**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN**

**KIÊN GIANG** **NĂM HỌC 2021 – 2022**

**ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN THI: TOÁN (chuyên)**

*(Đề thi gồm 02 trang)* Thời gian: **150** phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 05/06/2021.

**Bài 1 (1,5 điểm).** Cho biểu thức  (với , và )

**a)** Rút gọn biểu thức *A*.

**b)** Tính giá trị biểu thức *A* tại .

**Bài 2 (1,0 điểm)** Tìm tất cả các số thực  sao cho phương trình (ẩn )  có hai nghiệm là  và .

**Bài 3 (1,0 điểm)** Giải hệ phương trình sau:



**Bài 4 (1,0 điểm)** Cho hình vuông  có cạnh bằng 8. Trên cạnh , lấy điểm  sao cho . Gọi  là giao điểm của đường thẳng  và đường thẳng vuông góc với  tại . Gọi  là trung điểm của . Hãy tính độ dài đoạn thẳng .

**Bài 5 (2,5 điểm).** Cho  là hai đường tròn, cắt nhau tại điểm , sao cho  là góc tù. Tiếp tuyến tại  của  cắt  tại điểm thứ hai  (khác ). Tiếp tuyến tại  của  cắt  tại điểm thứ hai  (khác ).

**a)** Trên cung  không chứa  của , lấy điểm , khác  và , sao cho đường thẳng  cắt cung  không chứa  của  tại điểm , khác  và . Chứng minh rằng đường thẳng  song song với đường thẳng .

**b)** Gọi  là điểm đối xứng của  qua . Chứng minh rằng  là tứ giác nội tiếp.

**Bài 6 (1,5 điểm)**

**a)** Cho  là các số nguyên tố thỏa mãn . Chứng minh rằng  hoặc  là số chính phương.

**b)** Tìm tất cả các số nguyên tố , sao cho tồn tại số nguyên dương  để  là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của 11.

**Bài 7 (1,0 điểm).** Có bốn căn phòng nằm liên tiếp nhau, thành một hàng ngang. Có một con chuột trốn trong các căn phòng đó; mỗi ngày nó trốn trong một căn phòng. Có một chú mèo tìm cách bắt con chuột này. Cứ mỗi tối, mèo ta vào một căn phòng, và nếu con chuột đang trốn ở căn phòng ấy thì nó sẽ bị mèo bắt. Biết rằng, nếu chưa bị mèo bắt mỗi sáng, con chuột lại chạy sang trốn ở căn phòng nằm ngay bên cạnh. Hỏi chú mèo có thể đảm bảo chắc chắn sẽ bắt được con chuột sau tối đa bốn tối hay không? Vì sao?

**Bài 8 (0,5 điểm).** Cho  là các số thực lớn hơn 2021, thỏa mãn . Chứng minh rằng, ta có bất đẳng thức sau:

.

Đáp án

**Bài 1.**

**a) (1,0 điểm)** Rút gọn biểu thức

Ta có: 

**b) (0,5 điểm)**

ta có 

do đó: 

**Bài 2. (1,0 điểm)** Theo định lí Vi-ét (thuận và đảo),  là các số thực thỏa mãn yêu cầu đề bài khi và chỉ khi



Với  thỏa mãn (1) ta có 

Thay  vào (3) ta được 

Thay  vào (3) ta được   
Vậy có tất cả hai cặp số thực  thỏa mãn yêu cầu là .

**Bài 3. (1,0 điểm)** Giải hệ phương trình sau:



Điều kiện:  và . (1)

Với điều kiện đó, ta có:





Ta có:



Thay  vào (2), ta được .

Cặp số  thỏa mãn (1). Vì thế, cặp số đó là nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho.

**Bài 4. (1,0 điểm)** Cho hình vuông  có cạnh bằng 8. Trên cạnh , lấy điểm  sao cho . Gọi  là giao điểm của đường thẳng  và đường thẳng vuông góc với  tại . Gọi  là trung điểm của . Hãy tính độ dài đoạn thẳng .

A picture containing text, antenna

Description automatically generated

Xét hai tam giác vuông  và , ta có:

, (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

Do đó tam giác  (cạnh góc vuông – góc nhọn). Suy ra,  (1).

Qua  kẻ đường thẳng song song  cắt  tại .

Xét tam giác :

Do  là trung điểm của  và , nên  là trung điểm của . Vì thế  (theo (1)). Suy ra,  (2)

Do  tương ứng là trung điểm của , nên  là đường trung bình của tam giác. Do đó, .

Xét tam giác vuông (tại *C*) *MCE*, theo định lí Pitago, ta có:

(do (2))

.

Vì thế .

**Bài 5.** Cho  là hai đường tròn, cắt nhau tại điểm , sao cho  là góc tù. Tiếp tuyến tại  của  cắt  tại điểm thứ hai  (khác ). Tiếp tuyến tại  của  cắt  tại điểm thứ hai  (khác ).

**a) (1,0 điểm)** Trên cung  không chứa  của , lấy điểm , khác  và , sao cho đường thẳng  cắt cung  không chứa  của  tại điểm , khác  và . Chứng minh rằng đường thẳng  song song với đường thẳng .

Diagram

Description automatically generated

Với giả thuyết  là góc tù, ta có thế hình như ở trên.

Xét , ta có:

 (góc nọi tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây, cùng chắn cung *AM* không chứa *D*). (1)

Xét , ta có:

 (hai góc nội tiếp cùng chắn cung *MB* không chứa *A*). (2)

Từ (1) và (2), suy ra, .

Do đó,  (vì có hai góc ở vị trí so le trong bằng nhau).

**b) (1,5 điểm)** Gọi  là điểm đối xứng của  qua . Chứng minh rằng  là tứ giác nội tiếp.

.

Pie chart

Description automatically generated

Xét  ta có:

 (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây, cùng chắn cung *AM* không chứa *D*). (3)

Xét  ta có

 (góc tạo bởi tiếp tuyến và một dây, góc nội tiếp, cùng chắn cung *AM* không chứa *B*) (4)

Từ (3) và (4), suy ra, .

Do đó, ; mà (gt), nên . (5)

Do trong một tam giác, mỗi góc ngoài bằng tổng hai góc trong không kề với nó, nên cộng (3) và (4), vế theo vế, ta được:

 (6)

Từ (5) và (6), suy ra, .

Do đó, .

Vì thế, ta có:



Suy ra, . Do đó,  là tứ giác nội tiếp.

**Bài 6. a) (1,0 điểm)** Cho  là các số nguyên tố thỏa mãn . Chứng minh rằng  hoặc  là số chính phương.

Vì  là các số nguyên tố nên . Do đó, . Mà  là nguyên tố nên *r* là số lẻ.

Vì thế,  là một số chẵn. Suy ra, trong hai số , có ít nhất một số bằng 2.

- Nếu  thì . Do đó:

,

Là một số chính phương.

- Nếu  thì . Do đó

 là một số chính phương

**b)** Tìm tất cả các số nguyên tố , sao cho tồn tại số nguyên dương  để  là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của 11.

Giả sử *q* là số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó, sẽ tồn tại các số nguyên dương

 sao cho . (1)

Do  nên ; suy ra . Vì thế, từ (1), ta có:

. (2)

Do  nên từ (1) suy ra, ; mà 11 là số nguyên tố, nên . (3)

Từ (2) và (3) suy ra, . Do đó, ; mà  là số nguyên tố nên .

Ngược lại, với , ta có: .

Vậy có duy nhất số *q* thỏa yêu cầu của đề bài là .

**Bài 7 (1,0 điểm).** Có bốn căn phòng nằm liên tiếp nhau, thành một hàng ngang. Có một con chuột trốn trong các căn phòng đó; mỗi ngày nó trốn trong một căn phòng. Có một chú mèo tìm cách bắt con chuột này. Cứ mỗi tối, mèo ta vào một căn phòng, và nếu con chuột đang trốn ở căn phòng ấy thì nó sẽ bị mèo bắt. Biết rằng, nếu chưa bị mèo bắt mỗi sáng, con chuột lại chạy sang trốn ở căn phòng nằm ngay bên cạnh. Hỏi chú mèo có thể đảm bảo chắc chắn sẽ bắt được con chuột sau tối đa bốn tối hay không? Vì sao?

Câu trả lời là "có". Lần lượt, từ trái qua phải, đánh số thứ tự các căn phòng bởi 1,2,3,4. Với mỗi , gọi căn phòng được đánh số  là "phòng  ". Trong phần trình bày dưới đây, thứ tự của các ngày được tính từ ngày đầu tiên mèo vào dãy phòng để lùng bắt chuột. Xét lịch trình lùng bắt chuột như sau của mèo:

- Tối ngày 1: Vào phòng 2 ;

- Tối ngày 2 : Vào phòng 3 ;

- Tối ngày 3: Vào phòng 3 ;

- Tối ngày 4: Vào phòng 2 .

Khi đó, nếu ngày 1, chuột trốn ở phòng 2 hoặc phòng 4, thì mèo sẽ bắt được chuột vào tối ngày 1, hoặc vào tối ngày 2 (bắt được vào tối ngày 1 nếu ngày 1 chuột trốn ở phòng , và bắt được vào tối ngày 2 nếu ngày 1 chuột trốn ở phòng 4).

Nếu ngày 1, chuột trốn ở phòng 1 hoặc phòng 3, thì nó s thoát được mèo trong hai tối đầu tiên. Tuy nhiên, do sang ngày 3, theo cách trốn của mình, chuột sẽ lại trốn ở phòng 1 hoặc phòng 3 , nên nó sẽ bị mèo bắt vào tối ngày 3 , hoặc vào tối ngày 4 (bị bắt vào tối ngày 3 , nếu ngày 3 nó trốn ở phòng 3; và bị bắt vào tối ngày 4, nếu ngày 3 nó trốn ở phòng 1 ). Vậy, với lịch trình lùng bắt nêu trên, mèo sẽ bắt được chuột, sau tối đa bốn tối. Do đó, câu trả lời cho câu hỏi của bài ra là "có".

**Lưu ý:** *Lịch trình lùng bắt trên đây không phải là lịch trình duy nhất để mèo đạt được mục tiêu đặt ra ở đề bài.*

**Bài 8. (0,5 điểm).** Cho  là các số thực lớn hơn 2021, thỏa mãn . Chứng minh rằng, ta có bất đẳng thức sau:

.

Từ giả thuyết đề bài suy ra 

Do đó 

Suy ra  (\*)

Do  nên . Vì thế, bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki cho hai bộ ba số thực dương  và , từ (\*) ta được:



Do đó, .

(Đẳng thức xảy ra khi )