

Phép đếm, so sánh, sắp thứ tự và quá trình sắp gần đều

Chương trình bồi dưỡng chuyên đề Toán
HỘI TOÁN HỌC HÀ NỘI VÀ SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

Hà Nội, Ngày 06.10.2009

1.1 Các nguyên lý đếm

Đếm số phần tử của một tập hợp là một vấn đề không đơn giản. Thông thường các bài toán này gắn với việc xác định số nghiệm (phân biệt) của phương trình, số nghiệm nguyên của bất phương trình trong một khoảng cho trước. Đặc biệt, đối với phương trình đại số, người ta tính số nghiệm của phương trình kể cả bội của nó thì vẫn đề lại phức tạp thêm một bước nữa. Thông thường, dựa vào phép đếm này, người ta có thể phán quyết về tính tương đương của hai phương trình đã cho.

Định nghĩa 1. Một tập hợp A được nói là hữu hạn và có n phần tử nếu tồn tại một song ánh giữa A và tập hợp con $\{1, 2, \dots, n\}$ của $\mathbb{N}$. Ta viết $|A| = n$.

Nếu A không hữu hạn, ta nói A vô hạn.

Ví dụ 1. Tập tất cả các số tự nhiên (ký hiệu là $\mathbb{N}$) là vô hạn.

Ví dụ 2. Tập tất cả các số tự nhiên thuộc $(1, 2009)$ là hữu hạn.

Bổ đề 1 (Nguyên bù trừ). Giả sử B là một tập con của tập hợp hữu hạn A . Gọi $C_A(B)$ là phần bù của B trong A . Khi ấy ta có

$$|A| = |B| + |C_A(B)|.$$

Định lý 1. Giả sử A, B là các tập hợp hữu hạn. Nếu tồn tại một đơn ánh từ A vào B và một đơn ánh từ B vào A thì A và B có cùng số phần tử.

Nguyên lý cộng. Nếu A, B là các tập hợp không giao nhau thì

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Nguyên lý cộng còn có thể phát biểu một cách khác như sau: Nếu một công việc có thể thực hiện bằng một trong hai phương án loại trừ lẫn nhau: phương án thứ nhất có m cách thực hiện và phương án thứ hai có n cách thực hiện. Khi đó công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

Nguyên lý cộng mở rộng. Nếu tập hợp hữu hạn C là hợp của n tập đôi một rời nhau $C_1, C_2, \dots, C_n$ thì:

$$|C| = |C_1| + |C_2| + \dots + |C_n|.$$

Định nghĩa 2. Tích Descartes của hai tập hợp A, B ký hiệu bởi $A \times B$ là tập hợp tất cả các cặp thứ tự (a, b) với $a \in A, b \in B$.

Nguyên lý nhân. Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì $A \times B$ cũng hữu hạn và ta có

$$|A \times B| = |A||B|.$$

Định nghĩa về tích Descartes và nguyên lý nhân trên đây có thể mở rộng cho nhiều tập hợp. Nguyên lý nhân có thể phát biểu một cách khác như sau: Nếu một quá trình có thể được thực hiện qua hai công đoạn: công đoạn I có n_1 cách thực hiện, công đoạn II (sau khi thực hiện I) có n_2 cách thực hiện. Khi đó có $n_1.n_2$ cách thực hiện quá trình đó.

Nguyên lý thêm bớt. Với hai tập hữu hạn A, B bất kỳ ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Câu hỏi và bài tập

- 1) Hãy tìm số tập con của một tập hợp có n phần tử.
- 2) Hãy cho một ví dụ về áp dụng của nguyên lý bù trừ.
- 3) Hãy cho một ví dụ về phép đếm phải áp dụng cả nguyên lý cộng và nguyên lý nhân.
- 4) Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau ?
- 5) Có bao nhiêu số có 3 chữ số và chia hết cho 3 ?
- 6) Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 3 ?
- 7) Trong trò chơi tiến lên, tính xác suất để một người nào đó có tứ quý.
- 8) Nguyên lý thêm bớt có thể mở rộng như thế nào ?

1.2 Các đối tượng tổ hợp và các số tổ hợp

1. Họ các tập con của một tập hợp E

$$P(E) = \{A | A \subseteq E\}.$$

Mệnh đề 1. $|P(E)| = 2^{|E|}$.

2. Chỉnh hợp của n phần tử chọn k (hay chỉnh hợp chập k của n phần tử)

Giả sử $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Chỉnh hợp của n phần tử chọn k là một bộ sắp thứ tự gồm k phần tử $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$.

Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là A_n^k . Ta có

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3. Tổ hợp của n phần tử chọn k (hay tổ hợp chập k của n phần tử)

Giả sử $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Tổ hợp của n phần tử chọn k là một bộ không sắp thứ tự gồm k phần tử $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$. Nói cách khác, đó là một tập con gồm k phần tử.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là C_n^k . Ta có

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

4. Hoán vị

Giả sử $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Một hoán vị của E là một cách xếp các phần tử của E theo một thứ tự nào đó. Nói cách khác, đó chính là chỉnh hợp của n phần tử chọn n .

Số các hoán vị của n phần tử ký hiệu là P_n . Ta có $P_n = n!$.

Ví dụ 3. Giả sử

$$B = \left\{ \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_{2008} + a_{2009}}{2} + \frac{a_{2009} + a_1}{2} \right\}$$

là một hoán vị của $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2009}\}$. Chứng minh rằng $a_{2009} = a_1$.

5. Chỉnh hợp lặp

Giả sử $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Chỉnh hợp lặp của n phần tử chọn k là một bộ sắp thứ tự gồm k phần tử $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$, trong đó cho phép lấy lặp lại. Số các chỉnh hợp chập k của n , theo quy tắc nhân, bằng nk .

6. Tổ hợp lặp

Giả sử $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Tổ hợp lặp của n phần tử chọn k là một bộ không sắp thứ tự gồm k phần tử $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$, trong đó cho phép lấy lặp lại. Nói cách khác, đó là một đa tập hợp gồm k phần tử lấy từ E .

Số các tổ hợp lặp chập k của n phần tử được ký hiệu là H_n^k . Ta có

$$H_n^k = C_n^k + k - 1.$$

7. Hoán vị lặp

Xét đa tập hợp $E(r_1, r_2, \dots, r_s)$ có n phần tử, trong đó phần tử a_1 có r_1 phiên bản, phần tử a_2 có r_2 phiên bản, $\dots$, phần tử a_s có r_s phiên bản, $r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$. Một cách xếp các phần tử của E theo thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị lặp của n phần tử của E .

Số hoán vị lặp của đa tập hợp $E(r_1, r_2, \dots, r_s)$ bằng $\frac{n!}{r_1! \dots r_s!}$.

Bổ đề 2 (Tính chất hệ số nhị thức).

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k.$$

Định lý 2 (Nhị thức Newton).

$$(x + y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \dots + C_n^n y^n.$$

Câu hỏi và bài tập

- 1) Nêu rõ sự khác biệt giữa chỉnh hợp và tổ hợp, hoán vị và hoán vị lặp.
- 2) Tìm hiểu ý nghĩa của các ký hiệu A, C, P, H .
- 3) Hãy chứng minh định lý nhị thức.
- 4) Nêu ví dụ áp dụng cho từng đối tượng tổ hợp trên đây.
- 5) Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100.$$

6) Có 5 nam và 5 nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra 5 người trong đó có ít nhất 1 nam và ít nhất 1 nữ?

7) Rút gọn tổng $A = \sum C_n^k (-2)^k, B = \sum C_n^k \cos(kx)$.

8) Chứng minh $\sum (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

1.3 Các phương pháp đếm nâng cao

Cơ sở của phép đếm là định nghĩa phép đếm, các nguyên lý đếm và các số tổ hợp (là các số thường nảy sinh một cách tự nhiên trong các bài toán đếm). Tuy nhiên, với các công cụ cơ sở trên, chúng ta thường chỉ giải được những bài toán ở dạng đơn giản nhất. Với các bài toán có yêu cầu phức tạp hơn, cần đến các phương pháp đếm nâng cao.

Có nhiều phương pháp đếm nâng cao dựa trên các nền tảng lý thuyết khác nhau. Ví dụ phương pháp song ánh dựa vào lý thuyết tập hợp và ánh xạ, phương pháp thêm bớt cũng dựa vào lý thuyết tập hợp (cụ thể là tổng quát hóa của công thức $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$), phương pháp quỹ đạo dựa vào một định lý cơ bản về số đường đi ngắn nhất giữa hai điểm của lưới nguyên, phương pháp quan hệ đệ quy dựa vào ý tưởng quy nạp, phương pháp hàm sinh sử dụng các kiến thức tổng hợp của đại số và giải tích, ...

Dưới đây, qua các ví dụ, chúng ta sẽ giới thiệu một số phương pháp đếm nâng cao.

1. Phương pháp song ánh

Phương pháp song ánh dựa vào một ý tưởng rất đơn giản: Nếu tồn tại một song ánh từ A vào B thì $|A| = |B|$. Do đó, muốn chứng minh hai tập hợp có cùng số phần tử, chỉ cần xây dựng một song ánh giữa chúng. Hơn nữa, ta có thể đếm được số phần tử của một tập hợp A bằng cách xây dựng song ánh từ A vào một tập hợp B mà ta đã biết cách đếm.

Ví dụ 4. (Bài toán chia kẹo của Euler) Cho k, n là các số nguyên dương. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k.$$

Ví dụ 5. (Định lý cơ bản của phương pháp quỹ đạo) Chứng minh rằng số đường đi ngắn nhất trên lưới nguyên từ điểm $A(0, 0)$ đến $B(m, n)$ bằng C_{m+n}^m .

Ví dụ 6. Xây dựng một song ánh từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ví dụ 7. Chứng minh không tồn tại một song ánh từ tập hợp các số hữu tỷ thuộc đoạn $[0, 1]$ vào tập hợp các số thực thuộc đoạn này.

2. Phương pháp quan hệ đệ quy

Phương pháp quan hệ đệ quy là phương pháp giải bài toán với n đối tượng thông qua việc giải bài toán tương tự với số đối tượng ít hơn bằng cách xây dựng các quan hệ nào đó, gọi là quan hệ đệ quy. Sử dụng quan hệ này, ta có thể tính được đại lượng cần tìm nếu chú ý rằng với n nhỏ, bài toán luôn có thể giải một cách dễ dàng.

Ta minh họa phương pháp này thông qua một số ví dụ:

Ví dụ 8. (Bài toán chia kẹo của Euler) Cho k, n là các số nguyên dương. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \quad (*)$$

Giải. Gọi số nghiệm nguyên không âm của phương trình trên là $S(n, k)$. Dễ dàng thấy rằng $S(1, k) = 1$. Để tính $S(n, k)$, ta chú ý rằng $(*)$ tương đương với

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = k - x_n.$$

Suy ra với x_n cố định thì số nghiệm của $(**)$ là $S(n-1, k-x_n)$. Từ đó ta được công thức

$$S(n, k) = S(n-1, k) + S(n-1, k-1) + \cdots + S(n-1, 0).$$

Đây có thể coi là công thức truy hồi tính $S(n, k)$. Tuy nhiên, công thức này chưa thật tiện lợi. Viết công thức trên cho $(n, k - 1)$ ta được

$$S(n, k - 1) = S(n - 1, k - 1) + S(n - 1, k - 2) + \dots + S(n - 1, 0).$$

Từ đây, trừ các đẳng thức trên về theo về, ta được

$$S(n, k) - S(n, k - 1) = S(n - 1, k),$$

hay $S(n, k) = S(n, k - 1) + S(n - 1, k)$.

Từ công thức này, bằng quy nạp ta có thể chứng minh được rằng $S(n, k) = C_n^k + k - 1$.

Ví dụ 9. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n trong đó không có hai bit 1 đứng cạnh nhau ?

Giải. Gọi c_n là số xâu nhị phân độ dài n thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ta có $c_1 = 2, c_2 = 3$. Để tìm công thức truy hồi, ta xây dựng xâu nhị phân độ dài n thỏa mãn điều kiện đầu bài có dạng $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1$. Có hai trường hợp

- i) $a_n = 1$. Khi đó $a_{n-1} = 0$ và $a_{n-2} \dots a_2 a_1$ có thể chọn là một xâu bất kỳ độ dài $n - 2$ thỏa điều kiện. Có c_{n-2} xâu như vậy, suy ra trường hợp này có c_{n-2} xâu.
- ii) $a_n = 0$. Khi đó $a_{n-1} \dots a_2 a_1$ có thể chọn là một xâu bất kỳ độ dài $n - 1$ thỏa điều kiện. Có c_{n-1} xâu như vậy, suy ra trường hợp này có c_{n-1} xâu.

Vậy tổng cộng xây dựng được $c_{n-1} + c_{n-2}$ xâu, nghĩa là ta có hệ thức truy hồi

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}.$$

Ví dụ 10. Có bao nhiêu cách lát đường đi kích thước $3 \times 2n$ bằng các viên gạch kích thước 1×2 ?

Ví dụ 11. Hỏi n đường tròn chia mặt phẳng thành nhiều nhất bao nhiêu miền?

Ví dụ 12 (VMO 2003). Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$ gọi s_n là số các hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của tập hợp $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$, mà mỗi hoán vị có tính chất $1 \leq |a_i - i| \leq 2$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng với $n > 6$ ta có $1.75s_{n-1} < s_n < 2s_{n-1}$.

Hướng dẫn. Chứng minh công thức truy hồi $s_{n+1} = s_n + s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} - s_{n-4}$.

Ví dụ 13. Xét tập hợp $E = \{1, 2, 3, \dots, 2003\}$. Với tập con A khác rỗng của E , ta đặt

$$r(A) = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{k-1} a_k,$$

trong đó $a_1, a_2, \dots, a_k$ là tất cả các phần tử của A xếp theo thứ tự giảm dần. Hãy tính tổng $S = \sum_{A \subseteq E} r(A)$.

3. Phương pháp thêm bớt

Ta xét bài toán thực tế sau:

Ví dụ 14. Rút ngẫu nhiên 13 quân bài từ bộ bài 52 quân. Tính xác suất để trong 13 quân đó có "tứ quý".

Giải. Có C_{52}^{13} cách rút 13 quân bài từ bộ bài 52 quân. Ta cần tìm số cách rút trong đó có 4 quân bài giống nhau (về số!).

Trước hết ta đếm số cách rút có "tứ quý" A. Rõ ràng có C^9_{48} cách rút như vậy (lấy 4 con A và 9 con bất kỳ từ 48 con còn lại). Với các quân bài khác cũng vậy. Vì có 13 quân bài khác nên số cách rút là có tứ quý là $13.C^9_{48}$.

Trong lời giải trên, chúng ta đã đếm lặp. Cụ thể là những cách rút bài có hai tứ quý, chẳng hạn tứ quý K và tứ quý A được đếm hai lần: một lần ở tứ quý A và một lần ở tứ quý K. Nhưng ta đang đếm không phải là số tứ quý mà là số lần gặp tứ quý. Như thế, những lần đếm lặp đó phải trừ đi. Dễ thấy, số cách rút có tứ quý K và A sẽ là C_{44}^5 . Lý luận tiếp tục như thế, ta có con số chính xác cách rút có tứ quý là:

$$13.C_{48}^9 - C_{13}^2 C_{44}^5 + C_{13}^3 C_{40}^1$$

và xác suất cần tìm bằng

$$p = \frac{13.C_{48}^9 - C_{13}^2 C_{44}^5 + C_{13}^3 C_{40}^1}{C_{52}^{13}}.$$

Định lý 3. Với n tập hợp $A_1, \dots, A_n$ bất kỳ ta có công thức

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$$

Ví dụ 15. Có bao nhiêu cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi một đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào ?

Giải. Có 8! cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế sao cho không có con nào ăn con nào. Ta cần đếm số cách xếp không hợp lệ, tức là số cách xếp có ít nhất một con xe nằm trên đường chéo.

Gọi A_i là tập hợp các cách xếp có quân xe nằm ở ô (i, i) . Ta cần tìm $|A_1 \cup \dots \cup A_8|$. Nhưng dễ dàng thấy rằng $|A_i| = 7!, |A_i \cap A_j| = 6!, \dots, |A_1 \cap \dots \cap A_8| = 1$ nên từ định lý trên ta suy ra

$$|A_1 \cup \dots \cup A_8| = C_8^1 \cdot 7! - C_8^2 \cdot 6! + C_8^3 \cdot 5! - \dots - C_8^8 \cdot 1! = 8! - \frac{8!}{2!} + \frac{8!}{3!} - \dots - \frac{8!}{8!}.$$

Như vậy số cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi một đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào bằng

$$N(8) = 8! - \left(8! - \frac{8!}{2!} + \frac{8!}{3!} - \dots - \frac{8!}{8!}\right) = 8! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!}\right).$$

Ví dụ 16. Có bao nhiêu cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi hai đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào?

4. Phương pháp quỹ đạo

Ví dụ 17. Có $m + n$ người đang đứng quanh quây vé, trong đó n người có tiền 5.000 và m người chỉ có tiền 10.000. Đầu tiên ở quây không có tiền, vé giá 5.000. Hỏi có bao nhiêu cách xếp $m + n$ người thành hàng để không một người nào phải chờ tiền trả lại ($m \leq n$).

Ví dụ 18. (Bài toán bầu cử) Trong cuộc bầu cử, ứng cử viên A được a phiếu bầu, ứng cử viên B được b phiếu bầu ($a > b$). Cử tri bỏ phiếu tuần tự. Có bao nhiêu cách sắp xếp việc bỏ phiếu để lúc nào A cũng hơn B về số phiếu bầu ?

Cho $x > 0$ và y là số nguyên. Quỹ đạo từ gốc tọa độ đến điểm $(x; y)$ là đường gấp khúc nối các điểm $O, (1; s_1), \dots, (k; s_k), \dots, (x; s_x)$, trong đó $|s_i - s_{i-1}| = 1, s_x = y$.

Gọi $N_{x,y}$ là số các quỹ đạo nối điểm $(0; 0)$ với điểm $(x; y)$. Ta có các định lý sau:

Định lý 4. $N_{x,y} = C_{p+q}^p$ với $p = \frac{x+y}{2}, q = \frac{x-y}{2}$ nếu x, y cùng tính chẵn lẻ và $N_{x,y} = 0$ nếu x, y khác tính chẵn lẻ.

Chứng minh. Giả sử quỹ đạo gồm p đoạn hướng lên trên và q đoạn hướng xuống dưới. Khi đó

$$p + q = x, p - q = y$$

từ đó

$$p = \frac{x+y}{2}, q = \frac{x-y}{2}$$

(vì p và q là các số nguyên nên x, y cần phải có cùng tính chẵn lẻ). Vì quỹ đạo sẽ hoàn toàn được xác định nếu ta chỉ ra đoạn nào được hướng lên trên, do đó số các quỹ đạo từ điểm O đến điểm $(x; y)$ bằng $N_{x,y} = C_{p+q}^p$.

Định lý 5 (Nguyên lý đối xứng gương). Giả sử $A(a; \alpha), B(b; \beta)$ là các điểm có tọa độ nguyên, hơn nữa $b > a \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0$, và $A'(a; -\alpha)$ là điểm đối xứng với A qua trục Ox . Khi đó số các quỹ đạo từ A đến B cắt trục Ox hoặc có điểm chung với Ox bằng số các quỹ đạo từ A' đến B .

Chứng minh. Mỗi một quỹ đạo T từ A đến B , cắt trục Ox hoặc có điểm chung với Ox ta cho tương ứng với quỹ đạo T' từ A' đến B theo quy tắc sau: xét đoạn quỹ đạo T từ A cho đến điểm gặp nhau đầu tiên giữa T và Ox và lấy đối xứng đoạn này qua Ox , tiếp theo T và T' trùng nhau. Như vậy mỗi một quỹ đạo T từ A đến B cắt Ox tương ứng với một quỹ đạo xác định từ A' đến B . Ngược lại mỗi một quỹ đạo từ A' đến B tương ứng với một và chỉ một quỹ đạo từ A đến B cắt Ox (lấy đoạn quỹ đạo từ A' đến B đến điểm gặp đầu tiên và lấy đối xứng đoạn này qua Ox). Như vậy ta đã thiết lập được song ánh từ tập hợp các quỹ đạo từ A đến B cắt Ox vào tập hợp các quỹ đạo từ A' đến B . Định lý được chứng minh.

Định lý 6. Giả sử $x > 0, y > 0$. Khi đó số quỹ đạo từ O đến $(x; y)$ không có điểm chung với trục Ox (ngoại trừ điểm O) bằng $\frac{y}{x} N_{x,y}$.

1.3.1 Câu hỏi và bài tập

1.

- a) n đường thẳng có thể chia đường thẳng thành nhiều nhất bao nhiêu miền?
- b) n mặt phẳng có thể chia không gian thành nhiều nhất bao nhiêu miền?

2. Hàm sinh của dãy $\{a_n\}$ bằng $A(x)$. Hãy tính hàm sinh của các dãy số sau

- a) $b_n = ca^n$;
- b) $b_n = a_n + b$;
- c) $b_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$;
- d) $b_n = a_{2n}$.

3. Giả sử Ω là một tập hợp gồm n phần tử. Họ các tập con $A_1, A_2, \dots, A_k$ được gọi là họ Sperner nếu trong các tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_k$ không có tập nào là tập con của tập khác.

- a) Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_k$ là một họ Sperner với số phần tử tương ứng là $i_1, i_2, \dots, i_k$. Chứng minh rằng $\frac{1}{C_n^{i_1}} + \frac{1}{C_n^{i_2}} + \dots + \frac{1}{C_n^{i_k}} \leq 1$.
- b) (Định lý Sperner). Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_k$ là một họ Sperner. Khi đó $k \leq C_n^{\frac{n}{2}}$.
- b) Gọi A_n là số các họ Sperner khác nhau của Ω . Chứng minh rằng

$$2^{T_n} < A_n < C_{2_n}^{T_n}$$

trong đó $T_n = C_n^{\frac{n}{2}}$.

4. (Mỹ 1996) Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa chuỗi con 010, b_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa chuỗi con 0011 hoặc 1100. Chứng minh rằng $b_{n+1} = 2a_n$ với mọi n nguyên dương. 5. (Việt Nam 1996) Cho các số nguyên k và n sao cho $1 \leq k \leq n$. Tìm tất cả các bộ sắp thứ tự $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ trong đó $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các số khác nhau từ tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$, thoả mãn điều kiện:

- a) Tồn tại s và t sao cho $1 \leq s < t \leq k$ và $a_s > a_t$.
- b) Tồn tại s sao cho $1 \leq s \leq k$ và a_s không đồng dư với s theo $\mod 2$.

6. Tìm số tất cả các bộ n số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho

- i) $x_i = \pm 1$ với $i = 1, 2, \dots, n$;
- ii) $0 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_r < 4$ với $r = 1, 2, \dots, n-1$;
- iii) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 4$.

7. Cho $M = \{1, 2, \dots, n\}$.

- a) Tìm số tất cả các bộ ba tập con A, B, C của M thoả điều kiện

$$A \cup B \cup C = M, B \cap C = \emptyset$$

- b) Tìm số tất cả các bộ bốn tập con A, B, C, D của M thoả điều kiện

$$A \cup B \cup C \cup D = M, B \cap C \cap D = \emptyset.$$

1.4 Ứng dụng của phép đếm

Giải tích tổ hợp không chỉ giải quyết các bài toán được đặt ra trong chính lý thuyết này mà còn nhiều ứng dụng thú vị trong các ngành toán học khác, ví dụ như trong đại số, số học, hình học tổ hợp, lý thuyết xác suất, ...

Các hệ số nhị thức thường được nảy sinh một cách tự nhiên trong số học modular, trong đại số giao hoán, trong lý thuyết đại số Lie modular, vì vậy, những đẳng thức liên quan đến hệ số nhị thức đóng một vai trò đặc biệt quan trọng.

Dưới đây, chúng ta xét một số ví dụ liên quan đến ứng dụng của giải tích tổ hợp trong các lĩnh vực khác nhau của toán học.

Ví dụ 19. Cho p là một số nguyên tố. Đường tròn được chia thành p cung bằng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô p cung bằng a màu khác nhau (Hai cách tô màu thu được bằng một phép quay được coi là giống nhau)?

Giải. Mỗi một cung có a cách tô màu, như vậy có a^p cách tô màu p cung (với quy ước cố định vị trí). Trong số này có a cách tô màu bằng chỉ một màu. Với mỗi cách tô màu dùng 2 màu trở lên, ta có thể dùng phép quay để tạo ra p cách tô màu khác được tính trong a^p cách tô màu trên nhưng không được tính theo cách tính đề bài. Như vậy số cách tô màu thoả mãn điều kiện đề bài là $a^p - a$.

Hệ quả (Định lý nhỏ Fermat). Cho p là số nguyên tố và a là số nguyên, khi đó $a^p - a$ chia hết cho p .

Ví dụ 20. Chứng minh rằng từ $2n-1$ số nguyên bất kỳ luôn tìm được n số có tổng chia hết cho n .

Giải. Ta gọi mệnh đề ở đề bài là $A(n)$. Trước hết ta chứng minh rằng nếu $A(m), A(n)$ đúng thì $A(mn)$ cũng đúng (hãy chứng minh!). Từ đây, bài toán quy về việc chứng minh $A(p)$ với p là số nguyên tố.

Xét $E = \{a_1, a_2, \dots, a_{2p-1}\}$. Giả sử ngược lại rằng với mọi bộ $a_{i1}, \dots, a_{ip}$ lấy từ E ta có $a_{i1} + \dots + a_{ip}$ không chia hết cho p . Khi đó, theo định lý nhỏ Fermat

$$(a_{i1} + \dots + a_{ip})^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Từ đó suy ra

$$\sum (a_{i1} + \dots + a_{ip})^{p-1} \equiv C_{2p-1}^p \pmod{p},$$

trong đó tổng tính theo tất cả các tập con p phần tử của E .

Mặt khác, ta đếm số lần xuất hiện của đơn thức $a_{j1}^{\alpha_1} \dots a_{jk}^{\alpha_k}$ với $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = p-1$ trong tổng ở vế trái.

Có $C_{2p-1}^k \cdot C_{2p-k-1}^{p-k}$ tổng dạng $a_{i1} + \dots + a_{ip}$ có chứa $a_{j1}, \dots, a_{jk}$. Trong mỗi tổng này, đơn thức $a_{j1}^{\alpha_1} \dots a_{jk}^{\alpha_k}$ xuất hiện với hệ số $\frac{(p-1)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!}$. Như vậy, đơn thức $a_{j1}^{\alpha_1} \dots a_{jk}^{\alpha_k}$ sẽ xuất hiện trong tổng vế trái với hệ số $C_{2p-1}^k \cdot C_{2p-k-1}^{p-k} \cdot \frac{(p-1)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} = \frac{(2p-1)!}{k!(p-k)!(p-1)!} \cdot \frac{(p-1)!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!}$.

Do $1 \leq k \leq p-1$ nên hệ số này luôn chia hết cho p , suy ra tổng vế trái chia hết cho p . Mặt khác $C_{2p-1}^p = \frac{(2p-1)!}{p!(p-1)!} = \frac{(p+1) \dots (2p-1)}{(p-1)!}$ không chia hết cho p . Mâu thuẫn.

Ví dụ 21. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n k(C_n^k)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}$.

Ví dụ 22. Cho a là số thực dương và n là số nguyên dương cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(1+x_1)(x_1+x_2) \dots (x_{n-1}+x_n)(x_n+a^{n+1})}$, trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số dương tùy ý.

Giải. Đặt $u_0 = x_1, u_1 = \frac{x_2}{x_1}, \dots, u_n = \frac{a^{n+1}}{x_n}$ thì $u_0 u_1 \dots u_n = a^{n+1}$ và ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $(1+u_0)(1+u_1) \dots (1+u_n)$. Ta có $(1+u_0)(1+u_1) \dots (1+u_n) = 1 + \sum u_i + \sum u_{i1} u_{i2} + \dots + \sum u_{i1} \dots u_{ik} + \dots + u_0 u_1 \dots u_n$. Tổng $\sum u_{i1} \dots u_{ik}$ có C_{n+1}^k số hạng. Tích của chúng sẽ là một biểu thức bậc kC_n^k . Do tính đối xứng, mỗi một số hạng sẽ đóng góp bậc là $\frac{kC_{n+1}^k}{n+1}$. Suy ra tích của tất

cả các số hạng này bằng $(a^{n+1})^{\frac{kC_{n+1}^k}{n+1}} = a^{kC_{n+1}^k}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $\sum u_{i1} \dots u_{ik} \geq C_{n+1}^k a^k$. Do đó $1 + \sum u_i + \sum u_{i1} u_{i2} + \dots + \sum u_{i1} \dots u_{ik} + \dots + u_0 u_1 \dots u_n \geq 1 + (n+1)a + C_{n+1}^2 a^2 + \dots + C_{n+1}^k a^k + \dots + a^{n+1} = (1+a)^{n+1}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u_0 = u_1 = \dots = u_n = a$ tức là khi $x_1 = a, x_2 = a^2, \dots, x_n = a^n$.

Ví dụ 23 (Vietnam ST 1993). Xét n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ trong không gian, trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Mỗi một cặp điểm A_i, A_j được nối với nhau bởi một đoạn thẳng.

Tìm giá trị lớn nhất của n sao cho có thể tô tất cả các đoạn thẳng đó bằng hai màu xanh, đỏ thoả mãn ba điều kiện sau:

- Mỗi đoạn thẳng được tô bằng đúng một màu.
- Với $i = 1, 2, \dots, n$ số đoạn thẳng có một đầu mút là A_i mà được tô màu xanh không vượt quá 4.

- c) Với mỗi đoạn thẳng $A_i A_j$ được tô màu đỏ đều tìm thấy ít nhất một điểm A_k ($k \neq i, j$) mà các đoạn thẳng $A_k A_i$ và $A_k A_j$ đều được tô màu xanh.

1.5 Các giá trị trung bình. Dồn biến bằng trung bình cộng và trung bình nhân

Ta sử dụng các giá trị trung bình để thực hiện quy trình sắp thứ tự gần đều (phương pháp dồn biến) trong bất đẳng thức.

Chúng ta biết rằng đặc điểm của nhiều bất đẳng thức là dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tất cả hoặc một vài biến số bằng nhau (xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản $x^2 \geq 0$!, đặc biệt là bất đẳng thức đại số).

Phương pháp dồn biến dựa vào đặc điểm này để làm giảm biến số của bất đẳng thức, đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn. Để có thể chứng minh trực tiếp bằng cách khảo sát hàm một biến hoặc chứng minh bằng quy nạp.

Để chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad (1.1)$$

ta có thể chứng minh

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, x_n\right). \quad (1.2)$$

hoặc

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, \dots, x_n). \quad (1.3)$$

Sau đó, chuyển sang việc chứng minh (1.1) về chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

tức là chứng minh bất đẳng thức có ít biến số hơn. Dĩ nhiên, các bất đẳng thức (1.2) có thể không đúng, hoặc chỉ đúng trong một số điều kiện nào đó. Vì ta chỉ thay đổi hai biến số nên có thể kiểm tra tính đúng đắn của bất đẳng thức này một cách dễ dàng.

Ta xét các bài toán sau để minh họa phương pháp.

Bài toán 1. *Chứng minh rằng nếu $x, y, z, > 0$ thì*

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xyz)^{2/3} \geq (x + y + z)^2.$$

Chứng minh. Xét hàm

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xyz)^{2/3} - (x + y + z)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx + 3(xyz)^{2/3} \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \leq y \leq z$, ta cần chứng minh $F(x, y, z) \geq 0$.

Thực hiện dồn biến bằng trung bình nhân, ta sẽ chứng minh

$$F(x, y, z) \geq F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}). \quad (1.4)$$

Thật vậy, xét hiệu $d = F(x, y, z) - F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz})$.

$$\begin{aligned}
d &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - (x^2 + yz + yz - 2x\sqrt{yz} - 2x\sqrt{yz} - 2yz) \\
&\quad + 3(xyz)^{2/3} - 3(xyz)^{2/3} \\
&= y^2 + z^2 - 2yz + 4x\sqrt{yz} - 2x(y + z) \\
&= (y - z)^2 + 2x(-y - z + 2\sqrt{yz}) \\
&= (y - z)^2 - 2x(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \\
&= (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2[(\sqrt{y} + \sqrt{z})^2 - 2x] \\
&= (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2[(y + z - 2x) + 2\sqrt{yz}] \geq 0
\end{aligned}$$

Vì $x \leq y \leq z$ suy ra $y + z \geq 2x$. Từ đó suy ra bất đẳng thức (1.4) đúng.

Mặt khác

$$F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) = x^2 - 4x\sqrt{yz} + 3(xyz)^{2/3}$$

Mà

$$\begin{aligned}
x^2 + 3(xyz)^{2/3} &= x^2(xyz)^{2/3} + (xyz)^{2/3} + (xyz)^{2/3} \\
&\geq 4(x^2y^2z^2)^{1/4} = 4x\sqrt{yz}
\end{aligned}$$

nhờ áp dụng bất đẳng thức côsi cho bốn số không âm $x^2, (xyz)^{2/3}, (xyz)^{2/3}, (xyz)^{2/3}$. Do vậy $F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) \geq 0$. Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. $\square$

Bài toán 2. Chứng minh rằng nếu $x, y, z, t \geq 0$ thì

$$3(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 4\sqrt{xyzt} \geq (x + y + z + t)^2.$$

Chứng minh. Xét hàm

$$\begin{aligned}
F(x, y, z, t) &= 3(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 4\sqrt{xyzt} - (x + y + z + t)^2 \\
&= 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - 2xy - 2xz - 2xt \\
&\quad - 2yz - 2yt - 2zt + 4\sqrt{xyzt}
\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \leq y \leq z \leq t$, ta cần chứng minh $F(x, y, z, t) \geq 0$, trước hết, ta có $F(x, y, z, t) \geq F(x, y, \sqrt{zt}, \sqrt{zt})$. Thật vậy, xét hiệu $d = F(x, y, z, t) - F(x, y, \sqrt{zt}, \sqrt{zt})$.

$$\begin{aligned}
d &= 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - 2xy - (2xz + 2xt + 2yt + 2zt) + 4\sqrt{xyzt} - \\
&\quad - [2(x^2 + y^2 + zt + zt) - 2xy + 2x\sqrt{zt} + 2x\sqrt{zt} \\
&\quad + 2y\sqrt{zt} + 2y\sqrt{zt} + 2zt) + 4\sqrt{xyzt}] \\
&= 2(z^2 + t^2) - 4zt - 2x(z + t) - 2y(z + t) + 4 + 4x\sqrt{zt} + 4y\sqrt{zt} \\
&= 2(t - z)^2 - 2x(\sqrt{t} - \sqrt{z})^2 - 2y(\sqrt{t} - \sqrt{z})^2 \\
&= (\sqrt{t} - \sqrt{z})^2[2(\sqrt{t} + \sqrt{z})^2 - 2x - 2y]
\end{aligned}$$

Do $x \leq y \leq z \leq t$ nên

$$2(\sqrt{t} + \sqrt{z})^2 - 2x - 2y = 2(t + z - x - y + 2\sqrt{zt}) \geq 0$$

suy ra $d \geq 0$.

Tiếp theo ta chứng minh

$$F(x, y, \alpha, \alpha) \geq F(x, (y\alpha^2)^{1/3}, (y\alpha^2)^{1/3}, (y\alpha^2)^{1/3})$$

với $\alpha = \sqrt{zt}$. Đặt $\beta = (y\alpha^2)^{1/3}$ suy ra $y = \frac{\beta^3}{\alpha^2}$, ta phải chứng minh

$$F(x, \frac{\beta^3}{\alpha^2}, \alpha, \alpha) \geq F(x, \beta, \beta, \beta)$$

và $x \leq \frac{\beta^3}{\alpha^2} \leq \alpha$.

Thật vậy xét

$$\begin{aligned} & F(x, \frac{\beta^3}{\alpha^2}, \alpha, \alpha) - F(x, \beta, \beta, \beta) = \\ &= 2(x^2 + \frac{\beta^3}{\alpha^2} + \alpha^2 + \alpha^2) - [2(\frac{x\beta^3}{\alpha^2}) + 2x\alpha + \frac{2\beta^3}{\alpha} + \frac{2\beta^3}{\alpha} + 2\alpha^2] + 4\sqrt{x\beta^3} - \\ &\quad - [2(x^2 + \beta^2 + \beta^2 + \beta^2) - (2x\beta + 2x\beta + 2x\beta + 2\beta^2 + 2\beta^2 + 2\beta^2 + 4\sqrt{x\beta^3})] \\ &= 2(\frac{\beta^6}{\alpha^4} + 2\alpha^2) - (\frac{2x\beta^3}{\alpha^2} + 4x\alpha + \frac{4\beta^3}{\alpha} + 2\alpha^2) + 6x\beta \\ &= 2(\frac{\beta^6}{\alpha^4} + \alpha^2 - \frac{2\beta^3}{\alpha}) - 2x(\frac{\beta^3}{\alpha^2} + 2\alpha - 3\beta) \\ &= 2(\frac{\beta^3}{\alpha^2} - \alpha)^2 + 2x(3\beta - \frac{\beta^3}{\alpha^2} - 2\alpha) \end{aligned}$$

Mà

$$3\beta - \frac{\beta^3}{\alpha^2} \geq 4\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}} - 2(\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2 \quad (1.5)$$

Bất đẳng thức này tương đương với mỗi bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} 3\beta &\geq 4\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}} - \frac{\beta^3}{\alpha} \\ 3\beta\alpha &\geq 4\sqrt{\beta^3\alpha} - \frac{\beta^3}{\alpha} \\ \beta - 4\sqrt{\beta\alpha} + 3\alpha &\geq 0 \\ (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})(\sqrt{\beta} - 3\sqrt{\alpha}) &\geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $\beta \leq \alpha$. Vậy (1.5) đúng.

Từ đó suy ra

$$F(x, \frac{\beta^3}{\alpha^2}, \alpha, \alpha) - F(x, \beta, \beta, \beta) \geq 2(\alpha - \frac{\beta^3}{\alpha^2})^2 + 2x(4\sqrt{\beta^3\alpha} - \frac{2\beta^3}{\alpha} - 2\alpha)$$

Vế trái của bất đẳng thức này lớn hơn hoặc bằng

$$\begin{aligned} & 2(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2 - 4x(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2 \\ & \geq 2(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2[(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2 - 2x] \geq 0 \end{aligned}$$

đúng. Vậy

$$F(x, \frac{\beta^3}{\alpha^2}, \alpha, \alpha) \geq F(x, \beta, \beta, \beta)$$

Mà

$$F(x, \beta, \beta, \beta) = 2x^2 - 6x\beta + 4\sqrt{x\beta^3}$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có

$$2x^2 + 4\sqrt{x\beta^3} = x^2 + x^2 + \sqrt{x\beta^3} + \sqrt{x\beta^3} + \sqrt{x\beta^3} + \sqrt{x\beta^3} \geq 6x\beta$$

Suy ra $F(x, \beta, \beta, \beta) \geq 0$, suy ra $F(x, y, z, t) \geq 0$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. $\square$

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số không âm, sao cho $a + b + c = d$, $n \geq 2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(ab)^n}{1 - ab} + \frac{(bc)^n}{1 - bc} + \frac{(ca)^n}{1 - ac}.$$

Chứng minh. Không giảm tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Xét

$$P(a, b, c) = \frac{(ab)^n}{1 - ab} + \frac{(bc)^n}{1 - bc} + \frac{(ca)^n}{1 - ac}.$$

Ta chứng minh

$$P(a, b, c) \leq P(a, b + c, 0)$$

Thật vậy ta xét hiệu

$$\begin{aligned} & P(a, b, c) - P(a, b + c, 0) \\ &= \frac{[a(b + c)]^n}{1 - a(b + c)} - \left[\frac{(ab)^n}{1 - ab} + \frac{(bc)^n}{1 - bc} + \frac{(ca)^n}{1 - ca} \right] \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{[a(b + c)]^n}{1 - a(b + c)} &= a^n \frac{(b + c)^n}{1 - a(b + c)} = \\ &= a^n \frac{(b^n + nb^{n-1}c + \dots + nbc^{n-1} + c^n)}{1 - a(b + c)} \\ &> \frac{a^n b^n}{1 - a(b + c)} + \frac{a^n b^n}{1 - a(b + c)} + \frac{na^n b^{n-1}c}{1 - a(b + c)} \end{aligned}$$

Do $a, b, c \geq 0$ suy ra $1 - a(b + c) = 1 - ab - ac \geq 1 - ab$ và $1 - a(b + c) \geq 1 - ac$, suy ra

$$\frac{a^n b^n}{1 - a(b + c)} > \frac{a^n b^n}{1 - ab} \quad \text{và} \quad \frac{b^n c^n}{1 - a(b + c)} > \frac{c^n b^n}{1 - a(b + c)} > \frac{a^n c^n}{1 - ac}$$

và

$$\frac{na^n b^{n-1}c}{1 - a(b + c)} \geq \frac{na^n b^{n-1}c}{1 - bc} \geq \frac{b^n c^n}{1 - bc}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = 0$, suy ra $P(a, b, c) \leq P(a, b + c, 0)$.

Vậy ta cần tìm giá trị lớn nhất của

$$P(a, b + c, 0) = \frac{(a(b + c))^n}{1 - a(b + c)} = \frac{a^n d^n}{1 - ad}, \quad a \geq 0, d \geq 0, a + d = 1.$$

Ta có

$$ad \leq \frac{(a+d)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

Suy ra

$$P(a, b+c, 0) \leq \frac{(1/4)^n}{1-1/4} = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}$$

Vậy

$$P_{\max} = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 0$ và các hoán vị của nó. $\square$

Bài toán 4. Cho a, b, c là các số thực bất kỳ, chứng minh rằng

$$F(a, b, c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4) \geq 0.$$

Chứng minh. Đây là đề thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 1996, dùng phương pháp dồn biến cho trung bình cộng rồi thực hiện bước sau cùng bằng phương pháp đạo hàm.

Xét hiệu $d = F(a, b, c) - F(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2})$

$$\begin{aligned} d &= (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4) \\ &\quad - 2\left(a\frac{b+c}{2}\right)^4 - (b+c)^4 + \frac{4}{7}(a^4 + 2\left(\frac{b+c}{2}\right)^4) \\ &= (a+b)^4 + (c+a)^4 - 2\left(a + \frac{b+c}{2}\right)^4 + \frac{4}{7}\left(\frac{(b+c)^4}{8} - b^4 - c^4\right) \\ &= a(4b^3 + 4c^3 - (b+c)^3) + 3a^2(2b^2 + c^2 - (b+c)^2) + \frac{3}{7}(b^4 + c^4 - \frac{1}{8}(b+c)^4) \\ &= 3a(b+c)(b-c)^2 + 3a^2(b-c)^2 + \frac{3}{56}(b-c)^2(7b^2 + 7c^2 + 10bc) \\ &= 3a(a+b+c)(b+c)^2 + \frac{3}{56}(b-c)^2(7b^2 + 7c^2 + 10bc) \end{aligned}$$

Hạng tử $\frac{3}{56}(b-c)^2(7b^2 + 7c^2 + 10bc) \geq 0$, ta xét hạng tử $3a(a+b+c)(b+c)^2$.

Nếu a, b, c cùng dấu thì $3a(a+b+c)$ không âm, suy ra $d \geq 0$.

Nếu a, b, c không cùng dấu, như vậy trong a, b, c có ít nhất một số cùng dấu với a, b, c . Không mất tổng quát, giả sử đó là a . Từ đẳng thức trên ta suy ra

$$F(a, b, c) \geq F\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$$

Như vậy ta còn phải chứng minh $F(a, b, c) \geq 0$ với mọi a, b hay là

$$2(a+b)^4 + (2b)^4 - \frac{4}{7}(a^4 + 2b^3) \geq 0 \quad (1.6)$$

Nếu $b = 0$ thì bất đẳng thức trên là hiển nhiên.

Nếu $b \neq 0$ thì chia hai vế bất đẳng thức cho b^4 và đặt $x = a/b$, thế thì (1.6) trở thành

$$2(x+1)^4 + 16 - \frac{4}{7}(x^4 + 2) \geq 0$$

Xét hàm

$$f(x) = 2(x+1)^4 - \frac{4}{7}(x^4 + 2) + 16.$$

Tính đạo hàm ta được

$$f'(x) = 8(x+1)^3 - \frac{16}{7}x^3$$

Suy ra $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x+1 = (2/7)^3 x$ hay $x = -2,99294$. Suy ra

$$f_{\min} = f(-2,99294) = 0,4924 > 0$$

Điều này cho thấy bất đẳng thức rất chặt. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. $\square$

1.6 Bài đọc thêm: Dồn biến dùng hàm đồng biến, nghịch biến

Như đã nói ở trên, bất đẳng thức dồn biến làm giảm số các biến trong các bất đẳng thức. Và như vậy, đã tạo điều kiện cho ta có cách xử lý đưa về một biến duy nhất trên một miền xác định nào đó để giải quyết hoàn toàn bất đẳng thức.

Phương pháp này đặc biệt hữu ích cho các bất đẳng thức gồm ba biến, sau khi dồn biến ta giảm xuống còn hai biến, thiết lập quan hệ đơn giản giữa hai biến, ta đưa về hàm một biến.

Bài toán trên đây cho thấy rõ cách làm này. Ta có thể xét thêm một số bài toán khác.

Bài toán 5. Cho bốn số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng

$$abc + bcd + acd + abd \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

Chứng minh. Đặt $F(a, b, c, d) = \frac{176}{27}abcd - (abc + bcd + acd + abd)$. Do $a + b + c + d = 1$ nên trong bốn số a, b, c, d luôn tồn tại hai số có tổng nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$. Giả sử $a + b \leq \frac{1}{2}$. Ta xét $t = \frac{1}{2}(c + d)$ và

$$F(a, b, c, d) - F(a, b, t, t) = (t^2 - cd)(a + b - \frac{176}{27}ab)$$

Dễ thấy $t^2 - cd \geq 0$, ngoài ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \geq 8 > \frac{176}{27}$. Suy ra $a + b - \frac{176}{27}ab \geq 0$. Vậy $F(a, b, c, d) - F(a, b, t, t) \geq 0$ suy ra $F(a, b, c, d) \geq F(a, b, t, t)$.

Ta cần chứng minh

$$F(a, b, t, t) = \frac{176}{27}abt^2 - 2abt - at^2 - bt^2 \geq -\frac{1}{27}.$$

Với $a + b + 2t = 1, t \geq \frac{1}{4}$. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$F(a, b, t, t) = 2t^3 - t^2 + \frac{176}{27}abt^2 - 2abt \geq -\frac{1}{27}.$$

Cố định t , ta xét $F(ab) = ab(\frac{176}{27}t^2 - 2t) + 2t^3 - t^2$ thì $F(ab)$ đồng biến, do đó $F(ab) \geq F(0) = 2t^3 - t^2 = f(t)$. Xét hàm $f(t) = 2t^3 - t^2$ trên $[\frac{27}{88}, \frac{1}{2}]$. Ta có $f(t) \geq f(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27}$. Kết hợp tất cả các điều trên suy ra $F(a, b, c, d) \geq -\frac{1}{27}$.

Nếu $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{27}{88}$ thì $F'(ab) \leq 0$. Mà $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{(1-2t)^2}{4}$. Suy ra

$$F(ab) \geq F\left(\frac{(1-2t)^2}{4}\right) = 2t^3 - t^2 + \frac{176}{27}t^2 \frac{(1-2t)^2}{4} - 2t \frac{(1-2t)^2}{4} = g(t).$$

Xét

$$g(t) = \frac{176}{27}t^4 - \frac{176}{27}t^3 + \frac{71}{27}t^2 - \frac{1}{2}t,$$

thì $g(t)$ đồng biến và do vậy $g(t) \geq g(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{27}$.

Tóm lại $F(a, b, c, d) \geq -\frac{1}{27}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi bốn số bằng $\frac{1}{4}$ hoặc ba số bằng $\frac{1}{3}$ và một số bằng 0. □

Bài toán 6. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{(1+b/a)^3} + \frac{1}{(1+c/b)^3} + \frac{1}{(1+a/c)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Đặt $x = b/a, y = c/b, z = a/c$ suy ra $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} \geq \frac{3}{8},$$

với $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Đặt $z = \min\{x, y, z\}$ thì từ $xyz = 1$ suy ra $z \leq 1$ và $xy \geq 1$. Ta có nhận xét rằng

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}.$$

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với mỗi bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+\sqrt{xy}} &\geq \frac{1}{1+\sqrt{xy}} - \frac{1}{1+y} \\ \frac{(\sqrt{xy}-x)}{(1+x)(1+\sqrt{xy})} &\geq \frac{y-\sqrt{xy}}{(1+y)(1+\sqrt{xy})} \\ \frac{\sqrt{x}(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{(1+x)(1+\sqrt{xy})} &\geq \frac{\sqrt{y}(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{(1+x)(1+xy)} \\ \frac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}-x\sqrt{y})}{(1+x)(1+y)} &\geq 0 \\ \frac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2(\sqrt{xy}-1)}{(1+x)(1+y)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì $xy \geq 1$.

Mặt khác ta cũng có

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Bất đẳng thức này có thể chuyển về dạng $3(a-b)^2$ một cách dễ dàng. Bây giờ, áp dụng nhận xét thứ hai, và nhận xét thứ nhất, ta được

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} \geq 2\frac{1}{8} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y}\right)^3 \geq \frac{1}{4} \left(\frac{2}{1+\sqrt{xy}}\right)^3.$$

Vậy nên bây giờ ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{2}{(\sqrt{xy}+1)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Thật vậy, đặt $a = \sqrt{xy}$, suy ra $a^2 = xy = \frac{1}{z}$, $z = \frac{1}{a^2}$, $a \geq 1$. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{2}{(1+a)^3} + \frac{1}{(1+\frac{1}{a^2})^3} \geq \frac{3}{8}.$$

hay là

$$\frac{2}{(1+a)^3} + \frac{a^6}{(a^2+1)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Tiếp tục biến đổi đơn giản cho ta bất đẳng thức

$$(a-1)^2(5a^4 + 25a^6 + 51a^5 + 71a^4 + 55a^3 + 51a^2 + 17a + 13) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên đúng vì $a \geq 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$, $x = y$, $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+y}$ tức là $x = y = z = 1$. Vậy

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Dấu đẳng thức xuất hiện khi $a = b = c$. □

1.7 Bài đọc thêm: Hàm sinh và phương pháp hàm sinh

Phương pháp hàm sinh là một phương pháp hiện đại, sử dụng các kiến thức về chuỗi, chuỗi hàm (đặc biệt là công thức Taylor). Đây là phương pháp mạnh nhất để giải bài toán giải tích tổ hợp

Định nghĩa 3. Cho dãy số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Chuỗi hình thức

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

được gọi là hàm sinh của dãy $\{a_n\}$.

Ý tưởng phương pháp hàm sinh như sau: Giả sử ta cần tìm công thức tổng quát của một dãy số $\{a_n\}$ nào đó. Từ công thức truy hồi hoặc những lý luận tổ hợp trực tiếp, ta tìm được hàm sinh

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Khai triển $A(x)$ thành chuỗi và tìm hệ số của x^n trong khai triển đó ta tìm được a_n .
Công thức khai triển thường sử dụng (Công thức nhị thức Newton)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + \dots$$

Ví dụ 24. Tìm số hạng tổng quát của dãy số $f_0 = 1, f_1 = 2, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

Giải. Xét hàm sinh

$$\begin{aligned} F(x) &= f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots + f_nx^n + \dots \\ &= f_0 + f_1x + (f_0 + f_1)x^2 + \dots + (f_{n-1} + f_{n-2})x^n + \dots \\ &= f_0 + f_1x + x^2(f_0 + f_1x + \dots) + x(f_1x + \dots) \\ &= f_0 + f_1x + x^2F(x) + x(F(x) - f_0). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$F(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}.$$

Tiếp theo, ta khai triển $F(x)$ thành chuỗi. Ta có

$$F(x) = \frac{1+x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

trong đó α, β là nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Ta dễ dàng tìm được hai hằng số A, B sao cho

$$F(x) = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x}.$$

Từ đó, sử dụng công thức $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ ta được

$$F(x) = A + B + (A\alpha + B\beta)x + \dots + (A\alpha^n + B\beta^n)x^n + \dots$$

suy ra

$$f_n = A\alpha^n + B\beta^n,$$

với α, β là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ và A, B là các hằng số hoàn toàn xác định.

Ví dụ 25. Tìm số hạng tổng quát của dãy số $a_0 = 1, a_n a_0 + a_{n-1} a_1 + \dots + a_0 a_n = 1$.

Giải. Xét hàm sinh $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x_n + \dots$

Biểu thức truy hồi gợi chúng ta đến hệ số của hai đa thức

$$\begin{aligned} A(x).A(x) &= a_0 + (a_0 a_1 + a_1 a_0)x + \dots + (a_n a_0 + a_{n-1} a_1 + \dots + a_0 a_n)x_n + \dots \\ &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n = (1-x)^{-1}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$A(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Như vậy

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{2n} n! = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}.$$

Ví dụ 26 (Bài toán chia kẹo của Euler).

Cho k, n là các số nguyên dương. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ (*)

Giải. Gọi $c_n(k)$ là số nghiệm của (*). Xét tích của các tổng vô hạn

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots) \dots (1 + x + x^2 + \dots) = (1 + x + x^2 + \dots)^n.$$

Ta nhận xét rằng nếu khai triển tích trên thành chuỗi lũy thừa của x

$$(1 + x + x^2 + \dots)^n = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k + \dots$$

thì $c_k = c_n(k)$ (Vì sao? Hãy thử giải thích).

Nhưng

$$(1 + x + x^2 + \dots)^n = (1-x)^{-n} = 1 + nx + \dots + n(n+1) \dots (n+k-1) \frac{x^k}{k!} + \dots$$

Suy ra

$$c_n(k) = \frac{n(n+1) \dots (n+k-1)}{k!} = C_{n+k-1}^k.$$

Ví dụ 27. Vé xe buýt trong hệ thống giao thông công cộng được đánh số từ 000000 đến 999999. Một vé được gọi là vé hạnh phúc nếu tổng ba chữ số đầu tiên bằng tổng ba chữ số cuối cùng. Hãy tìm xác suất gặp vé hạnh phúc của một người mua 1 vé bất kỳ.

Ví dụ 28 (Vietnam ST 94). Tính tổng

$$T = \sum \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_{1994}! (n_2 + 2n_3 + \dots + 1993n_{1994})!},$$

ở đây tổng lấy theo tất cả các bộ có thứ tự các số tự nhiên $(n_1, n_2, \dots, n_{1994})$ thoả mãn điều kiện

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + 1994n_{1994} = 1994.$$

Ví dụ 29. Có $2n$ điểm trên đường tròn. Hãy tìm số cách nối $2n$ điểm này bằng n dây cung không cắt nhau.