

ĐỊNH LÍ LAGRANGE VÀ ỨNG DỤNG

1. ĐỊNH LÍ LAGRANGE

1.1. ĐỊNH LÍ ROLLE

Định lí: Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Chứng minh:

Vì $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ nên theo định lí Weierstrass $f(x)$ nhận giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên $[a; b]$.

- Khi $M = m$ ta có $f(x)$ là hàm hằng trên $[a; b]$, do đó với mọi $c \in (a; b)$ luôn có $f'(c) = 0$.

- Khi $M > m$, vì $f(a) = f(b)$ nên tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = m$ hoặc $f(c) = M$, theo bổ đề Fermat suy ra $f'(c) = 0$.

Hệ quả 1: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$ và $f(x)$ có n nghiệm (n là số nguyên dương lớn hơn 1) trên $(a; b)$ thì $f'(x)$ có ít nhất $n - 1$ nghiệm trên $(a; b)$.

Hệ quả 2: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$ và $f'(x)$ vô nghiệm trên $(a; b)$ thì $f(x)$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên $(a; b)$.

Hệ quả 3: Nếu $f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$ và $f'(x)$ có nhiều nhất n nghiệm (n là số nguyên dương) trên $(a; b)$ thì $f(x)$ có nhiều nhất $n + 1$ nghiệm trên $(a; b)$.

Các hệ quả trên được suy ra trực tiếp từ định lí Rolle và nó vẫn đúng nếu các nghiệm là nghiệm bội (khi $f(x)$ là đa thức).

Các hệ quả trên cho ta ý tưởng về việc chứng minh tồn tại nghiệm cũng như xác định số nghiệm của phương trình, và nếu như bằng một cách nào đó ta tìm được tất cả các nghiệm của phương trình (có thể do mò mẫm) thì nghĩa là khi đó phương trình đã được giải.

Từ định lí Rolle cho phép ta chứng minh định lí Lagrange, tổng quát hơn, chỉ cần ta đến ý tới ý nghĩa của đạo hàm (trung bình giá trị biến thiên của hàm số).

1.2. ĐỊNH LÍ LAGRANGE (Lagrange's Mean Value Theorem)

Định lí: Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ thì tồn tại

$$c \in (a; b) \text{ sao cho } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Chứng minh:

Xét hàm số:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x.$$

Ta có: $F(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và $F(a) = F(b)$.

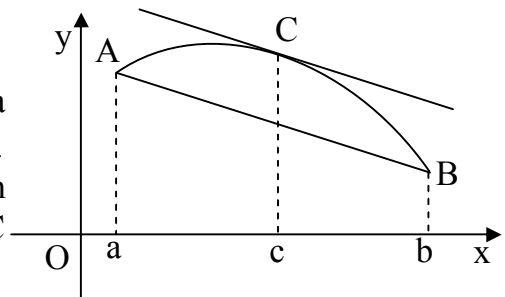
Theo định lí Rolle tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $F'(c) = 0$.

$$\text{Mà } F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ suy ra } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Định lí Rolle là một hệ quả của định lí Lagrange (trong trường hợp $f(a) = f(b)$)

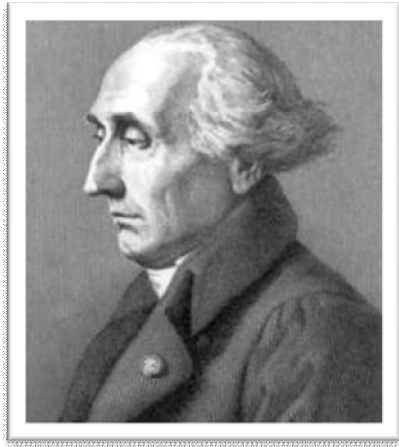
Ý nghĩa hình học:

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn các giả thiết của định lí Lagrange, đồ thị (C) , $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$. Khi đó trên (C) tồn tại điểm $C(c; f(c))$, $c \in (a; b)$ mà tiếp tuyến của (C) tại C song song với đường thẳng AB .



Định lí Lagrange cho phép ta ước lượng tỉ số $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ do đó nó còn được

gọi là **định lí Giá trị trung bình (Mean Value Theorem)**. Từ đó cho ta ý tưởng chứng minh các định lí về sự biến thiên của hàm số, đặt nền móng cho những ứng dụng của đạo hàm.



Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813)

Định lí: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.
- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ thì $f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in (a; b)$ thì $f(x)$ là hàm hằng trên $(a; b)$.

Chứng minh:

Giả sử $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ và $x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2$, theo định lí Lagrange, tồn tại $c \in (x_1; x_2)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Mà $f'(c) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.

Nếu trong giả thiết của định lí Lagrange ta thêm vào giả thiết $f'(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên $[a; b]$ thì ta có thể so sánh $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ với $f'(a), f'(b)$.

Cụ thể: $f'(x)$ đồng biến trên $[a; b] \Rightarrow f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(b)$

$f'(x)$ nghịch biến trên $[a; b] \Rightarrow f'(a) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > f'(b)$

Từ đây cho ta ý tưởng ứng dụng định lí Lagrange chứng minh bất đẳng thức và đánh giá các tổng hữu hạn.

Cũng tương tự nếu trong giả thiết của định lí Lagrange ta thêm vào giả thiết $f'(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên $[a; b]$ thì ta có thể so sánh $\frac{f(c) - f(a)}{c - a}$ với $\frac{f(b) - f(c)}{b - c}$ với $c \in [a; b]$ cho ta ý tưởng để chứng minh rất nhiều bất đẳng thức, như bất đẳng thức Jensen...

Ngoài ra định lí Lagrange còn được phát biểu dưới dạng tích phân như sau:

Định lí: Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì tồn tại điểm $c \in (a; b)$

thỏa mãn:
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

Định lí Lagrange dạng tích phân được áp dụng chứng minh một số bài toán liên quan đến tích phân và giới hạn hàm số.

2. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

2.1. CHỨNG MINH SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Bài toán 1. Chứng minh rằng phương trình $a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x$ luôn có nghiệm với mọi bộ các số thực a, b, c .

Lời giải:

$$\text{Xét } f(x) = a\sin x + \frac{b\sin 2x}{2} + \frac{c\sin 3x}{3} \Rightarrow f'(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mà $f(0) = f(\pi) = 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (0; \pi), f'(x_0) = 0$, suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét: Bài toán trên có dạng tổng quát:

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(a; b)$.

Phương pháp giải:

Xét hàm $F(x)$ thỏa mãn $F(x)$ liên tục trên $[a; b]$, $F'(x) = f(x).g(x)$ với mọi x thuộc $(a; b)$, $g(x)$ vô nghiệm trên $(a; b)$ và $F(a) = F(b)$. Theo định lí Rolle suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 2. Cho số thực dương m và các số thực a, b, c thỏa mãn:

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0.$$

Chứng minh rằng $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thuộc $(0; 1)$.

Hướng dẫn: Xét hàm số
$$f(x) = \frac{a.x^{m+2}}{m+2} + \frac{b.x^{m+1}}{m+1} + \frac{c.x^m}{m}.$$

Tương tự ta có bài toán tổng quát hơn.

Bài toán 3. Cho số thực dương m , số nguyên dương n và các số thực

$a_0, a_1, \dots, a_n$ thỏa mãn:
$$\frac{a_n}{m+n} + \frac{a_{n-1}}{m+n-1} + \dots + \frac{a_0}{m} = 0.$$

Chứng minh rằng $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ có nghiệm thuộc $(0; 1)$.

Hướng dẫn: Xét hàm số
$$f(x) = \frac{a_n}{m+n} x^{m+n} + \frac{a_{n-1}}{m+n-1} x^{m+n-1} + \dots + \frac{a_0}{m} x^m$$

Bài toán 4.(Định lí Cauchy)

Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và $g'(x)$ khác không trên khoảng $(a; b)$ thì tồn tại $c \in (a; b)$

$$\text{sao cho } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Lời giải: Theo định Lagrange luôn tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho $g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \Rightarrow g(a) \neq g(b)$.

Xét hàm số $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$, ta có: $F(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và $F(a) = F(b) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}$.

Theo định lí Rolle tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $F'(c) = 0$.

$$\text{Mà } F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \text{ suy ra } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Nhận xét: Định lí Lagrange là hệ quả của định lí Cauchy (trong trường hợp $g(x) = x$)

Bài toán 5: Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng: $a \sin x + 9b \sin 3x + 25c \sin 5x = 0$ có ít nhất 4 nghiệm thuộc $[0; \pi]$.

Nhận xét: Bài toán này cũng tương tự các bài toán trên. Để chứng minh $f(x)$ có ít nhất n nghiệm ta chứng minh $F(x)$ có ít nhất $n + 1$ nghiệm với $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a; b)$ (có thể phải áp dụng nhiều lần)

Lời giải: Xét hàm số: $f(x) = -a \sin x - b \sin 3x - c \sin 5x$, ta có:

$$f'(x) = -a \cos x - 3b \cos 3x - 5c \cos 5x, \quad f''(x) = a \sin x + 9b \sin 3x + 25c \sin 5x.$$

$$\text{Ta có } f(0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f(\pi) = 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (0; \frac{\pi}{4}), x_2 \in (\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}), x_3 \in (\frac{3\pi}{4}; \pi) \text{ sao cho}$$

$$f(0) = f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0 \Rightarrow \exists x_4 \in (x_1; x_2), x_5 \in (x_2; x_3) \mid f''(x_4) = f''(x_5) = 0$$

mà $f''(0) = f''(\pi) = 0 \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài toán 6. Cho đa thức $P(x)$ và $Q(x) = aP(x) + bP'(x)$ trong đó a, b là các số thực, $a \neq 0$. Chứng minh rằng nếu $Q(x)$ vô nghiệm thì $P(x)$ vô nghiệm.

Lời giải: Ta có $\deg P(x) = \deg Q(x)$

Vì $Q(x)$ vô nghiệm nên $\deg Q(x)$ chẵn. Giả sử $P(x)$ có nghiệm, vì $\deg P(x)$ chẵn nên $P(x)$ có ít nhất 2 nghiệm.

- Khi $P(x)$ có nghiệm kép $x = x_0$ ta có x_0 cũng là một nghiệm của $P'(x)$ suy ra $Q(x)$ có nghiệm.

- Khi $P(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

Nếu $b = 0$ thì hiển nhiên $Q(x)$ có nghiệm.

Nếu $b \neq 0$: Xét $f(x) = e^{\frac{a}{b}x} P(x)$ ta có: $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$

$$f'(x) = \frac{a}{b} e^{\frac{a}{b}x} P(x) + e^{\frac{a}{b}x} P'(x) = \frac{1}{b} e^{\frac{a}{b}x} (aP(x) + bP'(x)) = \frac{1}{b} e^{\frac{a}{b}x} Q(x)$$

Vì $f(x)$ có hai nghiệm suy ra $f'(x)$ có ít nhất 1 nghiệm hay $Q(x)$ có nghiệm.

2.2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Bài toán 7: Giải phương trình: $3^x + 5^x = 2.4^x$ (1)

Lời giải:

Nhận xét: $x=0; x=1$ là nghiệm của phương trình (1).

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình đã cho. Ta được:

$$3^{x_0} + 5^{x_0} = 2.4^{x_0} \Leftrightarrow 5^{x_0} - 4^{x_0} = 4^{x_0} - 3^{x_0} \quad (1a)$$

Xét hàm số $f(t) = (t+1)^{x_0} - t^{x_0}$, ta có $(1a) \Leftrightarrow f(4) = f(3)$

Vì $f(t)$ liên tục trên $[3; 4]$ và có đạo hàm trong khoảng $(3; 4)$, do đó theo định lý Rolle tồn tại $c \in (3; 4)$ sao cho: $f'(c) = 0 \Rightarrow x_0[(c+1)^{x_0-1} - c^{x_0-1}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases}$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

Bài toán 8: Giải phương trình: $5^x - 3^x = 2x$ (2)

Lời giải:

Nhận xét: $x=0; x=1$ là nghiệm của phương trình (2).

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình đã cho, ta có: $5^{x_0} - 5x_0 = 3^{x_0} - 3x_0$ (2a)

Xét hàm số: $f(t) = t^{x_0} - tx_0$, khi đó: $(2a) \Leftrightarrow f(5) = f(3)$

Vì $f(t)$ liên tục trên $[3; 5]$ và có đạo hàm trên $(3; 5)$, do đó theo định lý Lagrange luôn tồn tại $c \in (3; 5)$ sao cho: $f'(c) = 0 \Rightarrow x_0(c^{x_0-1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases}$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

Bài toán 9. Giải phương trình: $3^x + 2.4^x = 19x + 3$ (3).

Lời giải:

$$(5) \Leftrightarrow 3^x + 2 \cdot 4^x - 19x - 3 = 0.$$

Xét hàm số: $y = f(x) = 3^x + 2 \cdot 4^x - 19x - 3$ ta có: $f'(x) = 3^x \ln 3 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 19$
 $f''(x) = 3^x (\ln 3)^2 + 2 \cdot 4^x (\ln 4)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $f''(x)$ vô nghiệm, suy ra $f'(x)$ có nhiều nhất 1 nghiệm, suy ra $f(x)$ có nhiều nhất 2 nghiệm.

Mà $f(0) = f(2) = 0$ do đó (3) có đúng hai nghiệm $x = 0, x = 2$.

Bài toán 10. Giải phương trình: $(1 + \cos x)(2 + 4^{\cos x}) = 3.4 \cos x$ (4)

Lời giải:

Đặt $t = \cos x, \quad (t \in [-1; 1])$

$$(3) \Leftrightarrow (1+t)(2+4^t) = 3 \cdot 4^t \Leftrightarrow (1+t)(2+4^t) - 3 \cdot 4^t = 0$$

Xét hàm số: $f(t) = (1+t)(2+4^t) - 3 \cdot 4^t$

$$\Rightarrow f'(t) = 2 + 4^t + (t-2)4^t \ln 4, \quad f''(t) = 2 \cdot 4^t \ln 4 + (t-2)4^t \ln^2 4$$

Ta có: $f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 + \frac{2}{\ln 4} \Rightarrow f''(t)$ có một nghiệm duy nhất

$\Rightarrow f'(t)$ có nhiều nhất hai nghiệm $\Rightarrow f(t)$ có nhiều nhất ba nghiệm.

Mặt khác dễ thấy $f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1) = 0$, do đó $f(t)$ có ba nghiệm $t = 0, \frac{1}{2}, 1$.

Kết luận: Nghiệm của phương trình (4) là:

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, \quad x = k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.3. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài toán 11. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a < b$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in (0; +\infty)$.

Theo định lí Lagrange luôn tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ hay

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln b - \ln a}{b - a} \Leftrightarrow \frac{a - b}{c} = \ln \frac{b}{a} \text{ mà } 0 < a < b < c \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

Bài toán 12. Chứng minh rằng: $(1 + \frac{1}{x})^x < (1 + \frac{1}{x+1})^{x+1}, \forall x \in (0; +\infty)$.

Lời giải:

Ta có: $(1 + \frac{1}{x})^x < (1 + \frac{1}{x+1})^{x+1} \Leftrightarrow x[\ln(x+1) - \ln x] < (x+1)[\ln(x+2) - \ln(x+1)]$

Đặt $f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x]$

Ta có: $f'(x) = \ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1} - 1 = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$

Áp dụng định lí Lagrange đối với hàm số: $y = \ln t$ trên $[x; x+1]$, thì tồn tại

$c \in (x; x+1)$ sao cho: $f'(c) = \ln(x+1) - \ln x \Rightarrow \frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln x$.

Mà $0 < x < c < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{c} > \frac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln x > \frac{1}{x+1} \Rightarrow \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} > 0$$

$\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Từ (1) suy ra: $f'(x) > 0, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Suy ra: $f(x+1) > f(x), \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Nhận xét: Trong ví dụ trên thực chất của vấn đề là ta đi chứng minh hàm số $F(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ và ta đi chứng minh hàm số $f(x) = \ln F(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, đến đây bài toán trở về giống như ví dụ 1. Tương tự ta chứng minh được hàm số $G(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Ta có thể chứng minh bài toán 12 bằng cách khác.

Xét hàm số: $F(x) = \ln(1+x)$

Với mọi cặp số thực x, y bất kì thỏa mãn $0 < x < y$, theo định lí Lagrange, luôn tồn tại $x_0 \in (0; x), y_0 \in (x; y)$ thỏa mãn:

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, f'(y_0) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$\text{hay } \frac{1}{1+x_0} = \frac{\ln(1+x)}{x}; \frac{1}{1+y_0} = \frac{\ln(1+y) - \ln(1+x)}{y-x}.$$

$$\text{Mà } \frac{1}{1+x_0} > \frac{1}{1+y_0} \Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} > \frac{\ln(1+y) - \ln(1+x)}{y-x} \Rightarrow y \ln(1+x) > x \ln(1+y).$$

Vậy với mọi cặp số thực x, y bất kì thỏa mãn $0 < x < y$, luôn có $y \ln(1+x) > x \ln(1+y)$, thay x bởi $\frac{1}{y}$ và y bởi $\frac{1}{x}$ ta có:

$$\frac{1}{x} \ln(1 + \frac{1}{y}) > \frac{1}{y} \ln(1 + \frac{1}{x}) \Rightarrow (1 + \frac{1}{y})^y > (1 + \frac{1}{x})^x$$

Bài toán 13. (Bất đẳng thức Jensen)

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $(a; b)$ và $f''(x) > 0, \forall x \in (a; b)$.

Chứng minh rằng: $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\frac{x_1 + x_2}{2}), \forall x_1, x_2 \in (a; b)$

Lời giải:

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2$.

Khi $x_1 < x_2$, theo định lí Lagrange, tồn tại $c \in (x_1; \frac{x_1 + x_2}{2}), d \in (\frac{x_1 + x_2}{2}; x_2)$ thỏa

$$\text{mãn } f'(c) = \frac{f(\frac{x_1 + x_2}{2}) - f(x_1)}{\frac{x_2 - x_1}{2}}, f'(d) = \frac{f(x_2) - f(\frac{x_1 + x_2}{2})}{\frac{x_2 - x_1}{2}}.$$

$$\begin{aligned} &\text{Mà } f''(x) > 0, \forall x \in (a; b) \Rightarrow f'(x) \text{ đồng biến trên } (a; b) \\ &\Rightarrow f'(c) < f'(d) \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) < f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Bài toán 14. (Bất đẳng thức Bernoulli)

Với mọi số thực x thỏa mãn $x > -1$, chứng minh rằng $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Lời giải:

- Khi $x > 0$: xét $f(t) = (1+t)^n$, theo định lí Lagrange ta có $a \in (0; x)$ thỏa mãn $f(x) - f(0) = xf'(a) \Rightarrow (1+x)^n - 1 = nx(1+a)^{n-1} > nx \Rightarrow (1+x)^n > 1+nx$

- Khi $-1 < x < 0$: xét $f(t) = (1+t)^n$, theo định lí Lagrange ta có $a \in (x; 0)$ thỏa mãn $f(x) - f(0) = xf'(a) \Rightarrow (1+x)^n - 1 = nx(1+a)^{n-1} > nx \Rightarrow (1+x)^n > 1+nx$

Vậy $(1+x)^n \geq 1+nx, \forall x \in (-1; +\infty)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Bài toán 15. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($f''(x) = 0$ có tập nghiệm rời rạc). Chứng minh rằng:

$$f(n) - f(0) < \sum_{i=1}^n f'(i) < f(n+1) - f(1), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải:

Vì $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($f''(x) = 0$ có số nghiệm đếm được) $\Rightarrow f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Theo định lí Lagrange, luôn tồn tại $x_i \in (i; i+1)$ sao cho:

$$f'(x_i) = f(i+1) - f(i), \forall i \in \mathbb{R}.$$

Vì $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow f'(i) < f'(x_i) < f'(i+1)$

$$\Rightarrow f'(i) < f(i+1) - f(i) < f'(i+1), \forall i \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n f'(i) < \sum_{i=1}^n [f(i+1) - f(i)] = f(n+1) - f(1), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{và } \sum_{i=1}^n f'(i) > \sum_{i=1}^n [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Nhận xét: Nếu $f''(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì bất đẳng thức cần chứng minh sẽ đổi chiều.

Bài toán 16. Chứng minh rằng: $1 + \ln n > \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > \ln(n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải:

Xét $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ và $f'(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Tương tự bài toán trên ta có: $f(n) - f(1) + f'(1) > \sum_{i=1}^n f'(i) > f(n+1) - f(1), \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow 1 + \ln n > \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > \ln(n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Bài toán 17: Cho số nguyên dương k , tìm $\left[\frac{1}{5} \sum_{i=1}^{2^{5k}} \frac{1}{\sqrt[5]{i^4}} \right]$ (trong đó $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Lời giải:

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[5]{x}$, ta có: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} \Rightarrow f'(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Suy ra

$$\begin{aligned} f(n) - f(0) &> \sum_{i=1}^n f'(i) > f(n+1) - f(1) \Rightarrow \sqrt[5]{2^{5k}} > \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{2^{5k}} \frac{1}{\sqrt[5]{i^4}} > \sqrt[5]{2^{5k}+1} - 1 > \sqrt[5]{2^{5k}} - 1 \\ &\Rightarrow \left[\frac{1}{5} \sum_{i=1}^{2^{5k}} \frac{1}{\sqrt[5]{i^4}} \right] = 2^k. \end{aligned}$$

Nhận xét: Từ ba bài toán trên ta nhận thấy để đánh giá tổng $\sum_{i=1}^n f(i), n \in \mathbb{N}^*$ ($f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên $(0; +\infty)$), chúng ta phải xét hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ và giải quyết tương tự bài toán trên.

Từ việc ước lượng được tổng $\sum_{i=1}^n f(i), n \in \mathbb{N}^*$ ta có thể nghĩ đến bài toán tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) \sum_{i=1}^n f(i)$, ta nghiên cứu ở các bài toán sau.

Bài toán 18. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \cos \frac{i\pi}{2n}$.

Lời giải:

$$\text{Xét } f(x) = \frac{2n}{\pi} \sin \frac{x\pi}{2n} \Rightarrow f'(x) = \cos \frac{x\pi}{2n} \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in [-n; n]$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ đồng biến trên } [-n; n]. \text{ Suy ra } f(n) - f(0) < \sum_{i=1}^n f'(i) < f(n+1) - f(1)$$

$$\Rightarrow \frac{2n}{\pi} \cos \frac{\pi}{2n} < \sum_{i=0}^{n-1} \cos \frac{i\pi}{2n} < \frac{2n}{\pi} - \sin \frac{\pi}{2n} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2n} < \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \cos \frac{i\pi}{2n} < \frac{2}{\pi} - \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2n}$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2n} \right) = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \cos \frac{i\pi}{2n} = \frac{2}{\pi} \text{ (Nguyên lí kẹp).}$$

Bài toán 19. Cho phương trình: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i+nx}} = \sqrt{n}$.

Chứng minh rằng: Với mỗi số nguyên dương n phương trình có duy nhất một nghiệm dương. Kí hiệu nghiệm đó là x_n , tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Lời giải:

$$\text{Xét } f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i+nx}} - \sqrt{n}$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\sqrt{(i+nx)^3}} < 0, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow f(x) \text{ liên tục, nghịch biến trên}$$

$[0; +\infty)$.

$$\text{Mà } f(0) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} - \sqrt{n} > \frac{n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\sqrt{n} < 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có 1 nghiệm}$$

dương duy nhất.

$$\text{Xét hàm số } F_n(x) = 2\sqrt{x+nx_n}, \text{ ta có } F_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+nx_n}} \Rightarrow F_n'(x) \text{ nghịch biến trên}$$

$(0; +\infty)$.

$$\Rightarrow F_n(n) - F_n(0) > \sum_{i=1}^n F_n'(i) > F_n(n+1) - F_n(1)$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{n+nx_n} - \sqrt{nx_n}) > \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i+nx_n}} > 2(\sqrt{n+1+nx_n} - \sqrt{1+nx_n})$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{n+nx_n} - \sqrt{nx_n}) > \sqrt{n} > 2(\sqrt{n+1+nx_n} - \sqrt{1+nx_n})$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_n+1} - \sqrt{x_n} > \frac{1}{2} > \sqrt{x_n+1+\frac{1}{n}} - \sqrt{x_n+\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_n+1} + \sqrt{x_n} < 2 < \sqrt{x_n+1+\frac{1}{n}} + \sqrt{x_n+\frac{1}{n}} < \sqrt{x_n+1} + \sqrt{x_n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} < \sqrt{x_n+1} + \sqrt{x_n} < 2 \Rightarrow \lim(\sqrt{x_n+1} + \sqrt{x_n}) = 2$$

$$\Rightarrow \lim(\sqrt{x_n+1} - \sqrt{x_n}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim \sqrt{x_n} = \frac{3}{4} \Rightarrow \lim x_n = \frac{9}{16}.$$

Bài toán 20: Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 \\ a^4 + b^4 + c^4 = d^4 + e^4 \end{cases}$

Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 < d^3 + e^3$.

Nhận xét: Trong bài toán này từ giả thiết $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 \\ a^4 + b^4 + c^4 = d^4 + e^4 \end{cases}$, ta nhìn thấy

ngay giả thiết của định lý Rolle với hàm số $f(x) = a^x + b^x + c^x - d^x - e^x$ ($f(2) = f(4) = 0$), khi đó ta phải chứng minh $f(3) < 0$. Vì $f(x)$ liên tục và $f(3) < 0$, suy ra tồn tại khoảng $(m; n) \ni 3$ sao cho $f(x) < 0, \forall x \in (m; n)$, do đó bài toán trở thành xét dấu của $f(x)$, vì thế ta cần kiểm soát được các nghiệm của $f(x)$.

Lời giải:

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \leq b \leq c = 1, d \leq e$

Nếu $d \geq 1 \Rightarrow d^2 = 1+x$ ($x \geq 0$) $\Rightarrow b^2 + a^2 = e^2 + x$

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4 + e^4 \Leftrightarrow a^4 + (e^2 + x - a^2)^2 + 1 = (1+x)^2 + e^4$$

$$\Leftrightarrow (e^2 - a^2 - 1)x + a^2(a^2 - e^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^2 = a^2 + 1 \\ e = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^2 = a^2 + b^2 \\ e^2 = a^2 + 1 \\ e = a^2 \end{cases} \quad (\text{Mâu thuẫn}) \Rightarrow d < 1$$

Tương tự ta có $a \leq b < d \leq e < 1$

Xét hàm số $f(x) = 1 + a^x + b^x - d^x - e^x \Rightarrow f(2) = f(4) = 0$

Giả sử $f(x)$ có nghiệm $x_0 \neq 2; 4$. Theo định lí Rolle, tồn tại $x_1 < x_2$ thỏa mãn:

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0 \text{ hay } a^{x_1} \ln a + b^{x_1} \ln b = d^{x_1} \ln d + e^{x_1} \ln e,$$

$$\begin{aligned} a^{x_2} \ln a + b^{x_2} \ln b &= d^{x_2} \ln d + e^{x_2} \ln e \\ \Rightarrow \frac{a^{x_2} \ln a + b^{x_2} \ln b}{a^{x_1} \ln a + b^{x_1} \ln b} &= \frac{d^{x_2} \ln d + e^{x_2} \ln e}{d^{x_1} \ln d + e^{x_1} \ln e} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } a \leq b < d \leq e < 1 \Rightarrow 0 > a^{x_2} \ln a + b^{x_2} \ln b \geq a^{x_1} b^{x_2-x_1} \ln a + b^{x_2} \ln b$$

$$\Rightarrow b^{x_2-x_1} \geq \frac{a^{x_2} \ln a + b^{x_2} \ln b}{a^{x_1} \ln a + b^{x_1} \ln b}$$

$$\text{và } d^{x_2} \ln d + e^{x_2} \ln e \leq d^{x_2} \ln d + d^{x_2-x_1} e^{x_1} \ln b < 0 \Rightarrow d^{x_2-x_1} \leq \frac{d^{x_2} \ln d + e^{x_2} \ln e}{d^{x_1} \ln d + e^{x_1} \ln e}$$

$$\Rightarrow \frac{a^{x_2} \ln a + b^{x_2} \ln b}{a^{x_1} \ln a + b^{x_1} \ln b} < \frac{d^{x_2} \ln d + e^{x_2} \ln e}{d^{x_1} \ln d + e^{x_1} \ln e} \text{ (Mâu thuẫn).}$$

Vậy $f(x)$ chỉ có hai nghiệm $x = 2, x = 4$ và $f'(x)$ có 1 nghiệm duy nhất, và nó thuộc $(2; 4)$. Vì $f(x)$ liên tục nên $f(x)$ mang cùng một dấu trên mỗi khoảng $(-\infty; 2), (2; 4), (4; +\infty)$. Mà $f(0) = 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in (2; 4)$ (vì nếu $f(x) > 0, \forall x \in (2; 4)$ thì $x = 2$ là nghiệm của $f'(x) \Rightarrow f(3) < 0$ (điều phải chứng minh)).

Định lí Lagrange còn được sử dụng để giải quyết một số bài toán về bất đẳng thức đối xứng, nhằm mục đích làm giảm số biến. Nếu cần chứng minh bất đẳng thức đối xứng n biến $a_1, a_2, \dots, a_n$ thì ta xét đa thức $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$, suy ra $f(x)$ có n nghiệm, do đó $f'(x)$ có $n-1$ nghiệm $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$, và dựa vào định lí Viète ta đưa về chứng minh bất đẳng thức đối xứng với $n-1$ biến $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$.

Bài toán 21. Cho $a < b < c$, chứng minh rằng:

$$3a < a + b + c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} < 3b < a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} < 3c$$

Lời giải:

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \Rightarrow f(a) = f(b) = f(c) = 0$$

Theo định lí Lagrange tồn tại $a < x_1 < b < x_2 < c$ sao cho:

$$f(a) - f(b) = (a - b)f'(x_1),$$

$$f(c) - f(b) = (c - b)f'(x_2) \Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2) = 0 \quad f'(x) = 3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{a + b + c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}}{3}$$

$$x_2 = \frac{a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}}{3}$$

Do đó, từ $a < x_1 < b < x_2 < c$. Suy ra:

$$3a < a + b + c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} < 3b < a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} < 3c$$

Bài toán 22. Cho các số thực không âm a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + bc + cd + da + ac + db}{6}}$$

Lời giải:

$$\text{Xét } f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d).$$

$$\text{Đặt } p = a + b + c + d, q = ab + bc + cd + da + ac + bd, r = abc + bcd + cda + dab, s = abcd$$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 3px^2 + 2qx - r$$

Ta có $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 0$, theo định lí Rolle suy ra $f'(x) = 0$ có ba nghiệm (nếu $a = b$ thì a là nghiệm của $f'(x)$).

Suy ra tồn tại $u, v, w \geq 0$ thỏa mãn $f'(x) = 4(x - u)(x - v)(x - w)$

$$= 4x^3 - 4(u + v + w)x^2 + 4(uv + vw + wu)x - 4uvw$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u+v+w = \frac{3}{4}p \\ uv+vw+wu = \frac{1}{2}q \\ uvw = \frac{1}{4}r \end{cases} \text{ . Mà } \frac{uv+vw+wu}{3} \geq (\sqrt[3]{uvw})^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{uv+vw+wu}{3}} \geq \sqrt[3]{uvw} \Rightarrow \sqrt{\frac{q}{6}} \geq \sqrt[3]{\frac{r}{4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab+bc+cd+da+ac+db}{6}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow u=v=w \Leftrightarrow a=b=c=d$.

2.4. TÌM GIỚI HẠN DÃY SỐ

Định lí Lagrange được sử dụng để giải quyết một số bài toán về giới hạn dãy số, với các dãy số xác định bởi hàm số $f(x)$ và dãy số xác định bởi nghiệm của một phương trình $f_n(x)=0$, nói chung $f(x)$, $f_n(x)$ là các hàm số có đạo hàm và đơn điệu trên tập xác định của chúng, đạo hàm của chúng có thể ước lượng được bởi một bất đẳng thức. Do đó nếu tìm được giới hạn là a , ta có thể so sánh được hiệu $f(x_n)-f(a)$, $f_n(x_n)-f_n(a)$ với x_n-a và có thể ước lượng được x_n .

Bài toán 23. Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} x_1 = 2007 \\ x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy số khi n tiến dần tới dương vô cùng.

Lời giải: Ta có $x_n > \sqrt{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét $f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, ta có: $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} \Rightarrow |f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{2}}, \forall x \in (\sqrt{3}; +\infty)$.

Nếu (x_n) có giới hạn thì giới hạn đó là nghiệm lớn hơn $\sqrt{3}$ của phương trình

$$f(x) = x. \text{ Ta có: } f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})^2 = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{3}x)^2 - 2(x^2 - \sqrt{3}x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{3}x = -1 \\ x^2 - \sqrt{3}x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}.$$

Đặt $a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$, theo định lý Lagrange, luôn tồn tại $c_n \in (x_n; a)$ hoặc $(a; x_n)$ thỏa

$$\text{mãn: } |f(x_n) - f(a)| = |f'(c_n)| |x_n - a|.$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| = |f'(c_n)| |x_n - a| < \frac{1}{2\sqrt{2}} |x_n - a| < \dots < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |x_1 - a|$$

Mà $\lim(\frac{1}{2\sqrt{2}})^n |x_1 - a| = 0$, do đó $\lim x_n = a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$.

Nhận xét:

Trong bài toán trên việc giải phương trình $f(x) = x$ không nhất thiết phải trình bày, ta chỉ cần chọn được nghiệm thỏa mãn của nó là được.

Bài toán trên có dạng tổng quát:

Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $f(x)$ là hàm số có đạo hàm trên khoảng D chứa a và $|f'(x)| < b < 1, \forall x \in D$ thì (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n tiến dần đến dương vô cùng.

b) Nếu $f(x)$ là hàm số có đạo hàm trên khoảng D chứa a , $f(a) \neq a$ và $|f'(x)| > b > 1, \forall x \in D$ thì $|x_n|$ tiến dần đến dương vô cùng khi n tiến dần đến dương vô cùng.

Phương pháp giải

a) - Nếu phương trình $f(x) = x$ giải được (tìm được nghiệm) thì ta giải quyết bài toán tổng quát tương tự bài toán trên và khi đó ta tìm được giới hạn của dãy số khi n tiến dần tới dương vô cùng.

- Nếu phương trình $f(x) = x$ khó giải thì ta giải quyết bài toán tổng quát bằng cách sử dụng tiêu chuẩn Cauchy. Bài toán sau đây là một ví dụ cụ thể.

b) Tương tự ý a.

- Khi $\exists a_0 \in D : a_0 \neq a, f(a_0) = a_0$ luôn tồn tại $c_n \in (x_n; a_0)$ hoặc $(a_0; x_n)$ thỏa mãn:

$$|f(x_n) - f(a_0)| = |f'(c_n)| |x_n - a_0|$$

$$\Rightarrow |x_{n+1}| + |a| \geq |x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a_0)| > b|x_n - a_0| > \dots > b^n |a - a_0| \Rightarrow \lim |x_n| = +\infty$$

- Khi phương trình $f(x)=x$ vô nghiệm, ta có $f(x)-x > 0 \forall x \in D$ hoặc $f(x)-x < 0 \forall x \in D$ suy ra x_n tăng hoặc giảm. Nếu x_n có giới hạn thì giới hạn đó là nghiệm của phương trình $f(x) = x$, do đó $\lim |x_n| = +\infty$

Bài toán 24. (Dự bị VMO 2008)

Cho số thực a và dãy số thực (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = a \text{ và } x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) - 2008, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n tiến dần đến dương vô cùng.

Lời giải:

$$\text{Đặt } f(x) = \ln(3 + \sin x + \cos x) - 2008, \text{ ta có: } f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{3 + \sin x + \cos x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Mà } |\cos x - \sin x| \leq \sqrt{2}, \quad |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}, \text{ suy ra: } |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = q < 1.$$

Theo định lý Lagrange : với mọi cặp hai số thực x, y ($x < y$), luôn tồn tại $z \in (x; y)$ thỏa mãn: $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$.

Từ đó suy ra $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Áp dụng tính chất trên với $m > n \geq N$, ta có :

$$|x_m - x_n| = |f(x_{m-1}) - f(x_{n-1})| \leq q|x_{m-1} - x_{n-1}| \leq \dots \leq q^{n-1}|x_{m-n+1} - x_1| \leq q^{N-1}|x_{m-n+1} - x_1|.$$

Mặt khác dãy (x_n) bị chặn và $q < 1$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại N đủ lớn sao cho:

$$q^{N-1}|x_{m-n+1} - x_1| < \varepsilon.$$

Như vậy dãy (x_n) thỏa mãn tiêu chuẩn Cauchy, do đó (x_n) hội tụ.

Bài toán 25. (VMO 2007)

Cho số thực $a > 2$ và $f_n(x) = a^{10}x^{10+n} + x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình $f_n(x) = a$ luôn có đúng một nghiệm dương duy nhất. Kí hiệu nghiệm đó là x_n .

b) Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn bằng $\frac{a-1}{a}$ khi n dần đến vô cùng.

Lời giải:

Đặt $F_n(x) = f_n(x) - a$, ta có $F_n(x)$ liên tục, đồng biến trên $[0; +\infty)$ và

$F_n(0) = 1 - a < 0$, $F_n(1) = a^{10} + n + 1 - a > 0$. Suy ra phương trình $f_n(x) = a$ luôn có đúng một nghiệm x_n dương duy nhất.

$$\text{Đặt } b = \frac{a-1}{a} \Rightarrow f_n(b) = b^n(a-1)[(a-1)^9 - 1] + a \Rightarrow f_n(b) > a \Rightarrow b > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Theo định lí Lagrange, luôn tồn tại $c_n \in (x_n; b)$ thỏa mãn:

$$f_n(b) - f_n(x_n) = f'(c_n)(b - x_n).$$

$$\text{Mà } f'(c_n) > 1 \text{ nên } b - x_n < f_n(b) - f_n(x_n) = b^n(a-1)[(a-1)^9 - 1] \Rightarrow \lim x_n = b$$

$$\Rightarrow b - b^n(a-1)[(a-1)^9 - 1] < x_n < b \Rightarrow \lim x_n = b \text{ (vì } b \in (0; 1)).$$

Nhận xét:

Bài toán trên sẽ khó khăn hơn nhiều nếu đề bài không cho trước giới hạn của dãy số. Khi đó câu hỏi đặt ra là giới hạn đó bằng bao nhiêu?

Ta có thể trả lời câu hỏi đó như sau:

Trước hết giới hạn của dãy số phải thuộc khoảng $(0; 1)$, giả sử giới hạn của dãy số là b ta có: $f_n(b) = b^n(a^{10}b^{10} + \frac{1}{b-1} + 1) - \frac{1}{b-1} \Rightarrow \lim f_n(b) = -\frac{1}{b-1}$ (vì $b \in (0; 1)$).

$$\text{Mà } f_n(x_n) = a \Rightarrow -\frac{1}{b-1} = a \Rightarrow b = \frac{a-1}{a}.$$

Trong bài toán dạng trên dãy số xác định là dãy nghiệm thuộc $(a; b)$ của phương trình $f_n(x) = 0$, với giả thiết $f_n(x)$ là hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên $(a; b)$, $f_n'(x) < c$ với mọi số nguyên dương n và số thực dương x thuộc $(a; b)$, khi giải bài toán dạng này nói chung ta điều khó khăn nhất là xác định được giới hạn của dãy số.

Bài toán 26: (VMO 2002)

Xét phương trình $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2 x - 1} = \frac{1}{2}$, với n là số nguyên dương.

- Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình nêu trên có một nghiệm duy nhất lớn hơn 1; kí hiệu nghiệm đó là x_n .
- Chứng minh rằng $\lim x_n = 4$.

Lời giải:

a) Xét $f_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2 x - 1} - \frac{1}{2}$, ta có: $f_n(x)$ liên tục và nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Mà $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_n(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow f_n(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất lớn hơn 1.

b) Với mỗi số nguyên dương n ta có:

$$f_n(4) = -\frac{1}{2(2n+1)} < 0 \Rightarrow f_n(4) < f_n(x_n) \Rightarrow x_n < 4$$

Theo định lý Lagrange, luôn tồn tại $c_n \in (x_n; 4)$ thỏa mãn:

$$f_n(4) - f_n(x_n) = f_n'(c_n)(4 - x_n).$$

$$\text{Mà } f_n'(c_n) < -\frac{1}{9} \Rightarrow 4 - x_n < -9(f_n(4) - f_n(x_n)) \Rightarrow 4 - x_n < \frac{9}{2(2n+1)}$$

$$\Rightarrow 4 - \frac{9}{2(2n+1)} < x_n < 4 \Rightarrow \lim x_n = 4.$$

3. BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Giải các phương trình sau.

a) $\log_2(3x+1) + \log_3(2x+1) = 3x$

b) $2008^x + 2010^x = 2.2009^x$

c) $(4^x + 2)(2 - x) = 6$

2. Chứng minh nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên đoạn $[a; b]$ và $f'(a) = f'(b)$ thì bất phương trình $f''(x) \geq \frac{4}{(a-b)^4} |f(a) - f(b)|$ có ít nhất một nghiệm.

3. Tìm $\lim \left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \sin \frac{i\pi}{2n}} \right)$

4. Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \ln \sqrt{1 + x_n^2} - 2010, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng x_n có giới hạn.

5. Cho phương trình: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i + nx} = 1$.

Chứng minh rằng: Với mỗi số nguyên dương n phương trình có duy nhất một nghiệm dương. Kí hiệu nghiệm đó là x_n , tìm $\lim x_n$.

6. Chứng minh $a^b + b^a > 1$ với mọi $a, b > 0$.

7. Cho đa thức $P(x)$ và $Q(x) = aP(x) + bP'(x) + cP''(x)$ trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac > 0$. Chứng minh rằng nếu $Q(x)$ vô nghiệm thì $P(x)$ vô nghiệm.

8. Cho số thực a khác không, đa thức $P(x)$, $\deg P(x) = n \geq 1$ và đa thức $Q(x) = P(x) + aP'(x) + a^2P''(x) + \dots + a^n P^{(n)}(x)$. Chứng minh rằng nếu $P(x)$ vô nghiệm thì $Q(x)$ cũng vô nghiệm.