

ab.Người làm: Nguyễn Thị Dương
Zalo: Nguyễn Dương - Số dt zalo: 0975 697 296
Email: nguyenthiduongc2ttlt@bacninh.edu.vn

CD 6: CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Dạng 1: Chứng minh một số (một tổng) là số chính phương

Câu 1. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$

Chứng minh rằng: $abcd + 2023$ viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4m(m+1) + 1$

Do đó ta có $(2m+1)^2$ là số chính phương lẻ chia 8 luôn dư 1.

Nếu a, b, c, d đều lẻ thì a^2, b^2, c^2, d^2 chia 8 đều dư 1 dẫn đến không xảy ra $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ (vì vế trái chia 8 dư 1, vế phải chia 8 dư 3)

Vậy trong các số a, b, c, d phải có ít nhất một số chẵn nên $abcd$ chẵn $\Rightarrow abcd + 2023$ lẻ.

Đặt $abcd + 2023 = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z}) = (k+1)^2 - k^2$

Cách 2:

$$a^2 - b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow (a-b)(a+b) = c^2 + d^2$$

Giả sử cả bốn số a, b, c, d đều lẻ thì $(a-b), (a+b)$ chẵn $\Rightarrow (a-b)(a+b) : 4$
 $\Rightarrow c^2 + d^2 : 4$,

mà c^2, d^2 là các số chính phương lẻ khi chia cho 4 dư 1 nên $\Rightarrow c^2 + d^2 : 4$ dư 2 (mâu thuẫn).

Điều giả sử sai.

Suy ra ít nhất một trong bốn số có một số chẵn $\Rightarrow abcd$ chẵn $\Rightarrow abcd + 2023$ lẻ.

$$abcd + 2023 = \frac{abcd}{2} + \frac{abcd}{2} + 1011 + 1012 = \left(\frac{abcd}{2} + 1012 \right) + \left(\frac{abcd}{2} + 1011 \right)$$

Ta có:

$$= \left[\left(\frac{abcd}{2} + 1012 \right) + \left(\frac{abcd}{2} + 1011 \right) \right] \cdot 1$$

$$= \left[\left(\frac{abcd}{2} + 1012 \right) + \left(\frac{abcd}{2} + 1011 \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{abcd}{2} + 1012 \right) - \left(\frac{abcd}{2} + 1011 \right) \right]$$

$$= \left(\frac{abcd}{2} + 1012 \right)^2 - \left(\frac{abcd}{2} + 1011 \right)^2$$

mà $abcd$ chẵn nên $abcd : 2$ hay $\frac{abcd}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\frac{abcd}{2} + 1012 \right)^2 ; \left(\frac{abcd}{2} + 1011 \right)^2$ là các số chính phương.

Vậy $abcd + 2023$ viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

Câu 2. (HSG 7 thị xã Nghi Sơn 2022 - 2023)

Cho n là số tự nhiên có hai chữ số, Tìm n biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Lời giải

Nhận xét: Số chính phương không thể tận cùng là 2; 3; 7; 8

Vì $2n$ là số chính phương nên n chẵn $\Rightarrow n$ tận cùng là 0; 2; 4; 6; 8

- Nếu n tận cùng là 4; 8 thì $n+4$ không phải là số chính phương.
- Nếu n tận cùng là 6 thì $2n$ không phải là số chính phương.

Do đó n chỉ có thể tận cùng là 0 hoặc 2 $\Rightarrow n+4$ chỉ có thể tận cùng là 4 hoặc 6.

Vì n là số có hai chữ số nên $14 \leq n+4 < 104$. Mà $n+4$ là số chính phương tận cùng là 4 hoặc 6 nên $n+4 \in \{16; 36; 64\}$

- Nếu $n+4=16 \Rightarrow n=12$ khi đó $2n=24$ (không thỏa mãn)
- Nếu $n+4=36 \Rightarrow n=32$ khi đó $2n=64$ thỏa mãn
- Nếu $n+4=64 \Rightarrow n=60$ khi đó $2n=120$ (không thỏa mãn)

Vậy $n=32$

Câu 3. (HSG 7 Thành phố Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho 5 số dương đôi một khác nhau sao cho mỗi số không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương

Lời giải

Mỗi số trong 5 số có dạng $2^x \cdot 3^y$ trong đó x, y là số tự nhiên khác 0.

$(x; y)$ chỉ có thể $(C; C); (L; L); (C; L); (L; C)$ vì có 5 số 4 dạng nên tồn tại 2 số cùng một dạng nên tích 2 số này là số chính phương.

Dạng 2: Chứng minh một số không là số chính phương

Câu 1. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Với là n số tự nhiên, chứng minh rằng: $n^2 + 2022$ không phải là số chính phương.

Lời giải

Vì n là số tự nhiên nên n^2 là số chính phương thì n^2 có dạng $4k$ hoặc $4k+1$ ($k \in \mathbb{N}$)

Nếu $n^2 = 4k$ thì $n^2 + 2022 = 4k + 2022 = 4(k + 505) + 2$

$\Rightarrow n^2 + 2022$ không phải là số chính phương

Nếu $n^2 = 4k+1$ thì $n^2 + 2022 = 4k+1+2022 = 4k+2023 = 4(k+505) + 3$

$\Rightarrow n^2 + 2022$ không phải là số chính phương

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + 2022$ không phải là số chính phương.

Dạng 3: Tìm số chính phương

Dạng 4: Cho số chính phương

Câu 1. (HSG 7 huyện Lương Tài 2022 - 2023)

Biết $a+1$ và $2a+1$ đồng thời là các số chính phương. Chứng minh rằng $a : 12$.

Lời giải

Ta có $a+1$ và $2a+1$ đồng thời là các số chính phương

Đặt $a+1=m^2$; $2a+1=n^2$ ($m, n \in \mathbb{N}$)

Mà $2a+1$ là số lẻ $\Rightarrow n$ lẻ

$$\Rightarrow 2a = n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$$

Vì n lẻ nên $n+1, n-1$ là hai số chẵn liên tiếp

$$(n-1)(n+1):8 \Rightarrow 2a:8 \Rightarrow a:4 \quad (1)$$

Mặt khác $a+1+2a+1=3a+2=n^2+m^2$ là số chia cho 3 dư 2

Do vậy cả 2 số n^2 và m^2 chia cho 3 dư 1

$$\text{Khi đó } m^2 - n^2 = 2a+1 - a-1 = a:3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a:12$

Vậy $a:12$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$.

Lời giải

Do $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$ nên suy ra $(a+b)^3$ là số chính phương $\Rightarrow (a+b)$ cũng là số chính phương $(a+b)=k^2$ (với $k \in \mathbb{N}$) nên $\overline{ab}^2 = k^6 \Rightarrow \overline{ab} = k^3$ mà $10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow 10 \leq k^3 \leq 99$

Từ đó suy ra $k \in \{3; 4\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{27; 64\}$.

Thử lại:

+ $\overline{ab} = 27$ nên $a=2, b=7$ thỏa mãn $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$.

+ $\overline{ab} = 64$ nên $a=6, b=4$ không thỏa mãn $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$.

Vậy $\overline{ab} = 27$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>