|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **HÀ NỘI**  ĐỀ CHÍNH THỨC | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ** *–* **LỚP 12**  **Năm học 2013 – 2014**  **Môn thi: *Toán***  *Ngày thi 3 – 10 – 2013*  *Thời gian làm bài: 180 phút*  *(Đề thi gồm 01 trang)*  ------------------------------------- |

**Bài I** (*5 điểm*).

Cho hàm số  có đồ thị 

1. Tìm các điểm  cùng nằm trên  sao cho điểm  là trung điểm của đoạn thẳng 
2. Cho ba điểm phân biệt  cùng thuộc  Các tiếp tuyến của  tại  cắt  tại điểm thứ hai lần lượt là  Chứng minh rằng: Nếu  thẳng hàng thì  cũng thẳng hàng.

**Bài II** (*5 điểm*).

1. Giải phương trình: 
2. Giải hệ phương trình: 

**Bài III** (*2 điểm*).

Cho các số thực  sao cho  và  Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:



**Bài IV** (*5 điểm*).

Trong không gian cho ba tia  không đồng phẳng. Đặt  Lấy các điểm  lần lượt trên các tia  sao cho  với 

1. Gọi  là điểm nằm trên đoạn  sao cho  và  là trung điểm của đoạn thẳng  Tính độ dài đoạn thẳng  theo  trong trường hợp 
2. Chứng minh rằng: 

**Bài V** (*3 điểm*).

Cho dãy số  thỏa mãn điều kiện:



1. Chứng minh rằng  là dãy số tăng.
2. Với mỗi  đặt  Chứng minh rằng:

 với mọi 

---------------- HẾT ----------------

*Họ tên thí sinh*: …………………………….. *Phòng thi: ………………….. Số báo danh …………..*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **HÀ NỘI**  ĐỀ CHÍNH THỨC | | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ** *–* **LỚP 12**  **Năm học 2013 – 2014**  **Môn thi: *Toán***  *Ngày thi 3 – 10 – 2013*  *Thời gian làm bài: 180 phút*  *(Đề thi gồm 01 trang)*  ------------------------------------- | |
| **Bài** | **Đáp án** | | **Điểm** | |
| ***Bài Ia.*** | *Tìm cặp điểm đối xứng …* | | **3 điểm** | |
|  | Gọi  Vì  là trung điểm của | | 1 điểm | |
|  | Vì  nên  Thay (1) vào (2) ta được: | | 1 điểm | |
|  | Với  Với  Vậy cặp điểm cần tìm là | | 1 điểm | |
| ***Bài Ib.*** | *Chứng minh ba điểm thẳng hàng …* | | **2 điểm** | |
|  | Gọi  với  đôi một khác nhau.  Ta có  thẳng hàng khi và chỉ khi: | | 1 điểm | |
|  | Phương trình tiếp tuyến tại  là  Phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến tại *A* và  là:  Tiếp tuyến tại *A* cắt  tại điểm thứ hai  Tương tự  Vì  thẳng hàng. | | 1 điểm | |
| ***Bài IIa.*** | *Giải phương trình …* | | **2 điểm** | |
|  | Đặt  Phương trình trở thành:    Ta có | | 1 điểm | |
|  | *Trường hợp 1.* Với  loại.  *Trường hợp 2.* Với  ta có:    Vậy  là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. | | 1 điểm | |
| ***Bài IIb.*** | *Giải hệ phương trình …* | | **3 điểm** | |
|  | Điều kiện:  Ta có: | | 1 điểm | |
|  | Xét  là hàm đồng biến trên  Từ đó | | 1 điểm | |
|  | Thay  vào  ta được:    Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là | | 1 điểm | |
| ***Bài III.*** | *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất …* | | **2 điểm** | |
|  | \* Ta có:    Đặt  Xét  với | | 0,5 điểm | |
|  | Vì  Dấu bằng xảy ra khi  hoặc  Vậy  khi  hoặc | | 0,5 điểm | |
|  | Ta có:    Đặt  Xét  với | | 0,5 điểm | |
|  | Vì  Dấu bằng xảy ra khi  Vậy  khi | | 0,5 điểm | |
| ***Bài IVa.*** | *Tính độ dài đoạn thẳng OI…* | | **3 điểm** | |
|  | a) Ta có: | | 1 điểm | |
|  | Mặt khác  nên | | 0,5 điểm | |
|  | Từ đó: | | 0,5 điểm | |
|  | Vậy | | 1 điểm | |
| ***Bài IVb.*** | *Chứng minh …* | | **2 điểm** | |
|  | Vì  không đồng phẳng nên | | 1 điểm | |
|  |  | | 1 điểm | |
| ***Bài Va.*** | *Chứng minh dãy tăng …* | | **2 điểm** | |
|  | \* Trước hết chứng minh  với mọi  bằng quy nạp. Thật vậy:  - Với  ta có:  mệnh đề đúng khi  - Giả sử mệnh đề đúng với  tức là  Ta phải chứng minh mệnh đề cũng đúng với  tức là phải chứng minh  Thật vậy: | | 1 điểm | |
|  | \* Xét  vì | | 1 điểm | |
| ***Bài Vb.*** |  | |  | |
|  | Ta có: | | 0,5 điểm | |
|  | Từ đó:  Vì  với mọi  nên  với mọi | | 0,5 điểm | |