

ĐÁP ÁN ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN
Thời gian làm bài : 180 phút .

o00000o

CÂU 1: (3 điểm) (Đại số – Lượng giác)

Giải phương trình : $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Đặt $y = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$ Ta có hệ : $\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ 7x^2 + 9x - 4 = y^3 \end{cases}$	0,5đ
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \end{cases}$	0,5đ
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ y^3 + y = (x+1)^3 + x + 1 \end{cases}$	0,5đ
Xét hàm $f(t) = t^3 + t$. Vì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.	0,5đ
Suy ra $f(y) = f(x+1) \Leftrightarrow y = x+1$. Như vậy ta có hệ : $\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (*) \\ y = x+1 \end{cases}$	0,5đ
Giải phương trình (*) ta có tập nghiệm : $S = \left\{ 5, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$	0,5đ

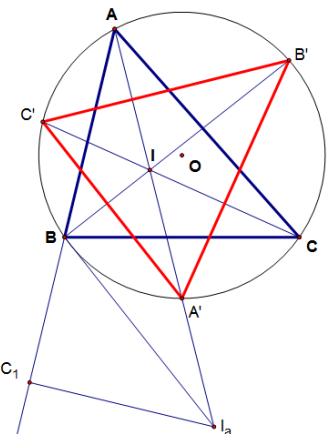
ĐÁP ÁN ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN
Thời gian làm bài : 180 phút .

000000

CÂU 2 : (3 điểm) (Hình học phẳng)

Gọi I và O lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác ABC. Các tia AI, BI, CI cắt lại đường tròn tâm O tương ứng tại A', B', C'. Gọi r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC ứng với các góc A, B, C. Gọi r'_a, r'_b, r'_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp của tam giác A'B'C' ứng với các góc A', B', C'.

Chứng minh rằng: $r'_a + r'_b + r'_c \geq r_a + r_b + r_c$

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
 Gọi p là nửa chu vi của tam giác ABC; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $\Delta A'B'C'$. Ký hiệu I_a là tâm và C_1 là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp trong góc A thì $I_a C_1 = r_a$ và $AC_1 = p$.	0,5đ
Ta có hệ thức : $r_a = p \cdot \tan \frac{A}{2}$ (1) $= R \left(\sin A + \sin B + \sin C \right) \cdot \tan \frac{A}{2}$ $= R \left(2 \sin^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \right)$ $= R \left(2 \sin^2 \frac{A}{2} + 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \right)$ $\Rightarrow r_a = R (1 - \cos A + \cos B + \cos C)$ (2)	0,5đ
Chứng minh tương tự ta được: $r_b = R (1 + \cos A - \cos B + \cos C)$ (3) $r_c = R (1 + \cos A + \cos B - \cos C)$ (4)	0,5đ
Cộng theo vế đẳng thức (2) (3) (4) ta được : $r_a + r_b + r_c = R (3 + \cos A + \cos B + \cos C)$ Đối với $\Delta A'B'C'$ nội tiếp trong đường tròn (O;R) ta cũng có : $r'_a + r'_b + r'_c = R (3 + \cos A' + \cos B' + \cos C')$	0,5đ
<u>Vậy ta chứng minh</u> : $\cos A + \cos B + \cos C \leq \cos A' + \cos B' + \cos C'$ (*)	0,5đ

Ta có $\widehat{A}' = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}), \widehat{B}' = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{C}), \widehat{C}' = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{A})$ Nên : $\cos A' = \sin \frac{A}{2}, \cos B' = \sin \frac{B}{2}, \cos C' = \sin \frac{C}{2}$ (5) Mặt khác : $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \cos \frac{A+B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2}$ (6)	
Tương tự ta có : $\cos B + \cos C \leq 2 \sin \frac{A}{2}$ (7) $\cos C + \cos A \leq 2 \sin \frac{B}{2}$ (8) (6)+(7)+(8) vế với vế và do (5) ta được (*)	0,5d

ĐÁP ÁN ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN

Thời gian làm bài : 180 phút .

000000

CÂU 3: (2 điểm) (Số học)

Cho 3 số nguyên dương a, b, c đôi một không có cùng số dư trong phép chia cho 5.

Đặt $A = 3a + b + c$

$$B = a + 3b + c$$

$$C = 2a + 2b + c$$

Chứng minh rằng trong 3 số A, B, C có một và chỉ một số chia hết cho 5.

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Do a, b, c đôi một không có cùng số dư trong phép chia cho 5 nên : $A - B = 2(a - b)$ $B - C = b - a$ $C - A = b - a$ đều không chia hết cho 5. Do đó A, B, C đôi một không có cùng số dư khi chia cho 5 (*)	0,5đ
Giả sử trong 3 số A, B, C không có số nào chia hết cho 5. Khi đó A, B, C chia cho 5 sẽ có số dư là 1, 2, 3 hoặc 4. Điều này kết hợp với (*) ta suy ra trong 3 số A, B, C phải có 2 số có tổng chia hết cho 5.	0,5đ
Mà $A + C = 5a + 3b + 2c \equiv 2(c - b) \pmod{5}$ $B + C = 3a + 5b + 2c \equiv 2(c - a) \pmod{5}$	0,5đ
Nên $A + C$ và $B + C$ đều không chia hết cho 5. Do đó, $A + B \not\equiv 5$ Để thấy, $2C = A + B$. Vì vậy $2C \not\equiv 5 \Rightarrow C \not\equiv 5$ (!) Điều mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử là sai, và do đó kết hợp với (*) ta sẽ có trong 3 số A, B, C có một và chỉ một số chia hết cho 5.	0,5đ

ĐÁP ÁN ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN

Thời gian làm bài : 180 phút .

o00000o

CÂU 4 : (3 điểm) (Giải tích)

Cho dãy số $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ được xác định bởi $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \forall n \geq 1$

1) Chứng minh tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2) Đặt $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Chứng minh α là số vô tỉ.

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Phần 1)	
Rõ ràng $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, nên $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. Hơn nữa, $\forall k \geq 3$, $k! = 1.2.3 \dots k > 1.2.2 \dots 2 = 2^{k-1}$.	0,5đ
Do đó, $\forall n \geq 3$, ta có $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2$. Ấu vậy $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 2 nên tồn tại giới hạn hữu hạn $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.	0,5đ
Phần 2)	
Giả sử α là số hữu tỉ, $\alpha = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$ (vì $\alpha > 0$) với $(p, q) = 1$ Khi đó, $(q+1)!\alpha = (q+1)! \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right) = (q+1)! \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{q+1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=q+2}^n \frac{1}{k!} \right)$ $= \sum_{k=1}^{q+1} \frac{(q+1)!}{k!} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=q+2}^n \frac{(q+1)!}{k!} \right)$	0,5đ
Vì $(q+1)!\alpha$ và $\sum_{k=1}^{q+1} \frac{(q+1)!}{k!}$ là 2 số nguyên dương nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=q+2}^n \frac{(q+1)!}{k!} \right) = (q+1)!\alpha - \sum_{k=1}^{q+1} \frac{(q+1)!}{k!}$ là một số nguyên (*).	0,5đ
Mà $0 < \sum_{k=q+2}^n \frac{(q+1)!}{k!} = \frac{(q+1)!}{(q+2)!} + \frac{(q+1)!}{(q+3)!} + \dots + \frac{(q+1)!}{n!}$ $= \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \dots + \frac{1}{(q+2)(q+3) \dots n}$	0,5đ

$< \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)^2} + \dots + \frac{1}{(q+2)^n} = \frac{1}{q+2} \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{(q+2)^n}}{1 - \frac{1}{q+2}} \right) = \frac{1}{q+1} \left(1 - \frac{1}{(q+2)^n} \right), \forall n > q+2$	
Do $q+2 > 1$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(q+2)^n} = 0$. Do đó, $0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=q+2}^n \frac{(q+1)!}{k!} \right) \leq \frac{1}{q+1} < 1$. Điều này mâu thuẫn với (*). Do đó điều giả sử là sai hay α là số vô tỉ.	0,5đ

ĐÁP ÁN ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN

Thời gian làm bài : 180 phút .

0000000

CÂU 5: (3 điểm) (Tổ hợp)

Trong chiến dịch vận động bầu cử tổng thống Mỹ năm 2008 có a các Đảng phái chính trị khác nhau ($a > 1$), mỗi Đảng đề cử ra 1 người để tranh cử tổng thống với các Đảng khác. Mỗi người ra ứng cử phải nêu một số lời hứa hẹn sẽ thực hiện nếu được bầu làm tổng thống. Biết rằng có tất cả n lời hứa hẹn bởi tất cả những ứng viên tranh cử tổng thống và tất cả các ứng viên đều hứa rằng sẽ đưa nền kinh tế Mỹ thoát khỏi tình trạng khủng hoảng hiện nay. Do các Đảng phái có quan điểm chính trị khác nhau nên các lời hứa đưa ra của 2 ứng viên bất kì không hoàn toàn giống nhau nhưng có chung ít nhất là 2 lời hứa. Chứng minh : $a \leq 2^{n-2}$.

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Giả sử a Đảng phái khác nhau là $X_1, \dots, X_a$ và $S_1, \dots, S_a$ lần lượt là tập hợp tất cả các lời hứa của ứng viên của Đảng $X_1, \dots, X_a$. Giả sử tập hợp n lời hứa khác nhau của tất cả các ứng viên là $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ trong đó x_1 là lời hứa sẽ đưa nền kinh tế Mỹ thoát khỏi tình trạng khủng hoảng hiện nay. Theo giả thiết tất cả các ứng viên đều hứa rằng sẽ đưa nền kinh tế Mỹ thoát khỏi tình trạng khủng hoảng hiện nay nên $x_1 \in S_i, \forall i = \overline{1, a}$.	1đ
Đặt $S_i' = S_i \setminus \{x_1\}$, $P' = P \setminus \{x_1\}$. Vì 2 ứng viên bất kì có các lời hứa đưa ra không hoàn toàn giống nhau nhưng có chung ít nhất là 2 lời hứa nên $\begin{cases} S_i' \neq S_j' \\ S_i' \cap S_j' \neq \emptyset, \forall i \neq j. \end{cases}$ Mỗi tập S_i' là tập con khác $\emptyset$ của tập P'. Tập P' có $n - 1$ phần tử nên số tập con khác rỗng của tập P' là $2^{n-1} - 1$.	1đ
Mỗi tập con khác rỗng (ngoại trừ tập P') đều có phần bù trong P' khác rỗng. Do đó, số các cặp tập con khác rỗng của P' có giao bằng rỗng $\geq \frac{2^{n-1} - 1 - 1}{2} = 2^{n-2} - 1$. Vì vậy, số các tập con S_i' của tập P' thỏa $\begin{cases} S_i' \neq S_j' \\ S_i' \cap S_j' \neq \emptyset, \forall i \neq j, i, j \in \overline{1, a} \end{cases}$ sẽ $\leq (2^{n-1} - 1) - (2^{n-2} - 1) = 2^{n-2}$. Hay $a \leq 2^{n-2}$.	1đ

ĐÁP ÁN ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN

Thời gian làm bài : 180 phút .

o00000o

CÂU 6: (3 điểm) (Bất đẳng thức)

Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn : $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$.

Chứng minh : $0 \leq xy + yz + zx - xyz \leq 2$.

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Ta thấy nếu $x, y, z > 1$ thì $x^2 + y^2 + z^2 + xyz > 4$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$ (*). Do vai trò bình đẳng của x, y, z, không mất tính tổng quát ta giả sử $x \leq 1$. Khi đó, $xy + yz + zx - xyz \geq yz - xyz = (1 - x)yz \geq 0$.	0,5đ
Tiếp theo ta chứng minh $xy + yz + zx - xyz \leq 2$. Nếu $x = 0$ thì ta có : $4 = y^2 + z^2 \geq 2yz$. Suy ra : $xy + yz + zx - xyz = yz \leq 2$. Vì vậy, do vai trò bình đẳng của x, y, z, không mất tính tổng quát ta xét $x, y, z > 0$. Đặt $x = 2a > 0, y = 2b > 0, z = 2c > 0$. Khi đó, $0 < a \leq \frac{1}{2}$ (vì $0 < x \leq 1$) Hệ thức (*) thành : $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ (**) Từ đây ta có : $0 < b, c < 1$. Do đó, ta có thể đặt $a = \cos A, b = \cos B$, trong đó $\frac{\pi}{3} \leq A < \frac{\pi}{2}, 0 < B < \frac{\pi}{2}$.	0,5đ
Khi đó, từ hệ thức (**) ta có : $\cos^2 A + \cos^2 B + c^2 + 2\cos A \cdot \cos B \cdot c = 1 \Leftrightarrow c^2 + 2\cos A \cdot \cos B \cdot c + \cos^2 A + \cos^2 B - 1 = 0$ $\Leftrightarrow c^2 + 2\cos A \cdot \cos B \cdot c + \cos^2 A \cdot \cos^2 B + \cos^2 A + \cos^2 B - 1 - \cos^2 A \cdot \cos^2 B = 0$ $\Leftrightarrow (c + \cos A \cdot \cos B)^2 - (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B) = 0 \Leftrightarrow (c + \cos A \cdot \cos B)^2 - \sin^2 A \cdot \sin^2 B = 0$ $\Leftrightarrow (c + \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B)(c + \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B) = 0$ $\Leftrightarrow (c + \cos(A - B))(c + \cos(A + B)) = 0 \Leftrightarrow c = -\cos(A + B)$ (vì $\frac{\pi}{3} \leq A < \frac{\pi}{2}, 0 < B < \frac{\pi}{2}$ nên $-\frac{\pi}{6} < A - B < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos(A - B) \leq 1$. do đó $c + \cos(A - B) > 0$ (vì $c > 0$)).	0,5đ
Mặt khác, vì $\frac{\pi}{3} \leq A < \frac{\pi}{2}, 0 < B < \frac{\pi}{2}$ nên $\frac{\pi}{3} < A + B < \pi$. Đặt $C = \pi - A - B$. Khi đó ta có : $0 < C < \frac{2\pi}{3}$ và $A + B + C = \pi$. Và $c = -\cos(A + B) = -\cos(\pi - C) = \cos C$	0,5đ
Ảnh hưởng, $A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $A + B + C = \pi$. Áp dụng BĐT Jensen cho hàm $f(x) = \cos x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có :	0,5đ

$\cos A + \cos B + \cos C \leq 3 \cos \left(\frac{A+B+C}{3} \right) = \frac{3}{2}$ Suy ra : $0 < \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} - \cos A$ Mặt khác, $0 \leq 2 \cos B \cdot \cos C = \cos(B-C) + \cos(B+C) = \cos(B-C) - \cos A \leq 1 - \cos A$ Và $\cos A = a \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2 \cos A \geq 0$	
Do đó, $xy + yz + zx - xyz = 4(ab + bc + ca - 2abc)$ $= 4(\cos A \cdot \cos B + \cos B \cdot \cos C + \cos C \cdot \cos A - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$ $= 4[\cos A(\cos B + \cos C) + \cos B \cdot \cos C(1 - 2 \cos A)]$ $\leq 4 \left[\cos A \left(\frac{3}{2} - \cos A \right) + \frac{1}{2} (1 - \cos A)(1 - 2 \cos A) \right] = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ (đpcm)	0,5đ

ĐÁP ÁN ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN
Thời gian làm bài : 180 phút .

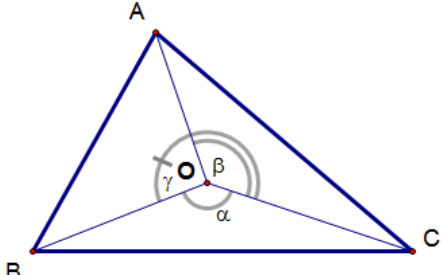
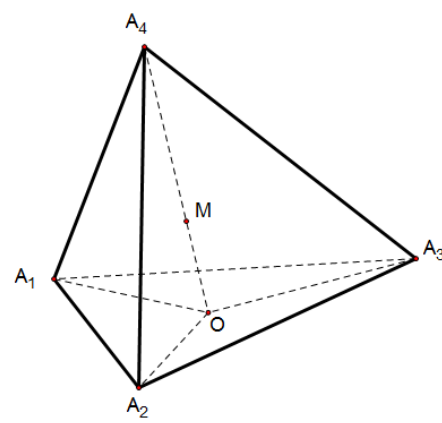
000000

CÂU 7: (3 điểm) (Hình học không gian)

Cho tứ diện SABC , M là điểm bất kì nằm trong tứ diện. Một mặt phẳng (α) tùy ý qua M cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'.

Đặt V, V_A , V_B , V_C lần lượt là thể tích của các tứ diện SABC, SMBC, SMCA, SMAB.

Chứng minh : $V = \frac{V_A}{SA'} + \frac{V_B}{SB'} + \frac{V_C}{SC'}$

ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Trước tiên ta có 2 nhận xét sau : Nhận xét 1 : Cho O là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Khi đó : $S_{OBC} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{OAC} \cdot \overrightarrow{OB} + S_{OAB} \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$ Thật vậy, đặt $\vec{x} = 2(S_{OBC} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{OAC} \cdot \overrightarrow{OB} + S_{OAB} \cdot \overrightarrow{OC}).$ Đặt $\alpha = \widehat{BOC}, \beta = \widehat{AOC}, \gamma = \widehat{AOB}.$ Khi đó, $\vec{x} \cdot \overrightarrow{OA} = OA^2 \cdot OB \cdot OC (\sin \alpha + \sin \beta \cdot \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \cos \beta)$ $= OA^2 \cdot OB \cdot OC (\sin \alpha + \sin(\beta + \gamma))$ $= OA^2 \cdot OB \cdot OC (\sin \alpha + \sin(2\pi - \alpha)) = 0$	 0,5đ
Tương tự, $\vec{x} \cdot \overrightarrow{OB} = 0.$ Mà $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ không cùng phương nên $\exists k, l \in \mathbb{R} : \vec{x} = k \cdot \overrightarrow{OA} + l \cdot \overrightarrow{OB}$ $\Rightarrow \vec{x}^2 = k \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \vec{x} + l \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$ Từ đây ta có đpcm.	0,5đ
Nhận xét 2 : Cho M là điểm bất kì nằm trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích của các tứ diện $MA_2A_3A_4, MA_1A_3A_4, MA_1A_2A_4, MA_1A_2A_3$ Khi đó ta có : $V_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + V_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + V_3 \cdot \overrightarrow{MA_3} + V_4 \cdot \overrightarrow{MA_4} = \vec{0}.$ Thật vậy, gọi O là giao điểm của MA_4 và mp($A_1A_2A_3$). Do M nằm trong tứ diện nên O nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$. Theo nhận xét 1 ta có : $S_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + S_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + S_3 \cdot \overrightarrow{OA_3} = \vec{0} \quad (1)$ trong đó S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các $\Delta OA_2A_3, \Delta OA_1A_3, \Delta OA_1A_2$ Mặt khác,	 0,5đ

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{V_{OA_2A_3A_4}}{V_{OA_1A_3A_4}} = \frac{V_{OA_2A_3M}}{V_{OA_1A_3M}} = \frac{V_{OA_2A_3A_4} - V_{OA_2A_3M}}{V_{OA_1A_3A_4} - V_{OA_1A_3M}} = \frac{V_1}{V_2} \Rightarrow \frac{S_1}{V_1} = \frac{S_2}{V_2}$	
Tương tự, $\frac{S_2}{V_2} = \frac{S_3}{V_3}$. Do đó, $\frac{S_1}{V_1} = \frac{S_2}{V_2} = \frac{S_3}{V_3}$. Từ (1) suy ra: $V_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + V_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + V_3 \cdot \overrightarrow{OA_3} = \vec{0}$ $\Rightarrow V_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + V_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + V_3 \cdot \overrightarrow{MA_3} - (V_1 + V_2 + V_3) \cdot \overrightarrow{MO} = \vec{0} \quad (2)$ Mà $\frac{OA_4}{OM} = \frac{V_{A_1A_2A_3A_4}}{V_{A_1A_2A_3M}} = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{V_4}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OA_4} = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{V_4} \cdot \overrightarrow{OM} \Rightarrow -(V_1 + V_2 + V_3) \cdot \overrightarrow{MO} = V_4 \cdot \overrightarrow{MA_4} \quad (3)$ Từ (2) & (3) suy ra: $V_1 \cdot \overrightarrow{MA_1} + V_2 \cdot \overrightarrow{MA_2} + V_3 \cdot \overrightarrow{MA_3} + V_4 \cdot \overrightarrow{MA_4} = \vec{0}$.	0,5d
Trở lại bài toán, ta sử dụng hệ tọa độ Đềcác xiên góc Sxyz bằng cách chọn đỉnh S của tứ diện SABC làm gốc tọa độ, nghĩa là $S(0;0;0)$ và $A \in Sx, B \in Sy, C \in Sz$, với $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ Theo nhận xét 2 ta có: $V_S \cdot \overrightarrow{MS} + V_A \cdot \overrightarrow{MA} + V_B \cdot \overrightarrow{MB} + V_C \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (với $V_S = V_{MABC}$) $\Leftrightarrow (V_S + V_A + V_B + V_C) \cdot \overrightarrow{SM} = V_A \cdot \overrightarrow{SA} + V_B \cdot \overrightarrow{SB} + V_C \cdot \overrightarrow{SC} \Leftrightarrow V \cdot \overrightarrow{SM} = V_A \cdot \overrightarrow{SA} + V_B \cdot \overrightarrow{SB} + V_C \cdot \overrightarrow{SC}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{SM} = \frac{V_A}{V} \cdot \overrightarrow{SA} + \frac{V_B}{V} \cdot \overrightarrow{SB} + \frac{V_C}{V} \cdot \overrightarrow{SC}$ Vì vậy $M \left(\frac{V_A}{V}; \frac{V_B}{V}; \frac{V_C}{V} \right)$.	0,5d
Giả sử phương trình mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$ (với $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$) Và $A'(x_0;0;0), B'(0;y_0;0), C'(0;0;z_0)$ với $x_0 = SA' > 0, y_0 = SB' > 0, z_0 = SC' > 0$. Khi đó, $ax_0 = by_0 = cz_0 = -d$ (do đó $a, b, c, d \neq 0$) Vì $M \left(\frac{V_A}{V}; \frac{V_B}{V}; \frac{V_C}{V} \right) \in (\alpha)$ nên $\frac{aV_A + bV_B + cV_C}{V} = -d$ Do đó, $\frac{aV_A + bV_B + cV_C}{V} = ax_0 = by_0 = cz_0 \neq 0$ $\Rightarrow \frac{V_A}{SA'} + \frac{V_B}{SB'} + \frac{V_C}{SC'} = \frac{V_A}{x_0} + \frac{V_B}{y_0} + \frac{V_C}{z_0} = \frac{aV_A}{ax_0} + \frac{bV_B}{by_0} + \frac{cV_C}{cz_0}$ $= \frac{V}{aV_A + bV_B + cV_C} \cdot (aV_A + bV_B + cV_C) = V \text{ (đpcm)}.$	0,5d