TRƯỜNG THPT ANH SƠN 2

ĐỀ THI THỬ HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 12
NĂM HỌC 2022 – 2023 (LẦN 1)

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Môn thi: TOÁN – Bảng A
(Hướng dẫn chấm này gồm có 06 trang)

Câu	ĐÁP ÁN THAM KHẢO	Điểm
1a) (3.5)	Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(x^3-6x^2\right)\left(x^2-4\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f\left(x^2-3x+2\right)$ có tối đa mấy điểm cực trị?	
	Ta có $f'(x)=\left(x^3-6x^2\right)\left(x^2-4\right)=0$.	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \\ x=6 \end{array}\right.$ (Trong đó $x=0$ là nghiệm kép)	0,5
	Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x+2\right)$. Ta có $g'(x)=(2x-3)f'\left(x^2-3x+2\right)$.	0,5
	$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ f'\left(x^2-3x+2\right)=0 \end{array}\right.$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x^2-3x+2=0 \\ x^2-3x+2=6 \\ x^2-3x+2=\pm 2 \end{array}\right.$	0,75
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=1; x=2 \\ x=-1; x=4 \\ x=0; x=3 \end{array}\right.$ (Trong đó $x=1; x=2$ là nghiệm kép)	0,5
	Lập BBT ta thấy dấu $g'(x)$ đổi qua 5 nghiệm đơn, không đổi dấu qua hai nghiệm kép $x=1; x=2$. Vậy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.	0,5
1b) (3.5)	***Giải hệ phương trình*** $\begin{cases} x^4+4y^3+(x^4-1)y+4y^2=1 \\ 8y^3+4\sqrt{x^2+1}=x^2+6y+2 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$	
	Xét hệ $\begin{cases} x^4+4y^3+(x^4-1)y+4y^2=1 \quad (1) \\ 8y^3+4\sqrt{x^2+1}=x^2+6y+2 \quad (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$ Từ (1) ta có $x^4(y+1)+4y^2(y+1)-(y+1)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow (y+1)(x^4+4y^2-1)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ x^4+4y^2=1 \end{array}\right.$	0,5
	Với $y=-1$ thay vào (2) ta có $4\sqrt{x^2+1}=x^2+4$	0,25

$\Leftrightarrow x^2(x^2-8)=0$ 0,25

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2\sqrt{2} \\ x=-2\sqrt{2} \end{array}\right.$. Trường hợp này hệ có ba nghiệm: $(0;-1),\left(2\sqrt{2};-1\right),\left(-2\sqrt{2};-1\right)$ 0,25

Với $x^4+4y^2=1$, ta có: $\begin{cases} 0\le x^2\le 1 \\ -1\le 2y\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ -\frac{1}{2}\le y\le \frac{1}{2} \end{cases}$ 0,25

Từ (2) ta có $4\sqrt{x^2+1}-x^2+8y^3-6y-2=0$ (3)

Xét hàm số $f(x)=4\sqrt{x^2+1}-x^2, \forall x\in[-1;1]$ có: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ và 0,25

$f(0)=4;\ f(-1)=f(1)=4\sqrt{2}-1$.

Do đó $4\le f(x)\le 4\sqrt{2}-1$ (*) 0,25

Tương tự, xét hàm số $f(y)=8y^3-6y-2, \forall y\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ ta được $-4\le f(y)\le 0$ (**), trong đó 0, 5

$f(-\frac{1}{2})=0,\ f(\frac{1}{2})=-4$

Vậy từ (*) và (**) suy ra $f(x)+f(y)\ge 0$. 0,25

Do vậy: (3) $\Leftrightarrow f(x)+f(y)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$. Thử lại thấy thỏa mãn hệ phương trình.

Trường hợp này hệ có một nghiệm $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. 0,25

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $(0;-1),\left(2\sqrt{2};-1\right),\left(-2\sqrt{2};-1\right)$ và $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

2a) (2.0)

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của hàm số $y=f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-5		10		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x)=f\left(m^2+2x-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$?

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=-2(x-1)f'\left(m^2+2x-x^2\right)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'\left(m^2+2x-x^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ m^2+2x-x^2=-5 \\ m^2+2x-x^2=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (x-1)^2=m^2+6 \\ (x-1)^2=m^2-9 \end{array}\right.$. 0,25

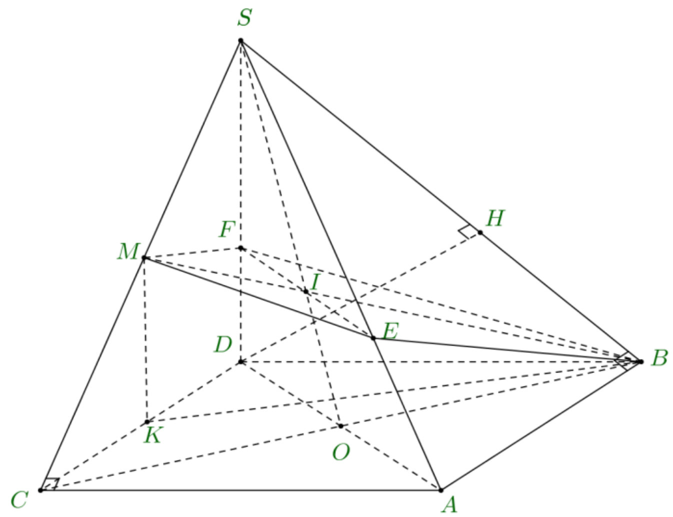
- Trường hợp 1: $|m|\ge 4$.

Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{m^2+6} \\ x=1\pm\sqrt{m^2-9} \end{array}\right.$. 0,25

	Đặt $x_1=1-\sqrt{m^2+6}$, $x_2=1-\sqrt{m^2-9}$, $x_3=1+\sqrt{m^2-9}$, $x_4=1+\sqrt{m^2+6}$.	
	Bảng xét dấu của $g'(x)$ x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … 1 … x_3 … x_4 … $+\infty$ $g'(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$ 0 $-$	0,25
	Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$ khi và chỉ khi $x_3\le 2<3\le x_4$ Hay $1+\sqrt{m^2-9}\le 2<3\le 1+\sqrt{m^2+6}\Leftrightarrow -2\le m^2\le 10$. Kết hợp với điều kiện $\|m\|\ge 4; m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25
	• Trường hợp 2: $\|m\|\le 3$. Ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1\pm\sqrt{m^2+6}\end{array}\right.$, với $x=1$ là nghiệm đơn hoặc nghiệm bội 3.	0,25
	Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ x: $-\infty$ … x_1 … 1 … x_4 … $+\infty$ $g'(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$ 0 $-$	0,25
	Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$ khi và chỉ khi $3\le x_4$ Hay $3\le 1+\sqrt{m^2+6}\Leftrightarrow m^2\ge -2$.	0,25
	Kết hợp với điều kiện $\|m\|\le 3; m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$. • Vậy có 7 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25
2b) (2.0)	Người ta dùng 18 cuốn sách bao gồm 7 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Lý và 5 cuốn sách Hóa (các cuốn sách cùng loại thì giống nhau) để làm phần thưởng cho 9 học sinh A,B,C,D,E,F,G,H,I, mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách khác thể loại (không tính thứ tự các cuốn sách). Tính xác suất để hai học sinh A và B nhận được phần thưởng giống nhau.	
	Gọi $x,y,z\ (x,y,z\in\mathbb{N})$ lần lượt là số học sinh được nhận các bộ giải thưởng (Toán-Lý); (Toán-Hóa) và (Lý-Hóa).	0,25
	Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=7\\ x+z=6\\ y+z=5\end{cases}$.	0,25
	$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=3\\ z=2\end{cases}$	0,25
	Số cách phát thưởng ngẫu nhiên cho 9 học sinh là: $C_9^4.C_5^3.C_2^2=1260$. Gọi T là biến cố "Hai học sinh A và B có phần thưởng giống nhau".	0,25
	Nếu A và B có phần thưởng là sách (Toán- Lý) thì có $C_7^2.C_5^3.C_2^2=210$ cách phát.	0,25
	Nếu A và B có phần thưởng là sách (Toán- Hóa) thì có $C_7^1.C_6^4.C_2^2=105$ cách phát.	0,25
	Nếu A và B có phần thưởng là sách (Lý- Hóa) thì có $C_7^4.C_3^3=35$ cách phát.	0,25

	Vậy xác suất cần tìm là: $P(T)=\dfrac{210+105+35}{1260}=\dfrac{5}{18}$.	0,25
3 (1.5)	Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $4\left(a^3+b^3\right)+c^3=2(a+b+c)(ac+bc-2)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2a^2}{3a^2+b^2+2a(c+2)}+\dfrac{b+c}{a+b+c+2}-\dfrac{(a+b)^2+c^2}{16}$	
	Do $a,b,c>0$ và $4\left(a^3+b^3\right)+c^3=2(a+b+c)(ac+bc-2)$ $\Rightarrow ac+bc-2>0$ +) Ta có: $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)\geq(a+b)^3-3\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2(a+b)=\dfrac{1}{4}(a+b)^3$ $\Rightarrow 4\left(a^3+b^3\right)\geq(a+b)^3$ $\Rightarrow 4\left(a^3+b^3\right)+c^3\geq(a+b)^3+c^3=(a+b+c)\left[(a+b)^2+c^2-(a+b)c\right]$ $\Leftrightarrow 2(a+b+c)(ac+bc-2)\geq(a+b+c)\left[(a+b)^2+c^2-(a+b)c\right]$ $\Leftrightarrow 2(a+b)c-4\geq(a+b)^2+c^2-(a+b)c$ $\Leftrightarrow 3(a+b)c\geq(a+b)^2+c^2+4$	0,5
	+) Lại có: $3(a+b)c\leq3\left(\dfrac{(a+b)+c}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}(a+b+c)^2$ và $(a+b)^2+c^2+4\geq\dfrac{1}{2}(a+b+c)^2+4$ $\Rightarrow\dfrac{3}{4}(a+b+c)^2\geq\dfrac{1}{2}(a+b+c)^2+4\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geq16\Rightarrow a+b+c\geq4$	0,25
	+) Mặt khác: $3a^2+b^2+2a(c+2)=2a^2+\left(a^2+b^2\right)+2a(c+2)$ $\geq2a^2+2ab+2a(c+2)=2a(a+b+c+2)$ $\Rightarrow P\leq\dfrac{2a^2}{2a(a+b+c+2)}+\dfrac{b+c}{a+b+c+2}-\dfrac{\frac{1}{2}(a+b+c)^2}{16}=\dfrac{a+b+c}{a+b+c+2}-\dfrac{(a+b+c)^2}{32}$ +) Đặt $t=a+b+c$, với mọi $t\geq4$ $\Rightarrow P\leq f(t)=\dfrac{t}{t+2}-\dfrac{t^2}{32}$	0,5
	Có $f'(t)=\dfrac{2}{(t+2)^2}-\dfrac{t}{16}=\dfrac{32-t^3-4t^2-4t}{16(t+2)^2}<0,\forall t>4$ $\Rightarrow f(t)$ nghịch biến và liên tục trên đoạn $[4;+\infty)$	0,25
	$\Rightarrow f(t)\leq f(4)=\dfrac{1}{6}\Rightarrow P\leq\dfrac{1}{6}$.	0,25
	Vậy $\text{Max P}=\dfrac{1}{6}$ khi $a=b=1,c=2$.	0,25
4a) (3.5)	Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, góc $SBA=SCA=90^{\text{o}}$, $AB=a\sqrt{6}$, $AC=a\sqrt{3}$, khoảng cách từ C đến (SAB) bằng $\dfrac{12a}{7}$. **a)** Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.	

b) Gọi O, M lần lượt là trung điểm của BC, SC; (P) là mặt phẳng chứa BM và song song với AO. Gọi góc giữa SB và (P) là α. Tính $\sin\alpha$.



a) Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Gọi D là hình chiếu của S trên $mp(ABC)$. Ta có:

◆ $\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp BD$. — 0,5

◆ $\begin{cases} AC \perp SC \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SCD) \Rightarrow AC \perp CD$.

$\Rightarrow ABDC$ là hình chữ nhật. — 0,5

Kẻ đường cao DH của tam giác SBD. Ta có

$\begin{cases} DH \perp SB \\ DH \perp AB \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB)$. — 0,5

$\Rightarrow DH = d\left(D,(SAB)\right) = d\left(C,(SAB)\right) = \dfrac{12a}{7}$ — 0,5

Trong ΔSBD vuông tại D, ta có:

$\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{BD^2} \Leftrightarrow \dfrac{49}{144a^2} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{3a^2} \Rightarrow SD = 12a$. — 0,5

Vậy: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SD.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.SD.\dfrac{1}{2}.AC.AB = \dfrac{1}{3}.12a.\dfrac{1}{2}a\sqrt{3}.a\sqrt{6} = 6\sqrt{2}a^3$. — 1,0

4b. (2.5)

Gọi I là giao điểm của SO và $BM \Rightarrow I \in (P) \cap (SAD) \Rightarrow (P) \cap (SAD) = EF$, với EF đi qua I và song song AD, $E \in SA$, $F \in SD$.

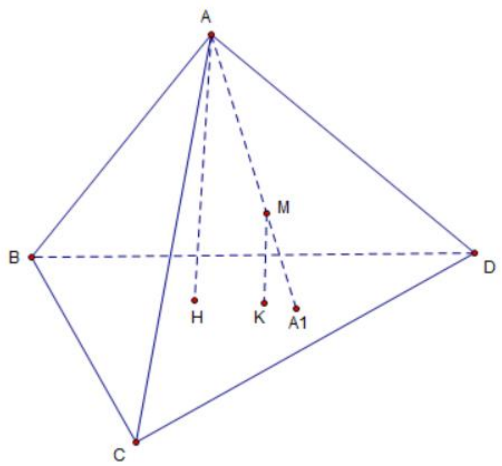
Gọi K là trung điểm của $CD \Rightarrow MK // SD \Rightarrow MK \perp (ABDC)$.

$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DK}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DK}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DK}.\overrightarrow{AC} = 3a^2 - \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{6} = 0$

$\Rightarrow BK \perp AD \Rightarrow AD \perp (BMK) \Rightarrow AD \perp BM$, mà $EF // AD \Rightarrow EF \perp BM$. — 0,5

Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 3a \Rightarrow AD = 3a$; $SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = 7\sqrt{3}a$;

$SC = \sqrt{SD^2 + DC^2} = 5\sqrt{6}a \Rightarrow BM = \sqrt{\dfrac{SB^2 + BC^2}{2} - \dfrac{SC^2}{4}} = \dfrac{9\sqrt{2}a}{2}$. — 0,25

	Do I là trọng tâm ΔSBC nên $EF=\frac{2}{3}AD=2a$.	
	Vậy $S_{BEMF}=\frac{1}{2}EF.BM=\frac{1}{2}.2a.\frac{9\sqrt{2}}{2}a=\frac{9\sqrt{2}}{2}a^2$.	0,25
	Ta có: $\frac{V_{S.MEF}}{V_{S.CAD}}=\frac{SM}{SC}.\frac{SE}{SA}.\frac{SF}{SD}=\frac{2}{9}\Rightarrow V_{S.MEF}=\frac{2}{9}V_{S.CAD}=\frac{1}{9}V_{S.ABDC}$.	0,5
	$\frac{V_{S.BEF}}{V_{S.BAD}}=\frac{SE}{SA}.\frac{SF}{SD}=\frac{4}{9}\Rightarrow V_{S.BEF}=\frac{4}{9}V_{S.BAD}=\frac{2}{9}V_{S.ABDC}$	0,5
	$\Rightarrow V_{S.BEMF}=V_{S.MEF}+V_{S.BEF}=\frac{1}{3}V_{S.ABDC}=\frac{2}{3}V_{S.ABC}=4\sqrt{2}a^3\Rightarrow d\left(S;\left(BEMF\right)\right)=\frac{3V_{S.BEMF}}{S_{BEMF}}=\frac{8a}{3}$.	0,25
	Vậy $\sin\alpha=\frac{d\left(S;\left(BEMF\right)\right)}{SB}=\frac{8\sqrt{3}}{63}$.	0,25
5 (1.5)	Cho tứ diện *ABCD* với điểm *M* bên trong tứ diện. Các tia *AM, BM, CM, DM* cắt các mặt đối diện theo thứ tự tại A_1,B_1,C_1,D_1. Chứng minh rằng $\frac{AM}{MA_1}+\frac{BM}{MB_1}+\frac{CM}{MC_1}+\frac{DM}{MD_1}\ge 12$.	
		0,5
	+ Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, M lên mp(BCD). Gọi V,V_1,V_2,V_3,V_4 lần lượt là thể tích các khối tứ diện ABCD, MBCD, MACD, MADB, MABC. + Ta có $\frac{MA_1}{AA_1}=\frac{MK}{AH}=\frac{V_1}{V}\Rightarrow\frac{AM}{MA_1}=\frac{AA_1-MA_1}{MA_1}=\frac{AA_1}{MA_1}-1=\frac{V}{V_1}-1=\frac{V-V_1}{V_1}=\frac{V_2+V_3+V_4}{V_1}$	
	+ Tương tự: $\frac{MB_1}{BB_1}=\frac{V_1+V_3+V_4}{V_2}$; $\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{V_1+V_2+V_4}{V_3}$; $\frac{MD_1}{DD_1}=\frac{V_1+V_2+V_3}{V_4}$	0, 5
	Vậy $\frac{AM}{MA_1}+\frac{BM}{MB_1}+\frac{CM}{MC_1}+\frac{DM}{MD_1}$ $=\left(\frac{V_1}{V_2}+\frac{V_2}{V_1}\right)+\left(\frac{V_3}{V_2}+\frac{V_2}{V_3}\right)+\left(\frac{V_3}{V_4}+\frac{V_4}{V_3}\right)+\left(\frac{V_1}{V_4}+\frac{V_4}{V_1}\right)+\left(\frac{V_3}{V_1}+\frac{V_1}{V_3}\right)+\left(\frac{V_2}{V_4}+\frac{V_4}{V_2}\right)$	0,25
	$\ge 2+2+2+2+2+2=12$	0,25

……………**Hết**……………

Ghi chú: *Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.*