CÁCH CHỨNG MINH KHÁC NHAU CHO BẤT ĐẲNG THỨC QUEN THUỘC

Chứng minh rằng ta luôn có : $\boxed{cosA + cosB + cosC \leq \frac{3}{2}}$

trong đó A, B, C là ba góc của một tam giác bất kì .

(Chứng minh theo thứ tự chương trình học Phổ thông)

Cách 1: **Dùng tỉ số Diện Tích**

Kẻ các đường cao AD, BE, CF

Đặt $S\Delta AEF = S_1, S\Delta BFD = S_2, S\Delta CED = S_3, S\Delta ABC = S$

$\Rightarrow cosA = \sqrt{\frac{S_1}{S}}; cosB = \sqrt{\frac{S_2}{S}}; cosC = \sqrt{\frac{S_3}{S}}$

$\sqrt{\frac{S_1}{S}} = \sqrt{\frac{AF.AE}{AB.AC}} \leq \frac{1}{2}(\frac{AF}{AB} + \frac{AE}{AC})(1)$

Tương tự

$\sqrt{\frac{S_2}{S}} =\leq \frac{1}{2}(\frac{FB}{AB} + \frac{BD}{BC})(2)$

$\sqrt{\frac{S_3}{S}} =\leq \frac{1}{2}(\frac{CD}{BC} + \frac{CE}{AC})(3)$

Cộng (1), (2), (3) ta có

$cosA + cosB + cosC \leq \frac{1}{2}(\frac{AF}{AB} + \frac{AE}{AC}) + \frac{1}{2}(\frac{FB}{AB} + \frac{BD}{BC}) + \frac{1}{2}(\frac{CD}{BC} + \frac{CE}{AC}) = \frac{3}{2}$*(đpcm)*

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Cách 2: **Vận dụng bất đẳng thức :Erdos-Mordell**

Cho tam giác ABC. M là một điểm bất kì nằm trong tam giác .

Đặt $x_1 = MA, x_2 = MB, x_3 = MC$, và p_1, p_2, p_3 *lần lượt là khoảng cách từ M đến BC, CA, AB tương ứng. Khi đó ta có bất đẳng thức* $x_1 + x_2 + x_3 \geq 2(p_1 + p_2 + p_3)$

Vận dụng giải bài trên:

Gọi O , R là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC, CA..

Ta dễ dàng nhận thấy $\widehat{A} = \widehat{MOB}$.

Do đó :$cosA = cos(\widehat{MOB}) = \frac{OM}{OB} = \frac{OM}{R}$

Tương tự $cosB = \frac{ON}{R}; cosC = \frac{OP}{R}$

Do đó $cosA + cosB + cosC = \frac{OM + ON + OP}{R} \leq \frac{1}{2}(\frac{OA + OB + OC}{R}) = \frac{3}{2}$ *(đpcm).(Erdos-Mordell)*

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Cách 3: **Sử dụng BĐT Trêbưsep.**

Gọi a, b, c là ba cạnh tam giác, sử dụng công thức hình chiếu ta có:

$a = c.cosB + b.cosC$, $b = a.cosC + c.cosB$, $c = a.cosB + b.cosA$,

Cộng ba biểu thức trên ta có: $a + b + c = (c + b)cosA + (a + c)cosB + (a + b)cosC$

Không mất tính tổng quát giả sử: $a \geq b \geq c$, *ta có:*

$$\begin{cases} cosA \leq cosB \leq cosC \\ (c + b) \leq (a + c) \leq (a + b) \end{cases}$$

Do đó :$a + b + c = (c + b)cosA + (a + c)cosB + (a + b)cosC$

$\geq \frac{1}{3}(cosA + cosB + cosC)(c + b + a + c + a + b)$ *(Trêbưsep)*

[1]laisac

$\Rightarrow cosA + cosB + cosC \leq \frac{3}{2}$ *(đpcm)*

Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

<u>Cách 4:</u> Phuong pháp vectơ.

Gọi I và r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, và M, N, P lần lượt là tiếp điểm của đường tròn đó với các cạnh AB, AC, BC ,ta có

$0 \leq (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IP})^2 \Leftrightarrow 0 \leq 3r^2 + 2(\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IN})$ *(*)*

Ta nhận thấy $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN} = 2r^2 cos\widehat{MIN} = -2r^2 cosA$ *(Vì* $\widehat{MIN}$ *và góc A bù nhau)*

Tương tự :$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IP} = -2r^2 cosB$, $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IN} = -2r^2 cosC$

Vậy từ (*) suy ra $cosA + cosB + cosC \leq \frac{3}{2}$ *(dpcm)*

<u>Cách 5:</u> Phuong pháp vectơ.

Lấy A, B, C lần lượt là ba gốc của ba véctơ đơn vị sau

$\overrightarrow{e_1} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \overrightarrow{e_2} = \frac{\overrightarrow{BC}}{BC}, \overrightarrow{e_3} = \frac{\overrightarrow{CA}}{CA}.$

Ta có :$0 \leq (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})^2 \Leftrightarrow 0 \leq 3 + 2(\overrightarrow{e_1}e_2 + \overrightarrow{e_2}e_3 + \overrightarrow{e_3}e_1)\ 0 \leq 3 - 2(cosA + cosB + cosC)$

$\Leftrightarrow cosA + cosB + cosC \leq \frac{3}{2}$

<u>Cách 6:</u> Quan hệ bất đẳng thức Schur.

$cosA + cosB + cosC \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leq \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow b^2a + c^2a + c^2b + a^2b + a^2c + b^2c \leq 3abc$

$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$*(Schur)*

[2] **<u>Cách 7:</u> Sử dụng tam thức bậc hai.**

Xét $cosA + cosB + cosC - \frac{3}{2} = 2cos(\frac{A+B}{2})cos(\frac{A-B}{2}) + 1 - 2sin^2\frac{C}{2} - \frac{3}{2}$

$= 2sin(\frac{C}{2})cos(\frac{A-B}{2}) - 2sin^2(\frac{C}{2}) - \frac{1}{2}$

Đặt $x = sin(\frac{C}{2})$*. Xét tam thức* $f(x) = -2x^2 + 2cos(\frac{A-B}{2}).x - \frac{1}{2}$

Có $(\Delta)' = cos^2(\frac{A-B}{2}) - 1 \leq 0$*, và hệ số* $a = -2 < 0$*,Nên* $f(x) \leq 0$ *với mọi* x

Hay $cosA + cosB + cosC \leq \frac{3}{2}$

<u>Cách 8:</u> Sử dụng hàm số.

Ta có $cosA + cosB + cosC = 2cos(\frac{A+B}{2})cos(\frac{A-B}{2}) + 1 - 2sin^2\frac{C}{2}.$

Đặt $x = sin(\frac{C}{2})$*, điều kiện* $0 < x < 1$*.Xét hàm số* $f(x) = -2x^2 + 2cos(\frac{A-B}{2}).x + 1$

Lập bảng xét dấu ta có $f(x) \leq f_{Max}(x) = 1 + \frac{1}{2}cos(\frac{A-B}{2}) \leq \frac{3}{2}$

<u>Cách 9:</u> Tổng bình phương.

Xét $cosA + cosB + cosC - \frac{3}{2} = 2cos(\frac{A+B}{2})cos(\frac{A-B}{2}) - 2sin^2\frac{C}{2} - \frac{1}{2}$

$= -2[sin(\frac{C}{2}) - \frac{1}{2}cos(\frac{A-B}{2})]^2 - \frac{1}{2}sin^2(\frac{A-B}{2}) \leq 0$ *(Đúng)*

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A=B=C

<u>Cách 10:</u> BĐT lượng giác cơ bản

Ta có : $cosA + cosB + cosC = 2cos(\frac{A+B}{2})cos(\frac{A-B}{2}) + cosC$

$\leq 2cos(\frac{A+B}{2}) + cosC$ *(đẳng thức xảy ra khi A=B)*

$= 2sin(\frac{C}{2}) - 2sin^2(\frac{C}{2}) + 1 = -2[sin(\frac{C}{2}) - \frac{1}{2}]^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$ *(đẳng thức xảy ra khi* $\hat{C} = 60^0$*)*

[2] laisac

Vậy :$cosA + cosB + cosC \leq \frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Cách 11: **Đánh Giá BĐT**

-Tam giác ABC không nhọn, Giả sử góc $A \geq 90^0$

Ta có :$cosA + cosB = 2cos(\frac{A+B}{2}).cos(\frac{A-B}{2}) \leq 2cos(\frac{A+B}{2})$ *(1)*

$cosC + cos60^0 = 2cos(\frac{C+60^0}{2}).cos(\frac{C-60^0}{2}) \leq 2cos(\frac{C+60^0}{2})$ *(2)*

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta có:

$cosA + cosB + cosC + cos60^0 \leq 2[cos(\frac{A+B}{2}) + cos(\frac{C+60^0}{2})]$

$= 4cos(\frac{A+B+C+60^0}{4}) = 4cos60^0$ *(3)*

Suy ra $cosA + cosB + cosC \leq 3cos60^0 = \frac{3}{2}$

Nếu A nhọn, thì (1), (2), (3) đều thỏa mãn.

Cách 12: **Hàm lồi**

Nếu tam giác không nhọn, luôn đúng ! :

Xét hàm số f(x) = cosx trong $(0;\frac{\pi}{2})$ *Ta có f'(x) = -sinx , f''(x)=-cosx <0 với* $\forall x \in (0;\frac{\pi}{2})$

Do đó hàm f(x) = cosx lồi trên $(0;\frac{\pi}{2})$

Do đó $f(A) + f(B) + f(C) \leq 3f(\frac{A+B+C}{3})$

$\Leftrightarrow cosA + cosB + cosC \leq 3cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều

HẾT