

DẠNG 11**Tìm m để hàm số, đồ thị hàm số trùng phương có cực trị TMDK**

- Câu 1:** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$
A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = \pm 4$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m = 4$.
- Câu 2:** Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có điểm cực đại $A(0; -3)$ và điểm cực tiểu $B(-1; -5)$. Tính giá trị của $P = a + 2b + 3c$.
A. $P = 3$. **B.** $P = -5$. **C.** $P = -9$. **D.** $P = -15$.
- Câu 3:** Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (2m-1)x^2 + m-2$ chỉ có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu.
A. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$. **D.** $m \leq \frac{1}{2}$.
- Câu 4:** Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?
A. $(-1; 0)$. **B.** $(2; 3)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(1; 2)$.
- Câu 5:** Cho hàm trùng phương $y = f(x) = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 - 8$ có đồ thị (C) . Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị (C) . Để tam giác ABC đều thì giá trị tham số m nằm trong khoảng nào sau đây?
A. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0; \frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **D.** $(1; 2)$.
- Câu 6:** Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 1$ có duy nhất một điểm cực tiểu. Số phần tử của tập S bằng
A. 19. **B.** 21. **C.** 20. **D.** 41.
- Câu 7:** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$. Tổng bình phương các giá trị m để hàm số có ba cực trị và đường tròn qua ba cực trị đó có bán kính bằng 4, gần với số nguyên nào nhất trong các số nguyên sau?
A. 8. **B.** 9. **C.** 16. **D.** 7.
- Câu 8:** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 2$. Tổng bình phương các giá trị m để hàm số có ba cực trị và đường tròn đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số có bán kính bằng 4, gần với số nguyên nào nhất trong các số nguyên sau?
A. 8. **B.** 9. **C.** 16. **D.** 7.
- Câu 9:** Cho hàm số $y = mx^4 - (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có một điểm cực đại
A. $-\frac{1}{2} \leq m < 0$. **B.** $m \leq -\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$. **D.** $m \geq -\frac{1}{2}$.

- Câu 10:** Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 3$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành một tam giác và một hình thang biết rằng tỉ số diện tích tam giác nhỏ được chia ra và diện tích tam giác ABC bằng $\frac{4}{9}$
- A. $m = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$. B. $m = \frac{-1+\sqrt{15}}{2}$. C. $m = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. D. $m = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$.
- Câu 11:** Với tất cả giá trị nào của m thì hàm số $y = mx^4 + (m-2)x^2 + 1 + 2m$ chỉ có một cực trị:
- A. $m \geq 2$. B. $0 \leq m \leq 2$. C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$. D. $m \leq 0$.
- Câu 12:** Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^4 + 2(m^2+3)x^2 + 2$ có 3 điểm cực trị sao cho giá trị cực đại của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $m = 0$. B. $m = -3$. C. $m = -1$. D. $m = -2$.
- Câu 13:** Cho hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích là lớn nhất.
- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.
- Câu 14:** Cho biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có 3 điểm cực trị A, B, C cùng với điểm $D(0; -3)$ là 4 đỉnh của một hình thoi. Gọi S là tổng các giá trị m thỏa mãn đề bài thì S thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $S \in (2; 4)$. B. $S \in \left(\frac{9}{2}; 6\right)$. C. $S \in \left(1; \frac{5}{2}\right)$. D. $S \in \left(0; \frac{5}{2}\right)$.
- Câu 15:** Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng?
- A. $\sqrt{2} - 1$. B. $\sqrt{2} + 1$. C. $\sqrt{2}$. D. 1.
- Câu 16:**) Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1?
- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 17:** Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng
- A. 2. B. 4. C. 8. D. 6.
- Câu 18:** Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m-3)x^2 + m^2$ không có điểm cực đại?
- A. 4. B. 2. C. 5. D. 0.
- Câu 19:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có giá trị cực tiểu bằng -1 . Tổng các phần tử thuộc S là
- A. -2 . B. 0. C. 1. D. -1 .
- Câu 20:** Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng
- A. 2. B. 4. C. 8. D. 6.

Câu 21: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 3m^2$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác nhận $G(0;7)$.

- A. $m = 1$. B. $m = -\sqrt{\frac{3}{7}}$. C. $m = -1$. D. $m = -\sqrt{3}$.

Câu 22: Cho hai đường cong $(C_1): y = x^4 - (m+1)x^2 + 2$ và $(C_2): y = 2(x+1)^4 - 4x^2 - 8x + 3m$. Biết rằng mỗi đường cong đều có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác đồng thời các tam giác đồng dạng với nhau. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(1;2)$. B. $(0;1)$. C. $(2;3)$. D. $(3;4)$.

Câu 23: Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m \in (6;9)$. B. $m \in (-6;-3)$. C. $m \in (-3;2)$. D. $m \in (2;6)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

- Câu 1:** Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0;1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$
- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = \pm 4$. C. $m = \pm 2$. D. $m = 4$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Để hàm số có 3 cực trị thì $m > 0$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(\pm\sqrt{m}) = 1 - m^2 \end{cases}, \text{ suy ra } A(0;1), B(\sqrt{m}; 1 - m^2), C(-\sqrt{m}; 1 - m^2).$$

$$BC = 4 \Leftrightarrow \sqrt{4m} = 4 \Leftrightarrow m = 4.$$

- Câu 2:** Cho đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có điểm cực đại $A(0;-3)$ và điểm cực tiểu $B(-1;-5)$. Tính giá trị của $P = a + 2b + 3c$.
- A. $P = 3$. B. $P = -5$. C. $P = -9$. D. $P = -15$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đồ thị hàm số đi qua điểm } A(0;-3) \text{ và } B(-1;-5) \Rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ a + b + c = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ c = -3 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow y' = 4ax^3 + 2bx.$$

$$\text{Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu } B(-1;-5) \Rightarrow -4a - 2b = 0. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} a + b = -2 \\ -4a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

$$\text{Với } \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow y = 2x^4 - 4x^2 - 3 \Rightarrow y' = 8x^3 - 8x \Rightarrow y'' = 24x^2 - 8.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

$$y''(0) = -8 < 0 \Rightarrow A(0;-3) \text{ là điểm cực đại.}$$

$$y''(-1) = 16 > 0 \Rightarrow B(-1;-5) \text{ là điểm cực tiểu.}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow P = a + 2b + 3c = -15.$$

- Câu 3:** Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (2m-1)x^2 + m-2$ chỉ có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu.

A. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$

B. $m \leq 0$.

C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

D. $m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $m = 0$, khi đó $y = -x^2 - 2$ là hàm số bậc hai có $a = -1 < 0$ nên đồ thị là Parabol có bề lõm hướng xuống nên có 1 cực đại mà không có cực tiểu. Suy ra $m = 0$ thỏa mãn đề bài.

Xét $m \neq 0$, khi đó $y = mx^4 + (2m-1)x^2 + m-2$ là hàm số bậc 4 dạng trùng phương.

Để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (2m-1)x^2 + m-2$ chỉ có một điểm cực đại mà không có điểm cực

$$\text{tiểu thì } \begin{cases} m < 0 \\ m(2m-1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m < 0.$$

Vậy $m \leq 0$.

Câu 4: Để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 0)$.

B. $(2; 3)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

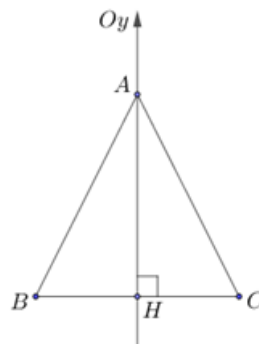
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

+) Đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ (*).

+) Với $m > 0$, ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases}$

Gọi $A(0; m-1), B(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1), C(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.



Vì $A \in Oy$; B và C đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại A (tham khảo hình vẽ).

Gọi $H = BC \cap Oy \Rightarrow AH \perp BC$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = 2$$

$$\Leftrightarrow |(y_A - y_H)(x_C - x_B)| = 4 \quad (\text{với } y_H = y_B = y_C)$$

$$\Leftrightarrow |m^2 \cdot 2\sqrt{m}| = 4 \Leftrightarrow m^2 \sqrt{m} = 2 \Rightarrow m = \sqrt[5]{4} \in (1; 2).$$

Câu 5: Cho hàm trùng phương $y = f(x) = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 - 8$ có đồ thị (C) . Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị (C) . Để tam giác ABC đều thì giá trị tham số m nằm trong khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{4}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4(m+1)x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \end{cases}.$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow m > -1. \text{ Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{m+1} \\ x = -\sqrt{m+1} \end{cases}.$$

Đồ thị (C) có ba điểm cực trị là $A(0; m^2 - 8)$, $B(\sqrt{m+1}; -(m+1)^2 + m^2 - 8)$ và $C(-\sqrt{m+1}; -(m+1)^2 + m^2 - 8)$. Ta có $AB = AC = \sqrt{m+1 + (m+1)^4}$.

$$\text{Do đó tam giác } ABC \text{ đều} \Leftrightarrow AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{m+1 + (m+1)^4} = \sqrt{4(m+1)}$$

$$\Leftrightarrow m+1 + (m+1)^4 = 4(m+1) \Leftrightarrow (m+1)^4 - 3(m+1) = 0 \Leftrightarrow (m+1) \cdot [(m+1)^3 - 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = 0 \\ (m+1)^3 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -1 + \sqrt[3]{3} \end{cases}. \text{ So điều kiện } m > -1 \text{ ta nhận } m = -1 + \sqrt[3]{3}.$$

Câu 6: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 1$ có duy nhất một điểm cực tiểu. Số phần tử của tập S bằng

- A. 19. B. 21. C. 20. D. 41.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 1$ có duy nhất một điểm cực tiểu là $a = 1 > 0$ và phương trình $y' = 0$ có duy nhất một nghiệm. Ta có:

$$y' = 4x^3 + 4(m-2)x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{cases} \quad (*)$$

Để phương trình $y' = 0$ có duy nhất một nghiệm $x = 0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất $x = 0 \Leftrightarrow 2 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$. Vậy $m \in \{2, 3, \dots, 20\}$ hay có 19 giá trị của tham số $m \in [-20; 20]$ thỏa mãn.

A. $-\frac{1}{2} \leq m < 0$. B. $m \leq -\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$. D. $m \geq -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 4mx^3 - 2(2m+1)x = 2x(2mx^2 - 2m - 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 = 2m + 1 \end{cases}$

* $m = 0$ ta có $y = -x^2 + 1$. Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

* $m \neq 0$ để hàm số có một điểm cực đại khi $\begin{cases} m < 0 \\ 2m + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 0$.

Vậy $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$ thì hàm số có một điểm cực đại.

Câu 10: Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 3$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành một tam giác và một hình thang biết rằng tỉ số diện tích tam giác nhỏ được chia ra và diện tích tam giác ABC bằng $\frac{4}{9}$

A. $m = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$. B. $m = \frac{-1+\sqrt{15}}{2}$. C. $m = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. D. $m = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 3$.

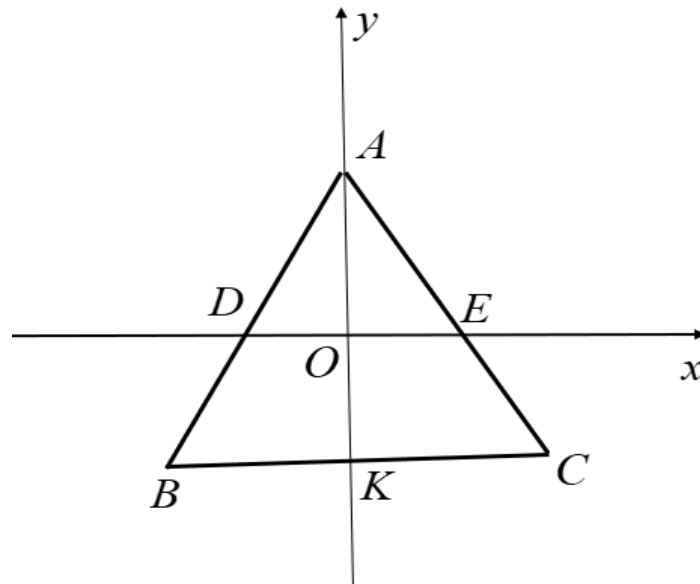
$y' = 4x^3 - 4(m+1)x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m+1 \end{cases}$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > -1$.

Khi $m > -1$, đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; 2m+3)$, $B(-\sqrt{m+1}; -m^2+2)$, $C(\sqrt{m+1}; -m^2+2)$.

Ta có $A \in Oy$, B, C đối xứng nhau qua $Oy \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A .



Trục hoành chia tam giác ABC thành một tam giác và một hình thang $\Rightarrow \begin{cases} 2m+3 > 0 \\ -m^2+2 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m > \sqrt{2} \\ m < -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{2} \\ -\frac{3}{2} < m < -\sqrt{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m > -1$ ta được $m > \sqrt{2}$.

Khi đó, gọi D, E lần lượt là giao điểm của trục Ox và các cạnh AB, AC , K là giao điểm của BC và Oy .

$$\text{Ta có } \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AO}{AK} \right)^2 = \left(\frac{y_A}{y_A - y_B} \right)^2 = \left(\frac{2m+3}{m^2+2m+1} \right)^2.$$

$$\text{Mà } \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{2m+3}{m^2+2m+1} \right)^2 = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Vì } m > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2m+3}{(m^2+2m+1)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1+\sqrt{15}}{2} \\ m = \frac{1-\sqrt{15}}{2} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1+\sqrt{15}}{2}.$$

Vậy $m = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 11: Với tất cả giá trị nào của m thì hàm số $y = mx^4 + (m-2)x^2 + 1 + 2m$ chỉ có một cực trị:

- A. $m \geq 2$. B. $0 \leq m \leq 2$. C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$. D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Nếu $m = 0$ thì $y = -2x^2 + 1$ là hàm bậc hai nên chỉ có duy nhất một cực trị.

Khi $m \neq 0$, ta có: $y' = 4mx^3 + 2(m-2)x = 2x[2mx^2 + (m-2)]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{2-m}{2m} \end{cases}$.

Để hàm số có một cực trị khi $\frac{2-m}{2m} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m < 0 \end{cases}$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Câu 12: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^4 + 2(m^2 + 3)x^2 + 2$ có 3 điểm cực trị sao cho giá trị cực đại của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = 0$.

B. $m = -3$.

C. $m = -1$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = -x^4 + 2(m^2 + 3)x^2 + 2$

Ta có $y' = -4x^3 + 4(m^2 + 3)x$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4(m^2 + 3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m^2 + 3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn có 3 điểm cực trị với $\forall m$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{m^2+3}$	0	$\sqrt{m^2+3}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	y_{CD}	y_{CT}	y_{CD}	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại khi $x = \pm\sqrt{m^2 + 3}$.

Giá trị cực đại của hàm số: $y_{CS} = -(\sqrt{m^2 + 3})^4 + 2(m^2 + 3)^2 + 2 = (m^2 + 3)^2 + 2$.

$\Rightarrow \min y_{CS} = 11$ khi $m = 0$.

Câu 13: Cho hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích là lớn nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m = 0$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(1 - m^2)x = 4x[x^2 - (1 - m^2)]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 - m^2 \end{cases}$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi $1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là: $A(0; m + 1)$; $B(-\sqrt{1 - m^2}; -m^4 + 2m^2 + m)$;

$C(\sqrt{1 - m^2}; -m^4 + 2m^2 + m)$.

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(0; -m^4 + 2m^2 + m)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AH} = (0; -(1-m^2)^2)$; $\overrightarrow{BC} = (2\sqrt{1-m^2}; 0)$.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} (1-m^2)^2 \cdot 2\sqrt{1-m^2} = (1-m^2)^2 \cdot \sqrt{1-m^2}$.

Mà $m^2 \geq 0; \forall m \Rightarrow 1-m^2 \leq 1 \Rightarrow S \leq 1$.

Dấu “=” xảy ra khi $m = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 0$.

Câu 14: Cho biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có 3 điểm cực trị A, B, C cùng với điểm $D(0; -3)$ là 4 đỉnh của một hình thoi. Gọi S là tổng các giá trị m thỏa mãn đề bài thì S thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $S \in (2; 4)$. B. $S \in \left(\frac{9}{2}; 6\right)$. C. $S \in \left(1; \frac{5}{2}\right)$. D. $S \in \left(0; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

$$y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4 \quad (1)$$

Hàm số (1) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m > 0 \Leftrightarrow m > 0$ (2)

Với $m > 0$, ta có

$$y' = 4x^3 - 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = m^4 - 2m^2 \\ x = \sqrt{m} \Rightarrow y = m^4 - 3m^2 \\ x = -\sqrt{m} \Rightarrow y = m^4 - 3m^2 \end{cases}$$

Vậy 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) là $A(0; m^4 - 2m^2); B(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2); C(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$. Vì tứ giác $ABDC$ có hai đường chéo vuông góc, do đó $ABDC$ là hình thoi $\Leftrightarrow$ hai đường chéo của tứ giác $ABDC$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường $\Leftrightarrow y_A + y_D = y_B + y_C \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 - 3 = 2m^4 - 6m^2$

$$\Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm \sqrt{3} \end{cases}. \text{ Kết hợp với điều kiện (2) suy ra } \begin{cases} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{cases} \text{ là các giá trị } m \text{ thỏa}$$

$$\text{ycbt.} \Rightarrow S = 1 + \sqrt{3} \in (2; 4)$$

Câu 15: Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng?

- A. $\sqrt{2} - 1$. B. $\sqrt{2} + 1$. C. $\sqrt{2}$. D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y = x^4 - 2x^2 + 4 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$$

$$\text{Nên } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \text{ Vậy tọa độ các điểm cực trị: } A(0; 4), B(1; 3), C(-1; 3)$$

$$AB = AC = \sqrt{2}; BC = 2 \quad p = \frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích tam giác: } S &= \sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AC)} \\ &= \sqrt{(1+\sqrt{2}) \cdot (1+\sqrt{2}-2) \cdot (1+\sqrt{2}-\sqrt{2}) \cdot (1+\sqrt{2}-\sqrt{2})} = \sqrt{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là: } r = \frac{S}{p} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

Câu 16:) Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Theo yêu cầu bài toán ta có: $m > 0$

Ta có $A(0; m-1); B(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1); C(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$

Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Ta có $H(0; -m^2 + m - 1)$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 2AH \cdot R \text{ trong đó } \begin{cases} AH = m^2 \\ AB = \sqrt{m + m^4} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } m + m^4 = 2m^2 \Leftrightarrow m(m^3 - 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow m(m-1)(m^2 + m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ . Đối chiếu điều kiện ta được } S = \left\{ 1; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Câu 17: Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 4x^3 - 4m^2x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm m \end{cases}.$$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $m \neq 0$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0; 1) \in Oy$.

Với $\Rightarrow t + 1 + t + 2 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 0; 1)$.

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân ở A

Để 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -8m^6 + 8 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy tổng bình phương các phần tử của S bằng 2.

Câu 18: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = mx^4 - (m-3)x^2 + m^2$ không có điểm cực đại?

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Với $m = 0$ hàm số trở thành $y = 3x^2$. Khi đó hàm số có một điểm cực tiểu, không có điểm cực đại. Vậy $m = 0$ thỏa mãn.

Với $m \neq 0$ ta có: $y' = 4mx^3 - 2(m-3)x = 2x[2mx^2 - (m-3)]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{m-3}{2m} \end{cases}$$

Hàm số không có điểm cực đại khi: $\begin{cases} m > 0 \\ \frac{m-3}{2m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 3$. Vì $m \in \mathbb{Z} \rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có giá trị cực tiểu bằng -1 . Tổng các phần tử thuộc S là

A. -2.

B. 0.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx$.

TH1: Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0$ có 1 nghiệm thực, tức là hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có điểm cực tiểu là $x = 0$. Khi đó $m \leq 0$. Theo bài ra: $y(0) = m + 1 = -1 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn đk $m \leq 0$).

TH2: Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0$ có 3 nghiệm thực, tức là hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$ có điểm cực tiểu là $x = \pm\sqrt{m}$. Khi đó $m > 0$. Theo bài ra:

$$y(\pm\sqrt{m}) = -m^2 + m + 1 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}. \text{ So sánh với đk } m > 0, \text{ giá trị thỏa mãn là } m = 2.$$

Vậy $S = \{-2; 2\}$, tổng các phần tử thuộc S bằng 0.

Câu 20: Gọi S tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân. Tổng bình phương các phần tử của S bằng

A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân $\Leftrightarrow 8a + b^3 = 0$

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

$$\Leftrightarrow 8a + b^3 = 0 \Leftrightarrow 8 + (-2m^2)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

Tổng bình phương các phần tử của S bằng 2.

Câu 21: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 3m^2$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác nhận $G(0; 7)$.

- A. $m = 1$. B. $m = -\sqrt{\frac{3}{7}}$. C. $m = -1$. D. $m = -\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Xét hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 3m^2$

• $y' = 4x^3 + 4mx$

• $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m}, (m < 0) \end{cases}$

Khi đó ba điểm cực trị là $A(0; 3m^2)$, $B(-\sqrt{-m}, 2m^2)$, $C(\sqrt{-m}, 2m^2)$.

Tam giác ABC nhận điểm $G(0; 7)$ làm trọng tâm thì $\frac{7m^2}{3} = 7 \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow m = -\sqrt{3}$.

Câu 22: Cho hai đường cong $(C_1): y = x^4 - (m+1)x^2 + 2$ và $(C_2): y = 2(x+1)^4 - 4x^2 - 8x + 3m$. Biết rằng mỗi đường cong đều có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác đồng thời các tam giác đồng dạng với nhau. Hỏi m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 2)$. B. $(0; 1)$. C. $(2; 3)$. D. $(3; 4)$.

Lời giải

Chọn C

- Xét $(C_2): y = 2(x+1)^4 - 4x^2 - 8x + 3m$.

$y' = 8(x+1)^3 - 8x - 8 = 8x(x+1)(x+2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 + 3m \\ y = 2 + 3m \\ y = 2 + 3m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1; 4 + 3m) \\ B(0; 2 + 3m) \\ C(-2; 2 + 3m) \end{cases}$$

Nhận thấy tam giác ABC cân tại A .

- Xét $(C_1): y = x^4 - (m+1)x^2 + 2$, hàm số có 3 cực trị do đó $m > -1$.

$y' = 4x^3 - 2(m+1)x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \\ x = -\sqrt{\frac{m+1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 2 - \frac{(m+1)^2}{4} \\ y = 2 - \frac{(m+1)^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'(0; 2) \\ B'\left(\sqrt{\frac{m+1}{2}}; 2 - \frac{(m+1)^2}{4}\right) \\ C'\left(-\sqrt{\frac{m+1}{2}}; 2 - \frac{(m+1)^2}{4}\right) \end{cases}.$$

Nhận thấy tam giác $A'B'C'$ cân tại A' .

- Tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A'B'C' \Leftrightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$.

Ta có: $A'B' = \sqrt{\frac{m+1}{2} + \frac{(m+1)^4}{16}}$; $B'C' = \sqrt{2(m+1)}$; $AB = \sqrt{5}$; $BC = 2$, suy ra

$$\frac{\sqrt{\frac{m+1}{2} + \frac{(m+1)^4}{16}}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2(m+1)}}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{m+1}{2} + \frac{(m+1)^4}{16}}{5} = \frac{2(m+1)}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1) + \frac{(m+1)^4}{4} = 10(m+1)$$

$$\Leftrightarrow (m+1) \left[\frac{1}{4}(m+1)^3 - 8 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -1 + \sqrt[3]{32} \end{cases} \Rightarrow m = -1 + \sqrt[3]{32}.$$

Câu 23: Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (6; 9)$. **B.** $m \in (-6; -3)$. **C.** $m \in (-3; 2)$. **D.** $m \in (2; 6)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0$. (1)

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 2m+1 = 0$. (2)

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương

$$\text{phân biệt, nghĩa là } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ m+1 > 0 \\ 2m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Cách 1. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$) là nghiệm của phương trình (1) và t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) là nghiệm của phương trình (2).

Theo giả thiết, ta có

$$x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1 \Leftrightarrow x_4 - x_3 = x_3 - x_2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1 > 0$$

Ta có hệ

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \\ t_1 t_2 = 2m+1 \\ t_2 = 9t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{m}{5} + \frac{1}{5} \\ t_2 = \frac{9m}{5} + \frac{9}{5} \\ t_1 t_2 = 2m+1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{m}{5} + \frac{1}{5} \right) \left(\frac{9m}{5} + \frac{9}{5} \right) = 2m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -\frac{4}{9} \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Cách 2. Với $\Delta' > 0$, phương trình (1) có nghiệm $t_1 = 1, t_2 = 2m+1$. Biện luận như trên, ta có hai

trường hợp $\begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ t_1 = 9t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -\frac{4}{9} \end{cases} \text{ (nhận)}.$

