

Chương II

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Chuyên đề 9. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ. TÍNH CHẤT PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Phân thức đại số

- Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức và B khác đa thức 0. A được gọi là tử thức (hay tử), B được gọi là mẫu thức (hay mẫu).
- Mỗi đa thức cũng được gọi là một phân thức có mẫu thức bằng 1.
- Mỗi số thực a bất kỳ cũng là một phân thức.
- Hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ gọi là bằng nhau nếu $A.D = B.C$.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ nếu } A.D = B.C.$$

2. Tính chất cơ bản của phân thức

◆ *Tính chất cơ bản.*

- Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác 0 thì được một phân thức mới bằng phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M} \text{ (M là đa thức khác đa thức 0).}$$

- Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức mới bằng phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N} \text{ (N là nhân tử chung 0).}$$

◆ *Quy tắc đổi dấu.*

Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho: $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Tìm đa thức A, biết rằng: $\frac{4x^2 - 16}{x^2 + 2x} = \frac{A}{x}$.

Giải

Tìm cách giải.

Để tìm đa thức A, chúng ta dùng $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ khi và chỉ khi: $A.D = B.C$.

Trình bày lời giải

Từ $\frac{4x^2 - 16}{x^2 + 2x} = \frac{A}{x}$, suy ra

$$A = \frac{x(4x^2 - 16)}{x^2 + 2x} = \frac{x[(2x)^2 - 4^2]}{x^2 + 2x} = \frac{x(2x - 4)(2x + 4)}{x(x + 2)} = \frac{x \cdot 2(x - 2) \cdot 2(x + 2)}{x(x + 2)}$$

$$= 4(x - 2) = 4x - 8$$

Ví dụ 2: Cho $0 < x < y$ và $2x^2 + 2y^2 = 5xy$. Tính giá trị của $P = \frac{2016x + 2017y}{3x - 2y}$.

Giải

Tìm cách giải. Quan sát, chúng ta nhận thấy giả thiết chứa đa thức bậc hai đối với biến x, y , còn kết luận là phân thức mà tử và mẫu là đa thức bậc nhất đối với biến x, y . Do vậy chúng ta tìm mối quan hệ giữa x và y từ giả thiết để biểu diễn x theo y hoặc ngược lại. Với suy nghĩ ấy, chúng ta phân tích đa thức thành nhân tử từ điều kiện thứ hai.

Trình bày cách giải

$$\text{Từ } 2x^2 + 2y^2 = 5xy \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$$

$$2x^2 - 4xy - xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - y)(x - 2y) = 0$$

$$\text{Ta có } y > x > 0 \Rightarrow 2y > x \Rightarrow x - 2y < 0 \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

$$\text{Từ đó ta có: } P = \frac{2016x + 2017 \cdot 2x}{3x - 2 \cdot 2x} = -6050.$$

Ví dụ 3: Cho x, y thỏa mãn $x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x - 2y + 13 = 0$.

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } H = \frac{x^2 - 7xy + 52}{x - y}.$$

Giải

$$\text{Từ giả thiết suy ra } x^2 + 2xy + y^2 + y^2 - 6x - 2y + 13 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 - 6(x + y) + 9 + y^2 + 4y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 3)^2 + (y + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó ta có } H = \frac{25 - 7 \cdot 5 \cdot (-2) + 52}{5 + 2} = 21.$$

Ví dụ 4: Cho biểu thức $x^2 - x - 1 = 0$. Tính giá trị

$$Q = \frac{x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + 2020}{x^6 - x^3 - 3x^2 - 3x + 2020}.$$

Giải

Tìm cách giải. Ta không thể tìm x để rồi thay vào biểu thức được, bởi kết quả x không phải số tự nhiên, thay vào Q tính rất phức tạp. Do vậy ta có hai định hướng:

- Hướng suy nghĩ thứ nhất, viết tử thức và mẫu thức dưới dạng $(x^2 - x - 1) \cdot q(x) + r(x)$ xem phần phép chia

đa thức, từ đó ta tìm được Q.

- Hướng suy nghĩ thứ hai, chúng ta quan sát thấy có dạng hằng đẳng thức, biến đổi giả thiết khéo léo để xuất hiện thành tử thức và mẫu thức.

Trình bày lời giải

Cách 1.

- Ta có:

$$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + 2020 = (x^2 - x - 1)(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1) + 2021$$

- Ta có:

$$x^6 - x^3 - 3x^2 - 3x + 2020 = (x^2 - x - 1)(x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1) + 2021$$

Với $x^2 - x - 1 = 0$ thì tử số là 2011; mẫu số là 2021.

$$\text{Vậy } Q = \frac{2021}{2021} = 1.$$

Cách 2.

- Ta có: $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^6 = (x + 1)^3$

$$\Rightarrow x^6 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow x^6 - x^3 - 3x^2 - 3x = 1$$

Suy ra mẫu số bằng: $1 + 2020 = 2021$.

- Ta có: $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow (x^2 - x)^3 = 1$

$$\Rightarrow x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 = 1$$

Suy ra tử số bằng: $1 + 2020 = 2021$.

$$\text{Vậy } Q = \frac{2021}{2021} = 1.$$

Ví dụ 5: Cho $P = \frac{n^2 + 4}{n + 5}$ với n là số tự nhiên. Hãy tìm tất cả các số tự nhiên n trong khoảng từ 1 đến 2020

sao cho giá trị của P chưa tối giản.

Giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{n^2 + 4}{n + 5} = n - 5 + \frac{29}{n + 5} \text{ với } n \in \mathbb{N}.$$

Để phân số P chưa tối giản thì $\text{ƯCLN}(29; n + 5) = d (d \neq 1)$

Khi đó $n + 5 : d$ và $29 : d \Rightarrow d = 29 \Rightarrow n + 5 : 29$

$$\text{Hay } n + 5 = 29k (k \in \mathbb{N}^+) \Rightarrow n = 29k - 5$$

$$\text{Mà } 1 < n < 2020 \Rightarrow 1 < 29k - 5 < 2020 \Leftrightarrow 29k < 2025$$

$$\Rightarrow \frac{6}{29} < k < 69 \frac{24}{29} \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, \dots, 69\}$$

Vậy các số tự nhiên n cần tìm có dạng $n = 29k - 5$ với $k \in \{1, 2, 3, \dots, 69\}$

Ví dụ 6. Với giá trị nào của x thì:

a) Giá trị của phân thức $A = \frac{10}{x-9}$ dương;

b) Giá trị của phân thức $B = \frac{-10}{x+21}$ âm;

c) Giá trị của phân thức $C = \frac{x-21}{x-10}$ dương.

Giải

Tìm cách giải. Khi giải những dạng toán này chúng ta cần sử dụng kiến thức sau:

- Phân thức $\frac{A}{B}$ có giá trị dương khi và chỉ khi A và B cùng dấu.
- Phân thức $\frac{A}{B}$ có giá trị âm khi và chỉ khi A và B trái dấu.

Trình bày lời giải

a) $\frac{10}{x-9} > 0 \Leftrightarrow x-9 > 0 \Leftrightarrow x > 9.$

b) $\frac{-10}{x+21} < 0 \Leftrightarrow x+21 < 0 \Leftrightarrow x < -21.$

c) $\frac{x-21}{x-10} > 0 \Leftrightarrow x-21$ và $x-10$ cùng dấu; mà $x-10 > x-21$ nên $x-21 > 0$ hoặc $x-10 < 0 \Leftrightarrow x > 21$ hoặc $x < 10.$

C. Bài tập vận dụng

9.1.

a) Tìm đa thức A, cho biết $\frac{A}{x-2} = \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}.$

b) Tìm đa thức M, cho biết $\frac{M}{x-1} = \frac{x^2+3x+2}{x+1}.$

Hướng dẫn giải – đáp số

Dùng định nghĩa, ta có:

a) $A = (x+1).$

b) $M = x^2 + x - 2.$

Nhận xét. Bạn có thể dùng tính chất cơ bản của phân thức để giải bài này.

9.2. Cho a và b là các số thỏa mãn $a > b > 0$ và $a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$B = \frac{a^4 - 4b^4}{b^4 - 4a^4}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Từ } a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0$$

$$\Rightarrow a^3 - 2a^2b + a^2b - 2ab^2 + 3ab^2 - 6b^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2b)(a^2 + ab + 3b^2) = 0$$

$$\text{Vì } a > b > 0 \Rightarrow a^2 + ab + 3b^2 > 0 \text{ do đó } a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b$$

$$\text{Vậy } B = \frac{a^4 - 4b^4}{b^4 - 4a^4} = \frac{16b^4 - 4b^4}{b^4 - 64b^4} = \frac{12b^4}{-63b^4} = -\frac{4}{21}.$$

9.3. Cho a, b thỏa mãn $10a^2 - 3b^2 + 5ab = 0$ và $9a^2 \neq b^2$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } P = \frac{2a - b}{3a - b} + \frac{5b - a}{3a + b}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Ta có } P = \frac{(2a - b)(3a + b) + (5b - a)(3a - b)}{(3a - b)(3a + b)}$$

$$P = \frac{6a^2 + 2ab - 3ab - b^2 + 15ab - 5b^2 + ab}{9a^2 - b^2} = \frac{3a^2 - 6b^2 + 15ab}{9a^2 - b^2}$$

$$\text{Từ giả thiết } 10a^2 - 3b^2 + 5ab = 0 \Rightarrow 5ab = 3b^2 - 10a^2.$$

$$\text{Từ đó suy ra } P = \frac{3a^2 - 6b^2 + 9b^2 - 30a^2}{9a^2 - b^2} = \frac{-27a^2 + 3b^2}{9a^2 - b^2} = -3$$

9.4. Số nào lớn hơn: $A = \frac{2020 - 2015}{2020 + 2015}$ và $B = \frac{2020^2 - 2015^2}{2020^2 + 2015^2}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Ta có } A = \frac{2020 - 2015}{(2020 + 2015)} = \frac{2020^2 - 2015^2}{(2020 + 2015)^2} < \frac{2020^2 - 2015^2}{2020^2 + 2015^2}$$

$$\Rightarrow A < B$$

9.5. Với giá trị nào của x thì:

a) Giá trị của phân thức $A = \frac{3}{x - 2}$ dương;

b) Giá trị của phân thức $B = \frac{-3}{x - 3}$ âm;

c) Giá trị của phân thức $C = \frac{x - 1}{x - 5}$ dương.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $A = \frac{3}{x - 2} > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$

b) $B = \frac{-3}{x - 3} < 0 \Leftrightarrow x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3.$

c) $C = \frac{x-1}{x-5} > 0 \Leftrightarrow x-1$ và $x-5$ cùng dấu; mà $x-1 > x-5$ nên $x-5 > 0$ hoặc $x-1 < 0 \Leftrightarrow x > 5$ hoặc $x < 1$.

9.6. Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì:

a) $\frac{n^3-1}{n^5+n+1}$ là phân số không tối giản.

b) $\frac{6n+1}{8n+1}$ là phân số tối giản.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{n^5-n^2+n^2+n+1} = \frac{(n-1)(n^2+n+1)}{n^2(n^3-1)+(n^2+n+1)}$

$\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n^3-n^2+1)(n^2+n+1)}$ vì với số nguyên dương n thì $n^2+n+1 > 1$ nên $\frac{n^3-1}{n^5+n+1}$ là phân số không tối giản.

b) Đặt $\text{ƯCLN}(6n+1; 8n+1) = d$ với $d \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow 6n+1 : d \Rightarrow 24n+4 : d$$

$$8n+1 : d \Rightarrow 24n+3 : d$$

$$\Rightarrow (24n+4) - (24n+3) : d \Leftrightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1.$$

$$\Rightarrow \text{ƯCLN}(6n+1; 8n+1) = 1 \Rightarrow \text{Phân số tối giản.}$$

9.7. Tìm giá trị lớn nhất của phân thức sau:

$$A = \frac{3}{x^2+2x+4};$$

$$B = \frac{5}{4x^2-4x+3}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $A = \frac{3}{(x+1)^2+3} \leq \frac{3}{3} = 1$

$$\Rightarrow \text{Giá trị lớn nhất của } A \text{ là } 1 \text{ khi } x = -1.$$

b) Ta có $B = \frac{5}{(2x-1)^2+2} \leq \frac{5}{2}$

$$\text{Giá trị lớn nhất của } B \text{ là } \frac{5}{2} \text{ khi } x = \frac{1}{2}.$$

9.8. Cho $2x+y=11z$; $3x-y=4z$. Tính giá trị $Q = \frac{2x^2-3xy}{x^2+3y^2}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Từ } 2x+y=11z \text{ và } 3x-y=4z \text{ suy ra } 5x=15z \Rightarrow x=3z$$

Từ $2x + y = 11z$ và $x = 3z$ suy ra $y = 5z$.

Thay vào biểu thức: $Q = \frac{2x^2 - 3xy}{x^2 + 3y^2} = \frac{18z^2 - 45z^2}{9z^2 + 75z^2} = \frac{-9}{28}$

9.9. Cho a, b thỏa mãn $5a^2 + 2b^2 = 11ab$ và $a > 2b > 0$.

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{4a^2 - 5b^2}{a^2 + 2ab}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết: $5a^2 + 2b^2 = 11ab \Leftrightarrow (5a - b)(a - 2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = b \text{ (thoả mãn)} \\ a = 2b \text{ (loại)} \end{cases}$

Thay $5a = b$ vào A ta được: $A = \frac{4a^2 - 125a^2}{a^2 + 10a^2} = -11$.

9.10. Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính giá trị $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết: $4a^2 + b^2 = 5ab$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + b^2 - 5ab = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 4ab - ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4a - b)(a - b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = b \text{ (loại)} \\ a = b \text{ (thoả mãn)} \end{cases}$$

Suy ra $a = b$. Thay vào P ta được: $P = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$.

9.11. Cho x thỏa mãn $\frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{x^4 - 3x^3 + 18x - 1}{x^3 - 2x^2 + 7x + 1}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết: $\frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2}$ suy ra $x^2 - x + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

Ta có: $x^4 - 3x^3 + 18x - 1 = (x^2 - 3x + 1)(x^2 - 1) + 15x$.

$$x^3 - 2x^2 + 7x + 1 = (x^2 - 3x + 1)(x + 1) + 9x$$

Với $x^2 - 3x + 1 = 0$ ta có $P = \frac{(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 1) + 15x}{(x^2 - 3x + 1)(x + 1) + 9x} = \frac{15x}{9x} = \frac{5}{3}$.

9.12. Cho x, y thỏa mãn $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $N = \frac{3x^2y - 1}{4xy}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2x + 2y + 4y + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $x - y - 1 = 0$ và $y + 2 = 0$ hay $y = -2; x = -1$.

$$\text{Từ đó suy ra } N = \frac{3(-1)^2(-2) - 1}{4(-1)(-2)} = -\frac{7}{8}$$

9.13. Cho a, b là hai số nguyên dương khác nhau, thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$.

Chứng minh rằng $\frac{a - b}{2a + 2b + 1}$ là phân số tối giản.

(Thi học sinh giỏi Toán lớp 9, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2013-2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Từ } 2a^2 + a = 3b^2 + b \Leftrightarrow 2a^2 - 2b^2 + a - b = b^2 \Leftrightarrow (a - b)(2a + 2b + 1) = b^2 \quad (1)$$

$$\text{Đặt ƯCLN}(a - b; 2a + 2b + 1) = d \Rightarrow a - b : d; 2a + 2b + 1 : d \text{ và } b : d$$

$$\Rightarrow [2a + 2b + 1 - 2(a - b)] : d \Rightarrow 4b + 1 : d \text{ mà } b : d \text{ hay } d = 1$$

$$\Rightarrow a - b \text{ và } 2a + 2b + 1 \text{ nguyên tố cùng nhau suy ra } \frac{a - b}{2a + 2b + 1} \text{ là phân số tối giản.}$$