

**ĐỀ SỐ 22****ĐỀ THI HSG TOÁN 9 TỈNH NAM ĐỊNH NĂM 2023-2024****Câu 1. (3 điểm)**

1, Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}$ . Chứng minh

$$\frac{bc+1}{a^2+1} + \frac{ac+1}{b^2+1} + \frac{ba+1}{c^2+1} = 3$$

2, Cho đa thức  $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+2022)$ . Khi khai triển đa thức  $P(x)$  ta được  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2021}x^{2021} + a_{2022}x^{2022}$ . Tính giá trị biểu thức

$$S = \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021}}{a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022}} - \frac{a_0}{2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021})}$$

**Câu 2. (5,0 điểm)**

1, Giải phương trình  $(x+1)(3x+\sqrt{x+1}-3) = 4\sqrt{x^3}-2$

2, Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x(y+1)+y=3 \\ \sqrt{5-2(x+y)}+\sqrt{2-x^2y^2}=2 \end{cases}$$

**Câu 3. (3,0 điểm)**

1, Tìm tất cả các số nguyên tố  $p, q$  sao cho  $p^4 - q^2(p^2 + q^2 + 1) = (q^2 + 1)^2$

2, Cho  $m, n, p, q$  là các số nguyên thỏa mãn  $(m+n+p+q) : 30$ . Chứng minh rằng  $(m^5 + n^5 + p^5 + q^5) : 30$

**Câu 4. (7,0 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  với  $AB < AC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $BH$  và  $CQ$  là hai đường cao của tam giác  $ABC$ . Tiếp tuyến tại  $B$  và tại  $C$  của đường tròn  $(O)$  cắt nhau tại  $M$ . Đoạn thẳng  $OM$  cắt  $BC$  và cắt đường tròn  $(O)$  lần lượt tại  $N$  và  $D$ . Tia  $AD$  cắt  $BC$  tại  $F$ ;  $AM$  cắt  $BC$  tại  $E$  và cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $K$  ( $K$  khác  $A$ ).

1, Chứng minh rằng:  $AB.KC = AC.KB$  và  $\widehat{ABM} = \widehat{AHN}$

2, Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AFN$ .

Chứng minh  $\widehat{IOM} + \widehat{ADN} = 180^\circ$ .

3, Qua  $E$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BC$  cắt  $QH$  tại  $G$ . Chứng minh ba điểm  $A, G, N$  thẳng hàng.

**Câu 5. (2,0 điểm)**

1, Lấy 2018 điểm phân biệt ở miền trong của một ngũ giác lồi cùng với 5 đỉnh của ngũ giác đó ta được 2023 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của ngũ giác là 1 đơn vị. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 2023 điểm đã cho có diện tích không vượt quá  $\frac{1}{4039}$  đơn vị.

2, Xét  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a + b + c \geq 3$ . Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{a+b^2+c} + \frac{1}{a+b+c^2}$$

## ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

### Câu 1. (3,0 điểm)

1, Ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc} \Leftrightarrow ab + bc + ac = 1$$

Ta có:

$$\frac{bc+1}{a^2+1} = \frac{bc+ab+bc+ac}{a^2+ab+bc+ac} = \frac{b(a+c)+c(a+b)}{(a+c)(a+b)} = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c}$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{ac+1}{b^2+1} = \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c} \text{ và } \frac{ab+1}{c^2+1} = \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \frac{bc+1}{a^2+1} + \frac{ac+1}{b^2+1} + \frac{ba+1}{c^2+1} &= \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \\ \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} &= \left( \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} \right) + \left( \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+c} \right) + \left( \frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) = 1+1+1=3 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{bc+1}{a^2+1} + \frac{ac+1}{b^2+1} + \frac{ba+1}{c^2+1} = 3 \text{ khi } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc} \text{ và } a, b, c > 0$$

2, Ta có:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2021} x^{2021} + a_{2022} x^{2022} = (x+1)(x+2)(x+3) \dots (x+2022) \\ \Rightarrow P(1) &= a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 + \dots + a_{2021} 1^{2021} + a_{2022} 1^{2022} = (1+1)(1+2)(1+3) \dots (1+2022) \\ \Rightarrow P(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} = 2023! \end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned} P(-1) &= a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + \dots + a_{2022}(-1)^{2022} = (-1+1)(-1+2) \dots (-1+2022) \\ \Rightarrow P(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2022} = 0 \\ \Rightarrow a_0 + a_2 + \dots + a_{2022} &= a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021} \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} &= 2023! \\ \Rightarrow a_0 + a_2 + \dots + a_{2022} &= a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021} = \frac{2023!}{2} \end{aligned}$$

Ta có

$$\Rightarrow P(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots + a_{2022} \cdot 0^{2022} = (0+1)(0+2)(1+3)\dots(0+2022)$$

$$\Rightarrow P(0) = a_0 = 2022!$$

Do đó

$$S = \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021}}{a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2022}} - \frac{a_0}{2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2021})} = 1 - \frac{2022!}{2 \cdot \frac{2023!}{2}} = 1 - \frac{2022!}{2023!} = 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}$$

## Câu 2. (5,0 điểm)

$$1, \text{ Điều kiện xác định } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$$

Khi đó phương trình đã cho tương ứng với

$$3x^2 + 3x - 3x - 3 + (x+1)\sqrt{x+1} = 4x\sqrt{x} - 2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x\sqrt{x} + x + (x+1)\sqrt{x+1} - (x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x - 4\sqrt{x} + 1) + (x+1)(\sqrt{x+1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x - 4\sqrt{x} + 1) + \frac{(x+1)x}{\sqrt{x+1} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x - 4\sqrt{x} + 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x+1} + 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4\sqrt{x} + 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x+1} + 1} = 0 \end{cases}$$

Ta thấy:

$$3x - 4\sqrt{x} + 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x+1} + 1} = 3x - 4\sqrt{x} + \frac{x+2+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + 1}$$

$$\geq 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{x+2+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + 1} - \frac{4}{3}$$

$$\geq 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{6x+4-2\sqrt{x+1}}{6(\sqrt{x+1} + 1)}$$

$$\geq 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{(\sqrt{x+1}-1)^2 + 5x+2}{6(\sqrt{x+1} + 1)} > 0$$

Với  $x = 0$  thỏa mãn điều kiện

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là  $x = 0$ .

$$2, \text{ Điều kiện: } \begin{cases} 5-2(x+y) \geq 0 \\ 2-x^2y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \leq \frac{5}{2} \\ x^2y^2 \leq 2 \end{cases}$$

Kết hợp với phương trình trong hệ ta được điều kiện  $\frac{1}{2} \leq xy \leq \sqrt{2}$

$$\text{Từ phương trình } x(y+1)+y=3 \Leftrightarrow xy+x+y=3 \Leftrightarrow x+y=3-xy$$

thế vào phương trình  $\sqrt{5-2(x+y)}+\sqrt{2-x^2y^2}=2$  ta được  $\sqrt{5-2(3-xy)}+\sqrt{2-x^2y^2}=2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5-6+2xy}+\sqrt{2-x^2y^2}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2xy-1}+\sqrt{2-x^2y^2}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2xy-1}+\sqrt{2-x^2y^2}=2$$

$$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{2xy-1}-2\sqrt{2-x^2y^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2xy-1-2\sqrt{2xy-1}+1+2-x^2y^2-2\sqrt{2-x^2y^2}+1+x^2y^2-2xy+1=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2xy-1}-1)^2+(\sqrt{2-x^2y^2}-1)^2+(xy-1)^2=0$$

$$\text{Với } \frac{1}{2} \leq xy \leq \sqrt{2} \text{ thì } \begin{cases} (\sqrt{2xy-1}-1)^2 \geq 0 \\ (\sqrt{2-x^2y^2}-1)^2 \geq 0 \\ (xy-1)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Do đó phương trình } (\sqrt{2xy-1}-1)^2+(\sqrt{2-x^2y^2}-1)^2+(xy-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2xy-1}-1)^2=0 \\ (\sqrt{2-x^2y^2}-1)^2=0 \\ (xy-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2xy-1}=1 \\ \sqrt{2-x^2y^2}=1 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow xy=1$$

Với  $xy=1$  kết hợp với  $x+y=3-xy$  ta được

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ (2-y)y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ (y-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$$

Với  $x=y=1$  thỏa mãn điều kiện. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là  $(x;y)=(1;1)$ .

### Câu 3.(3,0 điểm)

1, Ta có:

$$p^4-q^2(p^2+q^2+1)=(q^2+1)^2 \Leftrightarrow p^4-(q^2+1)^2-q^2(p^2+q^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (p^2+q^2+1)(p^2-q^2-1)-q^2(p^2+q^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (p^2+q^2+1)(p^2-2q^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (p^2+q^2+1)(p^2-2q^2-1)=0 \Leftrightarrow p^2-2q^2-1=0 \text{ (do } p, q \text{ là các số nguyên tố)}$$

$$\Leftrightarrow p^2-1=2q^2 \Leftrightarrow (p-1)(p+1)=2q^2$$

$$\text{Nếu } p=2 \Rightarrow (2-1)(2+1)=2q^2 \Leftrightarrow q^2=\frac{3}{2} \text{ (Loại do 1 là số nguyên tố)}$$

Nếu  $p \geq 3$ , mà  $p$  nguyên tố thì  $p-1$  và  $p+1$  là các số chẵn do đó

$$(p-1)(p+1):4=2q^2:4 \Rightarrow q^2:2, \text{ mà } q \text{ nguyên tố} \Rightarrow q=2$$

$$\text{Thay } q=2 \text{ vào } p^2-1=2q^2 \Rightarrow p^2=9 \Rightarrow p=3 \text{ thỏa mãn}$$

$$\text{Vậy tất cả các số nguyên tố } p, q \text{ là } \begin{cases} p=3 \\ q=2 \end{cases}$$

$$2, \text{ Ta có: } m^5-m=m(m^4-1)=m(m-1)(m+1)(m^2+1)$$

$$\textcolor{red}{=} m(m-1)(m+1)(m^2+1)$$

$$\textcolor{red}{=} m(m-1)(m+1)(m^2-4+5)$$

$$\textcolor{red}{=} m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2)+5m(m-1)(m+1)$$

Ta có  $m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2)$  là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, 3 và 5

$5m(m-1)(m+1)$  là tích của 5 và 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, 3, và 5 mà  $\text{UCLN}(2,3,5)=1$  nên  $m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2):30$  và  $5m(m-1)(m+1):30$ . Do đó  $m(m-1)(m+1)(m-2)(m+2)+5m(m-1)(m+1):30 \Rightarrow (m^5-m):30$

$$\text{Chúng minh tương tự ta được } \begin{cases} (n^5-n):30 \\ (p^5-p):30 \\ (q^5-q):30 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } (m^5+n^5+p^5+q^5)-(m+n+p+q):30 \text{ mà } (m+n+p+q):30$$

$$\text{Vậy } (m^5+n^5+p^5+q^5):30$$

**Câu 4. (7,0 điểm)**

Trong (0) có:  $\widehat{ACB} = \widehat{ABx}$  ( góc nội tiếp và góc tạo tia bởi tiếp tuyến và dây cung chắn  $\widehat{AB}$  ).

Có  $MB = MC$ ;  $OB = OC \Rightarrow OM$  là đường trung trực của  $BC \Rightarrow N$  là trung điểm của  $BC$ .

Do  $BH$  là đường cao của  $\Delta ABC$  nên  $\Delta BHC$  vuông tại  $H$ , mà  $N$  là trung điểm của  $BC$  nên  $NB = NC = NH$  nên  $\Delta NHC$  cân tại  $N \Rightarrow \widehat{NHC} = \widehat{ACB}$ . Do đó  $\widehat{NHC} = \widehat{ABx}$

Ta có  $\widehat{NHC} + \widehat{AHN} = 180^\circ$ ;  $\widehat{ABx} + \widehat{ABM} = 180^\circ$ ;  $\widehat{NHC} = \widehat{ABx} \Rightarrow \widehat{AHN} = \widehat{ABM}$

2, Kẻ tia  $MO$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $S$  khác điểm  $D$   
 $\Rightarrow SN \perp BC \Rightarrow \widehat{FNS} = 90^\circ \Rightarrow N$  thuộc đường tròn đường kính  $FS$

Trong  $(O)$  có:  $\widehat{DAS} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay:  $\widehat{FAS} = 90^\circ$

$\Rightarrow A$  thuộc đường tròn đường kính  $FS$ .

Do đó 4 điểm  $A, F, N, S$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $FS$ . Suy ra tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta AFN$  là trung điểm của  $FS$

Trong  $\Delta DFS$  có  $I$  là trung tâm của  $FS$ ;  $O$  là trung điểm của  $DS \Rightarrow OI$  là đường trung bình  $\Rightarrow OI \parallel DF \Rightarrow OI \parallel AD \Rightarrow \widehat{IOM} + \widehat{ADN} = 180^\circ$

3, Gọi  $G'$  là giao điểm của  $AN$  và  $QH$

Chúng minh được  $\Delta ABH$  và  $\Delta BMN$  đồng dạng  $\Rightarrow \frac{AH}{BN} = \frac{AB}{BM}$  mà  $NB = NH$

$\Rightarrow \frac{AH}{NH} = \frac{AB}{BM}$  mà  $\widehat{AHN} = \widehat{ABM}$  suy ra  $\Delta AHN$  và  $\Delta ABM$  đồng dạng.

Do đó  $\widehat{NAH} = \widehat{MAB}$  hay  $\widehat{G'AH} = \widehat{EAB}$  (4)

Chúng minh được  $\Delta AQC$  và  $\Delta AHB$  đồng dạng  $\Rightarrow \frac{AQ}{AH} = \frac{AC}{AB}$  suy ra  $\Delta AQH$  và  $\Delta ACB$  đồng dạng.

Do đó  $\widehat{AHQ} = \widehat{ABC}$  hay  $\widehat{AHG'} = \widehat{ABE}$  (5)

Từ (4) và (5) suy ra  $\Delta AHG'$  và  $\Delta ABE$  đồng dạng  $\Rightarrow \frac{AG'}{AE} = \frac{AH}{AB}$  mà  $\frac{AH}{AB} = \frac{AN}{AM}$  (do  $\Delta AHN$  và  $\Delta ABM$  đồng dạng)  $\Rightarrow \frac{AG'}{AE} = \frac{AN}{AM}$ . Theo định lí Ta – lét đảo suy ra  $EG' \parallel MN$

Ta có  $EG \parallel MN$  ( vì cùng vuông góc với  $BC$ ). Do đó  $E, G, G'$  thẳng hàng, mà  $G, G' \in QH$  suy ra  $G'$  và  $G$  trùng nhau. Vậy ba điểm  $A, G, N$  thẳng hàng.

### Câu 5. (2,0 điểm)

1, Nối các điểm trong 2023 điểm đã tạo thành các tam giác đôi một chung nhiều nhất một cạnh, phủ vừa kín ngũ giác. Giả sử có  $n$  tam giác được tạo thành. Khi đó tổng tất cả các góc của  $n$  tam giác này là  $n.180^\circ$

Tổng trên có thể tính thông qua những tổng sau:

- Tổng các góc xung quanh một điểm trong ngũ giác là  $360^\circ$  mà có 2018 điểm trong ngũ giác do đó tổng số đo là  $2018.360^\circ$

- Tổng các góc tại 5 đỉnh của ngũ giác là  $3.180^\circ$

Do đó ta có  $n.180^\circ = 3.180^\circ + 2018.360^\circ \Rightarrow n = 4039$

Như vậy ta có 4039 tam giác đôi một chỉ chung nhiều nhất một cạnh tạo thành từ 2023 điểm phân biệt để bài phủ kín hình ngũ giác. Vì diện tích của ngũ giác là 1 đơn vị nên luôn tồn tại một tam giác có diện tích không vượt quá  $\frac{1}{4039}$  đơn vị.

2, Ta có:  $x(y-1)^2 \geq 0$  với  $x, y > 0$

$$\Rightarrow xy^2 - 2xy + x \geq 0 \Rightarrow xy^2 + x \geq 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 + xy^2 + x \geq (x+y)^2$$

$$\Rightarrow y^2(x+1) + x(x+1) \geq (x+y)^2 \Rightarrow (y^2+x)(x+1) \geq (x+y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2+x} \leq \frac{x+1}{(x+y)^2} \text{ Đẳng thức xảy ra khi } y = 1$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{y^2+x} \leq \frac{x+1}{(x+y)^2} \text{ (đ) với } x, y > 0$$

Áp dụng BĐT(\*) ta có:

$$\frac{1}{a^2+b+c} \leq \frac{b+c+1}{(a+b+c)^2}$$

$$\frac{1}{a+b^2+c} \leq \frac{a+c+1}{(a+b+c)^2}$$

$$\frac{1}{a+b+c^2} \leq \frac{b+a+1}{(a+b+c)^2}$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được

$$Q = \frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{a+b^2+c} + \frac{1}{a+b+c^2} \leq \frac{2(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2}$$

$$\text{Ta chứng minh } \frac{2(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2} \leq 1$$

$$\text{Thật vậy: } \frac{2(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2} \leq 1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+1)(a+b+c-3) \geq 0 \text{ luôn đúng do } a+b+c \geq 3$$

$$\text{Suy ra } Q = \frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{a+b^2+c} + \frac{1}{a+b+c^2} \leq \frac{2(a+b+c)+3}{(a+b+c)^2} \leq 1$$

$$\text{Vậy GTLN của Q là 1 khi } \begin{cases} a+b+c-3=0 \\ a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$$