

CĐ14: PHẦN HÌNH HỌC

Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc
Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng
Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác
Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc
Dạng toán: Hình khối trong thực tiễn
Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp

Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc

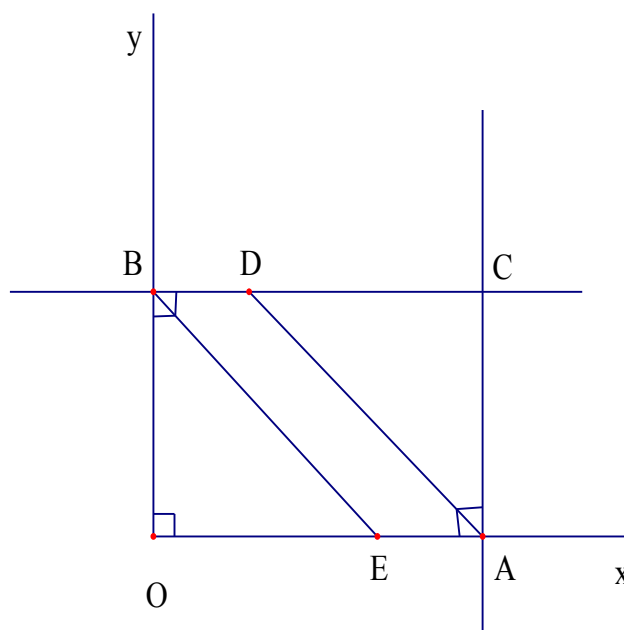
Câu 1. (HSG 7 huyện Ninh Giang 2022 - 2023)

Cho góc vuông xOy , trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA > OB$. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với Ox , qua B kẻ đường thẳng vuông góc với Oy . Hai đường thẳng này cắt nhau ở C .

a) Chứng minh $AC \perp BC$.

b) Kẻ phân giác của $\angle ACB$ cắt BC tại D , kẻ phân giác của $\angle ABC$ cắt OA tại E . Chứng minh $AD \parallel BE$.

Lời giải



$$\begin{cases} AC \perp Ox \\ OB \perp Ox \end{cases} \Rightarrow AC \parallel OB$$

a) Ta áp dụng quan hệ vuông góc song song có

Có $\begin{cases} AC \parallel OB \\ OB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AC \perp BC$

b) Có AD là phân giác của $\angle BAC$ nên $\angle BAO = \frac{1}{2} \angle BAC = 45^\circ$ (1)

BE là phân giác của $\angle ABC$ nên $\angle EBO = \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ$

Mà $\triangle OBE$, có $\angle O = 90^\circ \Rightarrow \angle OBE + \angle BEO = 90^\circ \Rightarrow \angle BEO = 45^\circ$ (2)

Từ (1) (2) $\Rightarrow \angle BEO = \angle BAO$

Hai góc này ở vị trí đồng vị nên $AD \parallel BE$.

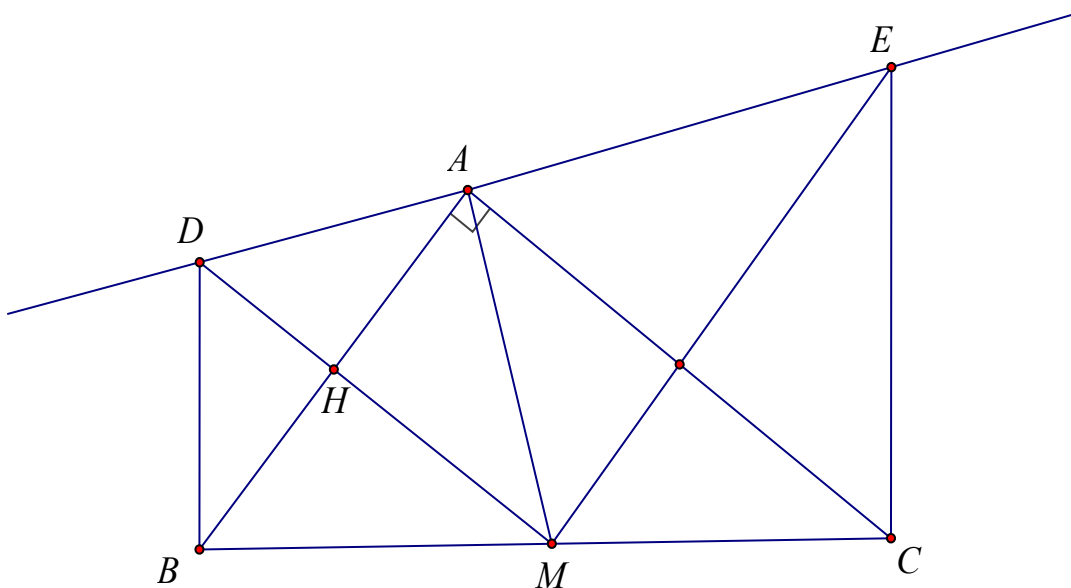
Câu 2. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, năm học 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường trung tuyến AM . Qua A kẻ đường thẳng d vuông góc với AM . Qua M kẻ các đường vuông góc với AB, AC chúng cắt d theo thứ tự ở D và E . Chứng minh rằng :

a) $BD \parallel CE$

b) $DE = BD + CE$

Lời giải



a) Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông: $MA = MB$

Gọi H là giao điểm của MD và AB

$\triangle AMB$ cân tại M có MH đường cao ứng với đáy

nên là đường trung trực, suy ra $DA = DB$.

Chứng minh được $\triangle MBD = \triangle MAD$ (c.c.c)

$\Rightarrow \angle MBD = \angle MAD = 90^\circ$

Do đó: $DB \perp BC$

Tương tự ta có: $EC \perp BC$

Vậy $BD \parallel CE$ (cùng vuông góc với BC) (đpcm)

b) Theo câu a) ta có $DB = DA$.

Tương tự: $EC = EA$

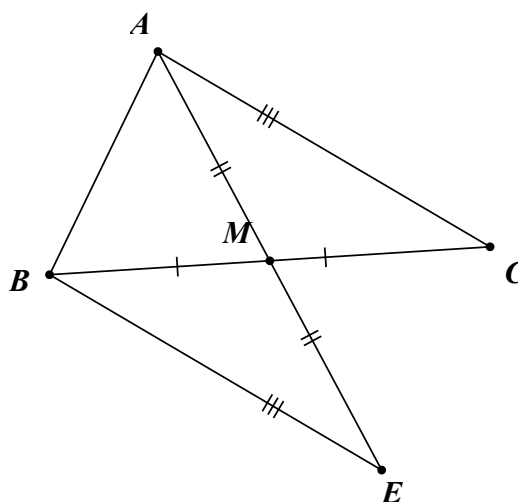
Suy ra $DE = DA + AE = BD + CE$

Vậy $DE = BD + CE$

Câu 3. (HSG 7 Huyện 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng $AC \parallel BE$.

Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$AM = EM$ (gt)

$\angle AMC = \angle EMB$ (đối đỉnh)

$BM = MC$ (gt)

Nên $\triangle AMC = \triangle EMB$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = EB$

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$, 2 góc ở vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC, EB cắt đường thẳng AE

$\Rightarrow AC \parallel BE$

Câu 4. (HSG 7 huyện Tân Tạo; huyện Phú Khánh 2018 - 2019; huyện Minh An 2016 – 2017)

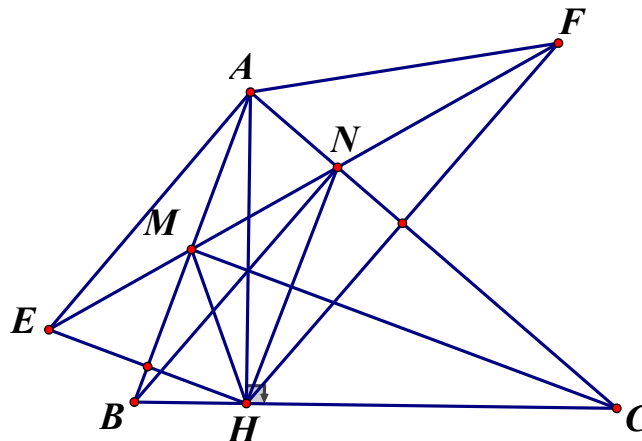
Cho tam giác ABC ($\angle BAC < 90^\circ$), đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC , đường thẳng EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$.

b) HA là phân giác của $\angle MHN$.

c) Chứng minh $CM \parallel EH, BN \parallel FH$.

Lời giải



a) Vì AB là trung trực của EH nên ta có: $AE = AH(1)$

Vì AC là trung trực của HF nên ta có: $AH = AF(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AE = AF$

b) Vì $M \in AB$ nên MB là phân giác $\angle EMH$

$\Rightarrow MB$ là phân giác ngoài góc M của tam giác MNH

Vì $N \in AC$ nên NC là phân giác $\angle FNH \Rightarrow NC$ là phân giác ngoài $\angle N$ của tam giác MNH

Do $MB \cap NC$ tại A nên HA là phân giác trong của $\triangle HMN$ hay HA là phân giác của $\angle MHN$.

c) Ta có: $AH \perp BC(gt)$ mà HM là phân giác $\angle MHN$

$\Rightarrow HB$ là phân giác ngoài của $\angle H$ của tam giác HMN

MB là phân giác ngoài của $\angle M$ của tam giác $HMN(cmt) \Rightarrow NB$ là phân giác trong góc N của tam giác $HMN \Rightarrow BN \perp AC$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau)

$\Rightarrow BN \parallel HF$ (cùng vuông góc với AC)

Chứng minh tương tự ta có: $EH \parallel CM$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Sơn Dương 2016 - 2017)

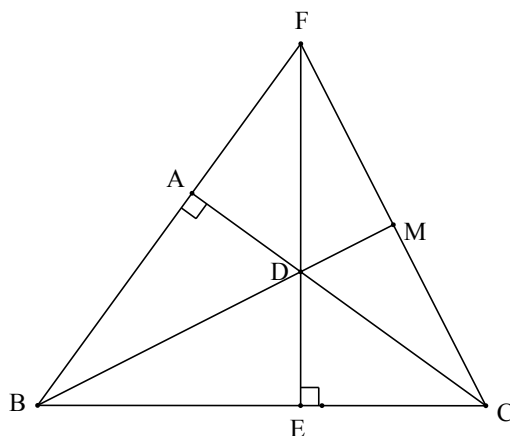
Cho tam giác ABC vuông góc tại A . Phân giác trong của B cắt cạnh AC tại điểm D . Từ D kẻ DE vuông góc với $BC(E \in BC)$. Tia ED và tia BA cắt nhau tại F .

a) So sánh DA và DC

b) Chứng minh $BD \perp FC$

c) Chứng minh $AE \parallel FC$

Lời giải



a) Ta có $\triangle ABD = \triangle EDB$ (ch-gn) vì có BD chung; $\angle ABD = \angle EDB$; $\angle A = \angle E = 90^\circ$
cho ta
 $\Rightarrow DA = DE$ (1)

Trong tam giác vuông EDC thì $DE < DC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DA < DC$

b) $\triangle ABD = \triangle EDB$ nên $AB = BE$ (hai cạnh tương ứng)

Ta có $\triangle EFB = \triangle ACB$ (g-c-g) vì có $\angle A = \angle E = 90^\circ$; $AB = BE$ và $\angle B$ chung, suy ra $BF = BC$
 $\Rightarrow \triangle FBC$ cân tại B

Mà BM là phân giác của $\angle B$ nên cũng là đường cao, suy ra $BM \perp FC$ (3) hay $BD \perp FC$

c) Ta dễ dàng thấy $BD \perp AE$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AE \parallel FC$

Câu 6. (Đề minh họa HSG 7 trường Lý Nam Đế- Hưng Hà 2022 - 2023)

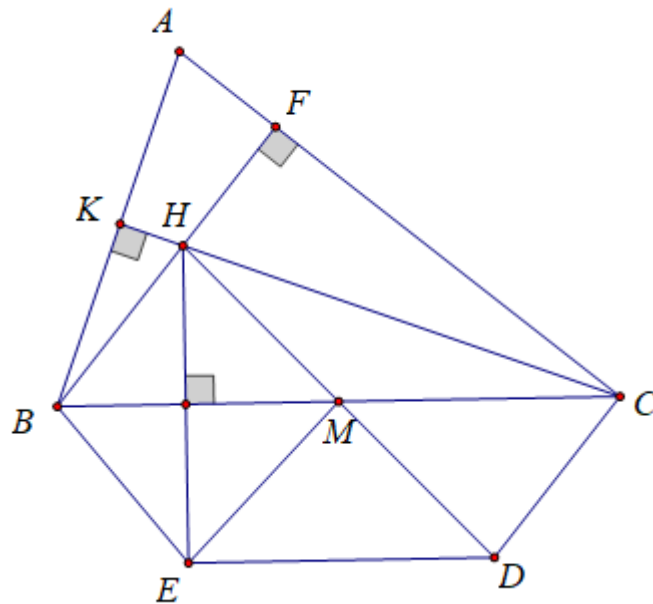
Cho tam giác ABC nhọn. Kẻ BF vuông góc với AC (F thuộc AC), kẻ CK vuông góc với AB (K thuộc AB), BF cắt CK tại H . Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MH lấy điểm D sao cho $MD = MH$

a) Chứng minh $DC \parallel BH$

b) Từ H kẻ HI vuông góc với BC (I thuộc BC), trên tia đối của tia HI lấy điểm E sao cho $IE = IH$. Chứng minh rằng: $BE = DC$

c) Chứng minh: $DE \parallel BC$

Lời giải



a) Chỉ ra $\triangle BHM = \triangle CMD$ (c - g - c)

Suy ra $\angle HBM = \angle CDM$ (hai góc tương ứng)

Mà hai góc này ở vị trí so le trong suy ra $DC \parallel BH$.

b) $\triangle BHM = \triangle CMD$ (cmt)

Suy ra $CD = BH$ (1)

Chứng minh $\triangle BIH = \triangle BIE$ (c - g - c)

Suy ra $BH = BE$ (2)

Từ (1) và (2) $BE = DC$.

$\triangle MIH = \triangle MIE$ (c - g - c)

c) Chứng minh

Suy ra $MH = ME$, mà $MH = MD$ (gt) nên $ME = MD$.

Vì $MH = ME$ suy ra $\triangle MEH$ cân tại M

Suy ra $\angle MHE = \angle MEH$ (3)

Vì $ME = MD$ suy ra $\triangle MDE$ cân tại M

Suy ra $\angle MDE = \angle MED$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle MEH + \angle MDE = \angle MEH + \angle MED = \angle BEH$

+) $\triangle HDE$ có $\angle MHE + \angle MDE + \angle BEH = 180^\circ$

$\Rightarrow 2\angle BEH = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle BEH = 90^\circ \Rightarrow ED \perp EH$ (5)

Mà $BC \perp EH$ (6) . Từ (5) và (6) suy ra $DE \parallel BC$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Kẻ $BF \perp AC$ ($F \in AC$) , kẻ $CK \perp AB$ ($K \in AB$) , BF cắt CK tại H .
Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MH lấy điểm D sao cho $MD = MH$.

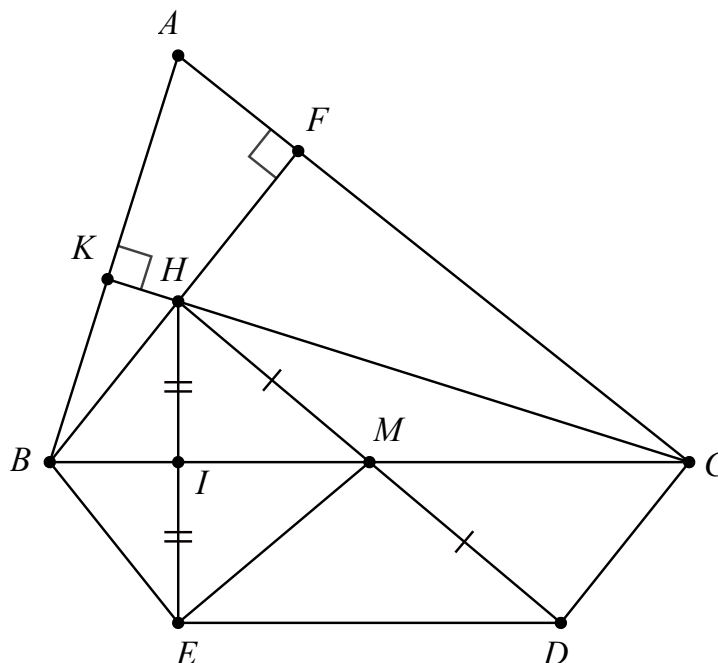
1. Chứng minh $DC \parallel BH$.

2. Từ H kẻ $HI \perp BC$ ($I \in BC$) , trên tia đối của tia IH lấy điểm E sao cho $IE = IH$. Chứng minh rằng:

a) $BE = DC$.

b) $DE \parallel BC$.

Lời giải



1. Chỉ ra $\triangle BMH = \triangle CMD$ (c.g.c)

Suy ra $\angle HBM = \angle DCM$ (hai góc tương ứng)

mà hai góc này ở vị trí so le trong suy ra $CD \parallel BH$

2.

a) Từ $\triangle BMH = \triangle CMD$ (cmt)

Suy ra $CD = BH$ (1)

Chứng minh $\triangle BIH = \triangle BIE$ (c.g.c)

Suy ra $BE = BH$ (2)

Từ (1) và (2) $CD = BE$

b) Chứng minh $\triangle MIH = \triangle MIE$ (c.g.c)

Suy ra $MH = ME$, mà $MH = MD$ (gt) nên $ME = MD$

Vì $ME = MH$ suy ra $\triangle MEH$ cân tại M

Suy ra $\widehat{MHE} = \widehat{MEH}$ (3)

Vì $MD = ME$ suy ra $\triangle MDE$ cân tại M

Suy ra $\widehat{MDE} = \widehat{MED}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{MEH} + \widehat{MDE} = \widehat{MEH} + \widehat{MED} = \widehat{DEH}$

Trong $\triangle HDE$ có $\widehat{MHE} + \widehat{MDE} + \widehat{DEH} = 180^\circ$ (Tổng ba góc trong của một tam giác)

$\Rightarrow 2.\widehat{DEH} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DEH} = 90^\circ$

Suy ra $DE \perp HE$

Mà $BC \perp HE$ nên $DE \parallel BC$.

Câu 8. (HSG 7 trường Ân Tường Đông 2014 - 2015)

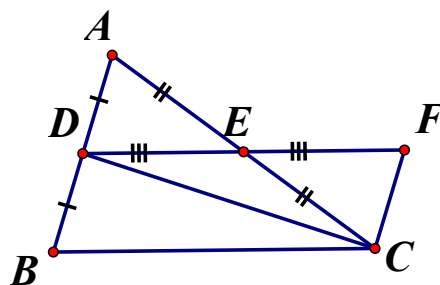
Cho tam giác ABC , D là trung điểm của AB , E là trung điểm của AC . Vẽ điểm F sao cho E là trung điểm của DF . Chứng minh rằng:

a) $AD = FC$ và $AB \parallel FC$

b) $\triangle BDC = \triangle FCD$

c) $DE \parallel BC$ và $DE = \frac{1}{2}BC$

Lời giải



a) Xét $\triangle ADE$ và $\triangle CFE$ có:

$AE = CE$ (gt)

$\widehat{AED} = \widehat{CEF}$ (đối đỉnh)

$DE = FE$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CFE$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = FC$ và $\widehat{DAE} = \widehat{ECF}$, mà 2 góc ở vị trí so le trong

$\Rightarrow AB \parallel FC$

b) Xét $\triangle BDC$ và $\triangle FCD$ có:

$BD = FC$ (cùng bằng AD)

$$\widehat{BDC} = \widehat{PCD} \text{ (so le trong)}$$

Cạnh DC chung

$$\Rightarrow \triangle BDC = \triangle FCD \text{ (c.g.c)}$$

$$c) \triangle BDC = \triangle FCD \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{FDC} \text{ mà 2 góc này ở vị trí so le trong}$$

$$\Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow DE = \frac{1}{2} DF = \frac{1}{2} BC$$

Câu 9. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

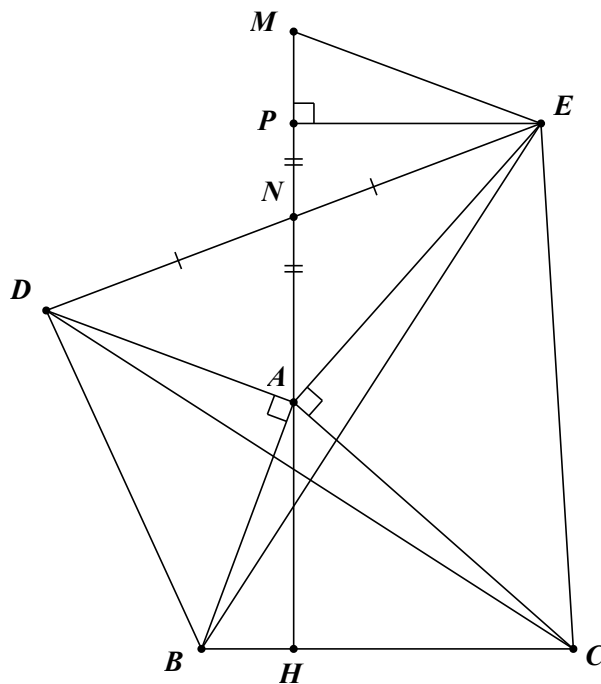
Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB ; AE vuông góc và bằng AC .

a) Chứng minh $DC \perp BE$.

b) Gọi N là trung điểm của DE . Trên tia đối của tia NA lấy M sao cho $NA = NM$. Chứng minh $AB = ME$, $\triangle ABC = \triangle EMA$.

c) Chứng minh $MA \perp BC$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ADC$ và $\triangle BAE$ ta có

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$AE = AC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{BAE} (= 90^\circ + \widehat{BAC})$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DC = BE$$

Xét $\triangle AIE$ và $\triangle TIC$ có:

$$\widehat{D_1} = \widehat{D_2} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{E_1} = \widehat{E_1} \text{ (}\Delta DAC = \Delta BAE\text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EAI} = \widehat{CTI}$$

$$\Rightarrow \widehat{CTI} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow DC \perp BE$$

$$\text{b) Ta có: } \Delta MNE = \Delta AND \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{MEN}, AD = ME$$

$$\text{mà } AD = AB \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow AB = ME \text{ (đpcm)} \quad (1)$$

$$\text{Vì } \widehat{D_1} = \widehat{MEN} \Rightarrow DA \parallel ME$$

$$\Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{AEM} = 180^\circ \text{ (trong cùng phía)}$$

$$\text{Mà } \widehat{BAC} + \widehat{BAE} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{AEM} \quad (2)$$

$$\text{Ta lại có } AC = AE \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } \Delta ABC = \Delta EMA \text{ (đpcm).}$$

$$\text{c) Kéo dài } MA \text{ cắt } BC \text{ tại H. Từ } E \text{ hạ } EP \perp MH$$

$$\text{Xét } \Delta AHC \text{ và } \Delta EPA \text{ có:}$$

$$\widehat{CAH} = \widehat{AEP} \text{ (cùng phụ với } \widehat{PAE}\text{)}$$

$$AE = CA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{PAE} = \widehat{HCA} \text{ (do } \Delta ABC = \Delta EMA\text{)}$$

$$\Rightarrow \Delta AHC = \Delta EPA$$

$$\Rightarrow \widehat{EPA} = \widehat{AHC}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$$

$$\text{Vậy } MA \perp BC \text{ (đpcm).}$$

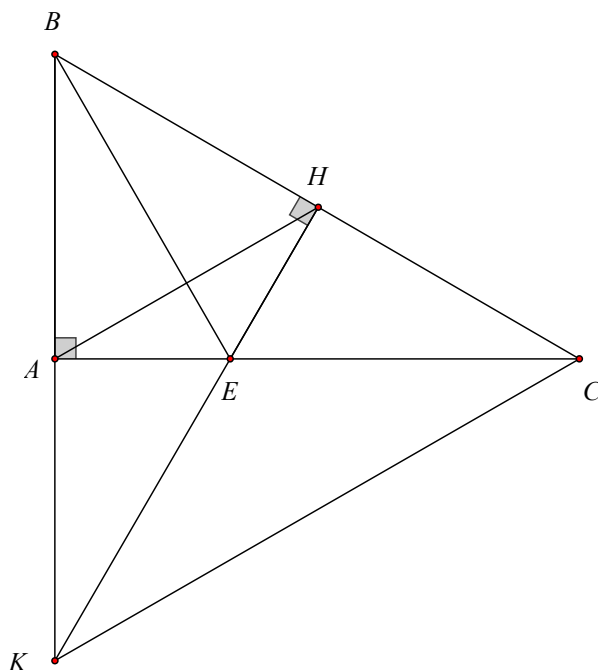
Câu 10. (HSG 7 huyện Tư Nghĩa, tỉnh Quảng Ngãi 2017 - 2018)

Cho ΔABC vuông tại A , đường phân giác BE . Kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$), gọi K là giao điểm của AB và EH . Chứng minh rằng:

$$\text{a) } BE \text{ là đường trung trực của đoạn thẳng } AH.$$

$$\text{b) } BE \perp CK.$$

Lời giải



a) Chứng minh rằng: BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH .

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle HBE$ có:

BE là cạnh chung

$$\angle BAC = \angle BHE (=90^\circ)$$

$$\angle ABE = \angle EBH \quad (\text{Vì } BE \text{ là đường phân giác của } \angle ABC).$$

$$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle HBE \quad (\text{Cạnh huyền – góc nhọn}).$$

$$\Rightarrow BA = BH, \quad EA = EH$$

$\Rightarrow B, E$ nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AH .

$\Rightarrow BE$ là đường trung trực của đoạn thẳng AH .

b) Chứng minh rằng: $BE \perp CK$.

Xét $\triangle BCK$ có:

$$CA \perp BK, \quad KH \perp BC \quad (\text{gt})$$

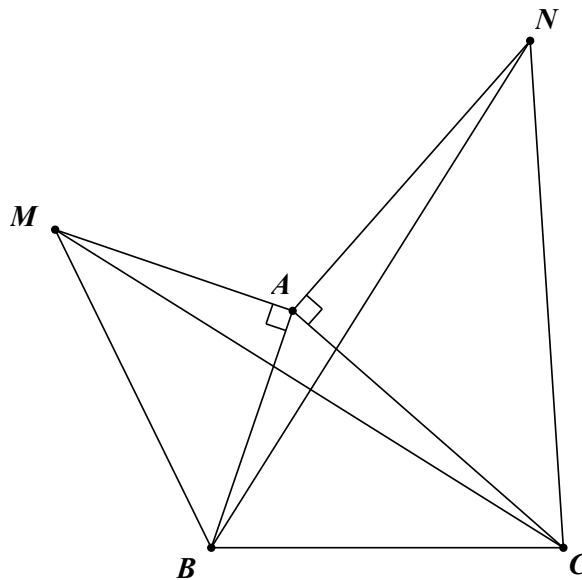
Mà KH cắt CA tại E .

$\Rightarrow E$ là trực tâm $\triangle BCK$, do đó BE là đường cao thứ ba nên $BE \perp CK$.

Câu 11. (HSG 7 Huyện Vị Thanh, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$. Chứng minh $BN \perp CM$.

Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$ có: $AM = AB$ ($\triangle AMB$ vuông cân)
 $AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)
 $\Rightarrow \angle MAC = \angle NAC (=90^\circ + \angle BAC) \Rightarrow \triangle AMC = \triangle ABN$ (c.g.c)

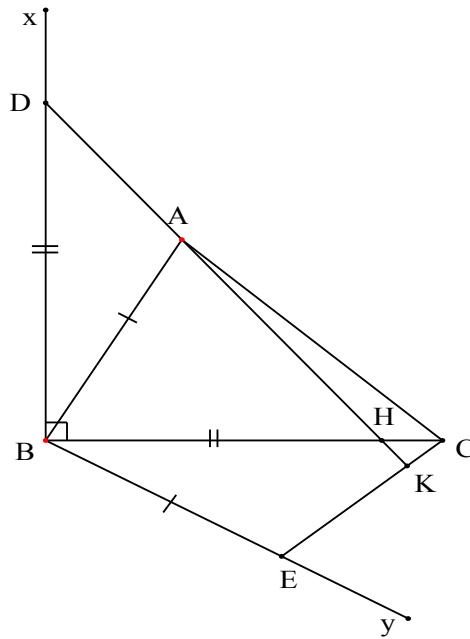
Gọi I là giao điểm của BN, AC . K là giao điểm của BN, MC
 Xét $\triangle KIC$ và $\triangle AIN$ có: $\angle INI = \angle KCI$ ($\triangle AMC = \triangle ABN$)
 $\angle AIN = \angle KIC$ (đối đỉnh)
 $\Rightarrow \angle KIC = \angle AIN = 90^\circ$, do đó: $MC \perp BN$.

Câu 12. (HSG 7 trường Hiệp Thạnh 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC có $\angle B < 90^\circ$. Trên nửa mặt phẳng có chứa A bờ BC , vẽ tia Bx vuông góc với BC , trên tia đó lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Trên nửa mặt phẳng có chứa C bờ AB , vẽ tia By vuông góc với BA , trên đó lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Chứng minh rằng:

- $DA = EC$
- $DA \perp EC$

Lời giải



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle EBC$ có: $AB = BE(gt)$ $\angle ABD = \angle EBC$ (cùng phụ $\angle ABC$) $BD = BC(gt)$
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBC(c.g.c) \Rightarrow DA = EC$

b) Gọi giao điểm của DA với BC và EC theo thứ tự là H và K

Ta có: $\triangle ABD = \triangle EBC$ (cmt) $\Rightarrow \sphericalangle ADB = \sphericalangle ECB \Rightarrow \sphericalangle BDH = \sphericalangle KCH$

ΔDBH và ΔCKH có: $\square BDH = \square KCH, \square DHB = \square HKC \Rightarrow \square DBH = \square CKH$

Do $\angle DBH = 90^\circ$ nên $\angle KHB = 90^\circ$. Vậy $DA \perp EC$

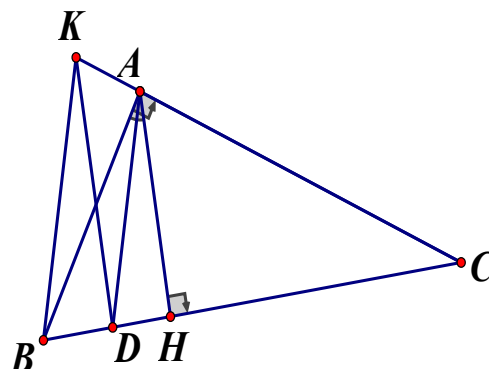
Câu 13. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ và đường cao AH . Tia phân giác của $\angle BAH$ cắt BH tại D. Trên tia CA lấy điểm K sao cho $CK = BC$.

a) Chứng minh $KB \parallel AD$.

b) Chứng minh $KD \perp BC$.

Lời giải



a) Chứng minh: $KB \parallel AD$.

Xét tam giác ABC vuông ở A có $\widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{CAD} = 90^\circ$

Có $AH \perp BC$ (gt) $\Rightarrow \triangle AHD$ vuông ở H

$\Rightarrow \widehat{HAD} + \widehat{ADH} = 90^\circ$ mà $\widehat{BAD} = \widehat{HAD}$ (vì AD là phân giác của $\widehat{BAH}$)

Nên $\widehat{EAD} = \widehat{ADH}$, $\Rightarrow \triangle ACD$ cân ở C $\Rightarrow \widehat{EAD} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2}$

$CK = BC$ (gt), $\Rightarrow \triangle CBK$ cân ở C $\Rightarrow \widehat{EKB} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2}$

Do đó $\Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{EKB}$, $\Rightarrow KB \parallel AD$ (đpcm).

b) Chứng minh: $KD \perp BC$

Ta có: $\triangle ACD$ cân ở C (cmt) $\Rightarrow AC = CD$

$\triangle CBK$ cân ở C (cmt), $\Rightarrow CK = BC$

$\Rightarrow DB = KA$

+ $\triangle CBK$ cân ở C $\Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{AKB}$

Xét $\triangle BKD$ và $\triangle KBA$ có:

$DB = KA$

$\widehat{DBK} = \widehat{AKB}$

KB là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle BKD = \triangle KBA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BDK} = \widehat{KAB} = 90^\circ$

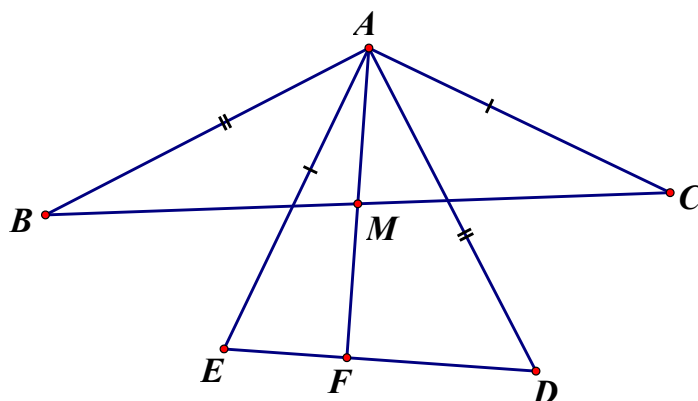
$\Rightarrow KD \perp BC$ (đpcm).

Câu 14. (HSG 7 huyện Phù Cát 2017 - 2018; huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho tam giác ABC có $\widehat{A}$ tù. Kẻ $AD \perp AB$ và $AD = AB$ (tia AD nằm giữa hai tia AB và AC). Kẻ $AE \perp AC$ và $AE = AC$ (tia AE nằm giữa hai tia AB và AC). Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $AM \perp DE$.

Lời giải

Cách 1:



Trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho $MF = MA \Rightarrow \triangle AMB = \triangle FMC$ (c.g.c)
 $\Rightarrow AB = AD = CF(1); \angle ABM = \angle FCM$ (2)

Từ (2) $\Rightarrow CF \parallel AB \Rightarrow \angle FCA + \angle BAC = 180^\circ$ (3)

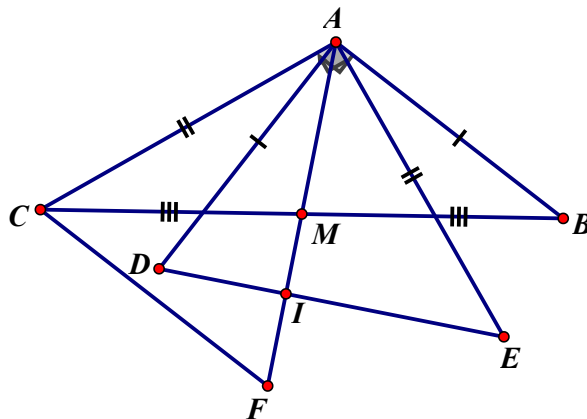
$AD \perp AB \Rightarrow \angle BAE + \angle EAD = \angle BAD = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BAE + \angle EAD + \angle EAD + \angle EAD = 180^\circ \Rightarrow \angle BAC + \angle EAD = 180^\circ$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow \angle FCA = \angle EAD \Rightarrow \triangle ADE = \triangle CFA$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AED = \angle CAF$

Mà $\angle CAF + \angle PAE = \angle AEF = 90^\circ$ nên $\angle AED + \angle PAE = 90^\circ$ hay $\angle AEF + \angle PAE = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle AFE$ vuông tại $F \Rightarrow AM \perp DE$

Cách 2:



Gọi I là giao điểm của DE và AM . Trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho $MA = MF$

Xét hai tam giác MAB và MFC có: $MB = MC(gt)$;

$MA = MF$ (theo cách vẽ); $\angle AMB = \angle FMC$ (hai góc đối đỉnh) do đó $\triangle MAB = \triangle MFC$ (c.g.c)

suy ra: $CF = AB = AD$; $\angle MBA = \angle MCF$ $AB \parallel CF$ (hai góc so le trong bằng nhau)

$\Rightarrow \angle FCA + \angle CAB = 180^\circ$ (1)

Mặt khác: $\angle CAE + \angle DAB = \angle CAF + \angle PAE + \angle BAF + \angle PAD = \angle PAE + \angle PAD + \angle CAB = 180^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle FCA = \angle PAE + \angle PAD = \angle BAE$

Xét hai tam giác $\triangle ACF$ và $\triangle EAD$ có:

$CF = AD$; $\angle FCA = \angle BAE$ (theo chứng minh trên); $CA = AE$ (gt)

do đó: $\triangle ACF = \triangle EAD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AED = \angle AEI = \angle CAF$

mà $\angle CAF + \angle PAE = \angle AEF = 90^\circ$

nên $\angle AEI + \angle PAE = 90^\circ$ do đó trong tam giác AIE

$$\angle AIE = 180^\circ - (\angle AEI + \angle IAE) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

ta có:

Vậy $DE \perp AM$

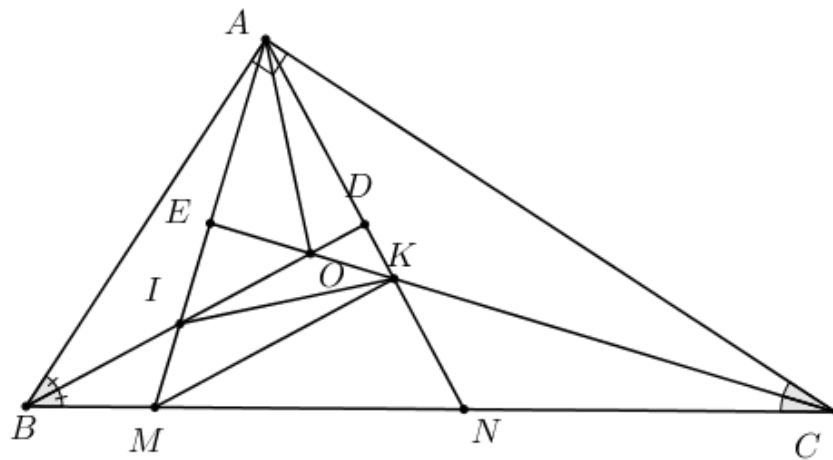
Câu 15. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB < AC$. Trên cạnh BC lấy điểm M và N sao cho $MC = CA, NB = BA$. Tia phân giác của góc B cắt AM tại I và cắt AN tại D , tia phân giác góc C cắt AN tại K và cắt AM tại E . Gọi O là giao điểm của BD và CE .

1. Tính góc $\angle BOC$.

2. Chứng minh: $BD \perp AN$ và $BD \parallel MK$.

Lời giải



$$B \Rightarrow \angle DBC = \angle DBA = \frac{1}{2} \angle ABC$$

1. Vì BD là tia phân giác của góc

$$C \Rightarrow \angle ECB = \angle ECA = \frac{1}{2} \angle ACB$$

+ Vì CE là tia phân giác của góc

$$\Rightarrow \angle DBC + \angle ECB = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB)$$

+ Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $(\angle ABC + \angle ACB) = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle DBC + \angle ECB = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ \quad \text{hay} \quad \angle OCB + \angle OBC = 45^\circ$$

Xét $\triangle OBC$ có $\angle BOC + \angle OCB + \angle OBC = 180^\circ \Rightarrow \angle BOC = 180^\circ - (\angle OCB + \angle OBC)$

Mà $\angle OCB + \angle OBC = 45^\circ$ nên $\angle BOC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Vậy $\angle BOC = 135^\circ$

2. Xét $\triangle ABD$ và $\triangle NBD$ có :

$$BA = BN$$

$$\angle DBA = \angle DBN$$

BD chung

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle NBD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle ADB = \angle NDB$$

Mà $\angle ADB + \angle NDB = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \angle ADB = \angle NDB = 90^\circ \Rightarrow BD \perp AN \text{ tại } D$$

+ Xét $\triangle MCK$ và $\triangle ACK$ có: $MC = CA$; $\angle MCK = \angle ACK$; CK chung.

$$\Rightarrow \triangle MCK = \triangle ACK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle KMC = \angle KAC$$

+ Vì $NB = BA \Rightarrow \triangle BNA$ cân tại $B \Rightarrow \angle BNA = \angle BAN$

$$\Rightarrow \angle KMC + \angle BNA = \angle KAC + \angle BAN = \angle BAC = 90^\circ \text{ hay } \angle KMN + \angle KNM = 90^\circ$$

+ Xét $\triangle KMN$ có $\angle MKN + \angle KMN + \angle KNM = 180^\circ$

$$\text{mà } \angle KMN + \angle KNM = 90^\circ$$

$$\text{nên } \angle MKN = 90^\circ \Rightarrow MK \perp AN \text{ tại } K$$

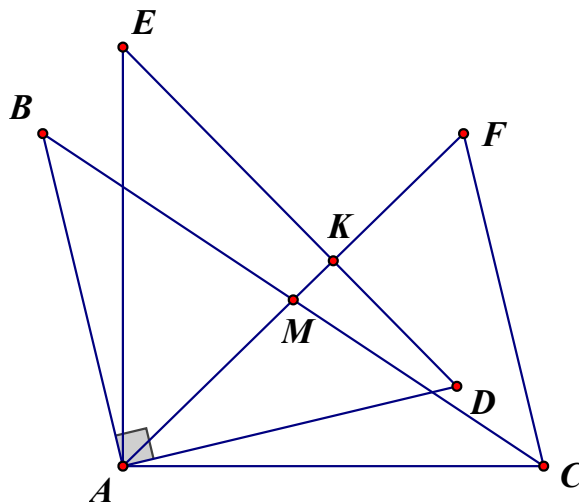
Mà $BD \perp AN$

$$\Rightarrow BD \parallel MK$$

Câu 16. (HSG 7 thành phố Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có góc A tù. Kẻ $AD \perp AB$ và $AD = AB$ (tia AD nằm giữa hai tia của AB và AC). Kẻ $AE \perp AC$ và $AE = AC$ (tia AE nằm giữa hai tia của AB và AC). Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng: $AM \perp DE$.

Lời giải



Trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho $AM = MF$

Gọi K là giao điểm của AF và ED .

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle FMC$, có

$$BM = CM \text{ (gt); } \angle AMB = \angle CMF \text{ (đối đỉnh); } AM = MF \text{ (cách vẽ)}$$

$$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta FMC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AB = AD = CF \quad (1) \quad \text{và} \quad \angle ABM = \angle FCM \quad (2)$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow CF \parallel AB \Rightarrow \angle FCA + \angle BAC = 180^\circ \quad (3)$$

$$AD \perp AB \Rightarrow \angle BAE + \angle EAD = \angle BAD = 90^\circ$$

$$AE \perp AC \Rightarrow \angle CAD + \angle EAD = \angle CAE = 90^\circ$$

$$\text{Do đó} \quad \angle BAE + \angle EAD + \angle CAD + \angle EAD = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAC + \angle EAD = 180^\circ \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \angle FCA = \angle EAD$$

Xét ΔADE và ΔCFA , có

$$AD = CF \text{ (gt); } \angle FCA = \angle EAD \text{ (cmt); } AC = AE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \Delta ADE = \Delta CFA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle AED = \angle CAF$$

$$\text{mà} \quad \angle CAF + \angle FAE = \angle CAE = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AED + \angle FAE = 90^\circ \quad \text{hay} \quad \angle AEK + \angle FAE = 90^\circ$$

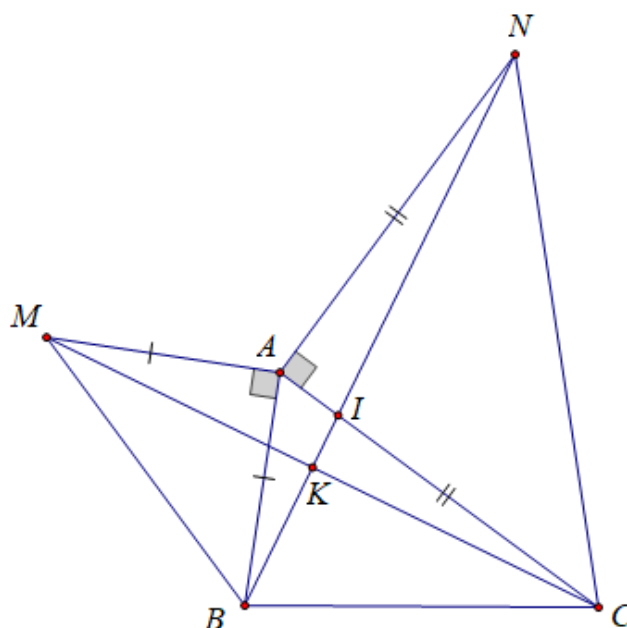
$$\Rightarrow \Delta AKE \text{ vuông tại } K \Rightarrow AM \perp DE$$

Câu 17. (HSG 7 huyện Sông Lô 2022 - 2023)

Cho ΔABC có góc A nhỏ hơn 90° . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm M sao cho ΔABM vuông cân tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B lấy điểm N sao cho ΔACN vuông cân tại A . Gọi K là giao điểm của BN và CM .

Chứng minh $\Delta AMC = \Delta ABN$ và $BN \perp CM$.

Lời giải



Chứng minh được $\angle MAC = \angle NAB \quad (= 90^\circ + \angle BAC)$

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$, có:

+ $AM = AB$ ($\triangle ABM$ vuông cân)

+ $AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)

+ $\widehat{MAC} = \widehat{NAB}$

Suy ra $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c.g.c)

Gọi I là giao điểm của BN với AC

Xét $\triangle KIC$ và $\triangle AIN$, có:

$\widehat{ANI} = \widehat{KCI}$ ($\triangle AMC = \triangle ABN$)

$\widehat{AIN} = \widehat{KIC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{IKC} = \widehat{NAI} = 90^\circ$

Do đó: $BN \perp CM$ tại K .

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>