

$$1997 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow 1997^{1996} \equiv 1 \pmod{2} \quad (2)$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow 1991^{1997} - 1997^{1996} \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow 1991^{1997} - 1997^{1996}$ chia hết cho 2 (3)

Lại có: $1991 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 1991^{1997} \equiv 1 \pmod{5} \quad (4)$

$$1997 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 1997^{1996} \equiv 2^{1996} \pmod{5} \quad (2) \equiv (2^4)^{499} \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5} \quad (5)$$

Từ (4)(5) $\Rightarrow 1991^{1997} - 1997^{1996}$ chia hết cho 5 (6)

Lại có $(2, 5) = 1 \Rightarrow 1991^{1997} - 1997^{1996}$ chia hết cho 10.

d) Ta có: $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25} \Rightarrow (2^{10})^9 \equiv -1 \pmod{25} \Rightarrow 2^{90} + 1 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow (2^{90} + 1) : 25 \text{ (1)}$
 mặt khác $2^9 : 4 \text{ (2)}$

Từ (1)(2) $\Rightarrow (2^9 + 2^{99}) : 100$

e) Ta có: $13 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 13^{123456789} \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow (13^{123456789} - 1) : 3 \text{ (1)}$

Lại có: $13^3 \equiv 1 \pmod{61} \Rightarrow (13^3)^{41152263} \equiv 1 \pmod{61} \Rightarrow (13^{123456789} - 1) : 61 \text{ (2)}$

Mà $(3, 61) = 1 \Rightarrow (13^{123456789} - 1) : 183$.

f) Ta có: $1979 \equiv -1 \pmod{1980} \Rightarrow 1979^{1979} \equiv -1 \pmod{1980} \text{ (1)}$

$1981 \equiv 1 \pmod{1980} \Rightarrow 1981^{1981} \equiv 1 \pmod{1980} \text{ (2)}; 1982 \equiv 2 \pmod{1980} \text{ (3)}$

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow 1979^{1979} - 1981^{1981} + 1982 \equiv -1 - 1 + 2 \pmod{1982} \equiv 0 \pmod{1980}$

Vậy $1979^{1979} - 1981^{1981} + 1982$ chia hết cho 1980.

Bài 3: Chứng minh rằng

a) $2^{2002} - 4$ chia hết cho 31

b) $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7

c) $2014^{200} - 256$ chia hết cho 2016

Lời giải

a) Ta có: $2^5 \equiv 1 \pmod{31}; 2002 = 5 \cdot 400 + 2 \Rightarrow 2^{2002} = (2^5)^{400} \cdot 2^2; 2^5 \equiv 1 \pmod{31}$

$\Rightarrow (2^5)^{400} \equiv 1^{400} \pmod{31}$

$\Rightarrow (2^5)^{400} \cdot 2^2 \equiv 1 \cdot 2^2 \pmod{31} \Rightarrow 2^{2002} \equiv 4 \pmod{31} \Rightarrow 2^{2002} - 4$ chia hết cho 31

b) Ta có: $2222 \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 2222^5 \equiv 3^5 \pmod{7} \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow 2222^{5555} \equiv 5^{1111} \pmod{7} \text{ (1)}$

Lại có: $5555 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 5555^2 \equiv 4^2 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 5555^{2222} \equiv 5^{1111} \pmod{7} \text{ (2)}$

Từ (1)(2) $\Rightarrow 2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 5^{1111} + 2^{1111} \pmod{7} \text{ (3)}$

Mặt khác: $5 \equiv -2 \pmod{7} \Rightarrow 5^{1111} \equiv (-2)^{1111} \equiv -2^{1111} \pmod{7} \Rightarrow 5^{1111} + 2^{1111} \equiv 0 \pmod{7} \text{ (4)}$

Từ (3)(4) $\Rightarrow 2222^{5555} + 5555^{2222} : 7$

c) Ta có:

$2014^3 \equiv 2008 \pmod{2016}; 2014^2 \equiv 4 \pmod{2016} \rightarrow 2014^5 \equiv 2014^3 \cdot 2014^2 \equiv 2008 \cdot 4 \equiv 1984 \pmod{2016}$

$$c) 555 \equiv 2(\text{mod } 7) \Rightarrow 555^{222} \equiv 2^{222}(\text{mod } 7); 2^3 \equiv 1(\text{mod } 7) \Rightarrow (2^3)^{74} \equiv 1(\text{mod } 7) \Rightarrow 555^{222} \equiv 1(\text{mod } 7)$$

$$222 \equiv -2(\text{mod } 7) \Rightarrow 222^{555} \equiv (-2)^{555}(\text{mod } 7)$$

$$\text{Có: } (-2)^3 \equiv -1(\text{mod } 7) \Rightarrow [(-2)^3]^{185} \equiv -1(\text{mod } 7) \Rightarrow 222^{555} \equiv (-1)(\text{mod } 7)$$

$$\Rightarrow A \equiv 1 - 1(\text{mod } 7) \equiv 0(\text{mod } 7)$$

$$d) \text{ Ta có: } 1234^{30} \equiv 778(\text{mod } 2014) \Rightarrow 1234^9 \equiv 778^3 \equiv 1500(\text{mod } 2014)$$

$$\Rightarrow 1234^7 \equiv 1500^3 \equiv 1234(\text{mod } 2014) \Rightarrow 1234^3 \cdot 1234^{27} \equiv 778 \cdot 1234(\text{mod } 2014)$$

$$\Rightarrow 1234^{30} \equiv 1234 \cdot 1234 \cdot 778 \equiv 1388(\text{mod } 2014) \Rightarrow (1234^{30} - 1388) : 2014$$

Bài 7: Sử dụng định lý Fermat nhỏ

Chứng minh rằng: $A = 10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \dots + 10^{10^{10}} - 5 : 7$

Lời giải

Vì 7 là số nguyên tố nên $(7, 10) = 1$ nên theo định lý Fermat nhỏ ta có:

$$10^6 \equiv 1(\text{mod } 7) \Rightarrow 10^{6k} \equiv 1^k \equiv 1(\text{mod } 7)$$

$$\text{Với mọi số tự nhiên } n \text{ khác } 0 \text{ thì: } 10^n + 2 = \underbrace{1000 \dots 02}_{n-1} : 2, 3 \Rightarrow (10^n + 2) : 6 \Rightarrow 10^n \equiv 4(\text{mod } 6)$$

$$\text{Đặt } 10^n = 6k + 4 (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 10^{10^n} = 10^{6k+4} = 10^{6k} \cdot 10^4 \equiv 1 \cdot 1^4 (\text{mod } 7) \equiv 10^4 (\text{mod } 7) \Rightarrow 10^{10} \equiv 10^4 (\text{mod } 7)$$

$$10^{10^2} \equiv 10^4 (\text{mod } 7); 10^{10^3} \equiv 10^4 (\text{mod } 7); \dots; 10^{10^{10}} \equiv 10^4 (\text{mod } 7) \Rightarrow A \equiv 10 \cdot 10^4 - 5 \equiv 0(\text{mod } 7) \Rightarrow A : 7$$

Bài 8: Sử dụng định lý Fermat nhỏ

Chứng minh rằng: $A = 1^{1331} + 2^{1331} + 3^{1331} + \dots + 1331^{1331} : 11$

Lời giải

Vì 11 là số nguyên tố nên theo định lý Fermat nhỏ ta có: $a^{11} \equiv 11(\text{mod } 11), \forall a \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow a^{121} = (a^{11})^{11} \equiv a^{11} \equiv a(\text{mod } 11) \Rightarrow a^{1331} = (a^{121})^{11} \equiv a^{11}(\text{mod } 11) \equiv a(\text{mod } 11)$$

Áp dụng kết quả trên ta được:

$$1^{1331} + 2^{1331} + \dots + 1331^{1331} \equiv 1 + 2 + \dots + 1331 \equiv 886446 \equiv 0(\text{mod } 11) \Rightarrow A : 11$$

Bài 9:

Chứng minh rằng: $A = (22^{22^{22}} - 22) : 3234$

Lời giải

Ta có: $3234 = 3.22.7^2$

+) Có : $A \equiv 0 \pmod{22}$

+) $22 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 22^{22} \equiv 1 \pmod{3}$

+) $22 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 22^{22} \equiv 1^{22} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 22^{22} = 7k + 1$

$$A = 22^{7k+1} - 22 = 22(22^{7k} - 1) = 22[(22^k)^7 - 1] = 22.(22^k - 1)[(22^k)^6 + (22^k)^5 + \dots + 22^k + 1]$$

+) $22 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 22^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{7}$

$$\text{Đặt } B = (22^k)^6 + (22^k)^5 + \dots + 22^k + 1 \Rightarrow B \equiv \underbrace{1 + \dots + 1}_{7 \text{ chu. so. } 1} \equiv 7 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow A \equiv 0 \pmod{49}$$

Vậy $A \equiv 0 \pmod{3.22.49} \Rightarrow \text{đpcm.}$

Bài 10:

Chứng minh rằng $A = 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19 với mọi số tự nhiên n

Lời giải

Ta có: $A = 7.5^{2n} + 12.6^n = 7.25^n + 12.6^n$

Lại có: $25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow 25^n \equiv 6^n \pmod{19} \Rightarrow 7.25^n \equiv 7.6^n \pmod{19}$

$$\Rightarrow 7.25^n + 12.6^n \equiv 7.6^n + 12.6^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 7.25^n + 12.6^n \equiv 19.6^n \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow A = 7.5^{2n} + 12.6^n : 19, \forall n \in \mathbb{N}$$

Bài 11:

Chứng minh rằng $A = 4^{2n+1} + 3^{n+2} : 13, \forall n \in \mathbb{N}$

Lời giải

Ta có: $4^2 \equiv 3 \pmod{13} \Rightarrow (4^2)^n \equiv 3^n \pmod{13} \Rightarrow 4.(4^2)^n \equiv 4.3^n \pmod{13} \Rightarrow 4^{2n+1} \equiv 4.3^n \pmod{13}$ (1)

Lại có: $3^2 \equiv -4 \pmod{13} \Rightarrow 3^n.3^2 \equiv -4.3^n \pmod{13} \Rightarrow 3^{n+2} \equiv -4.3^n \pmod{13}$ (2)

$$\Rightarrow 4^{2n+1} + 3^{n+2} \equiv 4.3^n - 4.3^n = 0 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow A = 4^{2n+1} + 3^{n+2} : 13, \forall n \in \mathbb{N}$$

Bài 12:

Chứng minh rằng: $a^5 \equiv a \pmod{30} \forall a \in \mathbb{Z}$

Lời giải

Ta có: $30 = 2.3.5 - 6.5; a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = \underbrace{a(a-1)(a+1)(a^2+1)}_{:6}$

Ta cần chứng minh : $a^5 \equiv a \pmod{5}$

+) Nếu $a \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow a^5 \equiv 0 \equiv a \pmod{5}$

+) Nếu $a \equiv \pm 1 \pmod{5} \Rightarrow a^5 \equiv (\pm 1)^5 \equiv a \pmod{5}$

+) Nếu $a \equiv \pm 2 \pmod{5} \Rightarrow a^5 \equiv (\pm 2)^5 \equiv \pm 32 \equiv \pm 2 \equiv a \pmod{5}$

Vậy $a^5 \equiv a \pmod{5} \Rightarrow a^p \equiv a \pmod{p}$

Bài 13:

Chứng minh rằng: $A = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n : 5 \Leftrightarrow n \not\equiv 4 \pmod{5} (n \in \mathbb{N}^*)$

Lời giải

+) $n = 4k \Rightarrow A \equiv 1 + 16^k + 81^k + (-1)^{4k}$

+) $n = 4k + 1 \Rightarrow A \equiv 1 + 16^k \cdot 2 + 81^k \cdot 3 + (-1)^{4k} \cdot 4 \equiv 1 + 2 + 3 + 4 \equiv 10 \equiv 0 \pmod{5}$

+) $n = 4k + 2 \Rightarrow A \equiv 1 + 16^k \cdot 2^2 + 81^k \cdot 3^2 + (-1)^{4k} \cdot 4^2 \equiv 1 + 4 + 9 + 16 \equiv 30 \equiv 0 \pmod{5}$

+) $n = 4k + 3 \Rightarrow A \equiv 1 + 16^k \cdot 2^3 + 81^k \cdot 3^3 + (-1)^{4k} \cdot 4^3 \equiv 1^3 + 4^3 + 2^2 + 3^2 \equiv 0 \pmod{5}$

Vậy A luôn chia hết cho 5 khi n không chia hết cho 4

Bài 14:

Chứng minh rằng: $A = (2^{5n+3} + 3^{n+2} \cdot 5^n) : 17, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải

Ta có: $A = 32^n \cdot 8 + 9 \cdot 3^n \cdot 5^n \equiv 15^n \cdot 8 + 9 \cdot 15^n \equiv 17 \cdot 5^n \equiv 0 \pmod{17}$

Bài 15:

Chứng minh rằng: $A = n^n - n^2 + n - 1 : B = (n-1)^2, \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$

Lời giải

Ta có: $A = n^n - n^2 + n - 1 = n^2(n^{n-2} - 1) + (n-1)$

+) Với $n = 2$ luôn đúng

+) Xét với $n > 2$

$$A = n^2(n-1)(n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n + 1) + (n-1)$$

$$A = (n-1) \underbrace{\left[n^2(n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n + 1) + 1 \right]}_C$$

$$n \equiv 1 \pmod{n-1} \rightarrow n^k \equiv 1^k \pmod{n-1}, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Ta có nhận xét sau : } \Rightarrow n^2 \cdot \underbrace{(n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n + 1)}_{C-1} \equiv 1 \cdot (1 + \dots + 1) \pmod{n-1} \equiv n-2 \pmod{n-1}$$

$$\Rightarrow C \equiv n-1 \pmod{n-1} \Rightarrow C \equiv (n-1) \Rightarrow A \equiv (n-1)^2, \forall n \geq 2$$

Bài 16: Dùng định lý Fermat

Chứng minh rằng:

a) $2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7

b) $1890^{79} + 1945^{2015} + 2017^{2018}$ chia hết cho 7

c) $1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2$ chia hết cho 7

Lời giải

a) **Cách 1:**

$$\text{Ta có: } 2222 \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 2222^{5555} \equiv 3^{5555} \pmod{7}$$

$$\text{Áp dụng định lý Fermat ta có: } 3^{7-1} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 3^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$5555 = 6 \cdot 925 + 5 \Rightarrow 3^{5555} = (3^6)^{925} \cdot 3^5 \equiv 3^5 \pmod{7} \equiv 5 \pmod{7} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } 5555 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 5555^{2222} \equiv 4^{2222} \pmod{7}$$

$$\text{Áp dụng định lý Fermat ta có: } 4^{7-1} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 4^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$2222 = 6 \cdot 370 + 2 \Rightarrow 4^{6 \cdot 370} \cdot 4^2 = (4^6)^{370} \cdot 4^2 \equiv 4^2 \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow 2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 5 + 2 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow 2222^{5555} + 5555^{2222} \text{ chia hết cho 7.}$$

Cách 2: Ta có $2222 \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 2222^4 \equiv 3^4 \pmod{7} \Leftrightarrow 2222^4 \equiv 81 \equiv 4 \pmod{7}$

$$\text{Như vậy ta được } 2222^5 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow 2222^{5555} \equiv 5^{1111} \pmod{7}$$

$$\text{Tương tự ta có: } 5555^{2222} \equiv 2^{1111} \pmod{7}$$

$$\text{Từ đó ta được } A \equiv 5^{1111} + 2^{1111} \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}$$

Vậy A chia hết cho 7

b) Ta có: $1890^{79} : 7 \Rightarrow 1890^{79} \equiv 0 \pmod{7}$ (1)

$$1945 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 1945^{2015} \equiv 6^{2015} \pmod{7} \equiv (-1)^{2015} \pmod{7} \equiv -1 \pmod{7} \quad (2)$$

$$2017 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2017^{2018} \equiv 1 \pmod{7} \quad (3)$$

Cộng (1)(2)(3) theo vế ta được:

$$1890^{79} + 1945^{2015} + 2017^{2018} \equiv 0 + 1 - 1 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow (1890^{79} + 1945^{2015} + 2017^{2018}) : 7$$

c) Ta có: $1961 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 1961^{1962} \equiv 1 \pmod{7}$ (1)

$$1963 \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 1963^{1964} \equiv 3^{1964} \pmod{7} \equiv (3^3)^{654} \cdot 3^2 \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7} \quad (2)$$

$$1965 \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow 1965^{1966} \equiv 5^{1966} \pmod{7} \equiv (5^3)^{655} \cdot 5 \pmod{7} \equiv -5 \pmod{7} \quad (3)$$

Cộng (1)(2)(3) theo vế ta được:

$$1 + 2 + (-5) \pmod{7} \equiv -2 \pmod{7} \Rightarrow 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2 \text{ chia hết cho } 7.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Chứng minh rằng

- a) $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ chia hết cho 23
b) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133
c) $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1}$ chia hết cho 59
d) $5^{2n+1}.2^{n+2} + 3^{n+2}.2^{2n+1}$ chia hết cho 38
e) $13^{n+2} + 14^{2n+1}$ chia hết cho 183
f) $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$ chia hết cho 5
g) $7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19

Lời giải

a) Ta có: $5^{2n+1} = 5^{2n}.5 = 25^n.5 \equiv 2^n.5 \pmod{23}$ (1)

$$2^{n+4} = 2^n.2^4 = 2^n.16 \equiv 2^n.16 \pmod{23} \text{ (2); } 2^{n+1} = 2^n.2 \equiv 2^n.2 \pmod{23} \text{ (3)}$$

Cộng (1)(2)(3) theo vế ta được:

$$\equiv 5.2^n + 16.2^n + 2.2^n \pmod{23} \equiv (5+16+2).2^n \pmod{23} \equiv 0 \pmod{23}$$

$\Rightarrow 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ chia hết cho 23.

b) Ta có: $11^{n+2} = 11^n.121 \equiv -12.11^n \pmod{133}$ (1); $12^{2n+1} = 144^n.12 \equiv 11^n.12 \pmod{133}$ (2)

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow 11^{n+2} + 12^{2n+1} \equiv -12.11^n + 12.11^n \pmod{133} \equiv 0 \pmod{133}$$

Vậy $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133.

c) Ta có: $5^{n+2} = 5^n.25 \equiv 25.5^n \pmod{59}$ (1); $26.5^n \equiv 26.5^n \pmod{59}$ (2)

$$8^{2n+1} = 8^{2n}.8 = 64^n.8 \equiv 5^n.8 \pmod{59} \text{ (3)}$$

$$\text{Từ (1)(2)(3)} \Rightarrow 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \equiv 25.5^n + 26.5^n + 8.5^n \pmod{59} \equiv 0 \pmod{59}$$

d) Ta có: $5^{2n+1}.2^{n+2} = 25^n.5.2^n.4 = 20.50^n \equiv 20.12^n \pmod{38}$ (1)

$$3^{n+2}.2^{2n+1} = 3^n.9.4^n.2 = 18.12^n \equiv 18.12^n \pmod{38} \text{ (2)}$$

$$\Rightarrow 5^{2n+1}.2^{n+2} + 3^{n+2}.2^{2n+1} \equiv 38.12^n \pmod{38} \equiv 0 \pmod{38}$$

Vậy $5^{2n+1}.2^{n+2} + 3^{n+2}.2^{2n+1}$ chia hết cho 38.

e) Ta có: $13^{n+2} = 13^n.13^2 = 169.13^n \equiv 169.13^n \pmod{183}$ (1)

$$14^{2n+1} = (14^2)^n.14 = 196^n.14 \equiv 14.13^n \pmod{183} \text{ (2)}$$

$$\text{Cộng (1)(2) theo vế ta được: } 13^{n+2} + 14^{2n+1} \equiv 183.13^n \pmod{183} \equiv 0 \pmod{183} \Rightarrow 13^{n+2} + 14^{2n+1}$$

Chia hết cho 183.

f) Ta có: $2^{2n+1} \equiv -3^{2n+1} \pmod{5} \Rightarrow 2^{2n+1} + 3^{2n+1} \equiv -3^{2n+1} + 3^{2n+1} \pmod{5} \equiv 0 \pmod{5}$

g) Ta có: $7.5^{2n} = 7.25^n \equiv 7.6^n \pmod{19} \Rightarrow 7.5^{2n} + 12.6^n \equiv 7.6^n + 12.6^n \pmod{19}$

$\Rightarrow 7.5^{2n} + 12.6^n \equiv 19.6^n \pmod{19} \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow 7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19.

Bài 2:

Chứng minh rằng $1924^{2003^{2004^n}} + 1920$ chia hết cho 124 với mọi n là số nguyên dương

Lời giải

Đặt $1924^{2003^{2004^n}} + 1920 = A$. Khi đó chúng ta cần chứng minh được A chia hết cho 4

Ta có $1924 \equiv 2 \pmod{31} \Rightarrow A \equiv 2^{2003^{2004^n}} - 2 \pmod{31}$

Mặt khác ta có $2004^n : 4 \Rightarrow 2004^n = 4k$ và $2003^{2004^n} = 2003^{4k}$ với k là số nguyên dương.

Vì $2003 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 2003^{4k} \equiv 3^{4k} \equiv 81^k \equiv 1 \pmod{5}$

Do đó $2003^{2004^n} \equiv 1 \pmod{5}$ hay $2003^{2004^n} = 5m + 1$ với m là số nguyên dương

Như vậy ta có $2^{2003^{2004^n}} = 2^{5m+1} = 2 \cdot (2^5)^m \equiv 2 \pmod{31}$

Điều này có nghĩa $A \equiv 0 \pmod{31}$

Mà ta có $(4, 31) = 1 \Rightarrow A$ chia hết cho 124 với mọi số nguyên dương n .

DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 9 VÀ THI CHUYÊN

Bài 1:

Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng số $A = 2^n + 6^n + 8^n + 9^n$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 4

Lời giải

Để thấy với mọi số nguyên dương n ta có $A \equiv (2^n + 1^n + 3^n + 4^n) \pmod{5}$

Vì thế A chia hết cho 5 khi và chỉ khi $1 + 2^n + 3^n + 4^n$ chia hết cho 5

Với mọi số nguyên dương n ta luôn có biểu diễn $n = 4t + r$ với t là một số tự nhiên và

$r \in \{0; 1; 2; 3\}$. Từ đó ta có: $1 + 2^n + 3^n + 4^n = 1 + 2^{4t+r} + 3^{4t+r} + 4^{4t+r} = 1 + 16^t \cdot 2^r + 81^t \cdot 3^r + 256^t \cdot 4^r$

Để ý rằng $16 \equiv 1 \pmod{5}; 81 \equiv 1 \pmod{5}; 256 \equiv 1 \pmod{5}$

Do đó từ hệ thức trên ta được: $1 + 2^n + 3^n + 4^n \equiv (1^r + 2^r + 3^r + 4^r) \pmod{5}$

+) Nếu $r = 0 \Rightarrow 1^r + 2^r + 3^r + 4^r \equiv 4 \pmod{5}$

+) Nếu $r = 1 \Rightarrow 1^r + 2^r + 3^r + 4^r \equiv 10 \pmod{5}$

+) Nếu $r = 2 \Rightarrow 1^r + 2^r + 3^r + 4^r \equiv 30 \pmod{5}$

+) Nếu $r = 3 \Rightarrow 1^r + 2^r + 3^r + 4^r \equiv 100 \pmod{5}$

Như vậy A chia hết cho 5 khi và chỉ khi $r \in \{1; 2; 3\}$, điều này đồng nghĩa với việc n không chia hết cho 4.

Bài 2:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n > 1$ thì $A = n^n - n^2 + n - 1$ luôn chia hết cho đa thức $B = (n-1)^2$

Lời giải

Nhận thấy với $n = 2$ thì ta có $A = 1$ và $B = 1$ nên A luôn chia hết cho B

Với $n > 2$ thì ta có

$$\begin{aligned} A &= n^n - n^2 + n - 1 = n^2(n^{n-2} + 1) + (n-1) = n^2(n-1)(n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n + 1) + (n-1) \\ &= (n-1)(n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + 1) \end{aligned}$$

Ta có $n \equiv 1 \pmod{n-1} \Rightarrow n^k \equiv 1 \pmod{n-1}$

Như vậy ta có $n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 \equiv n - 2 \pmod{n-1} \Rightarrow n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + 1 \equiv n - 1 \equiv 0 \pmod{n-1}$

Điều này dẫn đến $(n-1)(n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n + 1) \equiv 0 \pmod{(n-1)^2}$

Hay ta được A luôn chia hết cho B

Dạng 1: Tìm số dư của phép chia

Cách giải: Giả sử tìm số dư của A cho m ta làm như sau:

Bước 1: Tìm số x sao cho $0 \leq x < m$ để $A \equiv x \pmod{m}$ (x là số dư của A chia cho m)

Bước 2: Kết luận

Bài 1: Tìm số dư

a) 92^{94} cho 15

b) 1944^{2005} cho 7

c) $A = 1532^5 - 1$ cho 9

d) $A = 3^{2003}$ cho 13

e) $A = 5^{70} + 7^{50}$ cho 12

f) $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ cho 11 và 13

Lời giải

a) Ta thấy 92 chia cho 15 dư 2

$$\Rightarrow 92 \equiv 2 \pmod{15} \Rightarrow 92^{94} \equiv 2^{94} \pmod{15} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } 2^4 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow (2^4)^{23} \equiv 1^{23} \pmod{15} \Rightarrow (2^4)^{23} \cdot 2^2 \equiv 4 \pmod{15} \Leftrightarrow 2^{94} \equiv 4 \pmod{15} \quad (2)$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow 92^{94}$ chia 15 dư 4.

b) Ta có: $1994 \equiv -2 \pmod{7} \Rightarrow 1994^{2005} \equiv (-2)^{2005} \pmod{7}$

$$\text{Lại có: } (-2)^3 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow (-2^3)^{668} \cdot (-2) \equiv (-2) \pmod{7} \Leftrightarrow (-2)^{2005} \equiv -2 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 1944^{2005} \text{ chia cho 7 dư 5}$$

c) Ta có:

$$1532 \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 \equiv 2^5 \pmod{9}; 2^5 \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow 1532^5 - 1 \equiv 4 \pmod{9}$$

Vậy số dư là : 4

$$\text{d) Ta có: } 3^3 \equiv 1 \pmod{13}; 2003 = 3 \cdot 667 + 2 \Rightarrow 3^{2003} = (3^3)^{667} \cdot 3^2$$

$$3^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (3^3)^{667} \equiv 1^{667} \Rightarrow (3^3)^{667} \cdot 3^2 \equiv 9 \pmod{13} \Rightarrow \text{số dư là } 9$$

$$\text{e) Ta có: } 5^2 \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow (5^2)^{35} \equiv 1 \pmod{12} \Leftrightarrow 5^{70} \equiv 1 \pmod{12} \quad (1)$$

$$7^2 \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow (7^2)^{25} \equiv 1^{25} \pmod{12} \Leftrightarrow 7^{50} \equiv 1 \pmod{12} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)(2)} \Rightarrow A = 5^{70} + 7^{50} \text{ chia cho 12 dư 2}$$

$$\text{f) Ta có: } 3^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (3^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}; 4^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (4^5)^{401} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow A = 3^{2005} + 4^{2005} \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow \text{số dư là } 2$$

$$\begin{aligned}
 +) 3^3 &\equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (3^3)^{668} \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 \pmod{13} \Rightarrow 3^{2005} \equiv 3 \pmod{13}; 4^3 \equiv -1 \pmod{13} \\
 &\Rightarrow (4^3)^{668} \cdot 4 \equiv 1 \cdot 4 \pmod{13} \Rightarrow 4^{2005} \equiv 4 \pmod{13} \Rightarrow A = 3^{2005} + 4^{2005} \equiv 7 \pmod{13} \Rightarrow \text{số dư là } 7
 \end{aligned}$$

Bài 2:

Tìm số dư $A = 776^{776} + 777^{777} + 778^{778}$ **chia cho 3 và 5**

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } 776 &\equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 776^{776} \equiv (-1)^{776} \pmod{3} \Rightarrow 776^{776} \equiv 1 \pmod{3} \\
 777 &\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 777^{777} \equiv 0 \pmod{3}; 778 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 778^{778} \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow A \text{ chia 3 dư } 2 \\
 +) \text{ Lại có: } 776 &\equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 776^{776} \equiv 1 \pmod{5}; 777 \equiv -3 \pmod{5} \Rightarrow 777^{777} \equiv (-3)^{777} \pmod{5} \\
 778^{778} &\equiv 3^{778} \pmod{5} \Rightarrow A \equiv 1 - 3^{777} + 3^{778} \pmod{5} \Rightarrow A \equiv 1 + 3 \cdot 3^{777} - 3^{777} \pmod{5} \equiv 1 + 3^{777} (3 - 1) \pmod{5} \\
 &\equiv 1 + 2 \cdot 3^{777} \pmod{5}; 3^2 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow (3^2)^{338} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow A \equiv 1 + 2 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{5} \\
 \text{Vậy } A &\text{ chia 5 dư } 2
 \end{aligned}$$

Bài 3:

Tìm số dư trong phép chia $A = (1997^{1998} + 1998^{1999} + 1999^{2000})^{10}$ **cho 111**

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } 1998 &\equiv 0 \pmod{111}; 1997 \equiv -1 \pmod{111} \rightarrow 1997^{1998} \equiv 1 \pmod{111}; 1999 \equiv 1 \pmod{111} \\
 &\Rightarrow 1999^{2000} \equiv 1 \pmod{111} \Rightarrow A \equiv (1 + 0 + 1)^{10} \equiv 2^{10} \equiv 1024 \equiv 25 \pmod{111} \Rightarrow A \text{ chia 111 dư } 25.
 \end{aligned}$$

Bài 4:

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ **là các số tự nhiên thỏa mãn** : $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} = 5^{100}$. **Tìm số dư khi chia**
 $A = a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_{100}^5$ **cho 30**

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } a^5 &\equiv a \pmod{30}, \forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_{100}^5 = a_1 + a_2 + \dots + a_{100} \equiv 5^{100} \pmod{30} \\
 \text{Có: } 5 &\equiv -1 \pmod{6} \Rightarrow 5^{100} \equiv 1 \pmod{6} \Rightarrow 5^{100} \equiv 25 \pmod{6} \\
 \text{Mặt khác: } 5^{100} &\equiv 25 \pmod{5}; (5, 6) = 1 \Rightarrow 5^{100} \equiv 25 \pmod{30}. \text{ Vậy số dư là } 25
 \end{aligned}$$

Dạng 2: Tìm chữ số tận cùng của một số

Bài 1:

Tìm chữ số tận cùng của:

a) 167^{2010}

b) $14^{14^{14}}$

c) $\left[(4^5)^6 \right]^7$

Lời giải

a) Ta có: $167 \equiv 7 \pmod{10} \Rightarrow 167^{2010} \equiv 7^{2010} \pmod{10}$

Lại có: $7^{2010} \equiv 49^{1005} \equiv (-1)^{1005} \equiv -1 \pmod{10}$

Vậy 7^{2010} có tận cùng là 9

b) Ta có: $14^{14^{14}} \equiv 4^{14 \cdot 14} \pmod{10}; 4^{14^2} \equiv (16)^{14 \cdot 7} \pmod{10} \Rightarrow 4^{14^2} \equiv 6^{98} \pmod{10} \Rightarrow 4^{14 \cdot 14} \equiv 6 \pmod{10}$

Vậy tận cùng là 6

c) $4^{5 \cdot 6 \cdot 7} = 16^{3 \cdot 5 \cdot 7} = 6^{5 \cdot 3 \cdot 7} \pmod{10} \Rightarrow 4^{5 \cdot 6 \cdot 7} \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 4^{5 \cdot 6 \cdot 7}$ có tận cùng là 6.