## CHƯƠNG IV. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC. VECTƠ

### Bài 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0 đến 180. Định lí cosin và định lí sin trong tam giác

**Câu 1.** Cho tam giác ABC có $AB = 3,5; AC = 7,5; \hat{A} = 135^\circ$. Tính độ dài cạnh $BC$ và bán kính $R$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

**Lời giải**

Áp dụng định lí cosin trong tam giác $ABC$ ta có:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$

$\Leftrightarrow BC^2 = 7,5^2 + 3,5^2 - 2.7,5.3,5 \cdot \cos 135^\circ \Leftrightarrow BC^2 \approx 105,6$

$\Leftrightarrow BC \approx 10,3$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$

$\Rightarrow R = \dfrac{BC}{2 \cdot \sin A} = \dfrac{10,3}{2 \cdot \sin 135^\circ} \approx 7,3$

**Câu 2.** Cho tam giác $ABC$ có $\hat{B} = 75^\circ, \hat{C} = 45^\circ$ và $BC = 50$. Tính độ dài cạnh $AB$.

**Lời giải**

Ta có: $\hat{B} = 75^\circ, \hat{C} = 45^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có:

$\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} \Rightarrow AB = \sin C \cdot \dfrac{BC}{\sin A} = \sin 45^\circ \cdot \dfrac{50}{\sin 60^\circ} \approx 40,8$

Vậy độ dài cạnh AB là 40,8.

**Câu 3.** Cho tam giác ABC có $AB = 6, AC = 7, BC = 8$. Tính $\cos A, \sin A$ và bán kính $R$ của đường trong ngoại tiếp tam giác $ABC$.

**Lời giải**

Áp dụng định lí cosin trong tam giác $ABC$ ta có:

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A$

$\Rightarrow \cos A = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{7^2 + 6^2 - 8^2}{2.7.6} = \dfrac{1}{4}$

Lại có: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$ (do $0^\circ < A \le 90^\circ$ )

$\Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$ ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{BC}{2 \cdot \sin A} = \dfrac{8}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{16\sqrt{15}}{15}$.

Vậy $\cos A = \dfrac{1}{4}; \sin A = \dfrac{\sqrt{15}}{4}; R = \dfrac{16\sqrt{15}}{15}$.

**Câu 4.** Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay):

a) $A = \cos 0^\circ + \cos 40^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ$

b) $B = \sin 5^\circ + \sin 150^\circ - \sin 175^\circ + \sin 180^\circ$

c) $C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \sin 75^\circ - \sin 55^\circ$

d) $D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 115^\circ$

e) $E = \cot 10^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \cot 100^\circ$

**Lời giải**

a) $A = \cos 0^\circ + \cos 40^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ$

Tra bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt, ta có: $\cos 0^\circ = 1; \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

Lại có: $\cos 140^\circ = -\cos\left(180^\circ - 40^\circ\right) = -\cos 40^\circ \Rightarrow A = 1 + \cos 40^\circ + \left(-\frac{1}{2}\right) - \cos 40^\circ \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$.

b) $B = \sin 5^\circ + \sin 150^\circ - \sin 175^\circ + \sin 180^\circ$

Tra bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt, ta có: $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}; \sin 180^\circ = 0$

Lại có: $\sin 175^\circ = \sin\left(180^\circ - 175^\circ\right) = \sin 5^\circ \Rightarrow B = \sin 5^o + \frac{1}{2} - \sin 5^o + 0 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}$.

c) $C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \sin 75^\circ - \sin 55^\circ$

Ta có: $\sin 75^\circ = \sin\left(90^\circ - 75^\circ\right) = \cos 15^\circ$; $\sin 55^\circ = \sin\left(90^\circ - 55^\circ\right) = \cos 35^\circ$

$\Rightarrow C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \cos 15^\circ - \cos 35^\circ \Leftrightarrow C = 0$.

d) $D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 115^\circ$

Ta có: $\tan 115^\circ = -\tan\left(180^\circ - 115^\circ\right) = -\tan 65^\circ$

Mà: $\tan 65^\circ = \cot\left(90^\circ - 65^\circ\right) = \cot 25^\circ \Rightarrow D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \cot 25^\circ \Leftrightarrow D = \tan 45^\circ = 1$

e) $E = \cot 10^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \cot 100^\circ$

Ta có: $\cot 100^\circ = -\cot\left(180^\circ - 100^\circ\right) = -\cot 80^\circ$

Mà: $\cot 80^\circ = \tan\left(90^\circ - 80^\circ\right) = \tan 10^\circ \Rightarrow E = \cot 10^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \tan 10^\circ \Leftrightarrow E = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$. Chứng minh:

a) $\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}$

b) $\tan\frac{B+C}{2} = \cot\frac{A}{2}$

**Lời giải**

Xét tam giác $ABC$, ta có:

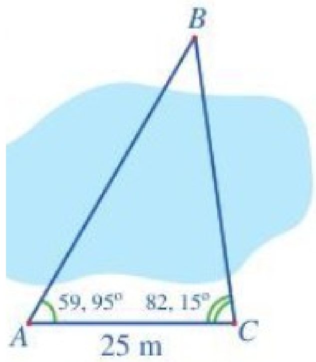
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 90^\circ$

Do đó $\frac{\hat{A}}{2}$ và $\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$ là hai góc phụ nhau.

a) Ta có: $\sin\frac{A}{2} = \cos\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{B+C}{2}$

b) Ta có: $\tan\frac{B+C}{2} = \cot\left(90^\circ - \frac{B+C}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$

**Câu 6.** Để đo khoảng cách từ vị trí $A$ đến vị trí $B$ ở hai bên bờ một cái ao, bạn An đi dọc bờ ao từ vị trí $A$ đến vị trí $C$ và tiến hành đo các góc $BAC, BCA$. Biết $AC = 25\,m, \widehat{BAC} = 59,95^\circ; \widehat{BCA} = 82,15^\circ$. Hỏi khoảng cách từ vị trí $A$ đến vị trí $B$ là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?




**Lời giải**

Xét tam giác $ABC$, ta có: $\widehat{BAC}=59,95^\circ$; $\widehat{BCA}=82,15^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{ABC}=180^\circ-\left(59,95^\circ+82,15^\circ\right)=37,9^\circ$

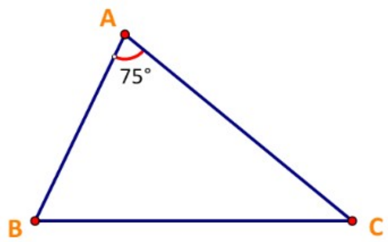
Áp dụng định lí sin trong tam giác BAC ta có: $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$

$\Rightarrow AB=\sin C\cdot\dfrac{AC}{\sin B}=\sin 82,15^\circ\cdot\dfrac{25}{\sin 59,95^\circ}\approx 28,6$

Vậy khoảng cách từ vị trí $A$ đến vị trí $B$ là $28,6\,m$.

**Câu 7.** Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến $A$ và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc $75^\circ$. Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai chạy với tốc độ 12 hải lí một giờ. Sau 2,5 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

**Lời giải**




Gọi B, C lần lượt là vị trí của tàu thứ nhất và tàu thứ hai sau 2,5 giờ.

Sau 2,5 giờ:

Quãng đường tàu thứ nhất đi được là: $AB=8.2,5=20$ (hải lí)

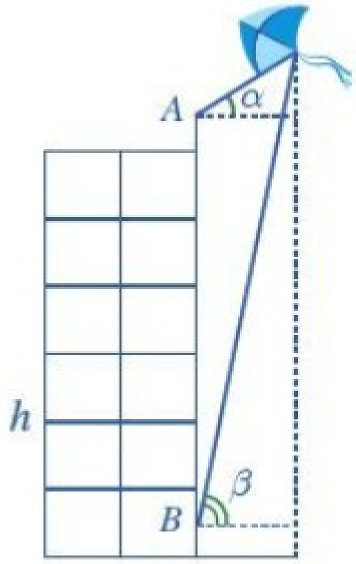
Quãng đường tàu thứ hai đi được là: $AC=12\cdot 2,5=30$ (hải lí)

Áp dụng định lí cosin trong tam giác $ABC$ ta có:

$BC^2=AC^2+AB^2-2\cdot AC\cdot AB\cdot\cos A\Rightarrow BC^2=30^2+20^2-2.30\cdot 20\cdot\cos 75^\circ\Rightarrow BC^2\approx 989,4\Rightarrow BC\approx 31,5$

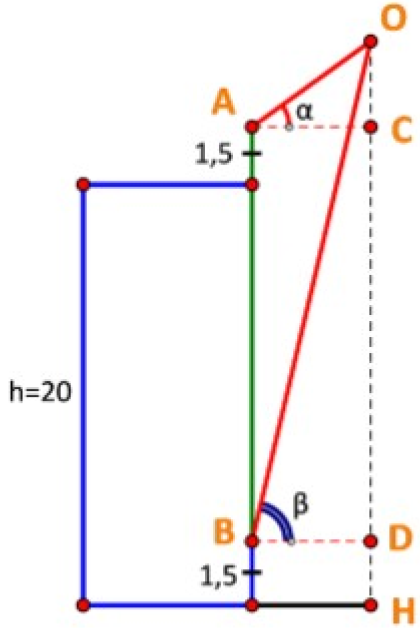
Vậy hai tàu cách nhau 31,5 hải lí.

**Câu 8.** Bạn A đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc diều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn $A$ tới chiếc diều và phương nằm ngang) là $\alpha=35^\circ$; khoảng cách từ đỉnh tòa nhà tới mắt bạn $A$ là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, bạn B cũng quan sát chiếc diều và thấy góc nâng là $\beta=75^\circ$; khoảng cách từ mặt đất đến mắt bạn $B$ cũng là $1,5\,m$. Biết chiều cao của tòa nhà là $h=20\,m$ (Hình). Chiếc diều bay cao bao nhiêu mét so mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?




**Lời giải**

Gọi các điểm:




O là vị trí của chiếc diều.

H là hình chiếu vuông góc của chiếc diều trên mặt đất.

C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên OH.

Đặt $OC = x$, suy ra $OH = x + 20 + 1,5 = x + 21,5$.

Xét tam giác $OAC$, ta có: $\tan\alpha = \dfrac{OC}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{OC}{\tan\alpha} = \dfrac{x}{\tan 35^\circ}$ Xét tam giác OBD, ta có:

$\tan\beta = \dfrac{OD}{BD} \Rightarrow BD = \dfrac{OD}{\tan\beta} = \dfrac{x+20}{\tan 75^\circ}$ Mà: $AC = BD \Rightarrow \dfrac{x}{\tan 35^\circ} = \dfrac{x+20}{\tan 75^\circ}$

$\Leftrightarrow x \cdot \tan 75^\circ = (x+20)\cdot \tan 35^\circ \Leftrightarrow x = \dfrac{20\cdot \tan 35^\circ}{\tan 75^\circ - \tan 35^\circ} \approx 4,6$

Suy ra $OH = 26,1$.

Vậy chiếc diều bay cao 26,1 m so với mặt đất.

**Bài 2. Giải tam giác**

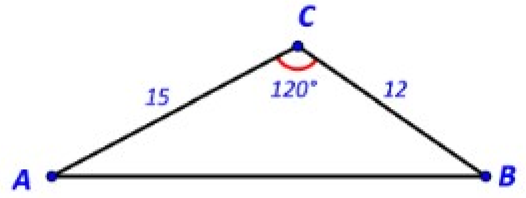
**Câu 1.** Cho tam giác $ABC$ có $BC = 12, CA = 15, \hat{C} = 120^\circ$. Tính:

a) Độ dài cạnh AB.

b) Số đo các góc A, B.

c) Diện tích tam giác $ABC$.

**Lời giải**




a) Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\cdot AC\cdot BC\cdot \cos C \Leftrightarrow AB^2 = 15^2 + 12^2 - 2\cdot 15\cdot 12\cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow AB^2 = 549 \Leftrightarrow AB \approx 23,43$

b) Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$, ta có:

$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{BC}{AB}\cdot \sin C = \frac{12}{23,43}\cdot \sin 120^\circ \approx 0,44 \Rightarrow \hat{A} \approx 26^o$ hoaë $\hat{A} \approx 154^o$ (Loaïi)

Khi đó: $\hat{B} = 180^\circ - \left(26^\circ + 120^\circ\right) = 34^o$

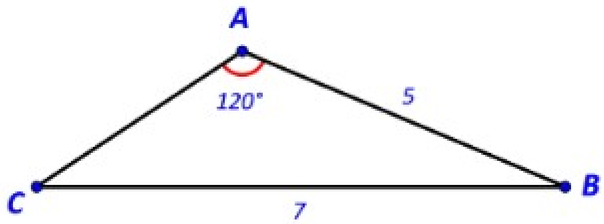
c)

Diện tích tam giác $ABC$ là:

$S = \frac{1}{2}CA.CB.\sin C = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 12.\sin 120^\circ = 45\sqrt{3}$

**Câu 2.** Cho tam giác $ABC$ có $AB = 5, BC = 7, \hat{A} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh $AC$.

**Lời giải**




Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$ ta có:

$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \sin C = \sin A\cdot \frac{AB}{BC} = \sin 120^\circ \cdot \frac{5}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$

$\Rightarrow \hat{C} \approx 38,2^o$ ho?c $\hat{C} \approx 141,8^\circ$ (Loaïi)

Ta coù $\hat{A} = 120^\circ, \hat{C} = 38,2^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - \left(120^\circ + 38,2^\circ\right) = 21,8^\circ$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác $ABC$ ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot \cos B \Leftrightarrow AC^2 = 5^2 + 7^2 - 2.5\cdot 7\cdot \cos 21,8^o \Rightarrow AC^2 \approx 9 \Rightarrow AC = 3$

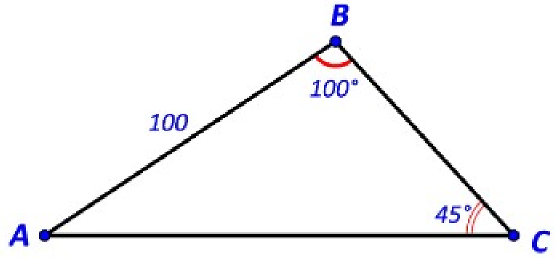
Vậy độ dài cạnh $AC$ là $3$.

**Câu 3.** Cho tam giác $ABC$ có $AB = 100, \hat{B} = 100^\circ, \hat{C} = 45^\circ$. Tính:

a) Độ dài các cạnh $AC, BC$

b) Diện tích tam giác ABC.

**Lời giải**




a)

Ta có: $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - \left(100^\circ + 45^\circ\right) = 35^\circ$

Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$ ta có:

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\begin{cases}AC=\sin B\cdot\dfrac{AB}{\sin C}\\ BC=\sin A\cdot\dfrac{AB}{\sin C}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AC=\sin 100^\circ\cdot\dfrac{100}{\sin 45^\circ}\approx 139,3\\ BC=\sin 35^\circ\cdot\dfrac{100}{\sin 45^\circ}\approx 81,1\end{cases}$$

b)

Diện tích tam giác $ABC$ là:

$$S=\frac{1}{2}.BC.AC\cdot\sin C=\frac{1}{2}.81,1.139,3.\sin 45^\circ\approx 3994,2.$$

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$ có $AB=12, AC=15, BC=20$. Tính:

a) Số đo các góc A, B, C.

b) Diện tích tam giác ABC.

**Lời giải**

a) Áp dụng định lí cosin trong tam giác $ABC$, ta có:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

Thay $a=BC=20;b=AC=15;c=AB=12$.

$$\Rightarrow\cos A=-\frac{31}{360};\cos B=\frac{319}{480}$$

$$\Rightarrow\hat{A}=94,9^o;\hat{B}=48,3^o$$

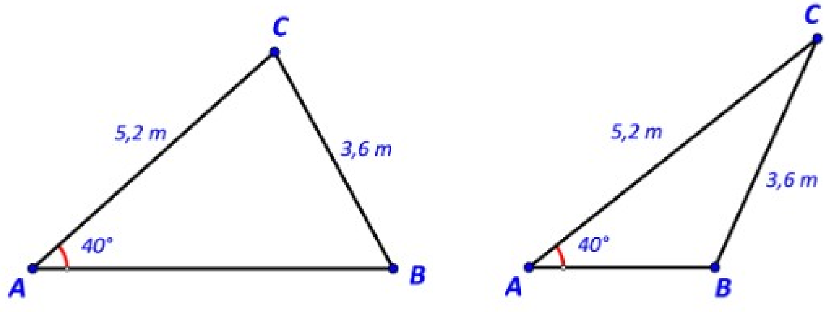
$$\Rightarrow\hat{C}=180^\circ-\left(94,9^\circ+48,3^o\right)=36,8^o$$

b)

Diện tích tam giác $ABC$ là:

$$S=\frac{1}{2}\cdot bc.\sin A=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 12\cdot\sin 94,9^\circ\approx 89,7$$

**Câu 5.** Tính độ dài cạnh $AB$ trong mỗi trường hợp sau:




**Lời giải**

Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow\sin B=\frac{AC\cdot\sin A}{BC}=\frac{5,2\cdot\sin 40^\circ}{3,6}\approx 0,93\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\hat{B}\approx 68,2^\circ\\ \hat{B}\approx 111,8^\circ\end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $\hat{B}\approx 68,2^o$

Ta có: $\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B})=180^\circ-\left(40^\circ+68,2^\circ\right)=71,8^\circ$

Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow AB=\sin C\cdot\frac{BC}{\sin A}=\sin 71,8^\circ\cdot\frac{3,6}{\sin 40^\circ}\approx 5,32$$

Trường hợp $2: \hat{B} \approx 111,8^\circ$

Ta có:

$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (40^\circ + 111,8^\circ) = 28,2^o$

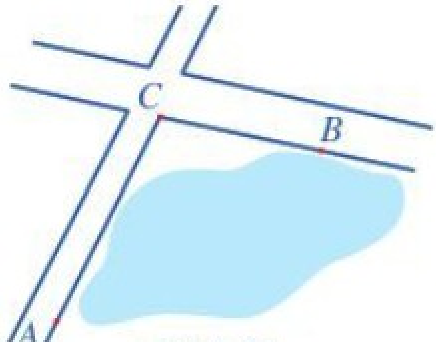
Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$, ta có:

$\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AB}{\sin C}$

$\Rightarrow AB = \sin C \cdot \dfrac{BC}{\sin A} = \sin 28,2^\circ \cdot \dfrac{3,6}{\sin 40^\circ} \approx 2,65$

Vậy $AB = 5,32$ hoặc $AB = 2,65$.

**Câu 6.** Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm $A$ và $B$ mà ta không thể đi trực tiếp từ $A$ đến $B$ (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy, ...), người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm $C$ sao cho ta đo được các khoảng cách $AC, CB$ và góc $ACB$. Sau khi đo, ta nhận được: $AC = 1\,km, CB = 800\,m$ và $\widehat{ACB} = 105^\circ$ (Hình 31). Tính khoảng cách $AB$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười đơn vị mét).



Hình 31

**Lời giải**

Đổi: 1 km = 1000 m. Do đó $AC = 1000$ m.

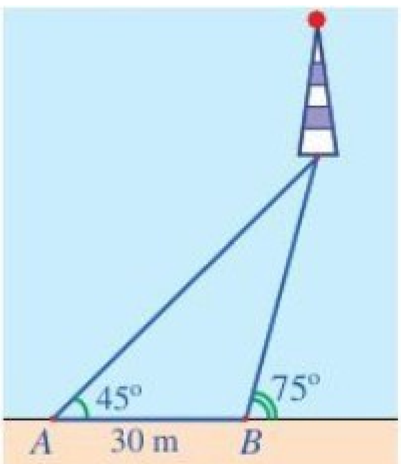
Áp dụng định lí cosin trong tam giác $ABC$ ta có:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C \Rightarrow AB^2 = 1000^2 + 800^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 800 \cdot \cos 105^\circ$

$\Rightarrow AB^2 \approx 2054110,5 \Rightarrow AB \approx 1433,2$

Vậy khoảng cách $AB$ là 1433,2 m.

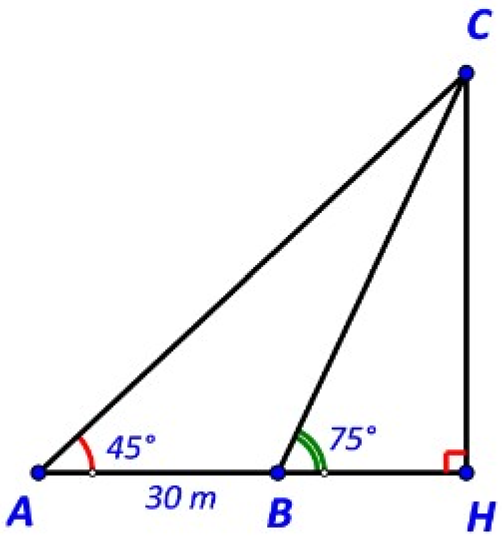
**Câu 7.** Một người đi dọc bờ biển từ vị trí $A$ đến vị trí $B$ và quan sát một ngọn hải đăng. Góc nghiêng của phương quan sát từ các vị trí A, B tới ngọn hải đăng với đường đi của người quan sát là $45^\circ$ và $75^\circ$. Biết khoảng cách giữa hai vị trí A, B là $30\,m$ (Hình). Ngọn hải đăng cách bờ biển bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?




**Lời giải**

Gọi C là vị trí ngọn hải đăng và H là hình chiếu của C trên $AB$.

Khi đó $CH$ là khoảng cách từ ngọn hải đăng tới bờ biển.




Ta có: $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{CBH} = 180^\circ - 75^\circ = 115^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 180^\circ - (\hat{A} + \widehat{ACB}) = 180^\circ - (45^\circ + 115^\circ) = 20^\circ$ Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$ ta có: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \sin B \cdot \frac{AB}{\sin C} = \sin 115^\circ \cdot \frac{30}{\sin 20^\circ} \approx 79,5$

Tam giác ACH vuông tại H nên ta có:

$CH = \sin A.AC = \sin 45^\circ.79,5 \approx 56$

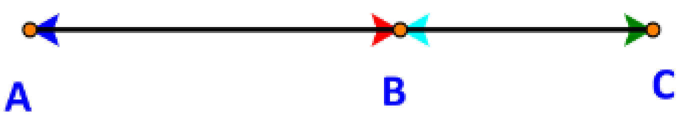
Vậy ngọn hải đăng cách bờ biển $56m$.

**Bài 3. Khái niệm vectơ**

**Câu 1.** Cho $A, B, C$ là ba điểm thẳng hàng, $B$ nằm giữa $A$ và $C$. Viết các cặp vectơ cùng hướng, ngược hướng trong những vectơ sau:

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$

**Lời giải**




Do các vectơ đều nằm trên đường thẳng $AB$ nên các vectơ này đều cùng phương với nhau.

Dễ thấy:

Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng (từ trái sang phải.)

Các vectơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ cùng hướng (từ phải sang trái.)

Do đó, các cặp vectơ cùng hướng là:

$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CB}$

Các cặp vectơ ngược hướng là:

$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$;

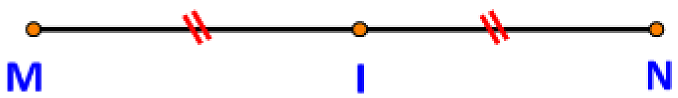
$\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CB}$

**Câu 2.** Cho đoạn thẳng $MN$ có trung điểm là $I$.

a) Viết các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là một trong ba điểm $M, N, I$.

b) vectơ nào bằng $\overrightarrow{MI}$ ? Bằng $\overrightarrow{NI}$ ?

**Lời giải**




a) Các vectơ đó là: $\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}, \overrightarrow{NI}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NM}$.

b) Dễ thấy:

+) vectơ $IN$ cùng hướng với vectơ $MI$. Hơn nữa:

$|IN| = IN = MI = |MI|$

$\Rightarrow IN = MI$

+) vectơ $IM$ cùng hướng với vectơ $NI$. Hơn nữa:

$|IM| = IM = NI = |NI|$

$\Rightarrow IM = NI$

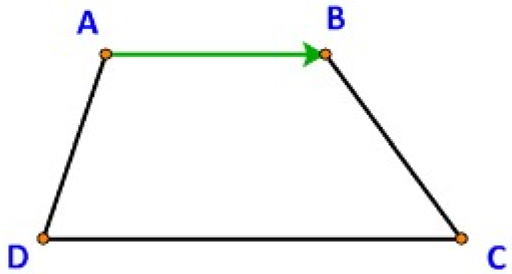
Vậy $IN = MI$ và $MM = NI$

**Câu 3.** Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là $AB$ và $CD$. Tìm vectơ:

a) Cùng hướng với $AB$

b) Ngược hướng với $AB$

**Lời giải**




Giá của vectơ $AB$ là đường thẳng $AB$.

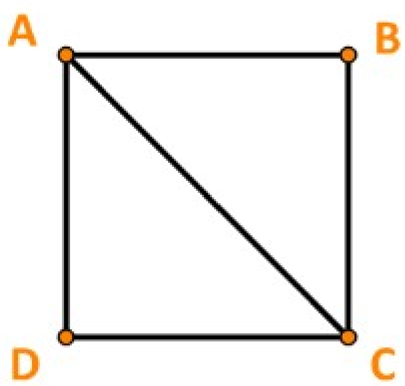
Các vectơ cùng phương với vectơ $AB$ là: $CD$ và $DC$

a) vectơ $DC$ cùng hướng với vectơ $AB$.

b) vectơ $CD$ ngược hướng với vectơ $AB$.

**Câu 4.** Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng $3cm$. Tính độ dài của các vectơ $AB, AC$

**Lời giải**

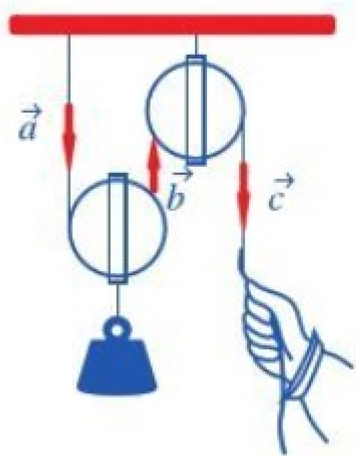



Ta có: $|AB| = AB$ và $|AC| = AC$.

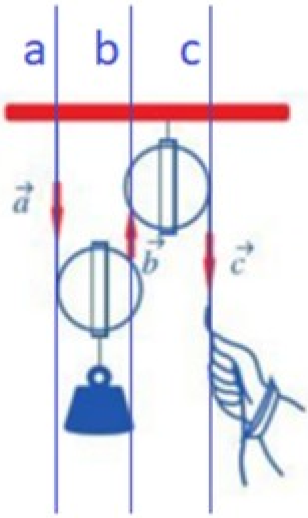
Mà $AB = 3, AC = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow |AB| = 3; \quad |AC| = 3\sqrt{2}$

**Câu 5**. Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vectoo $a, b, c$ (hình)




a) Hãy chỉ ra các cặp vectơ cùng phương.
b) Trong các cặp vectơ đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng.
**Lời giải**




Gọi a, b, c là các đường thẳng lần lượt chứa các vectơ $a, b, c$. Khi đó: $a, b, c$ lần lượt là giá của các vectơ $a, b, c$

a) Dễ thấy: $a//b//c$

$\Rightarrow$ Ba vectơ $a, b, c$ cùng phương với nhau.

Vậy các cặp vectơ cùng phương là: $a$ và $b, a$ và $c, b$ và $c$.

b) Quan sát ba vectơ, ta thấy: vectơ $a$ và $c$ cùng hướng xuống còn vectơ $b$ hướng lên trên.

Vậy vectơ $a$ và $c$ cùng hướng, vectơ $a$ và $c$ ngược hướng, vecto $b$ và $c$ ngược hướng.

**Bài 4. Tổng, hiệu của hai vectơ**

**Câu 1.** Cho ba điểm $M, N, P$. Vectơ $u = NP + MN$ bằng vectơ nào sau đây?

A. $PN$;

B. $PM$

C. $MP$;

D. $NM$.

**Lời giải**

Ta có $u = NP + MN = MN + NP = MP$. **Chọn C**

**Câu 2.** Cho ba điểm $D, E, G$. Vectơ $v = DE + (-DG)$ bằng vectơ nào sau đây?

A. $EG$

B. $GE$;

C. $GD$;

D. $ED$.

**Lời giải**

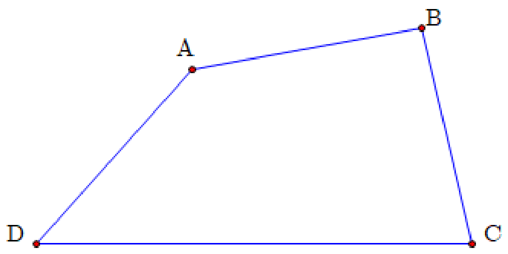
Ta có $v = DE + (-DG) = v = DE + GD = GE$. **Chọn B.**

**Câu 3.** Cho bốn điểm $A, B, C, D$. Chứng minh:

a) $AB + CD = AD + CB$

b) $AB + CD + BC + DA = 0$

**Lời giải**




a) $AB + CD - AD - CB = (AB - AD) + (CD - CB) = (AB + DA) + (CD + BC) = DB + BD = 0$

b) $AB + CD + BC + DA = (DA + AB) + (BC + CD) = DB + BD = 0$

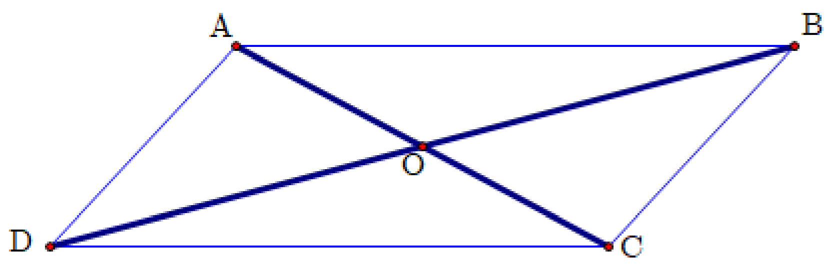
**Câu 4.** Cho hình bình hành $ABCD$, gọi $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) $|AB + AD| = |AC|$;

b) $AB + BD = CB$

c) $OA + OB = OC + OD$.

**Lời giải**



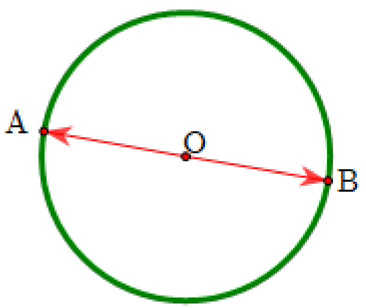

a) Theo quy tắt hình bình hành nên a) đúng

b) $AB + BD = AD = BC \neq CB$ nên b) sai

c) $OA + OB - OC - OD = CA + DB \neq 0$ nên c) sai

**Câu 5.** Cho đường tròn tâm $O$. Giả sử $A, B$ là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để hai vectơ $OA$ và $OB$ đối nhau.

**Lời giải**

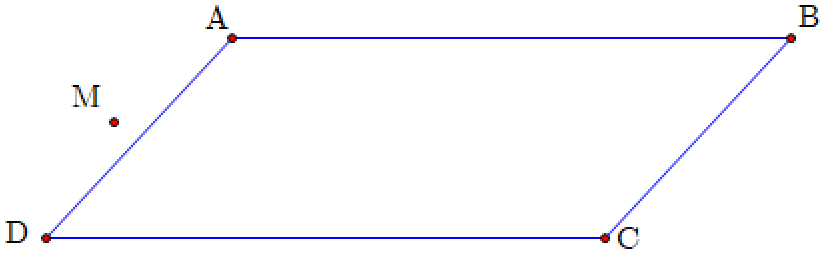



Hai vectơ đối nhau khi chúng cùng phương, ngược hướng và có độ lớn bằng nhau

Do đó, để hai vectơ $OA$ và $OB$ đối nhau khi và chỉ khi $AB$ là đường kính của đường tròn tâm $O$.

**Câu 6.** Cho $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh $MB - MA = MC - MD$ với mỗi điểm $M$ trong mặt phẳng.

**Lời giải**




Ta có $\begin{cases} MB - MA = AB \\ MC - MD = DC \end{cases}$

Mà $AB = DC$ nên được điều phải chứng minh

**Câu 7.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $a$. Tính độ dài của các vectơ sau:

a) $DA + DC$;

b) $AB - AD$

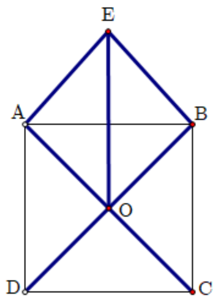
c) $OA + OB$ với $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$.

**Lời giải**

a) $\left|DA + DC\right| = \left|DB\right| = a\sqrt{2}$

b) $\left|AB - AD\right| = \left|DB\right| = a\sqrt{2}$

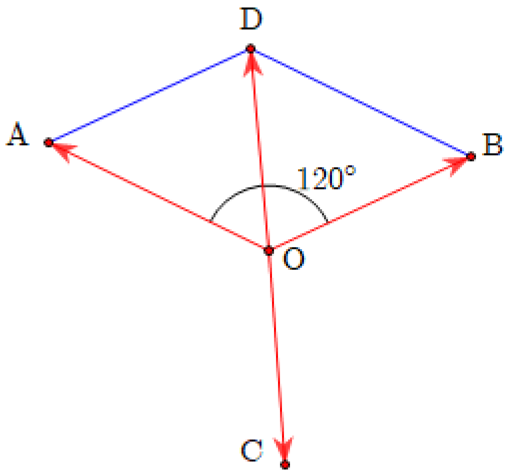
c) Vẽ hình bình hành $OAEB$ vì góc $\widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow OAEB$ là hình vuông nên ta có




$\left|OA + OB\right| = \left|OE\right| = a\sqrt{2}$

**Câu 8.** Cho ba lực $F_1 = OA, F_2 = OB$ và $F_3 = OC$ cùng tác động vào một vật tại điểm $O$ và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $F_1, F_2$ đều là $120N$ và $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Tìm cường độ và hướng của lực $F_3$.

**Lời giải**



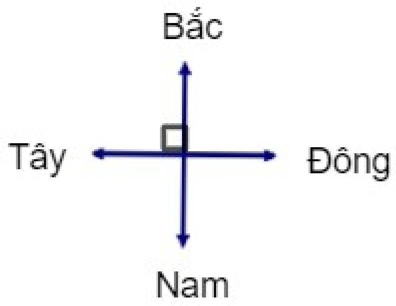

Vẽ hình bình hành $OADB$ ta dễ có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ vì $OA=OB$ nên $OADB$ là hình thoi. Suy ra tam giác là $OBD$, nên $OD=OA=OB$.

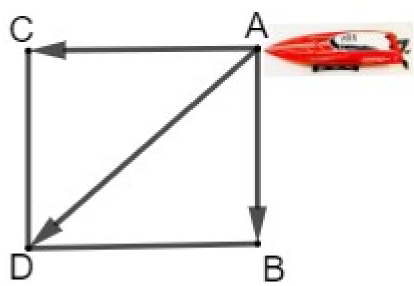
Vì vật đứng yên, nên ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$. Suy ra $OC=OD=120N$

Vậy cường độ lực $F_3=120N$. Có hướng ngược $\overrightarrow{OD}$ (là hợp lực của $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$)

**Câu 9.** Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là $10\,km/h$. Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc $40\,km/h$ so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

**Lời giải**




Ca nô chuyển từ đông sang tây, giả sử ca nô đi theo hướng $A$ sang $C$, khi đó vận tốc so với mặt nước của ca nô được biểu thị bởi $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{AC}$ và có độ lớn $\left|\overrightarrow{v_1}\right|=40\,km/h$, vận tốc dòng chảy được biểu thị bởi $\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{AB}$ và có độ lớn $\left|\overrightarrow{v_2}\right|=10\,km/h$.

Khi đó vận tốc của ca nô so với bờ sông được biểu thị bởi $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$

Ta cần tính độ lớn của vectơ $\overrightarrow{v}$, hay chính là $\left|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\right|$

Dựng hình bình hành ACDB như hình vẽ.

Do hướng nam bắc vuông góc với hướng đông tây nên $AB$ và $AC$ vuông góc với nhau.

Suy ra ACDB là hình chữ nhật.

Nên $AB = CD = 10, AC = BD = 40$.

Sử dụng định lí Pythagore trong tam giác vuông ACD, ta có:

$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 40^2 + 10^2 = 1700 \Rightarrow AD = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17}$

Lại có do $ACDB$ là hình bình hành nên: $AD = AC + AB = v_1 + v_2$ Do đó:

$v = AD \Rightarrow |v| = |AD| = AD = 10\sqrt{17}$

Vậy vận tốc của ca nô so với bờ sông là $10\sqrt{17}\ km/h$.

**Bài 5. Tích của một số với một vectơ**

**Câu 1.** Cho hình thang $MNPQ, MN // PQ, MN = 2PQ$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

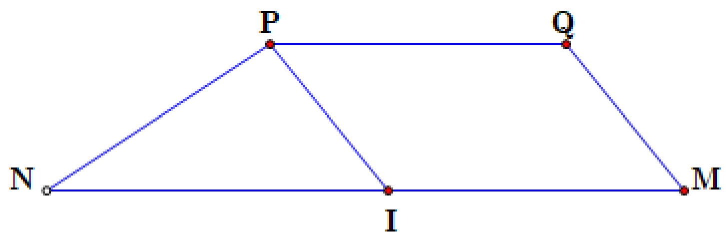
A. $MN = 2PQ$

B. $MQ = 2NP$

C. $MN = -2PQ$

D. $MQ = -2NP$.

**Lời giải**



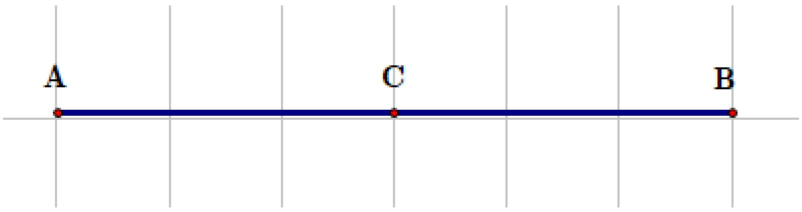

Ta có $MN = 2MI = 2QP = -2PQ$. **Chọn C**

**Câu 2.** Cho đoạn thẳng $AB = 6cm$.

a) Xác định điểm $C$ thoả mãn $AC = \frac{1}{2}AB$.

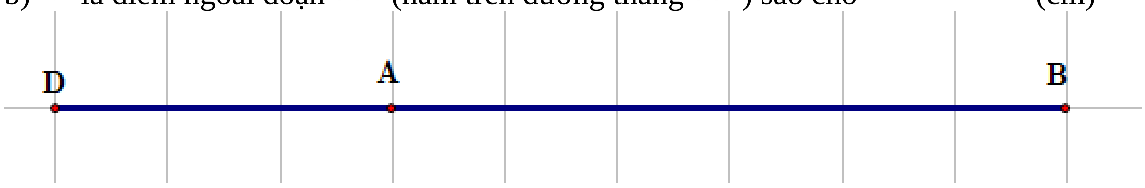
b) Xác định điểm $D$ thoả mãn $AD = -\frac{1}{2}AB$.

**Lời giải**




a) C là trung điểm của đoạn $AB$

b) $D$ là điểm ngoài đoạn $AB$ (nằm trên đường thẳng $AB$) sao cho $DA + AB = 9$(cm)

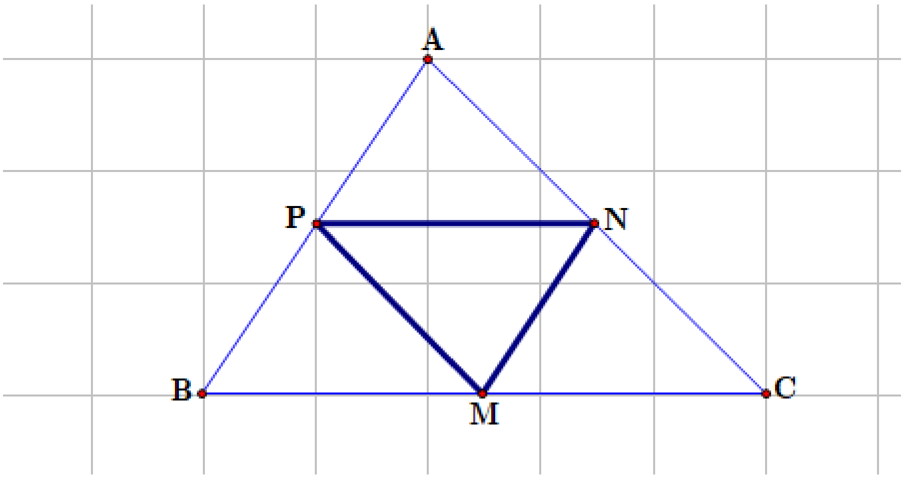



**Câu 3.** Cho tam giác $ABC$ có $M, N, P$ lần lượt là trung điểm của $BC, CA, AB$. Chứng minh:

a) $AP + \frac{1}{2}BC = AN$

b) $BC + 2MP = BA$

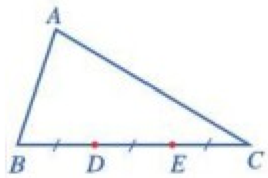
**Lời giải**




a) $\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{AN}$ (đpcm)

b) $\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$ (đpcm)

**Câu 4.** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $D, E$ thuộc cạnh $BC$ thoả mãn $BD=DE=EC$. Giả sử $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.




**Lời giải**

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{BD}=\frac{\overrightarrow{BC}}{3}=\frac{-\vec{a}+\vec{b}}{3}$

$\overrightarrow{BE}=\frac{2\overrightarrow{BC}}{3}=\frac{2}{3}\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\frac{-\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\vec{a}+\frac{2}{3}\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

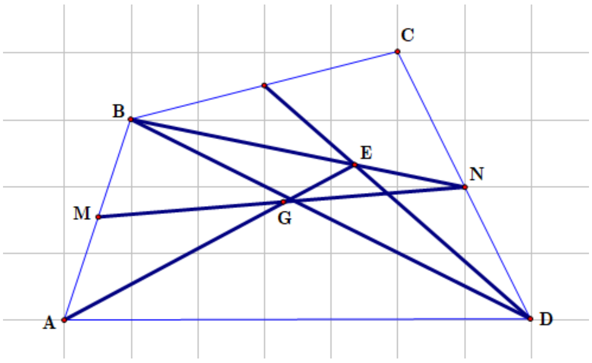
**Câu 5.** Cho tứ giác $ABCD$ có $M, N$ lần lượt là trung điểm của hai cạnh $AB$ và $CD$. Gọi $G$ là trung điểm của đoạn thẳng $MN, E$ là trọng tâm tam giác $BCD$. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=4\overrightarrow{EG}$

b) $\overrightarrow{EA}=4\overrightarrow{EG}$

c) Điểm $G$ thuộc đoạn thẳng $AE$ và $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.

**Lời giải**



a)
$EA + EB + EC + ED = EG + GA + EG + GB + EG + GC + EG + GD$
$= 4EG + GA + GB + GC + GD = 4EG + 2GM + 2GN = 4EG + 0 = 4EG$

b) Vì $E$ là trọng tâm tam giác $BCD$ nên $EB + EC + ED = 0$, theo câu a) ta được $EA = 4EG$

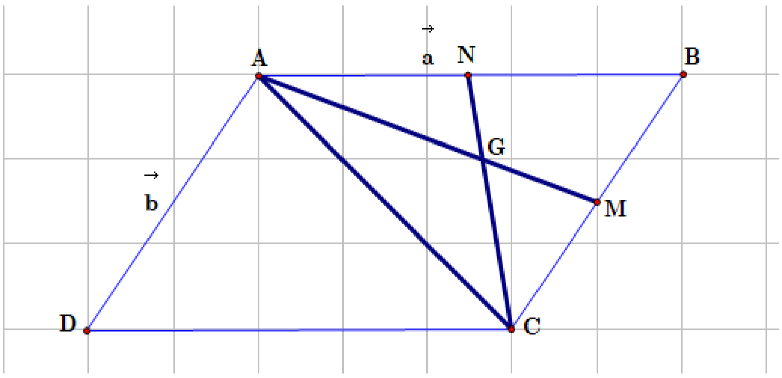
c) Theo câu b) ta suy ra ba điểm $E, A, G$ thẳng hàng và vì $EA = 4EG$ nên $G$ thuộc đoạn $EA$.

Ta có $EA = 4EG \Leftrightarrow AE + EG = 4GE + EG \Leftrightarrow AG = 3GE$ (1)

Từ câu b) ta có $AE = 4GE \Rightarrow GE = \dfrac{AE}{4}$ (2). Lấy (2) thay vào (1) ta được điều phải chứng minh

**Câu 6.** Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $AB = a, AD = b$. Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$. Biểu thị các vectơ $AG, CG$ theo hai vectơ $a, b$.

**Lời giải**




Ta có $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}\left(AB + AC\right) = \dfrac{1}{3}\left(AB + AB + BC\right) = \dfrac{1}{3}\left(2a + b\right)$

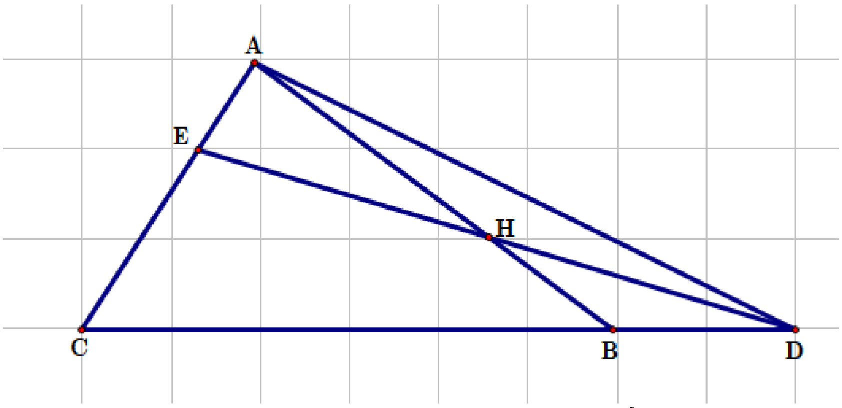
Ta có $CG = \dfrac{2}{3}CN = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}\left(CA + CB\right) = \dfrac{1}{3}\left(CB + BA + CB\right) = \dfrac{1}{3}\left(-2b - a\right)$

**Câu 7.** Cho tam giác $ABC$. Các điểm $D, E, H$ thoả mãn
$DB = \dfrac{1}{3}BC, AE = \dfrac{1}{3}AC, AH = \dfrac{2}{3}AB.$

a) Biểu thị mỗi vectơ $AD, DH, HE$ theo hai vectơ $AB, AC$.

b) Chứng minh $D, E, H$ thẳng hàng.

**Lời giải**




a) Ta có $AD = AC + CD = AC + CB + BD = AC + CB + \dfrac{1}{3}CB = AC + \dfrac{4}{3}\left(CA + AB\right) = \dfrac{4AB - AC}{3}$

Ta có $DH = DB + BH = \dfrac{1}{3}BC + \dfrac{1}{3}BA = \dfrac{1}{3}\left(BA + AC + BA\right) = \dfrac{1}{3}\left(AC - 2AB\right) = -\dfrac{2}{3}AB + \dfrac{1}{3}AC$

Ta có $HE = HA + AE = -\dfrac{2}{3}AB + \dfrac{1}{3}AC$

b) Ta thấy $\vec{DH} = \vec{HE} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$, nên 3 điểm $D, E, H$ thẳng hàng.

**Bài 6. Tích vô hướng của hai vectơ**

**Câu 1.** Nếu hai điểm $M, N$ thoả mãn $\vec{MN} \cdot \vec{NM} = -4$ thì độ dài đoạn thẳng $MN$ bằng bao nhiêu?

A. $MN = 4$

B. $MN = 2$

C. $MN = 16$;

D. $MN = 256$.

**Lời giải**

$\vec{MN} \cdot \vec{NM} = -4 = |\vec{MN}|.|\vec{NM}|.\cos 180 = -4 \Leftrightarrow MN^2 = 4 \Rightarrow MN = 2$. **Chọn A.**

**Câu 2.** Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$;

B. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;

C. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;

D. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

**Câu 3.** Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$;

b) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$;

c) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng;

d) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

**Lời giải**

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a} \cdot \vec{b})$ từ đó suy ra

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12.\cos 30^\circ = 12.\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30.\cos 120^\circ = -15$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6.\cos 0^\circ = 6$

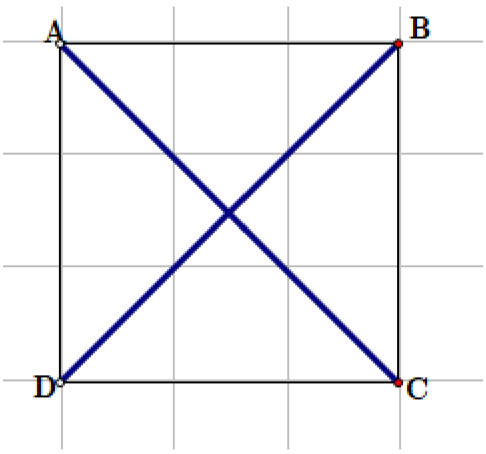
d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6.\cos 180^\circ = -6$

**Câu 4.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a$. Tính các tích vô hướng sau:

a) $\vec{AB}.\vec{AC}$

b) $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$

**Lời giải**



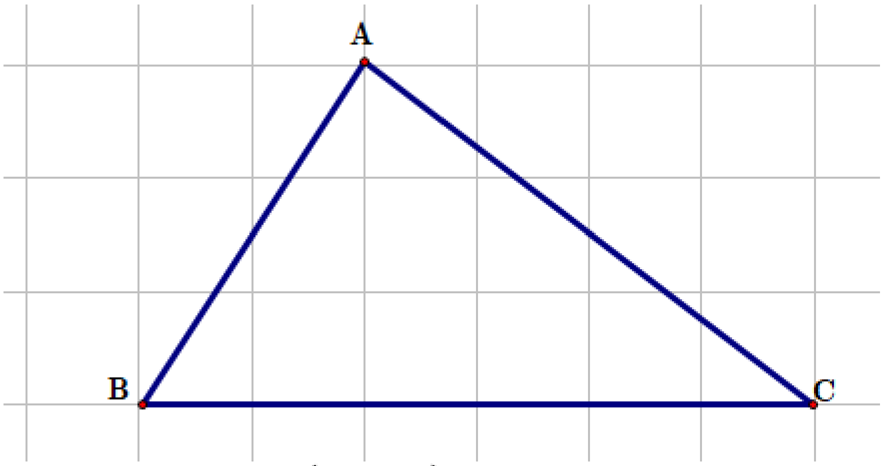
a) $AB.AC = |AB|.|AC|.\cos 45^\circ = a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

b) $AC \cdot BD = |AC|.|BD|.\cos 90^\circ = 0$

**Câu 5.** Cho tam giác $ABC$. Chứng minh:

$AB^2 + AB \cdot BC + AB \cdot CA = 0$

**Lời giải**



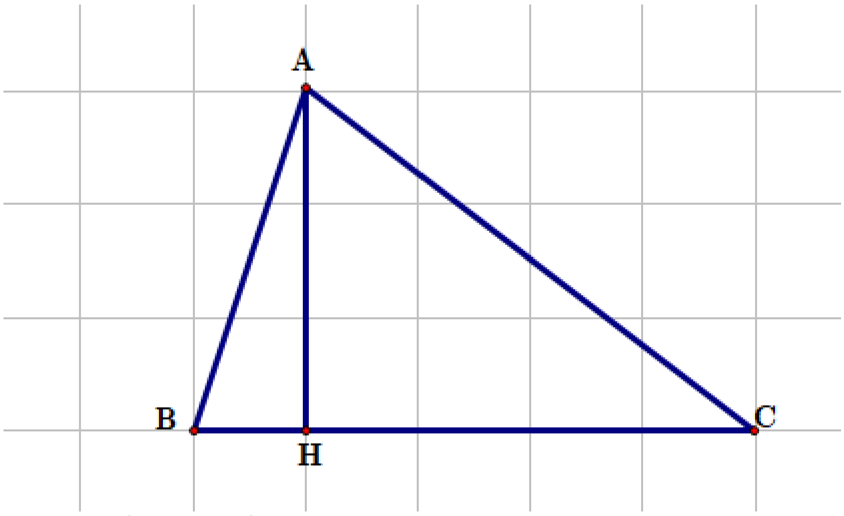

Ta có $AB^2 + AB \cdot BC + AB \cdot CA = AB^2 + AB.(BC + CA) = AB^2 + AB.BA = AB^2 - AB^2 = 0$ (đpcm)

**Câu 6.** Cho tam giác nhọn $ABC$, kẻ đường cao $AH$. Chứng minh rằng:

a) $AB \cdot AH = AC \cdot AH$

b) $AB \cdot BC = HB \cdot BC$.

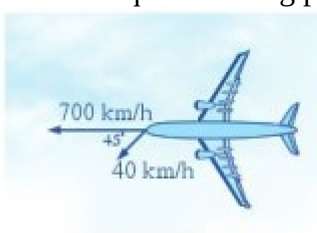
**Lời giải**



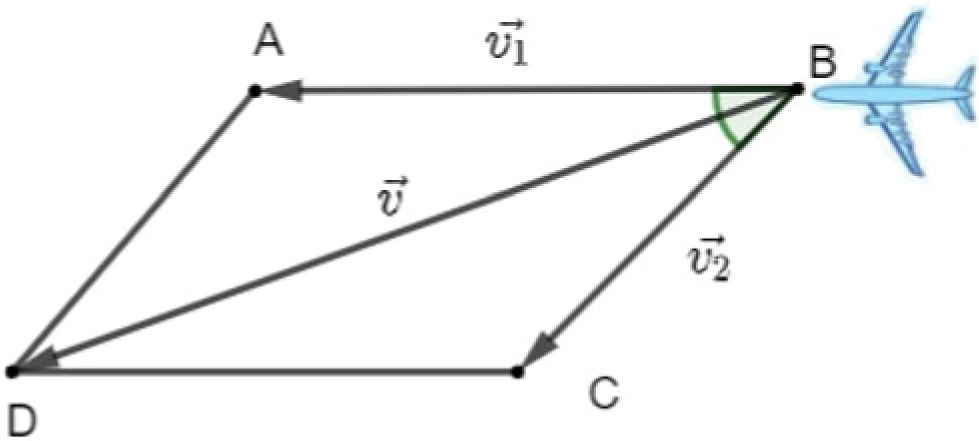

a) $AB \cdot AH = AC \cdot AH \Leftrightarrow AH.(AB - AC) = AH.CB = 0$ (đpcm)

b) $AB \cdot BC = HB \cdot BC \Leftrightarrow BC.(AB - HB) = BC.AH = 0$ (đpcm)

**Câu 7.** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ $700 km/h$ thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ $40 km/h$ (Hình). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).




**Lời giải**




Khi đó ta có: $ABCD$ là hình bình hành có $\widehat{ABC}=45^\circ$.

Suy ra: $\widehat{DAB}=180^\circ-45^\circ=135^\circ; AD=|v_2|=40, AB=|v_1|=700$.

Ta cần tính độ dài đoạn thẳng $BD$, đây chính là độ dài vectơ $v$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABD$, ta có:

$BD^2=AD^2+AB^2-2\cdot AD\cdot AB\cdot\cos A$

$=40^2+700^2-2\cdot40\cdot700\cdot\cos135^\circ\approx531197{,}98$

Suy ra $BD\approx728{,}83(km/h)$.

Vậy tốc độ mới của máy bay sau khi gặp gió thổi là 728,83km/h.

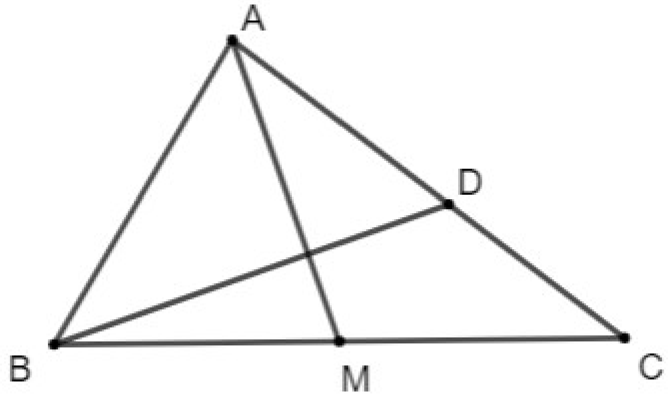
**Câu 8.** Cho tạm giác $ABC$ có $AB=2, AC=3, \widehat{BAC}=60^\circ$. Gọi $M$ là trung điểm của đoạn thẳng $BC$. Điểm $D$ thoả mãn $\vec{AD}=\frac{7}{12}\vec{AC}$.

a) Tính $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$.

b) Biểu diễn $\vec{AM}, \vec{BD}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$.

c) Chứng minh $AM\perp BD$.

**Lời giải**




a) Ta có: $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot\cos(\vec{AB},\vec{AC})=AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}=2\cdot3\cdot\cos60^\circ=3$.

b) + Do $M$ là trung điểm của $BC$ nên với điểm $A$ ta có:

$\vec{AB}+\vec{AC}=2\vec{AM}\Rightarrow\vec{AM}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC}$

Do đó: $\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC}$

+ Ta có: $\vec{BD}=\vec{BA}+\vec{AD}=(-\vec{AB})+\vec{AD}$. Mà $\vec{AD}=\frac{7}{12}\vec{AC}$

Nên $\overrightarrow{BD} = (-\overrightarrow{AB}) + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

Vậy $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

c) Ta có:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{7}{24}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{7}{24}\overrightarrow{AC}^2$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot AB^2 + \frac{7}{24} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{7}{24} \cdot AC^2 = \frac{-1}{2} \cdot 2^2 + \frac{7}{24} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{7}{24} \cdot 3^2 = 0$$

Suy ra: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

Vậy $AM \perp BD$.

## Ôn tập chương IV

**Câu 1.** Cho tam giác $ABC$ có $AB = 3, AC = 4, \widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

a) Độ dài cạnh $BC$ và độ lớn góc $B$;

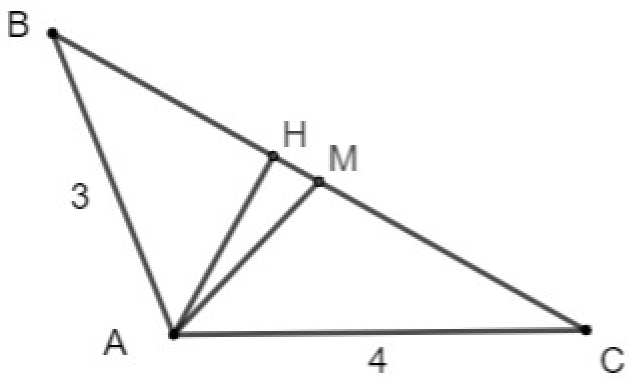
b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp;

c) Diện tích của tam giác;

d) Độ dài đường cao xuất phát từ $A$;

e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ với $M$ là trung điểm của $BC$.

**Lời giải**




a) + Áp dụng định lí côsin trong tam giác $ABC$ ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC} = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 9 + 16 - (-12) = 37.$$

Suy ra: $BC = \sqrt{37} \approx 6$

+ Ta có: $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{3^2 + 6^2 - 4^2}{2.3.6} = \frac{29}{36}$. Suy ra $\hat{B} \approx 36^\circ$.

b) Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$ ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$

Suy ra: $R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{6}{2 \cdot \sin 120^\circ} = 2\sqrt{3} \approx 3$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ là $R \approx 3$.

c) Diện tích tam giác $ABC$ là: $S = \frac{1}{2}AB.AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ = 3\sqrt{3} \approx 5$

d) Kẻ đường cao $AH$.

Ta có diện tích tam giác $ABC$ là: $S = \frac{1}{2}AH.BC$. Suy ra: $AH = \frac{2S}{BC} = \frac{2.5}{6} \approx 2$.

e)

+ Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC} = 3\cdot 4\cdot\cos 120^\circ = -6$.

Do đó: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -6$.

+ Do M là trung điểm của $BC$ nên ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

Suy ra: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

Khi đó: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot((-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right) = \frac{1}{2}(AC-AB) = \frac{1}{2}(4-3) = \frac{1}{2}$

Vậy $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}$.

**Câu 2.** Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

$A = (\sin 20^\circ + \sin 70^\circ)^2 + (\cos 20^\circ + \cos 110^\circ)^2$

$B = \tan 20^\circ + \cot 20^\circ + \tan 110^\circ + \cot 110^\circ$.

**Lời giải**

$A = (\sin 20^\circ + \sin 70^\circ)^2 + (\cos 20^\circ + \cos 110^\circ)^2$

$= \left[\sin(90^\circ - 70^\circ) + \sin 70^\circ\right]^2 + \left[\cos(90^\circ - 70^\circ) + \cos(180^\circ - 70^\circ)\right]^2$

$= (\cos 70^\circ + \sin 70^\circ)^2 + \left[\sin 70^\circ + (-\cos 70^\circ)\right]^2 = (\cos 70^\circ + \sin 70^\circ)^2 + (\sin 70^\circ - \cos 70^\circ)^2$

$= \cos^2 70^\circ + 2\cdot\cos 70^\circ\cdot\sin 70^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 70^\circ - 2\cdot\sin 70^\circ\cdot\cos 70^\circ + \cos^2 70^\circ = 2(\cos^2 70^\circ + \sin^2 70^\circ)$

$= 2\cdot 1 = 2$

Vậy $A = 2$.

+ Ta có:

$B = \tan 20^\circ + \cot 20^\circ + \tan 110^\circ + \cot 110^\circ$

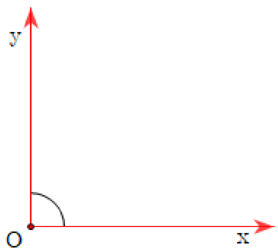
$= \tan(90^\circ - 70^\circ) + \cot(90^\circ - 70^\circ) + \tan(180^\circ - 70^\circ) + \cot(180^\circ - 70^\circ)$

$= \cot 70^\circ + \tan 70^\circ + (-\tan 70^\circ) + (-\cot 70^\circ) = (\cot 70^\circ - \cot 70^\circ) + (\tan 70^\circ - \tan 70^\circ) = 0 + 0 = 0$

Vậy B = 0 .

**Câu 3.** Không dùng thước đo góc, làm thế nào để biết số đo góc đó.

Bạn Hoài vẽ góc $xOy$ và đố bạn Đông làm thế nào có thể biết được số đo của góc này khi không có thước đo góc. Bạn Đông làm như sau:



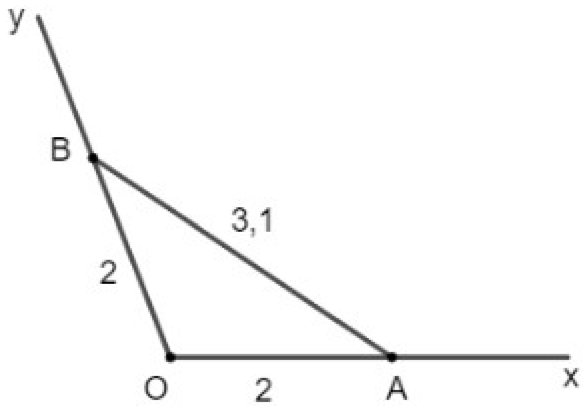

- Chọn các điểm $A, B$ lần lượt thuộc các tia $Ox$ và $Oy$ sao cho $OA = OB = 2\,cm$;

- Đo độ dài đoạn thẳng $AB$ được $AB = 3,1cm$.

Từ các dữ kiện trên bạn Đông tính được $\cos\widehat{xOy}$, từ đó suy ra độ lớn góc $xOy$.

Em hãy cho biết số đo góc $xOy$ ở Hình bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

**Lời giải**




Áp dụng hệ quả của định lí côsin trong tam giác ABO ta có:

$$\cos O = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA \cdot OB} = \frac{2^2 + 2^2 - (3,1)^2}{2.2.2} = -\frac{161}{800}$$

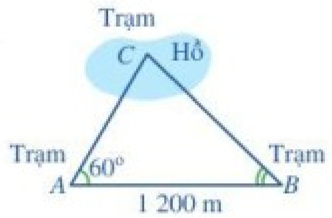
Do đó: $\hat{O} \approx 102^\circ$.

Vậy từ các dự kiện bạn Đông tính được, ta suy ra $\widehat{xOy} \approx 102^\circ$.

**Câu 4.** Có hai trạm quan sát $A$ và $B$ ven hồ và một trạn quan sát $C$ ở giữa hồ. Để tính khoảng cách từ $A$ và từ $B$ đến $C$, người ta làm như sau (Hình ):

- Đo góc $BAC$ được $60^\circ$, đo góc $ABC$ được $45^\circ$;
- Đo khoảng cách $AB$ được $1200m$.

Khoảng cách từ trạm $C$ đến các trạm $A$ và $B$ bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?




**Lời giải**

Ba vị trí A, B, C tạo thành 3 đỉnh của tam giác $ABC$.

Ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ (định lí tổng ba góc trong tam giác $ABC$)

Suy ra $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - \left(60^\circ + 45^\circ\right) = 75^\circ$

Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$ ta có: $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B}$

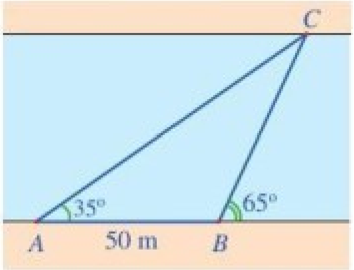
Do đó: $AC = \dfrac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \dfrac{1200 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 878\ (m)$;

$$BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{1200 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 1076 (m)$$

Vậy khoảng cách từ' trạm C đến trạm A khoảng $878m$ và từ trạm $C$ đến trạm $B$ khoảng 1076 $m$.

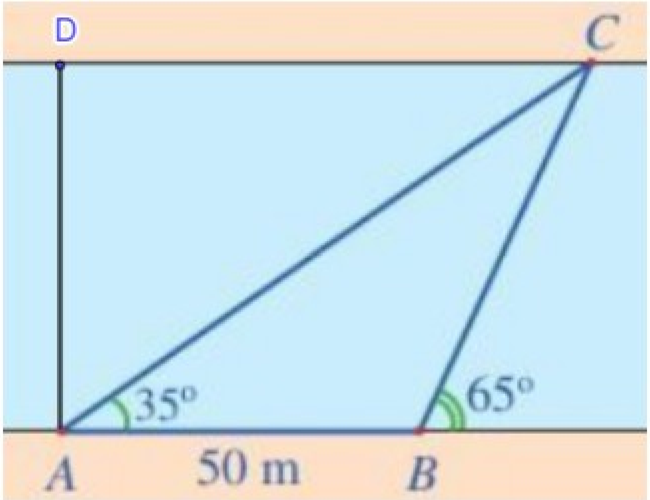
**Câu 5.** Một người đứng ở bờ sông, muốn đo độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí đang đứng (khúc sông tương đối thẳng, có thể xem hai bờ song song với nhau).

Từ vị trí đang đứng $A$, người đó đo được góc nghiêng $\alpha = 35^\circ$ so với bờ sông tới một vị trí $C$ quan sát được ở phía bờ bên kia. Sau đó di chuyển dọc bờ sông đến vị trí $B$ cách $A$ một khoảng $d = 50m$ và tiếp tục đo được góc nghiêng $\beta = 65^\circ$ so với bờ bên kia tới vị trí $C$ đã chọn (Hình).




Hỏi độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí người đó đang đứng là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

**Lời giải**




Dựng $AD$ vuông góc với hai bên bờ sông, khi đó AD là độ rộng của khúc sông chạy qua vị trí của người đó đang đứng. Ta cần tính khoảng cách AD.

Xét tam giác $ABC$ ta có: $\widehat{CAB}+\widehat{ACB}=65^\circ$ (tính chất góc ngoài tại đỉnh $B$ của tam giác)

$\widehat{ACB}=65^\circ-\widehat{CAB}=65^\circ-35^\circ=30^\circ$. Lại có $\widehat{ABC}=180^\circ-65^\circ=115^\circ$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác $ABC$ ta có: $\dfrac{AB}{\sin\widehat{ACB}}=\dfrac{AC}{\sin\widehat{ABC}}$.

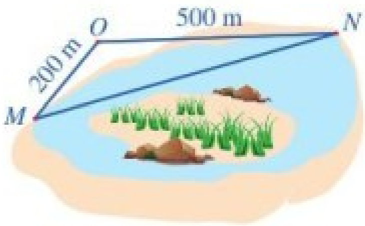
Suy ra $AC=\dfrac{AB\cdot\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{ACB}}=\dfrac{50\cdot\sin115^\circ}{\sin30^\circ}\approx90,6$. Ta có: $\widehat{DAC}=90^\circ-35^\circ=55^\circ$.

Tam giác ADC vuông tại $D$ nên $\cos\widehat{DAC}=\dfrac{AD}{AC}$

$\Rightarrow AD=AC\cdot\cos\widehat{DAC}=90,6\cdot\cos55^\circ\approx52\ (m)$.

Vậy độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí người đó đang đứng là $52m$.

**Câu 6.** Để đo khoảng cách giữa hai vị trí $M,N$ ở hai phía ốc đảo, người ta chọn vị trí $O$ bên ngoài ốc đảo sao cho: $O$ không thuộc đường thẳng $MN$; các khoảng cách $OM$, $ON$ và góc $MON$ là đo được (Hình).




Sau khi đo, ta có $OM=200m, ON=500m$, $\overline{MON}=135^\circ$. Khoảng cách giữa hai vị trí $M,N$ là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

**Lời giải**

Ba vị trí O, M, N tạo thành 3 đỉnh của tam giác

Tam giác $OMN$ có $OM=200m, ON=500m$ và $\widehat{MON}=135^\circ$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OMN ta có:

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos \widehat{MON} = 200^2 + 500^2 - 2 \cdot 200 \cdot 500 \cdot \cos 135^\circ$$

$\approx 431421$

Suy ra: $MN \approx 657\,m$.

Vậy khoảng cách giữa hai ví trí $M, n$ khoảng $657\,m$.

**Câu 7.** Chứng minh:

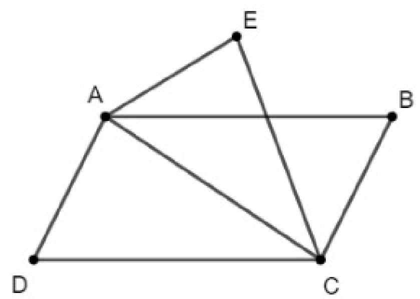
a) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $AB + AD + CE = AE$ với $E$ là điểm bất kì;

b) Nếu $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$ thì $MA + MB + 2IN = 2MN$ với $M, N$ là hai điểm bất kì;

c) Nếu $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$ thì $MA + MB + MC - 3MN = 3NG$ vối $M, N$ là hai điểm bất kì.

**Lời giải**

a)

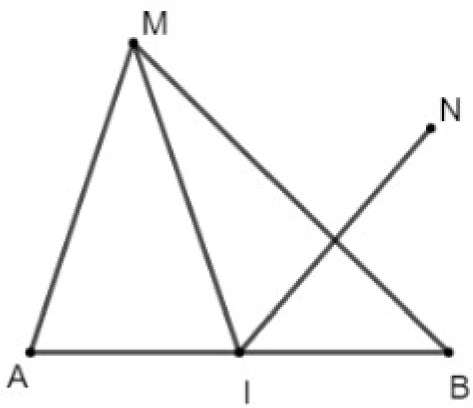



Vì ABCD là hình bình hành nên $AC = AB + AD$.

Với E là điểm bất kì ta có: $AB + AD + CE = AC + CE = AE$

Vậy $AB + AD + CE = AE$ với E là điểm bất kì.

b)



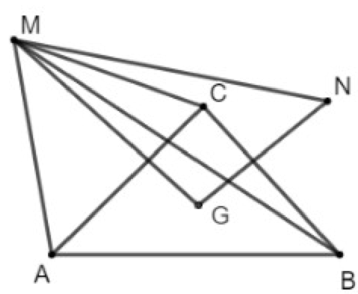

Vì I là trung điểm của $AB$ nên với điểm $M$ bất kì ta có: $MA + MB = 2MI$.

Do đó, với điểm $N$ bất kì, ta có:

$$MA + MB + 2IN = 2MI + 2IN = 2(MI + IN) = 2MN$$

Vậy $MA + MB + 2IN = 2MN$ với $M, N$ là hai điểm bất kì.

c)



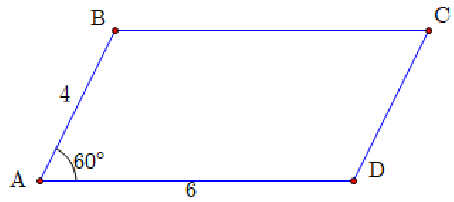

Do G là trọng tâm của tam giác $ABC$ nên với điểm $M$ bất kì ta có: $MA + MB + MC = 3MG$

Khi đó với điểm $N$ bất kì ta có:

$MA + MB + MC - 3MN = 3MG - 3MN = 3(MG + (-MN)) = 3(MG + NM) = 3(NM + MG) = 3NG$

Vậy $MA + MB + MC - 3MN = 3NG$ với $M, N$ là hai điểm bất kì.

**Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 4, AD = 6$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ (Hình).




a) Biểu thị các vectơ $BD, AC$ theo $AB, AD$.

b) Tính các tích vô hướng $AB, AD, AB, AC$, $BD, AC$.

c) Tính độ dài các đường chéo $BD, AC$.

**Lời giải**

a) Ta có: $BD = BA + AD = -AB + AD$

ABCD. hình bình hành nên $AC = AB + AD$

b) Ta có $AB \cdot AD = |AB| \cdot |AD| \cdot \cos(AB, AD) = AB \cdot AD \cdot \cos\widehat{BAD} = 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 12$

Do đó: $AB \cdot AD = 12$

Ta cũng có: $AB \cdot AC = AB \cdot (AB + AD)$

$= AB + AB \cdot AD = AB^2 + 12 = 4^2 + 12 = 28$

Do đó: $AB \cdot AC = 28$

Lại có. $BD.AC = (-AB + AD) \cdot (AB + AD) = (AD - AB) \cdot (AD + AB) = AD^2 - AB^2$

$= AD^2 - AB^2 = 6^2 - 4^2 = 20$.

Vậy $BD \cdot AC = 20$

c) Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABD có:

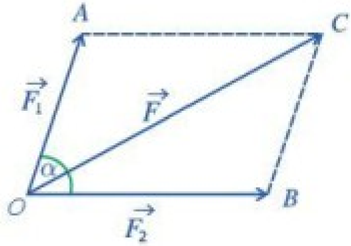
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 28 \Rightarrow BD = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Ta có:

$AC = AB + AD \Rightarrow (AC)^2 = (AB + AD)^2 \Leftrightarrow AC = AB^2 + 2 \cdot AB \cdot AD + AD^2 \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + 2AB \cdot AD + AD^2$

Suy ra: $AC^2 = 4^2 + 2 \cdot 12 + 6^2 = 76 \Rightarrow AC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$

**Câu 9.** Hai lực $F_1, F_2$ cho trước cùng tác dụng lên một vật tại điểm $O$ và tạo với nhau một góc $(F_1, F_2) = \alpha$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ $O$ đến $C$ (Hình). Lập công thức tính cường độ của hợp lực $F$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ $O$ đến $C$ (giả sử chỉ có đúng hai lực $F_1, F_2$ làm cho vật di chuyển).




**Lời giải**

Ta thấy, AOBC là hình bình hành nên $OC = OA + OB$

Suy ra: $F = F_1 + F_2$ (1).

Ta cần tính cường độ của hợp lực $\vec{F}$ hay chính là tính $|\vec{F}|$.

Từ (1) suy ra $(\vec{F})^2 = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)^2$.

$\Leftrightarrow \vec{F}^2 = \vec{F}_1^{\,2} + 2\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2 + \vec{F}_2^{\,2} \Leftrightarrow |\vec{F}|^2 = \left|\vec{F}_1\right|^2 + 2\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2 + \left|\vec{F}_2\right|^2$ (2)

Ta lại có: $\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2 = \left|\vec{F}_1\right|\cdot\left|\vec{F}_2\right|\cdot\cos\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right) = \left|\vec{F}_1\right|\cdot\left|\vec{F}_2\right|\cdot\cos\alpha$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra: $|\vec{F}|^2 = \left|\vec{F}_1\right|^2 + 2\cdot\left|\vec{F}_1\right|\cdot\left|\vec{F}_2\right|\cdot\cos\alpha + \left|\vec{F}_2\right|^2 = \left|\vec{F}_1\right|\cdot\left|\vec{F}_2\right|\cdot\cos\alpha$

$\Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{\left|\vec{F}_1\right|^2 + 2\cdot\left|\vec{F}_1\right|\cdot\left|\vec{F}_2\right|\cdot\cos\alpha + \left|\vec{F}_2\right|^2} = \left|\vec{F}_1\right|\cdot\left|\vec{F}_2\right|\cdot\cos\alpha$

Vậy công thức tính cường độ của hợp lực $\vec{F}$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ $O$ đến $C$ là

$|\vec{F}| = \sqrt{\left|\vec{F}_1\right|^2 + 2\cdot\left|\vec{F}_1\right|\cdot\left|\vec{F}_2\right|\cdot\cos\alpha + \left|\vec{F}_2\right|^2}$.