§.PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC

1. PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM ĐẶC BIỆT

$1.x^3-x^2-8x+12=0$

$2.x^3-9x^2+27x-27+0$

$3.x^5-8x^4+20x^3-20x^2+19x-12=0\left(1,3,4\right)$

$4.6x^5-5x^4-5x^3-4x^3-34x+12=0\left(\frac{1}{3},2,\frac{-3}{2}\right)$

2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH.

$1.x^4-5x^3+20x-16=0$

$2.x^4+7x^3+11x^2+7x+10=0$

3. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP.

$1.\left(x^2+x+4\right)^2+3x\left(x^2+x+4\right)+2x^2=0$

$2.\left(x^2-x+1\right)^4-6x^2\left(x^2-x+1\right)^2+5x^4=0$

$3.\left(x^2-16\right)\left(x-3\right)^2+9x^2=0$

4. PHƯƠNG TRÌNH HỒI QUI BẬC BA.

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ với $\frac{d}{a}=\left(\frac{c}{b}\right)^3$

Phương trình có một nghiệm là: $x_0=-\frac{c}{b}$

5. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG: $\left[\begin{array}{l}4x^3+3x=m,\forall m\\4x^3-3x=m,\forall m:\left|m\right|>1\end{array}\right.$

Phương trình có nghiệm duy nhất.

Ta nghiên cứu các khai triển sau:

$$*\left(a+\frac{1}{a}\right)^3=a^3+\frac{1}{a^3}+3\left(a+\frac{1}{a}\right)\Rightarrow\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]^3=\frac{1}{8}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+\frac{3}{8}\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow 4\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]^3=\frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+3\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow 4\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]^3-3\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$$

$$*\left(a-\frac{1}{a}\right)^3=a^3-\frac{1}{a^3}-3\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow 4\left[\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right]^3+3\left[\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)$$

Do đó với việc chọn a thích hợp ta có được một nghiệm của phương trình.

6. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG: $4x^3-3x=m,\forall m:\left|m\right|\le 1$

Phương trình có không quá ba nghiệm

Đặt $m=\cos\alpha=\cos(\alpha\pm 2\pi);\alpha\in[0;\pi]$. Khi đó:

$m=\cos\alpha=4\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}$

$m=\cos(\alpha\pm 2\pi)=4\cos^3\frac{\alpha\pm 2\pi}{3}-3\cos\frac{\alpha\pm 2\pi}{3}$

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x=\cos\frac{\alpha}{3};x=\cos\frac{\alpha\pm 2\pi}{3}$

7. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG: $t^3+at^2+bt+c=0$

B1: Khử bậc hai bằng cách đặt: $t=y-\frac{a}{3}\to y^3-py=q$

B2: Đưa về pt cơ bản: $4x^3\pm 3x=m$ bằng cách đặt $y=2\sqrt{\frac{|p|}{3}}$

8. PHƯƠNG TRÌNH TRÙNG PHƯƠNG.

Cho phương trình $x^4+(1-2a)x^2+a^2-1=0$. Định tham số để:

1. Pt vô nghiệm.
2. Phương trình có một nghiệm.
3. Phương trình có hai nghiệm.
4. Phương trình có 3 nghiệm.
5. Phương trình có bốn nghiệm.
6. Phương trình có bốn nghiệm lập thành một cấp số cộng.

9. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG : $(x+\alpha)^4+(x+\beta)^4=\chi$

1.$(x+4)^4+(x+6)^4=2$

2.$(x+4)^4+(x+2)^4=82$

$(2x+3)^4+(2x-5)^4=706$

10. PHƯƠNG TRÌNH HỒI QUI BẬC BỐN.

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,\text{ đk: }\frac{e}{a}=\left(\frac{d}{b}\right)^2$$

1.$4x^4+12x^3+47x^2+12x+4=0.$

2.$2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0.$

3.Định mđể phương trình vô nghiệm: $x^4+mx^3+mx^2+mx+1=0$.

11. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=e,a+b=c+d$

1.$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=10$

2.$(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$

12. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG: $A(x^2+ax)^2+B(x^2+ax)+C=0$

1.$x^4+4x^3-3x^2-14x+6=0$

2.$3x^4-6x^3+5x^2-2x-5=0$

13. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG: $(x^2+\alpha)^2=a(x+\beta)^2$

$1.x^4+4x-1=0$

$2.x^4-3x^2-10x-4=0$

$3.x^4+2x^2+8x-4=0$

LUYỆN TẬP:

Bài tập12:

$1.(x-1)^4+(x+1)^4=16$

$2.(2x-3)^4+(2x-5)^4=2$

$3.x^4+6x^3+16x^2+21x+12=0$

$4.(x^2-6x-9)^2=x^3-4x^2-9x$

$5.2x^8-9x^7+20x^6-33x^5+46x^4-66x^3+80x^2-72x+32=0$

$6.(x^2-3x+1)(x^2+3x+2)(x^2-9x+20)=-30$

$7.(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$

$8.x^4-2x^3-6x^2+16x-8=0 \qquad (2;2;-1\pm\sqrt{3})$

$9.x^4-4x^3+3x^2-8x+4=0 \qquad (\alpha=1)$

$10.2x(2x^2+x+3)+13x(2x^2-5x+3)=6(2x^2+x+3)(2x^2-5x+3)$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{(\underline{2x^2}-5x+\underline{3})}+\frac{13x}{(\underline{2x^2}+x+\underline{3})}=6$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2x+\frac{3}{x}-5}+\frac{13}{2x+\frac{3}{x}+1}=6$$

$11.x^6-7x^2+\sqrt{6}=0$

$\rightarrow t^3-7t+\sqrt{6}=0 \qquad (t=\sqrt{6})$

$12.x^7-2x^6+3x^5-x^4-x^3+3x^2-2x+1=0$

Phương trình hồi qui với các hệ số đối xứng và bậc lẻ nên phương trình sẽ có nghiệm đặc biệt $x=-1$ và thu được phương trình hồi qui bậc chẵn giải bằng cách chia số hạng chính giữa.

$\rightarrow (x+1)(x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1)=0$

Bài tập13:

Cho phương trình : $x^4+ax^3+x^2+ax+1=0$. Định tham số để phương trình :

1. Có bốn nghiệm phân biệt.
2. Có không ít hơn hai nghiệm âm phân biệt.

Bài tập14:

Cho phương trình : $x^4-ax^3-(2a+1)x^2+ax+1=0$. Định tham số để phương trình :

1. Có bốn nghiệm phân biệt.
2. Có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Bài tập15:

Tìm m để phương trình : $x^3-(2m+1)x^2+(3m+1)x-(m+1)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Bài tập16:

Giải và biện luận: $x^3-(2a+1)x^2+(a^2+2a)x-a^2=0$

Bài tập17:

Cho phương trình : $x^4+4x^3+(m+4)x^2+2mx+2m=0$.

1. Giải phương trình khi m = 1.
2. Giải và biện luận.

Bài tập18:

Cho phương trình : $x^4-2x^3+x+2=a$.

1. Giải phương trình khi a = 132.
2. Giải và biện luận.

Bài tập19:

Cho phương trình : $x^4-4x^3+8x+2=a$.

1. Giải phương trình khi a = 5.
2. Giải và biện luận.

Bài tập20:

Cho phương trình $mx^3-x^2-2x+8m=0$. Đinh m để:

1. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt
2. Phương trình có nghiệm bội.
3. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt bé hơn -1.

ĐỊNH LÝ VIÉT CHO PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC BẬC CAO.

Bài tập21:

Cho phương trình $x^3+3mx^2-3x-3m+2=0$

1. Xác định m để phương trình có 3 nghiệm và tổng bình phương 3 nghiệm của chúng đạt giá trị nhỏ nhất.
2. Xác định m để phương trình có 3 nghiệm lập thành một cấp số cộng.

Bài tập22: Xác định tham số để phương trình có 3 nghiệm lập thành một cấp số cộng.

$1.x^3-mx^2+2m(m+1)x+9m^2-m+0$

$2.x^3-3ax^2-x+4a^3=0$

$3.x^3-3x^2-9x-m=0$

$4.x^3-3x^2+(a-9)x+1-b=0$

Bài tập23:

Giả sử phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ có ba nghiệm x_1,x_2,x_3. Hãy tính $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$

Bài tập24:

Giả sử phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0, a,b,c\in\mathbb{Z}$ có ba nghiệm x_1,x_2,x_3. Cho f(x) là một đa thức nguyên. $CMR: f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\in\mathbb{Z}$.

Hd: Ta cm qui nạp dưa vào công thức : $S_n+aS_{n-1}+bS_{n-2}+cS_{n-3}=0$.

§.DÙNG ẨN PHỤ TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH.

A. Hiểu về ẩn phụ:

1. *Là ẩn mà do người giải tự đưa vào chứ trong đề bài không nói tới.*
2. *Ta đưa ẩn phụ vào là để chuyển dạng bài toán về dạng mới dễ nhận dạng hơn hay là dạng đã quen thuộc.*

B. Điều kiện cho ẩn phụ:

1. *Ý nghĩa, lý do:*

– *Tìm điều kiện cho ẩn phụ tức là đi tìm mxđ cho bài toán mới.*

– *Tuỳ vào mục đích của ẩn phụ mà ta tìm đk ẩn phụ như thế nào là phù hợp nhất (dễ, không gây sai bài toán).*

2. *Có hai kiểu tìm ẩn đk cho phụ:*

– *Tìm đk đúng cho ẩn phụ.*

– *Tìm thừa đk cho ẩn phụ.*

C. Một số dạng đặt ẩn phụ:

Dạng 1: Giữ nguyên số ẩn.

$1, \sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$

$2, 10\sqrt{x^3+8}=3\left(x^2-x+6\right)$

$3, \sqrt{x^3-1}=x^2+3x-1$

$4, 2\left(x^2+x+1\right)^2-7\left(x-1\right)^2=13\left(x^3-1\right)$

$5, \sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

$6, x^2+\dfrac{a^2x^2}{\left(x+a\right)^2}=8a^2$

Có một số bài toán đặc biệt rất gọn nếu dùng ẩn phụ lượng giác. Dùng ẩn phụ lượng giác tức là ta lợi dụng các công thức lượng giác để tự phá căn thức mà không dùng phép nâng luỹ thừa. Vì hàm lượng giác là hàm tuần hoàn nên ta cần lưu ý chọn miền xác định sao cho có lợi nhất.

$7, x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{a\left(1-x^2\right)}$

$8, \sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2x^2$

$9, \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{\left(1-x\right)^3}-\sqrt{\left(1+x\right)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$

$10, \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$

11, $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x$

12, $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=a, a\geq 0$

13, $\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}=x$

14, $2\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{a-x+\sqrt{x\left(a+x\right)}}$

15, $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{\left(3+x\right)\left(6-x\right)}=m; HD:\left(\frac{\sqrt{3+x}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6-x}}{3}\right)^2=1$

16, Tìm nghiệm của phương trình sau trên $\left[-1;1\right]$: $8x\left(1-2x^2\right)\left(8x^4-8x^2+1\right)=1$

17, Tìm nghiệm của phương trình sau trên $\left[0;1\right]$: $32x\left(x^2-1\right)\left(2x^2-1\right)^2=1-\frac{1}{x}$

Dạng 2: Thay đổi số ẩn, thường là tăng thêm số ẩn để giảm nhẹ sự rắc rối, đơn giản trong tính toán.

1, $\sqrt{x^2+3}+\sqrt{10-x^2}=5$

2, $\sqrt[3]{2+x+x^2}+\sqrt[3]{2-x-x^2}=\sqrt[3]{4}$

3, $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$

4, $\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}+\sqrt{\left(1+x\right)\left(8-x\right)}=3$

5, $\sqrt[3]{x-9}=\left(x-3\right)^3+6$

6, $\sqrt[4]{5-x}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{2}$

7, $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$

8, $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x}=1$

9, $\frac{\left(34-x\right)\sqrt[3]{x+1}-\left(x+1\right)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30$

10. $\frac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$

$HD: 6-x=\frac{1}{2}\left[\left(7-x\right)-\left(x-5\right)\right]$

11. $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt{x\left(x-1\right)}-2\sqrt[4]{x\left(x-1\right)}=-1$

12. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x\left(x-1\right)^2}+\sqrt[4]{\left(1-x\right)^3}=\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2\left(x-1\right)}$

13. $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$

14. $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

15. $\sqrt[3]{7+tgx}+\sqrt[3]{2-tgx}=3$

16. $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=30$

17. $\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{4}$

18. $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}=3$

19. $x\left(\dfrac{5-x}{x+1}\right)\left(x+\dfrac{5-x}{x+1}\right)=6$

20. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-1}\right)=0$

Dạng 3: Chuyển theo phương trình ẩn phụ và xem ẩn ban đầu là tham số.

1. $(x+3)\log_3^2(x+2)+4(x+2)\log_3(x+2)=16$

2. $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$

3. $4\sqrt{1+x}-1=3x+2\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}$

4. $2(x-1)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$

5. $1+x-2x^2=\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{2x+1}$

6. $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)=3x^2$

7. $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$

8. $\sqrt{\sin x}+\sin x+\sin^2 x+\cos x=1$

9. $4\left[3\sqrt{4x-x^2}\sin^2\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+2\cos(x+y)\right]=13+4\cos^2(x+y)$

10. $2x+\dfrac{x-1}{x}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-3\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=0$

Dạng 4: Chuyển về hệ phương trình gồm ẩn phụ và ẩn chính.

Dạng này hay dùng đối với phương trình chứa hai hàm số ngược nhau.

<u>Loại 1:</u> $(ax+b)^n=\alpha\sqrt[n]{px+q}+\beta x+\gamma$

1, $x^3-3\sqrt[3]{3x+2}=2$

2, $x^2+\sqrt{x+1}=1$

3, $x=5-(5-x^2)^2$

4, $x^2+2ax+\dfrac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\dfrac{1}{16}};0<a<\dfrac{1}{4}$

$$HD: y=x^2+2ax+\frac{1}{16}\rightarrow\begin{cases}y=-a+\sqrt{a^2+x-\dfrac{1}{16}}\\ x=-a\pm\sqrt{a^2+y-\dfrac{1}{16}}\end{cases}$$

5, $3+\sqrt{3+\sqrt{x}}=x$

6, $x^2+\sqrt{x+5}=5$

7, $x=a-b\left(a-bx^2\right)^2$

8, $x^2+\sqrt{x+a}=a$

9, $3x^2+x-\frac{29}{6}=\sqrt{\frac{12x+61}{36}}$

$3x^2+x-\frac{29}{6}=\sqrt{\frac{12x+61}{36}}\Leftrightarrow 18x^2+6x-29=\sqrt{12x+61}$

Vì $f(x)=18x^2+6x-29 \Rightarrow f'(x)=6(6x+1)\rightarrow$ Đặt $\sqrt{12x+61}=6y+1$

10, $x^2-x-2004\sqrt{1+16032x}=2004$

(Thi chọn HSG Bắc Giang năm học 2003 – 2004).

Xét hàm số f(x) = x^2 – x – 2004 => f'(x) = 2x – 1. Đặt $\sqrt{1+16032x}=2t-1, t\ge\frac{1}{2}$

Ta có hệ PT sau: $\begin{cases} t^2-t=4008x \\ x^2-x=4008t \end{cases}$

11, $\sqrt[3]{3x-\frac{63}{8}}=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x$

$\sqrt[3]{3x-\frac{63}{8}}=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x\Leftrightarrow\sqrt[3]{24x-63}=\frac{2}{3}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x$

Xét hàm số f(x) = $\frac{2}{3}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x\Rightarrow f'(x)=2x^2-6x+\frac{9}{2}\Rightarrow f''(x)=4x-6$

Đặt $\sqrt[3]{24x-63}=2y-3$

12,(Toán học và Tuổi trẻ Tháng 6 năm 2001) Giải PT sau:

$$\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2$$

Xét hàm số f(x) = $x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2$ => f'(x) = 3x^2 – 4x + 4/3

=> f''(x) = 6x – 4. Đặt $\sqrt[3]{81x-8}=3y-2$

13) $x^2=\sqrt{2-x}+2$

14) $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$

15) $x^3+2=3\sqrt[3]{3x-2}$

16) $\sqrt{3x+1}=-4x^2+13x-5$

17) $\sqrt{x+1}=x^2+4x+5$

18) $\sqrt{\frac{4x+9}{28}}=7x^2+7x$

19) $\sqrt{9x-5}=3x^2+2x+3$

Các phương trình kể trên là các phương trình đối xứng, tuy nhiên hai ví dụ sau cũng cần nghiên cứu.

$20, 4x^2+\sqrt{3x+1}+5=13x$

$\Leftrightarrow (2x-3)^2=-\sqrt{3x+1}+x+4$

Đặt $-\sqrt{3x+1}=2y-3 \to \begin{cases}(2x-3)^2=2y+x+1\\(2y-3)^2=3x+1\end{cases}$

$21, 8x^3+53x=36x^2+\sqrt[3]{3x-5}+5$

$\Leftrightarrow (2x-3)^3=\sqrt[3]{3x-5}+x-2$

Đặt $\sqrt[3]{3x-5}=2y-3 \to \begin{cases}(2x-3)^3=2y+x-5\\(2y-3)^3=3x-5\end{cases}$

<u>Loại 2:</u> $a^{\alpha x+\beta}=b\log_a(px+q)+cx+d$

PP: Đặt: $\log_a(px+q)=\alpha y+\beta$

$22, 7^x=2\log_7(6x+1)^3+1$

$23, 3^x=1+x+\log_3(1+2x)$

$24, \left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}=\cos 2x+\log_4(3\cos 2x-1)$

§. PHƯƠNG PHÁP "MÒ" NGHIỆM

$1, \sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}+x^2=\frac{1}{x+1}+2$

VT đồng biến, VP nghịch biến $\Rightarrow$ có không quá một nghiệm.

"Mò" $x=0$ là một nghiệm.

$2, \left(\sqrt{3}\right)^x-2^{x-1}=2$

Lập bảng biến thiên $\Rightarrow$ có không quá hai nghiệm.

"Mò" $x=2, x=4$ là nghiệm.

$3, \frac{(x-a)(x-b)}{c(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{a(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{b(b-c)(b-a)}=\frac{1}{x}$

Trong đó a, b, c là ba số khác nhau và khác không.

Pt bậc 3 nên có không quá 3 nghiệm.

"Mò" có ba nghiệm a, b, c.

$4, (a^2-a)^2(x^2-x+1)^3=(a^2-a+1)^3(x^2-x)^2$

Xét TH đặc biệt

TQ: Pt bậc 6 nên có không quá 6 nghiệm.

NX: Nếu x_0 là nghiệm thì $\frac{1}{x_0}\&1-x_0$ cũng là nghiệm, do đó $\frac{1}{1-x_0},1-\frac{1}{x_0},\frac{1}{1-\frac{1}{x_0}}$ cũng là nghiệm. Dễ thấy a là một nghiệm.

$5, 2x+\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}<35$

$6, x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$

Mò được nghiệm $x=3$ nên ta sẽ phân tích ra thừa số chung $(x-3)$.

$\Leftrightarrow \frac{x^3-3x^2-8x+40}{8}=\sqrt[4]{4x+4}$

$\Leftrightarrow \frac{x^3-3x^2-8x+40}{8}-2=\sqrt[4]{4x+4}-2$

$7, x^5+x^3-\sqrt{1-3x}+4=0$

$8, \sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

$9, \sqrt{x+1}+\sqrt[3]{5x-7}+\sqrt[4]{7x-5}+\sqrt[5]{13x-7}<8$

$10, 5^x+4^x+3^x+2^x=\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{6^x}-2x^3+5x^2-7x+17$

§. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Phương pháp này hay dùng trong phương trình có nhiều ẩn, có nhiều loại hàm số, biểu thức phức tạp.

$1, \frac{\tan^2 x+\tan^2 y}{1+\tan^2 x+\tan^2 y}=\sin^2 x+\sin^2 y$

Đặt $a=\tan^2 x, b=\tan^2 y \Rightarrow a,b\ge 0$

Trở thành: $\frac{a+b}{1+a+b}=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

Ta có: $\begin{cases}\frac{a}{1+a+b}\le\frac{a}{1+a}\\ \frac{b}{1+a+b}\le\frac{b}{1+b}\end{cases}\Rightarrow \frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}\le\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

$2, \sqrt{5\left(x^2+2yz\right)}+\sqrt{6\left(y^2+2zx\right)}+\sqrt{5\left(z^2+2xy\right)}=4\left(x+y+z\right)$

Xét 2 vector $\vec{a}=\left(\sqrt{5};\sqrt{6};\sqrt{5}\right),\vec{b}=\left(x^2+2yz;y^2+2zx;z^2+2xy\right)$ Khi đó,

$$VT=\vec{a}.\vec{b};VP=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$$

$3, \frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}=28-4\sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}$

Dùng CauChy.

$4; \sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = 3$

$*) \sqrt[4]{1-x^2} \le 1$

$$*) \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} \le \frac{1+\sqrt{1-x}}{2} + \frac{1+\sqrt{1+x}}{2} \le \frac{1+\frac{1+1-x}{2}}{2} + \frac{1+\frac{1+1+x}{2}}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt[4]{1-x} = \sqrt[4]{1+x} = 1 \\ \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

$5; \tan^4 x + \tan^4 y + 2\cot^2 x.\cot^2 y = 3 + \sin^2(x+y)$

$VT \ge 2\tan^2 x.\tan^2 y + 2\cot^2 x.\cot^2 y \ge 4\tan x.\tan y.\cot x.\cot y = 4$

$VP \le 3 + 1 = 4$

$$\rightarrow \begin{cases} \tan^2 x = \tan^2 y \\ \tan x.\tan y = \cot x.\cot y \\ \sin^2(x+y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan^2 x = \tan^2 y \\ \tan x.\tan y = \dfrac{1}{\tan x.\tan y} \\ \sin^2(x+y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan^2 x = \tan^2 y \\ \tan^2 x.\tan^2 y = 1 \\ \sin^2(x+y) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan^2 x = 1 \\ \tan^2 y = 1 \\ \cos^2(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{4} + l\dfrac{\pi}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{4} + (2m-k)\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \text{(bằng cách rút } l \text{ theo } m,k\text{)}$$

$6;$ Tìm m để $\sqrt{(4+x)(6-x)} \le x^2 - 2x + m, \forall x \in [-4;6]$

Đkc $: x = 1 \rightarrow m \ge 6$

Đkđ $: gs\ m \ge 6,$

$$*) \sqrt{(4+x)(6-x)} \le \frac{4+x+6-x}{2} = 5$$

$*) x^2 - 2x + m = (x-1)^2 + m - 1 \ge 5$

$7;\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

$*)\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(x-2+4-x\right)}=2$

$*)x^2-6x+11=\left(x-3\right)^2+2\ge 2$

$8;\sqrt{x-1}+x-3\ge\sqrt{2\left(x-3\right)^2+2x-2}$

$*)\sqrt{x-1}+x-3\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left[\left(x-1\right)+\left(x-3\right)^2\right]}$

$\Rightarrow\sqrt{x-1}=x-3$

$9;\sin x-2\sin 2x-\sin 3x=2\sqrt{2}$

$*)\sin x-2\sin 2x-\sin 3x=-2\cos 2x.\sin x-2\sin 2x$

$$\le\sqrt{\left[\left(-2\cos 2x\right)^2+\left(-2\sin 2x\right)^2\right]\left(\sin^2 x+1\right)}\le 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\dfrac{-2\cos 2x}{\sin x}=\dfrac{-2\sin 2x}{1}\\ \sin^2 x=1\end{cases}\rightarrow vn_0$$

$10,x^2=2x^8+\dfrac{3}{8}$

$*)Nn_0:x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$*)2x^8+\dfrac{1}{8}\ge x^4$

$*)x^4+\dfrac{1}{4}\ge x^2$

$11,x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

$*)x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}\le\left(3x+3\right)+1\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2\le 0\Leftrightarrow x=-1$

$12,8x^2+\sqrt{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{5}{2}$

$*)Nn_0:x=\dfrac{1}{4}$

$*)8x^2+\sqrt{\dfrac{1}{x}}=8x^2+\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{1}{x}}\ge\dfrac{5}{2}$

$13,\sqrt{x^2-4x+9}+\sqrt{x^2+4x+9}=6$

$*)VT\ge 2\sqrt[4]{\left(x^2-4x+9\right)\left(x^2+4x+9\right)}=2\sqrt[4]{x^4+2x^2+81}\ge 2\sqrt[4]{81}=6$

$14, \sqrt[3]{25x\left(2x^2+9\right)} = 4x + \dfrac{3}{x}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{25x^4\left(2x^2+9\right)} = 4x^2+3$

$*) VT \le \dfrac{5x^2+5x^2+\left(x^2+9\right)}{3} = VP$

$15, \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}$

$*) VT = 2\sqrt{2}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \le \left(8+x+1\right)\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{x+1}\right) = VP$

$16, \sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x} - x\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(7x^2-x+4\right)$

$*) VT \le \sqrt{\left(1^2+1^2+x^2\right)\left(3x^2-1+x^2-x+x^2+1\right)} = \sqrt{\left(x^2+2\right)\left(5x^2-x\right)}$

$*) VP = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\left[2\left(x^2+2\right)+\left(5x^2-x\right)\right]}{2} \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\left(x^2+2\right)\left(5x^2-x\right)} = \sqrt{\left(x^2+2\right)\left(5x^2-x\right)}$

$17, \sqrt{x^2-2x+5} - \sqrt{x^2-6x+10} = \sqrt{5}$

$*) VT = \sqrt{\left(x-1\right)^2+2^2} - \sqrt{\left(x-3\right)^2+1^2} \le \sqrt{\left[\left(x-1\right)-\left(x-3\right)\right]^2+\left[2-1\right]^2} = \sqrt{5}$

$*) \left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

$18, \left(3-x\right)\sqrt{x-1} + \sqrt{5-2x} = \sqrt{40-34x+10x^2-x^3}$

$*) VT \le \sqrt{\left[\left(3-x\right)^2+1^2\right]\left[\left(\sqrt{x-1}\right)^2+\left(\sqrt{5-2x}\right)^2\right]} = VP$

$*) \vec{a}.\vec{b} \le \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$

$19, \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+5} = \sqrt{y-1}+\sqrt{y-3}+\sqrt{y-5} \\ x+y+x^2+y^2 = 80 \end{cases}$

$*) pt\left(1\right) \Leftrightarrow x = y-6$

$20, \begin{cases} x^4+y^2 = \dfrac{697}{81} \\ x^2+y^2+xy-3x-4y+4 = 0 \end{cases}$

*) Xét phương trình hai. Nếu xem là phương trình ẩn x thì ta được $0 \le y \le \frac{7}{3}$, còn ngược lại nếu xem là phương trình ẩn y thì ta lại được $0 \le x \le \frac{4}{3}$

*) $x^4 + y^2 \le \left(\frac{4}{3}\right)^4 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = VP$

§. LƯỢNG LIÊN HỢP.

$1,(x+3)\sqrt{2x^2+1} = x^2 + x + 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = \frac{x^2+x+3}{x+3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} - 1 = \frac{x^2+x+3}{x+3} - 1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+1\right) = \frac{x^2}{x+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+1\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2 = \frac{x^2}{x+3}\left(\sqrt{2x^2+1}+1\right)$

$2,(3x+1)\sqrt{x^2+3} = 3x^2 + 2x + 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = \frac{3x^2+2x+3}{3x+1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+3} - 2x = \frac{3x^2+2x+3}{3x+1} - 2x \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases}$

$P^2 : \sqrt{x^2+3} - (\alpha x + \beta) = \frac{3x^2+2x+3}{3x+1} - (\alpha x + \beta)$

$3;(x+3)\sqrt{x^2+x+2} = x^2 + 3x + 4$

$4;(x+1)\sqrt{x+8} = x^2 + x + 4$

$5;(2x+1)\sqrt{x^2+3} = 3x^2 + x + 2$

$6;\sqrt{x-3} = x - \frac{4}{3} - \frac{20}{3x}$

$7;(3x+1)\sqrt{x^2+x+2} = 3x^2 + 3x + 2$

$8; \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

$9; \sqrt{x + 3} = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{7}{2x} + 5$

§. HOÁN ĐỔI VAI TRÒ CỦA ẨN SỐ VÀ THAM SỐ.

$1; x^4 - 10x^3 - 2(a-1)x^2 + 2(5a+6)x + 2a + a^2 = 0$

$2; x^3 - (4a+3)x^2 + 4a(a+2)x - 4(a^2 - 1) = 0$

§. THAM SỐ HÓA CHO PHƯƠNG TRÌNH

PP tham số hóa cho một phương trình là đưa vào phương trình một tham số nào đó. Có hai dạng chính sau:

Dạng 1: Chọn một hằng số phù hợp và tham số hóa nó, sau đó hoán đổi vai trò của ẩn số và tham số để giải.

$1, x^3 + \dfrac{\sqrt{68}}{x^3} = \dfrac{15}{x}$

$\Leftrightarrow x^3 + \dfrac{2\sqrt{17}}{x^3} = \dfrac{17-2}{x}$

Chọn $\sqrt{17}$ làm tham số. Khi đó ta xét phương trình sau:

$$x^3 + \frac{2m}{x^3} = \frac{m^2 - 2}{x} \Leftrightarrow x^2m^2 - 2m - x^6 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -x^2 \\ m = \dfrac{x^4+2}{x^2} \end{array}\right.$$

Do đó phương trình đã cho tương đương với $\left[\begin{array}{l} -x^2 = \sqrt{17} \\ \dfrac{x^4+2}{x^2} = \sqrt{17} \end{array}\right.$

$2, x^4 + x^3 - 2x^2 - 15x + 25 = 0$

$3, x + \sqrt{11 + \sqrt{x}} = 11 \Leftrightarrow (11 - x)^2 = 11 + \sqrt{x}$

Dạng 2: Mượn tham số trong định lý Lagrange.

$4, x^{\log_3 7} = 2^{\log_3 x} + \log_3 x^5$

$\Leftrightarrow 7^{\log_3 x} = 2^{\log_3 x} + 5\log_3 x$

$\Leftrightarrow 7^{\log_3 x} - 7\log_3 x = 2^{\log_3 x} - 2\log_3 x$

Gs số dương α nào đó là nghiệm của phương trình đã cho. Khi đó ta có

$$7^{\log_3 \alpha} - 7\log_3 \alpha = 2^{\log_3 \alpha} - 2\log_3 \alpha$$

Xét hàm số $f(t) = t^{\log_3 \alpha} - t\log_3 \alpha$. Vì $f(t)$ có đạo hàm trên $[2;7]$ nên theo định lý Lagrange ta có: $\exists m \in (2;7): f'(m) = \dfrac{f(7) - f(2)}{7 - 2}$

$$\Rightarrow f'(m)=0 \Leftrightarrow \log_3\alpha.m^{\log_3\alpha-1}-\log_3\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3\alpha=0\\ m^{\log_3\alpha-1}-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=1\\ \alpha=3\end{array}\right.$$

Thử lại ta có tập nghiệm của pt đã cho là $S=\{1;3\}$

$$5,7^{\cot x}-11^{\cot x}=12\cot x \Leftrightarrow 7^{\cot x}-11^{\cot x}=3(11-7)\cot x \Leftrightarrow 7^{\cot x}+3.7\cot x=11^{\cot x}+3.11\cot x$$

$$\to f(t)=t^{\cot\alpha}+3t\cot\alpha$$

$$6,\frac{1}{2^x}-\frac{1}{3^x}=\left(\frac{5}{14}\right)^x-\left(\frac{4}{21}\right)^x$$

$$NX:\begin{cases}\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{14}+\dfrac{1}{7}\\ \dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{21}+\dfrac{1}{7}\end{cases}$$

$$\to f(t)=\left(t+\frac{1}{7}\right)^\alpha-t^\alpha$$

$$7,2^{\log_5 x^3}+2^{\log_5 x^2}=x+x^{\log_5 7}$$

$$\Leftrightarrow 8^{\log_5 x}+4^{\log_5 x}=x+7^{\log_5 x}$$

$$\Leftrightarrow 8^{\log_5 x}+4^{\log_5 x}=5^{\log_5 x}+7^{\log_5 x}$$

$$\Leftrightarrow 8^{\log_5 x}-5^{\log_5 x}=7^{\log_5 x}-4^{\log_5 x}$$

$$\to f(t)=(t+3)^{\log_5\alpha}-t^{\log_5\alpha}$$

$$8,x^{\log_7 11}+3^{\log_7 x}=2x$$

§. PHÂN TÍCH HỢP LÝ.

$$1,\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{2x}=\frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}}-1=-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{2x}+\frac{7}{4}=-2\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{3}{4}=-2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{4}\right)$$

Ta phân tích sao để tam thức bậc hai có nghiệm đặc biệt.

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=-2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x}{\sqrt{x-1}\left(1+\sqrt{x-1}\right)}=-2\frac{2-x}{2x}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{4}\right)$$

$$2,\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}+\frac{x^2}{2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+2$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}-1\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-3}{(x+4)\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}}+1\right)}+\frac{x^2-3}{2}=\frac{3-x^2}{2\sqrt{x^2+1}\left(2+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$3;x^3-3x^2+3(a+1)x-(a+1)^3=0$$

$$\frac{-(a+1)^3}{1}=\left[\frac{3(a+1)}{-3}\right]^3\Rightarrow cn_0\quad x=-\frac{3(a+1)}{-3}$$

$$4;x^3-3x^2+3(a+1)x-(a+1)^2=0$$

gần giống của khai triển $(a-b)^3$

$$\to(a+1)x^3-3x^2(a+1)+3(a+1)^2x-(a+1)^3=0$$

$$\to ax^3+\left[x^3-3x^2(a+1)+3(a+1)^2x-(a+1)^3\right]=0$$

$$\to ax^3+\left[x-(a+1)\right]^3=0$$

$$5;x^8-x^5+x^2-x+1=0$$

Không nhẩm nghiệm vì bậc quá cao và nghiệm hữu tỷ của pt chỉ có thể là ±1. Ta sẽ phân tích thành tổng các bình phương.

$$*)x^8-x^5\to\left(x^4-\frac{x}{2}\right)^2$$

$$*)-x+1\to\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$$

$$\to x^8-x^5+x^2-x+1=\left(x^4-\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}-1\right)^2+\frac{x^2}{2}$$

$$6;\cos x-3\sqrt{3}\sin x=\cos 7x$$

$$\Leftrightarrow\cos x-\cos 7x-3\sqrt{3}\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x.\sin 3x-3\sqrt{3}\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x.\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)-3\sqrt{3}\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 2\sin 4x + 4\sin 4x.\cos 2x = 3\sqrt{3}\,(*)\end{array}\right.$$

$$(*) \Leftrightarrow \sin 2x.\cos 2x + \sin 4x.\cos 2x = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Ta có: $\cos^2 2x + \sin^2 4x = \cos^2 2x\left[1 + 4\sin^2 2x\right]$

$$= \frac{1}{4}.4\cos^2 2x\left[1 + 4\sin^2 2x\right] \le \frac{1}{4}.\left(\frac{4\cos^2 2x + 1 + 4\sin^2 2x}{2}\right)^2 = \frac{25}{16} < \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 \to ptvn_o$$

7; $(1 + \cos x)\left(2 + 4^{\cos x}\right) = 3.4^{\cos x}$

Đặt $t = \cos x, -1 \le t \le 1$

$$\to (1 + t)\left(2 + 4^t\right) = 3.4^t \Leftrightarrow \frac{3.4^t}{2 + 4^t} - (1 + t) = 0$$

Đặt $f(t) = \dfrac{3.4^t}{2 + 4^t} - (1 + t) \to f'(t) = \dfrac{6.\ln 4.4^t}{\left(2 + 4^{t2}\right)} - 1$

$f'(t) = 0$ có không quá hai nghiệm nên $f(t) = 0$ có không quá ba nghiệm.

$t = 0; t = 1; t = \dfrac{1}{2}$ là ba nghiệm.

8; $\dfrac{1}{2^{-x} + \dfrac{1}{2}} + \dfrac{2}{2^{x-1} - 1} \le \dfrac{2a}{2^{x-1} + 2^{1-x}}$

a) Giải khi $a = 4$

b) Tìm a để bpt có ít nhất hai nghiệm trong đó có một nghiệm nhỏ hơn 1, một nghiệm lớn hơn 1.

$$\frac{1}{2^{-x} + \frac{1}{2}} + \frac{2}{2^{x-1} - 1} \le \frac{2a}{2^{x-1} + 2^{1-x}} \Leftrightarrow \frac{2}{2^{1-x} + 1} + \frac{2}{\left(2^{x-1} - 1\right)} \le \frac{2a}{2^{x-1} + 2^{1-x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{x-1} + 2^{1-x}}{\left(2^{1-x} + 1\right)\left(2^{x-1} - 1\right)} \le \frac{a}{2^{x-1} + 2^{1-x}} \Leftrightarrow \frac{\left(2^{x-1} + 2^{1-x}\right)^2}{\left(2^{1-x} + 1\right)\left(2^{x-1} - 1\right)} \le a$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left[\left(2^{1-x} + 1\right) + \left(2^{x-1} - 1\right)\right]^2}{\left(2^{1-x} + 1\right)\left(2^{x-1} - 1\right)} \le a$$

$$a)\ \ a = 4 \to \frac{\left[\left(2^{1-x} + 1\right) + \left(2^{x-1} - 1\right)\right]^2}{\left(2^{1-x} + 1\right)\left(2^{x-1} - 1\right)} \le 4$$

$TH:\left(2^{x-1}-1\right)<0 \Leftrightarrow x<1 \to VT<0 \to$ luôn đúng.

$$TH:\left(2^{x-1}-1\right)>0 \Leftrightarrow x>1 \to VT \ge 4 = VP\left[\frac{(a+b)^2}{ab} \ge 4, \forall ab>0\right]$$

$b)$Đkc: để có một nghiệm $x>1 \;\to a \ge 4$

Đkđ: Khi thì bpt thỏa yc bt.

$9; \log_2 \log_2 x = \log_3 \log_3 x$

Đk $x>1$

Đặt $t=\log_2 \log_2 x \to \begin{cases} \log_2 \log_2 x = t \\ \log_3 \log_3 x = t \end{cases} \to \begin{cases} x = 2^{2^t} \\ 2^{2^t} = 3^{3^t} \end{cases} \to \begin{cases} 2^t = 3^t \log_2 3 \\ x = 2^{2^t} \end{cases}$

$$\to \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^t = \log_2 3 \\ x = 2^{2^t} \end{cases} \to x = 2^{2^{\log_{\frac{2}{3}} \log_2 3}}$$

$10; \log_2 x + \log_3 x + \log_5 x = \log_2 x.\log_3 x.\log_5 x$

Đk: $x>0$

$$\to \log_5 x\left(\log_2 5 + \log_3 5 + 1\right) = \log_2 x.\log_3 x.\log_5 x$$

$$\to \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 0 \\ \log_2 5 + \log_3 5 + 1 = \log_2 x.\log_3 x = \log_2 3\left(\log_3 x\right)^2 \end{array}\right.$$

$$\to \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \log_3 x = \pm\sqrt{\dfrac{\log_2 5 + \log_3 5 + 1}{\log_2 3}} \end{array}\right.$$

$11; \log_2 \log_3 \log_4 x = \log_4 \log_3 \log_2 x$

Đk: $x>4$

$$\to \log_4\left(\log_3 \log_4 x\right)^2 = \log_4 \log_3 \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_3 \log_4 x\right)^2 = \log_3 \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_3 \log_4 x\right)^2 = \log_3\left(2\log_4 x\right) = \log_3 2 + \log_3 \log_4 x$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_3 \log_4 x\right)^2 - \left(\log_3 \log_4 x\right) - \log_3 2 = 0$$

$\Leftrightarrow \left(\log_3 \log_4 x\right) = \dfrac{1+\sqrt{1+4\log_3 2}}{2}$, lưu ý đk $x>4 \;\to \left(\log_3 \log_4 x\right) > 0$

$12; x^{\log_{x+1}(x-1)} + (x-1)^{\log_{x+1} x} \le 2$

Đk: $x > 1$.

Lưu ý: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$13; x^{\log_2(4x)} \ge 8x^2$

Đk: $x > 0$

Lấy logrit cơ số 2 hai vế $\to \log_2(4x).\log_2 x \ge \log_2(8x^2)$

$14; \log_2 x + \log_3(x+1) = \log_4(x+2) + \log_5(x+3)$

Đk: $x > 0$

$$*)x > 2 \to \begin{cases} \dfrac{x}{2} > \dfrac{x+2}{4} > 1 \\ \dfrac{x+1}{3} > \dfrac{x+3}{5} > 1 \end{cases} \to \begin{cases} \log_2 \dfrac{x}{2} > \log_2 \dfrac{x+2}{4} > \log_4 \dfrac{x+2}{4} \\ \log_3 \dfrac{x+1}{3} > \log_3 \dfrac{x+3}{5} > \log_5 \dfrac{x+3}{5} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \log_2 x > \log_4(x+2) \\ \log_3(x+1) > \log_5(x+3) \end{cases}$$

$*)x < 2 \quad tt$

$*)x = 2$ là n_o

$15; 2x^2 - 6x + 2 = \log_2 \dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$

Đk: $-\dfrac{1}{2} < x \ne 1$

$\to 2x^2 - 6x + 2 = \log_2(2x+1) - \log_2(x-1)^2$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 - (2x+1) + 1 = \log_2(2x+1) - \log_2(x-1)^2$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 - (2x+1) = \log_2(2x+1) - \log_2 2(x-1)^2$

$\Leftrightarrow \left[2(x-1)^2 + \log_2 2(x-1)^2\right] = \left[(2x+1) + \log_2(2x+1)\right]$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2 = (2x+1)$, vì hàm số $f(t) = t + \log_2 t$ đồng biến.

§. MỘT SỐ BÀI VỀ HỆ ĐỐI XỨNG, ĐẲNG CẤP.

$1; \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2xy + z^2 = 1 \end{cases}$ xem z là tham số.

$2;\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=\dfrac{-3}{4} \\ xyz=\dfrac{1}{8} \end{cases}$, đây là hệ đối xứng ba ẩn cơ bản

$3;\begin{cases} x+_1+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}$ $4;\begin{cases} y^2-3y=x^2+1 \\ x^2-3x=y^2+1 \end{cases}$ $5;\begin{cases} x^3+4x=y+\dfrac{3}{2} \\ y^3+4y=x+\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$6;\begin{cases} x^2+xy-y^2=5 \\ \dfrac{y}{x}-\dfrac{2x}{y}=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{xy} \end{cases}$ $7;\begin{cases} x(x-y)\le y(x+y) \\ 2x^2+y^2-3xy=1 \end{cases}$

§. PHƯƠNG PHÁP THAM BIẾN

$1;\begin{cases} x+y\le 1 \\ x^2+y^2+xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1-a, a\ge 0 \\ x^2+y^2+xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1-a, a\ge \\ xy=(1-a)^2-1 \end{cases}$

$\text{Đkcn}_0 \to 0\le a\le 1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Hệ có nghiệm: $\begin{cases} x=\dfrac{a-1-\sqrt{4-3(1-a)^2}}{2} \\ y=\dfrac{a-1+\sqrt{4-3(1-a)^2}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=\dfrac{a-1+\sqrt{4-3(1-a)^2}}{2} \\ y=\dfrac{a-1-\sqrt{4-3(1-a)^2}}{2} \end{cases}; 0\le a\le 1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$2;\begin{cases} x^2+y^2\le xy+1 \\ x^2+y^2\le 4xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=xy+1+a \\ x^2+y^2=4xy+b \end{cases}, a\le 0, b\le 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{4a+4-b}{3} \\ 2xy=\dfrac{2a+2-2b}{3} \end{cases}, a\le 0, b\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=2a+2-b \\ (x-y)^2=\dfrac{2a+2+b}{3} \end{cases}, a\le 0, b\le 0$

$\text{Đkcn}_o \to \begin{cases} a\le 0, b\le 0 \\ 2a+2-b\ge 0 \\ \dfrac{2a+2+b}{3}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-\dfrac{b}{2}\le a\le 0 \\ -2\le b\le 0 \end{cases}$

3; Tìm gtnn, gtln của $P(x,y)=x^2+y^2-xy$, biết x, y thỏa: $\begin{cases} x+y\le 2 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$

Ta viết lại điều kiện: $\begin{cases} x+y=2-a \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}, a\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2-a \\ xy=(2-a)^2-3 \end{cases}$

Đk$\exists(x,y)\to 0\le a\le 4$

Khi đó: $P(x,y)=9-2(a-2)^2$

$maxP(x,y)=9, khi\ a=2\to \begin{cases} x+y=0 \\ xy=-3 \end{cases} \to \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

$\min P(x,y)=1, khi\ a=0\to \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \to \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

§. HỆ BẬC HAI TỔNG QUÁT.

Sau đây ta sẽ trình bày một pp tổng quát để giải hệ bậc hai tổng quát.
Ta dựa vào nhận xét rằng: Nghiệm của hệ bất kỳ được chia làm hai nhóm: $(0;y)$ và $(x;tx), x\ne 0$.

1; $\begin{cases} x^2+y^2+x-2y=2 \\ x^2+y^2+2(x+y)=11 \end{cases}$

*) Ta tìm nghiệm dạng: $(0;y)$.

Ta có: $\begin{cases} y^2-2y=2 \\ y^2+2y=11 \end{cases} \to vn_o$ Tức hệ không có nghiệm dạng $(0;y)$.

*) Ta tìm nghiệm dạng $(x;tx), x\ne 0$:

Ta có, $\begin{cases} (1+t^2)x^2+(1-2t)x=2 \\ (1+t^2)x^2+2(1+t)x=11 \end{cases}$

Ta xem là hệ tuyến tính theo hai ẩn x^2 và x.

$D=(1+t^2)(4t+1)$

$D_x=9(1+t^2)$

$D_{x^2}=26t-7$

*)$t=-\frac{1}{4}$ hệ vô nghiệm, điều đó có nghĩa là hệ đã cho không có nghiệm dạng $\left(x;-\frac{1}{4}x\right)$

*)$t\ne -\frac{1}{4}\to x=\frac{9}{4t+1}; x^2=\frac{26t-7}{(1+t^2)(4t+1)} \Rightarrow \frac{26t-7}{(1+t^2)(4t+1)}=\left(\frac{9}{4t+1}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\frac{44}{23} \end{array}\right.$

Đến đây ta hiểu rằng hệ đã cho chỉ có nghiệm dạng

$(a;2a)$ và $\left(b;-\frac{44}{23}b\right)$ với $ab\neq 0$ mà thôi.

$$t=2\to\begin{cases}x=\frac{9}{4.2+1}=1\\ y=2x=2\end{cases};t=-\frac{44}{23}\to\begin{cases}x=\frac{-23}{17}\\ y=\frac{44}{17}\end{cases}$$

$$2;\begin{cases}x^2+y^2-4x+2y=-3\\ x^2-xy+y^2+x-2y=12\end{cases}$$

3; Chứng minh rằng $\forall m\in\left[-1;\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{3}\right]$ thì hệ sau luôn có nghiệm: $\begin{cases}x^2+y^2+xy\le 1\\ x^2+xy+x+y=m\end{cases}$

*) Ta tìm xem khi nào thì hệ có nghiệm dạng: $(0;y)$.

Ta có: $\begin{cases}y^2\le 1\\ y=m\end{cases}\Rightarrow m^2\le 1\Leftrightarrow -1\le m\le 1$. Tức với $-1\le m\le 1$ thì hệ có nghiệm (cụ thể là $(0;m)$).

*) Ta tìm xem khi nào hệ có nghiệm dạng: $(x;x)$.

Ta có: $\begin{cases}3x^2\le 1\\ 2x^2+2x=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{3}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 2x^2+2x=m(*)\end{cases}$ Ta cần tìm m để pt (*) có nghiệm trong đoạn $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Dùng khảo sát hàm số ta sẽ có: $-\frac{1}{2}\le m\le\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{3}$. Tức với $-\frac{1}{2}\le m\le\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{3}$ thì hệ đã cho có nghiệm dạng $(x;x)$.

Từ các kết quả trên ta có đpcm.

4; Định m để hệ có nghiệm. $\begin{cases}x^2-xy+2y^2-x\le m\\ x^2-2xy-2x\le m-2\end{cases}$

Ta có:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-xy+2y^2-x\le m\\ x^2-2xy-2x+2\le m\\ 2\left(x^2-xy+2y^2-x\right)+\left(x^2-2xy-2x+2\right)\le 3m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-xy+2y^2-x\le m\\ x^2-2xy-2x+2\le m\\ (x-2y)^2+2(x-1)^2\le 3m\end{cases}$$

Nếu $m<0$ hệ vô nghiệm.

Nếu $m\ge 0$, ta thấy (3) luôn đúng với mọi $m\ge 0$ tại $\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Thử lại cụ thể ta thấy $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ là một nghiệm của hệ đã cho khi $m\ge 0$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm khi $m \geq 0$.

§. HỆ CHỨA CĂN THỨC.

1; $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{y+5}+\sqrt{y}\right)=13 \\ \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{y+5}-\sqrt{y}\right)=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{y+5}+\sqrt{y}\right)=13 \\ \dfrac{5}{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)}+\dfrac{5}{\left(\sqrt{y+5}+\sqrt{y}\right)}=3 \end{cases}$$

2; $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{2-y}=a \\ \sqrt{2-x}+\sqrt{y+1}=a \end{cases}$

ĐK: $-1 \leq x, y \leq 2$

$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{2-y}=a \\ \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}\right)+\left(\sqrt{2-y}-\sqrt{2-x}\right)=0 \end{cases}$ Nhân lượng liên hợp để rút đại lượng chung là $(x-y)$

3; $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y+2}=7 \\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}=7 \end{cases}$

ĐK: $\begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ y \geq -\dfrac{1}{3} \\ x+y \geq 0 \\ x+2y+2 \geq 0 \end{cases}$

$NX: (x+y)+(x+2y+2)=(2x+1)+(3y+1)$

Bình phương hai vế: $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}=7 \\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y+2} \\ \sqrt{2x+1}.\sqrt{3y+1}=\sqrt{x+y}.\sqrt{x+2y+2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}=7 \\ \sqrt{2x+1}=\sqrt{x+y} \\ \sqrt{3y+1}=\sqrt{x+2y+2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}=7 \\ \sqrt{2x+1}=\sqrt{x+2y+2} \\ \sqrt{3y+1}=\sqrt{x+y} \end{cases} \end{array}\right.$$

4; Xác định a để hệ có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y}\le a\\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x}\le a\end{cases}$$

ĐK: $x\ge 0, y\ge 0.$

*)$a<1,$ hệ vô nghiệm.

*)$a=1,$ hệ có nghiệm duy nhất.

*)$a>1,$ hệ có vô số nghiệm dạng $(0;t), 0\le t\le (a-1)^2$

$$5;\begin{cases}\sqrt{x}+2\sqrt[4]{y}=1\\ x+2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[4]{y}=\dfrac{1-\sqrt{x}}{2}\\ y=\dfrac{1-x}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ y=\dfrac{1-x}{2}\\ \dfrac{1-x}{2}=\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{2}\right)^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ y=\dfrac{1-x}{2}\\ \dfrac{1-x}{2}=\left(\dfrac{1-x}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}\right)^4\end{cases}$$

$$6;\begin{cases}\sqrt{xy}+\sqrt{1-y}\le\sqrt{y}\\ 2\sqrt{xy-y}-\sqrt{y}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le y\le 1\\ x\ge 1\\ \sqrt{xy}+\sqrt{1-y}\le\sqrt{y}\\ 2\sqrt{xy-y}-\sqrt{y}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0< y\le 1\\ x\ge 1\\ \sqrt{xy}+\sqrt{1-y}\le\sqrt{y}\\ 2\sqrt{xy-y}-\sqrt{y}=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0< y\le 1\\ x\ge 1\\ \sqrt{x}+\sqrt{\dfrac{1-y}{y}}\le 1\\ 2\sqrt{xy-y}-\sqrt{y}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0< y\le 1\\ x\ge 1\\ \sqrt{x}=1;\sqrt{\dfrac{1-y}{y}}=0\\ 2\sqrt{xy-y}-\sqrt{y}=-1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$$

$$7;\begin{cases}x\le\sqrt{y^2+y+1}\\ x-y^4-2y^3-y^2=1\end{cases}\Rightarrow y^4+2y^3+y^2+1\le\sqrt{y^2+y+1}\Leftrightarrow\left(y^4+2y^3\right)+y^2+1\le\sqrt{y^2+y+1}$$

$\Leftrightarrow\left(y^2+y\right)^2+1\le\sqrt{y^2+y+1},$ giải pt bậc 3 tổng quát.

§. HỆ LẶP BA ẨN

(Hoán vị vòng quanh)

1. Định nghĩa: Hệ lặp ba ẩn là hệ có dạng $\begin{cases}x=f(y)\\ y=f(z)\\ z=f(x)\end{cases}$ $(*)$.Trong đó f là hàm số.

2. Phương pháp giải: Xét hệ lặp ba ẩn $(*)$, với f là hàm số có tập xác định là D, tập giá trị là T, T$\subseteq D$, hàm số f đồng biến trên T.

Cách 1: Đoán nghiệm rồi chứng minh hệ có nghiệm duy nhất. Thường để chứng minh hệ có nghiệm duy nhất ta cộng ba phương trình của hệ vế theo vế, sau đó suy ra x=y=z. Hay ta trừ vế theo vế đôi một các phương trình cho nhau.

Cách 2: Từ $T \subseteq D$ suy ra f(x), f(f(x)) và f(f(f(x))) thuộc D. Để (x;y;z) là nghiệm của hệ thì $x \in T$.

Nếu x>f(x) thì do f tăng trên T nên f(x)>f(f(x)). Vậy f(f(x))>f(f(f(x))). Do đó x>f(x)>f(f(x))>f(f(f(x)))=x.

Điều mâu thuẫn này chứng tỏ không thể có x>f(x). Tương tự cũng không thể có x<f(x).

Do đó f(x)=x. Việc giải hệ $(*)$ được quy về giải phương trình f(x)=x. Hơn nữa ta có :

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(f(y)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(f(f(z))) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y = z \\ z = f(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ z = f(z) \end{cases}$$

3. Các bài tập:

Bài tập 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0(1) \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0(2) \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0(3) \end{cases}$

Giải:

Cách 1: Hệ đã cho được viết lại $\begin{cases} x = f(z) \\ y = f(x) \\ z = f(y) \end{cases}$,với f(x)=$\sqrt[3]{6x^2 - 12x + 8}$.Khi đó hàm số f xác định và liên tục trên R.Tiếp theo ta tìm tập giá trị T của f.

Ta có f'(x)=$\frac{1}{3}(6x^2 - 12x + 8)^{\frac{-2}{3}}(12x - 12) = \frac{4(x-1)}{\sqrt[3]{(6x^2 - 12x + 8)^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)		0	
f(x)	$+\infty$ ↘	$\sqrt[3]{2}$	↗ $+\infty$

Vậy tập giá trị của hàm f (x) là T=$\left[\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$

Ta có f đồng biến trên $\left[1; +\infty\right)$ nên f đồng biến trên $\left[\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$.(Tập giá trị của f là $\left[\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$)

Theo phần phương pháp giải ta được $\begin{cases} x = y = z \\ x = \sqrt[3]{6x^2 - 12x + 8} \end{cases}$

Phương trình x=$\sqrt[3]{6x^2 - 12x + 8} \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy hệ đã cho viết lại $\begin{cases} x = y = z \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$. Do đó hệ có nghiệm duy nhất là (2;2;2)

Cách 2: Cộng ba phương trình của hệ vế theo vế ta được $(x-2)^3+(y-2)^3+(z-2)^3=0$ (4)

Ta có (2;2;2) là một nghiệm của hệ. Ta sẽ chứng minh (2;2;2) là nghiệm duy nhất của hệ.

Nếu x>2 thì từ (1) ta có $y^3-8=6x(x-2)>0 \Rightarrow y>2$. Từ y>2 và từ (2) ta có $z^3-8=6y(y-2)>0 \Rightarrow z>2$. Vậy $0=(x-2)^3+(y-2)^3+(z-2)^3>0$. Đây là điều vô lí.

Nếu 0<x<2(ta có ngay x>0 vì theo (3) thì $x^3=6(z-1)^2+2>0$) thì từ (3) suy ra $6z(z-2)=x^3-8<0 \Rightarrow \ \Rightarrow 0<z<2$. Kết hợp với (2) suy ra 0<y<2. Vậy $0=(x-2)^3+(y-2)^3+(z-2)^3<0$. Đây là điều vô lí.

Vậy x=2, từ (1) ta có y=2, thay y=2 vào (2) ta có z=2. Vậy (2;2;2) là nghiệm duy nhất của hê.

Chú ý: Đối với hệ lặp ba ẩn thì có một sai lầm rất tinh vi, khó phát hiện đó là sai lầm:

"Do x,y,z có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z$". Thực ra x,y,z hoán vị vòng quanh nên phải xét hai thứ tự khác nhau $x \geq y \geq z$ và $y \geq x \geq z$.

Bài tập 2: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x+1 = y^3+y^2+y \\ 2y+1 = z^3+z^2+z \\ 2z+1 = x^3+x^2+x \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x = y^3+y^2+y-2 \\ y = z^3+z^2+z-2 \\ z = x^3+x^2+x-2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^3-9y^2+27y-27=0 \\ y^3-9z^2+27z-27=0 \\ z^3-9x^2+27x-27=0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 12x^2-48x+64=y^3 \\ 12y^2-48y+64=z^3 \\ 12z^2-48z+64=x^3 \end{cases}$

Bài tập 3: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x-\sin y=0 \\ y-\sin z=0 \\ z-\sin x=0 \end{cases}$

Hướng dẫn: Xét hàm số f(x)=sinx có tập xác định là R và tập giá trị là $[-1;1]$, f đồng biến trên $[-1;1]$.Hệ đã cho viết lại $\begin{cases} x=f(z) \\ y=f(x) \\ z=f(y) \end{cases}$. Ta chứng minh được x=f(x) và

$$\begin{cases} x=f(z) \\ y=f(x) \\ z=f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x=f(x) \end{cases}$$

Xét phương trình x=sinx trên $[-1;1]$. Xét hàm số g(x)=x-sinx trên $[-1;1]$. Ta có:

g'(x)=1-cosx$\geq 0, \forall x \in [-1;1]$. Vậy g đồng biến trên $[-1;1]$.Ta lại có g(0)=0. Vậy x=0 là nghiệm duy nhất của phương trình x=sinx trên $[-1;1]$.Do đó (0;0;0) là nghiệm duy nhất của hệ.

Bài tập 4: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^3-3x^2+6x-6+\ln(x^2-3x+3)=y \\ y^3-3y^2+6y-6+\ln(y^2-3y+3)=z \\ z^3-3z^2+6z-6+\ln(z^2-3z+3)=x \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x^3+3x-3+\ln(x^2-x+1)=y \\ y^3+3y-3+\ln(y^2-y+1)=z \\ z^3+3z-3+\ln(z^2-z+1)=x \end{cases}$

Giải: a) Xét hàm số f(x)=$x^3-3x^2+6x-6+\ln(x^2-3x+3)$. Hàm số này có tập xác định là R, ta có

f'(x)=$3(x-1)^2+2+\frac{2x-3}{x^2-3x+3}+1=3(x-1)^2+\frac{2x^2-4x+3}{x^2-3x+3}+1>1>0$.Vậy f(x) đồng biến trên R.

Hệ đã cho viết lại: $\begin{cases} x=f(z) \\ y=f(x) \\ z=f(y) \end{cases}$. Tương tự như các ví dụ trước ta được: $\begin{cases} x=y=z \\ x=f(x) \end{cases}$ (*)

Tiếp theo ta giải phương trình f(x)=x$\Leftrightarrow$f(x)-x=0. Đặt h(x)=f(x)-x$\Rightarrow$h'(x)=f'(x)-1>0, $\forall x \in R$. Vậy

h(x) đồng biến trên R. Hơn nữa h(2)=0. Do đó h(x)=0$\Leftrightarrow$x=2. Vậy (*)$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x=2 \end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có một nghiệm duy nhất là (2;2;2).

Bài tập 5 : Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} 2004=\frac{30y}{x^2}+4y \\ 2004=\frac{30z}{y^2}+4z \\ 2004=\frac{30x}{z^2}+4x \end{cases}$ (đề nghị thi Olympic 30/04)

Đáp số: x=y=z=$\frac{1002\pm 2\sqrt{250971}}{4}$

Bài tập 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x=y(3x^2-1) \\ y^3-3y=z(3y^2-1) \\ z^3-3z=x(3z^2-1) \end{cases}$ (đề nghị thi Olympic 30/04)

Giải: Dễ thấy hệ đã cho tương đương $\begin{cases} y = f(x) \\ x = f(z) \\ z = f(y) \end{cases}$, với f(x)= $\dfrac{x^3-3x}{3x^2-1}$,f'(x)= $\dfrac{3(x^2+1)^2}{(3x^2-1)^2} > 0, \forall x \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy hàm số f(x) đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ và ta có

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{\sqrt{3}})^-} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{\sqrt{3}})^+} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{\sqrt{3}})^-} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{\sqrt{3}})^+} = -\infty$. Vậy tập giá trị của f(x) là R. Tập xác định của f(x) là con thực sự của tập giá trị của f(x) nên ta không thể áp dụng cách giải như đã trình bày trong phần phương pháp giải.

Xét phương trình x^3-3x=y(3x^2-1). Vì x= $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ không thoã phương trình này nên để x là nghiệm của phương trình này thì x khác $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, khi đó y= $\dfrac{x^3-3x}{3x^2-1}$. Do đó ta đặt x=tgα , với

$\alpha \in \left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\alpha \neq \pm\dfrac{\pi}{6}$. Khi đó y= $\dfrac{x^3-3x}{3x^2-1} = \dfrac{tg^3\alpha - 3tg\alpha}{3tg^2\alpha - 1} = tg3\alpha$ .Do đó $\begin{cases} y = tg3\alpha \\ z = tg9\alpha \\ x = tg27\alpha \end{cases}$ .Vậy ta có:

x=tgα =f(z)=f(tg9α)=tg27α . Tức là $\alpha = 27\alpha - k\pi \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{k\pi}{26} (k \in \mathbb{Z})$. Vậy nghiệm của hệ là (0;0;0),

$\left(tg\dfrac{\pi}{26}; tg\dfrac{3\pi}{26}; tg\dfrac{9\pi}{26}\right)$ và các hoán vị của nó, $\left(tg(\dfrac{-\pi}{26}); tg(\dfrac{-3\pi}{26}); tg(\dfrac{-9\pi}{26})\right)$ và các hoán vị của nó.

Bài tập 7: Giải hệ $\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+6}\log_3(6-y) = x \\ \sqrt{y^2-2y+6}\log_3(6-z) = y \\ \sqrt{z^2-2z+6}\log_3(6-x) = z \end{cases}$ (đề thi HSG quốc gia năm học 2005-2006, bảng A)

Giải: Để (x;y;z) là nghiệm của hệ đã cho thì điều kiện là x,y,z<6. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \log_3(6-y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}} (1) \\ \log_3(6-z) = \dfrac{y}{\sqrt{y^2-2y+6}} (2) \\ \log_3(6-x) = \dfrac{z}{\sqrt{z^2-2z+6}} (3) \end{cases}$$ hay $$\begin{cases} \log_3(6-y) = f(x)(1) \\ \log_3(6-z) = f(y)(2) \\ \log_3(6-x) = f(z)(3) \end{cases}$$ với f(x)=$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}$

Nhận thấy f(x)=$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}$ là hàm tăng (vì f'(x)=$\dfrac{6-x}{(x^2-2x+6)\sqrt{x^2-2x+6}} > 0, \forall x < 6$, còn g(x)=$\log_3$(6-x) là hàm giảm với x<6. Nếu (x;y;z) là một nghiệm của hệ phương trình ta chứng minh x=y=z. Không mất tính tổng quát giả sử x=max(x,y,z) thì có 2 trường hợp:

1) x$\geq y \geq z$. Do f(x) tăng nên f(x)$\geq f(y) \geq f(z)$, suy ra $\log_3$(6-y)$\geq\log_3$(6-z) $\geq\log_3$(6-x). Do g(x) giảm nên suy ra 6-y≥6-z≥6-x⇔x$\geq z \geq y$. Do y≥z nên y=z. Từ (1) và (2) ta có x=y=z.
2) x$\geq z \geq y$. Tương tự như trên suy ra x=y=z.

Phương trình g(x)=f(x) có nghiệm duy nhất x=3. Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (x;y;z)=(3:3;3)

Bài tập 8: Giải hệ $\begin{cases} x^3+3x^2+2x-5=y \\ y^3+3y^2+2y-5=z \\ z^3+3z^2+2z-5=x \end{cases}$ (đề thi HSG quốc gia năm học 2005-2006, bảng B)

B ài t ập 9: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \log_5 x = \log_3(4+\sqrt{y}) \\ \log_5 y = \log_3(4+\sqrt{z}) \\ \log_5 z = \log_3(4+\sqrt{x}) \end{cases}$ **;** **b)** $\begin{cases} 2\cos x(\cos^2 y+1) = (1+\cos y)^2 \\ 2\cos y(1+\cos^2 z) = (1+\cos z)^2 \\ 2\cos z(1+\cos^2 x) = (1+\cos x)^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \cos x = \log_2(8\cos z - \cos 2x - 5) \\ \cos y = \log_2(8\cos x - \cos 2y - 5) \\ \cos z = \log_2(8\cos y - \cos 2z - 5) \end{cases}$ **; d)** $\begin{cases} e^x - e^{x-y} = y \\ e^y - e^{y-z} = z \\ e^z - e^{z-x} = x \end{cases}$