UBND HUYỆN VĨNH LỘC

ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
Năm học: 2023-2024
Môn: Toán
Ngày kiểm tra: 11/11/2023
Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)
Đề gồm 01 trang, 5 câu

Câu I: (*4,0 điểm*).

1. Rút gọn biểu thức: M = $\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{x+1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}\right)$ với $x\geq 0, x\neq 1.$

2. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $-x^2(y-z)=\frac{5}{9}y^2(z-x)=5z^2(x-y)=\frac{5}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $A=(xyz)^{2024}$.

Câu II: (*4,0 điểm*).

1. Giải phương trình: $\sqrt{x^4+24}+4=\sqrt{x^4+15}+5\sqrt[3]{x}.$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x+(3-2xy)y^2=3\\2x^2-x^3y=2x^2y^2-7xy+6\end{cases}$

Câu III: (*4,0 điểm*).

1. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $3x^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=27.$

2. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a+b^2+1$ chia hết cho ab.

Câu IV: (*6,0 điểm*).

Cho ba điểm A, B, C cố định sao cho điểm C nằm giữa hai điểm A, B và BC = 2AC. Lần lượt vẽ đường tròn (I) đường kính AC và đường tròn (K) đường kính BC. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài DE của hai đường tròn (với ($D\in(I), E\in(K)$). Gọi H là giao điểm của AD và BE.

1. Chứng minh HC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

2. Gọi F là trung điểm của AB. Tia HF lần lượt cắt các đường thẳng CE, CD tại M và N. Chứng minh tứ giác AMBN là hình bình hành.

3. Vẽ đường thẳng d qua K cắt MB, MN lần lượt tại hai điểm G, J. Xác định vị trí của đường thẳng d để tam giác MGJ có diện tích nhỏ nhất.

Câu V: (*2,0 điểm*).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y-xy=5-z^2$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2x}{x^2+y^2+18}+\dfrac{y}{x+y+4z}-\dfrac{4(x+y)}{25z}$

HẾT

Họ và tên thí sinh:……………………………………………SBD……………

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	NỘI DUNG	Điểm
I **4,0 điểm**	**1.** Rút gọn biểu thức: M = $\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}\right)$ với $x\geq 0, x\neq 1.$	**2,0**
	Với $x\geq 0, x\neq 1$, ta có: $\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x+1\right)}+\frac{1}{x+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$	0.75
	$\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1\right)}=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+1\right)}=\frac{\sqrt{x}-}{x+}$	0,75
	Do đó: M = $\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}:\frac{\sqrt{x}-1}{x+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ Vậy M = $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ (với x $\geq$ 0; x$\neq$1)	0,5
	2. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $-x^2(y-z)=\frac{5}{9}y^2(z-x)=5z^2(x-y)=\frac{5}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $A=(xyz)^{2024}$	**2,0**
	Từ giả thiết ta có: $x^2(y-z)=\frac{-5}{3}$ (1), $y^2(z-x)=3$ (2), $z^2(x-y)=\frac{1}{3}$ (3).	0,5
	Nhân theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được: $x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x)=\frac{-5}{3}$ (4)	0,5
	Cộng theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được: $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=\frac{5}{3}$ Phân tích đa thức $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ thành nhân tử được: $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)$.	0,5
	Do đó $(x-y)(y-z)(z-x)=\frac{-5}{3}$ (5). Từ (4) và (5) suy ra: $x^2y^2z^2=1 \Rightarrow A=1$	0,5
II **4,0 điểm**	**1. Giải phương trình:** $\sqrt{x^4+24}+4=\sqrt{x^4+15}+5\sqrt[3]{x}.$ (1)	**2,0**
	(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^4+24}-\sqrt{x^4+15}=5\sqrt[3]{x}-4$ $\Leftrightarrow \frac{(x^4+24)-(x^4+15)}{\sqrt{x^4+24}+\sqrt{x^4+15}}=5\sqrt[3]{x}-4.$	0,5

	$\Leftrightarrow \dfrac{9}{\sqrt{x^4+24}+\sqrt{x^4+15}}=5\sqrt[3]{x}-4.$	
	Nhận thấy phương trình trên có nghiệm là x = 1	0,25
	Nếu $x>1$ thì $\dfrac{9}{\sqrt{x^4+24}+\sqrt{x^4+15}}<1$ và $5\sqrt[3]{x}-4>1.$	0,5
	Nếu $0<x<1$ thì $\dfrac{9}{\sqrt{x^4+24}+\sqrt{x^4+15}}>1$ và $5\sqrt[3]{x}-4<1.$	0,25
	Nếu x < 0 thì $\dfrac{9}{\sqrt{x^4+24}+\sqrt{x^4+15}}>0$ và $5\sqrt[3]{x}-4<0.$	0,25
	Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.	0,25
	2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+(3-2xy)y^2=3 & (1) \\ 2x^2-x^3y=2x^2y^2-7xy+6 & (2) \end{cases}$	**2,0**
	(1) $\Leftrightarrow 2x(1-y^3)-3(1-y^2)=0 \Leftrightarrow (1-y)\left[2x(1+y+y^2)-3(1+y)\right]=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ 2xy^2+2xy+2x-3y-3=0 \end{array}\right.$	0,5
	TH1: y = 1. Thay y = 1 vào (2) ta được: $x^3-7x+6=0 \Leftrightarrow x=1;2;-3$ Suy ra: $(x,y)=(1;1),(2;1),(-3;1)$ là ba nghiệm của hệ. (*)	0,5
	TH2: $2xy^2+2xy+2x-3y-3=0$ Kết hợp với (2) ta có hệ: $\begin{cases} 2xy^2+2xy+2x-3y-3=0 & (3) \\ 2x^2-x^3y=2x^2y^2-7xy+6 & (4) \end{cases}$ Ta có: $(4) \Leftrightarrow (xy-2)(2xy+x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=2 \\ 2xy+x^2-3=0 \end{array}\right.$. Trường hợp: $xy=2$, thay vào (3) ta được: $4y+4+2x-3y-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-y-1}{2}$. $\Rightarrow xy=2 \Leftrightarrow \dfrac{(-y-1)y}{2}=2 \Leftrightarrow y^2+y+4=0 \Leftrightarrow \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{15}{4}$ (vô nghiệm)	0,5
	Trường hợp: $2xy+x^2-3=0 \Leftrightarrow 2xy=3-x^2$. Thay vào (3) ta được: $y(3-x^2)+(3-x^2)+2x-3y-3=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{2}{x}-1$. (do x = 0 không thỏa mãn hệ pt). $\Rightarrow 2xy=3-x^2 \Leftrightarrow 2x\left(\dfrac{2}{x}-1\right)=3-x^2 \Leftrightarrow x=1$. Từ đó suy ra: y = 1. Suy ra: $(x,y)=(1;1)$ (**) là một nghiệm của hệ. Từ (*) và (**) suy ra hệ đã cho có ba nghiệm: $(x,y)=(1;1),(2;1),(-3;1)$	0,5
III **4,0 điểm**	**1. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn:** $3x^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=27.$	**2,0**
	$3x^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2-18x=27 \Leftrightarrow 3(x-3)^2-18y^2+2z^2+3y^2z^2=54$ (1) Lập luận để $z^2 \vdots 3 \Rightarrow z \vdots 3 \Rightarrow z^2 \vdots 9 \Rightarrow z^2 \geq 9$ (*)	0,5
	(1) $\Leftrightarrow 3(x-3)^2+2z^2+3y^2(z^2-6)=54$ (2)	0,5

	(2) $\Rightarrow 54 = 3(x-3)^2 + 2z^2 + 3y^2(z^2-6) \geq 3(x-3)^2 + 2.9 + 3y^2.3$ $(x-3)^2 + 3y^2 \leq 12 \Rightarrow y^2 \leq 4 \Rightarrow y^2 = 1; y^2 = 4$ (vì y nguyên dương)	
	Trường hợp: $y^2 = 1 \Rightarrow y = 1$ (vì y nguyên dương) thì (1) có dạng: $3(x-3)^2 + 5z^2 = 72 \Rightarrow 5z^2 \leq 72 \Rightarrow z^2 \leq \frac{72}{5} \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z = 3$ (vì có(*)) Khi đó $3(x-3)^2 = 27 \Rightarrow (x-3)^2 = 9$, x nguyên dương nên tìm được x = 6. $(x,y,z) = (6;1;3)$ là một bộ ba giá trị cần tìm.	0,5
	Trường hợp: $y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$ (vì y nguyên dương) thì (1) có dạng: $3(x-3)^2 + 14z^2 = 126 \Rightarrow 14z^2 \leq 126 \Rightarrow z^2 \leq 9 \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z = 3$ (vì z nguyên dương) Suy ra $(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ (vì x nguyên dương) $(x,y,z) = (3;2;3)$ là một bộ ba giá trị cần tìm. Vậy $(x,y,z) = (6;1;3), (3;2;3).$	0,5
	2. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a + b^2 + 1$ chia hết cho ab.	**2,0**
	Giả sử có hai số nguyên dương a, b để $(a + b^2 + 1) \vdots ab \Rightarrow \begin{cases} a+1 \vdots b \\ b^2+1 \vdots a \end{cases}$ (1).	0,5
	Đặt $a + 1 = bk\ (k \in Z_+)$ thì $b^2 + 1 \vdots bk - 1 \Rightarrow k(b^2+1) - (bk-1)b \vdots bk - 1$ $b + k \vdots bk - 1$ (2). Mà $b + k > 0 \Rightarrow b + k \geq bk - 1 \Leftrightarrow (b-1)(k-1) \leq 2$ Vì $b, k \geq 1$ nên $(b-1)(k-1) \in \{0;1;2\}$.	0,5
	Trường hợp 1: $(b-1)(k-1) = 0 \Leftrightarrow b = 1$ hoặc k = 1. Với b = 1, thay vào (1) thì $2 \vdots a \Rightarrow a \in \{1;2\} \Rightarrow (a,b) = (1;1), (2;1).$ Với k = 1, thay vào (2) thì $b + 1 \vdots b - 1 \Rightarrow b \in \{2;3\} \Rightarrow (a,b) = (1;2), (2;3).$ *Trường hợp 2:* $(b-1)(k-1) = 1 \Leftrightarrow b = k = 2 \Rightarrow a = bk - 1 = 3 \Rightarrow (a,b) = (3;2).$	0,5
	Trường hợp 3: $(b-1)(k-1) = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b-1=2; k-1=1 \\ b-1=1; k-1=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=3; k=2 \\ b=2; k=3 \end{array}\right. \Rightarrow (a,b) = (5;3), (5;2).$ Vậy $(a,b) \in \{(1;1), (1;2), (2;3), (2;1), (3;2), (5;2), (5;3)\}$.	0,5

----------- Hết -----------

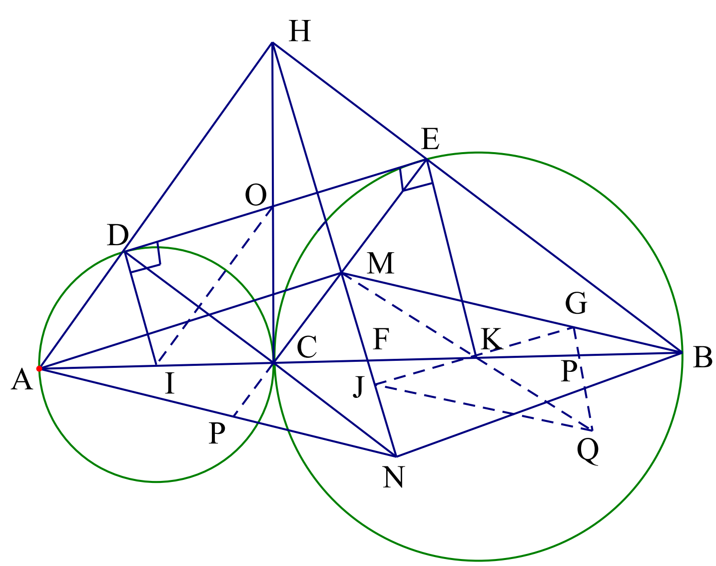
IV
4,0 điểm

Cho ba điểm A, B, C cố định sao cho điểm C nằm giữa hai điểm A, B và BC = 2AC. Lần lượt vẽ đường tròn (I) đường kính AC và đường tròn (K) đường kính BC. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài DE của hai đường tròn (với ($D \in (I), E \in (K)$). Gọi H là giao điểm của AD và BE.

1. Chứng minh HC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

2. Gọi F là trung điểm của AB. Tia HF lần lượt cắt các đường thẳng CE, CD tại M và N. Chứng minh tứ giác AMBN là hình bình hành.

3. Vẽ đường thẳng d qua K cắt MB, MN lần lượt tại hai điểm G, J. Xác định vị trí của đường thẳng d để tam giác MGJ có diện tích nhỏ nhất.



1. Chứng minh HC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).	2,0
Vì DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K) nên ID, KE cùng vuông góc với DE. Suy ra: $ID//KE \Rightarrow \widehat{DIC} + \widehat{EKC} = 180^0$. (1)	0,25
Vì ID = IC nên tam giác DIC cân tại I. Suy ra: $\widehat{DCI} = \dfrac{180^0 - \widehat{DIC}}{2}$ (2) Tương tự: $\widehat{ECK} = \dfrac{180^0 - \widehat{EKC}}{2}$ (3). Do đó, Từ (1), (2), (3) suy ra:	0,25

----------- **Hết** -----------

	$\widehat{DCI}+\widehat{ECK}=\dfrac{180^0-\widehat{DIC}}{2}+\dfrac{180^0-\widehat{EKC}}{2}=180^0-\dfrac{\widehat{DIC}+\widehat{EKC}}{2}=90^0.$	0,25
	$\Rightarrow \widehat{DCE}=180^0-\left(\widehat{DCI}+\widehat{ECK}\right)=90^0 \quad (4)$	0,25
	Vì I là trung điểm của AC nên DI là đường trung tuyến của tam giác ADC. Mà DI = IA = IC nên tam giác ADC vuông tại D. $\Rightarrow \widehat{ADC}=90^0 \Rightarrow \widehat{HDC}=90^0 \ (5)$. Tương tự: $\widehat{HEC}=90^0 \quad (6)$	0,25
	Từ (4), (5), (6) ta được: $\widehat{DCI}=\widehat{HDC}=\widehat{HEC}=90^0$. Tứ giác HDCE có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.	0,25
	Gọi O là giao điểm hai đường chéo HC và DE. Từ tính chất của hình chữ nhật ta có: OD = OC. Suy ra: $\Delta ODI=\Delta OCI \ (c.c.c)$ (vì có OD = OC, ID = IC, IO là cạnh chung)	0,25
	$\Rightarrow \widehat{IDO}=\widehat{ICO}=90^0 \Rightarrow OC\perp IK.$ hay $HC\perp IK$ Vậy HC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).	0,25
	2. Chứng minh tứ giác AMBN là hình bình hành.	**2,0**
	Gọi P là giao điểm của MC và AN. Áp dụng hệ quả của định lí Ta – lét vào các tam giác AND và HND ta có: $\begin{cases}\dfrac{CP}{AD}=\dfrac{NC}{ND} & (CP//AD)\\ \dfrac{NC}{ND}=\dfrac{CM}{DH} & (CM//DH)\end{cases} \Rightarrow \dfrac{CP}{AD}=\dfrac{CM}{DH} \Leftrightarrow \dfrac{CP}{CM}=\dfrac{AD}{DH} \quad (7)$	1,0
	Mặt khác, vì DC // HB nên $\dfrac{AD}{DH}=\dfrac{AC}{CB} \quad (8)$ (Định lí Ta-let trong tam giác AHB) Do đó, từ (7) và (8) suy ra: $\dfrac{CP}{CM}=\dfrac{AC}{CB}\Rightarrow AP//BM$ hay AN // BM.	0,5
	Suy ra: $\Delta AFN=\Delta BFM \ (g.c.g)\Rightarrow AN=BM$	0,5

	Tứ giác AMBN có AN//BN, AN = BM nên là hình bình hành.	
	3. Xác định vị trí của đường thẳng d để tam giác MGJ có diện tích nhỏ nhất.	**2,0**
	Ta sẽ chứng minh: Khi K là trung điểm của GJ thì diện tích tam giác MGJ nhỏ nhất. Để dựng được vị trí của đường thẳng d trong trường hợp này, ta làm như sau: Lấy điểm Q đối xứng với M qua K. Qua Q lần lượt vẽ các đường thẳng song song với MN, MB. Các đường thẳng đó cắt MB, MN theo thứ tự tại G, J. Tứ giác MGQJ là hình bình hành nên K là trung điểm của GJ.	0,5
	Do đường thẳng AB cũng là một vị trí của đường thẳng d nên ta chứng minh $S_{MBF} > S_{MGJ}$ Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Ta có: $\frac{MG}{MB}+\frac{MJ}{MF}=\frac{MB-GB}{MB}+\frac{MF+FJ}{MF}=2+\frac{FJ}{MF}-\frac{GB}{MB}$ (9)	0,5
	Gọi P' là giao điểm của GQ và FB. Khi đó, tứ giác $P'GFJ$ là hình bình hành nên $FJ = GP'$. Kết hợp với định lí Ta lét trong tam giác MBF suy ra: $\Rightarrow \frac{FJ}{MF}=\frac{GP'}{MF}=\frac{GB}{MB}\Leftrightarrow \frac{FJ}{MF}-\frac{GB}{MB}=0$ (10) Từ (9) và (10) suy ra: $\frac{MG}{MB}+\frac{MJ}{MF}=2.$	0,5
	Từ bất đẳng thức Co-si, suy ra: $4=\left(\frac{MG}{MB}+\frac{MJ}{MF}\right)^2\ge 4.\frac{MG.MJ}{MB.MF}=4.\frac{S_{MGJ}}{S_{MBF}}$ $\Leftrightarrow S_{MBF}\ge S_{MGJ}$. Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \frac{MG}{MB}=\frac{MJ}{MF}$. Kết quả này không xảy ra do $\frac{MG}{MB}<1<\frac{MJ}{MF}$. Do đó: $S_{MBF}>S_{MGJ}$ Vậy khi K là trung điểm của GJ thì diện tích tam giác MGJ nhỏ nhất.	0,5
V 2,0 điểm	**Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện** $x+y-xy=5-z^2$ **Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức** $P=\frac{2x}{x^2+y^2+18}+\frac{y}{x+y+4z}-\frac{4(x+y)}{25z}$	**2,0**
	Áp dụng bất đẳng thức $a^2+b^2\ge 2ab, \forall a,b\in R$ ta có: $\frac{2x}{x^2+y^2+18}\le\frac{x}{xy+9}=\frac{x}{x+y+z^2+4}\le\frac{x}{x+y+4z}$.	0,5

	$P \le \dfrac{x+y}{x+y+4z} - \dfrac{4(x+y)}{25z} = \dfrac{\dfrac{x+y}{z}}{\dfrac{x+y}{z}+4} - \dfrac{4(x+y)}{25z}$. Đặt $t = \dfrac{x+y}{z}, t > 0.$ Suy ra: $P \le \dfrac{t}{t+4} - \dfrac{4t}{25} \quad (1)$	0,5
	Mặt khác: $\dfrac{t}{t+4} - \dfrac{4t}{25} = \left(\dfrac{t}{t+4} - \dfrac{4t}{25} - \dfrac{1}{25}\right) + \dfrac{1}{25} = \dfrac{-4(t-1)^2}{25(t+4)} + \dfrac{1}{25} \le \dfrac{1}{25} \quad (2)$	0,5
	Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{z} = 1 \\ x = y \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1; z = 2.$ Từ (1) và (2) suy ra: $\max P = \dfrac{1}{25} \Leftrightarrow x = y = 1; z = 2$.	0,5

----------- **Hết** -----------