|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **HÀ TĨNH**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HÀ TĨNH**  NĂM HỌC: 2023 – 2024  Môn thi: **TOÁN**  Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề) |

**Câu 1. (2,0 điểm)**

**a)** Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn

**b)** Cho a, b, c là các số thực khác không thỏa mãn

Chứng minh rằng:

**Câu 2. (2,5 điểm):**

**a)** Giải hệ phương trình

**b)** Giải phương trình

**Câu 3. (1,5 điểm):**

**a)** Tìm tất cả các số thực x để là số nguyên.

**b)** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 thì

thì không phải là số nguyên tố.

**Câu 4. (2,5 điểm)** Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định, C là một điểm chạy trên đường tròn (O) không trùng với A và B. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và C cắt nhau tại điểm M. Đường thẳng MB cắt AC tại F và cắt đường tròn (O) tại E (E khác B).

**a)** Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AC. Chứng minh tam giác OEM đồng dạng với tam giác BHM

**b)** Gọi K là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB. Hai đường thẳng MB và CK cắt nhau tại I. Tính tỷ số khi tổng diện tích hai tam giác LAC và IBC lớn nhất.

**c)** Chứng minh rằng

**Câu 5. (1,0 điểm)** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn a > b > c ab + bc + ca > 0 và a + b + c = 1 .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

**Câu 6. (0,5 điểm)** Cho x, y, z là các số chính phương. Chứng minh rằng

(x + 1)(y + 1)(z + 1) luôn viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương.

------------------------------HẾT--------------------------------

**LỜI GIẢI :**

**Câu 1.a:**  ***Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn***

(1)

**Giải:**

(1)

Do nên

Từ đó, ta có các trương hợp.

**TH 1**:

**TH 2** :

**TH 3**:

Vậy thỏa nãm yêu cầu bài toán.

**Câu 1. b: *Cho a, b, c là các số thực khác không thỏa mãn***

***Chứng minh rằng:***

**Giải :**

Do

Ta có:

Tương tự:

Do đó :

**Câu 2.a:** ***Giải hệ phương trình***

Đặt: hệ trở thành:

Giải (2):

Do

Thay vào (1)

Ta có :

Vậy hệ đã có nghiệm :

**Câu 2.b:** ***Giải phương trình***

Ta thấy không phải là nghiệm của (\*)

Với

Đặt (2) trở thành:

Với , ta có

Vậy phương trình đã cho có nghiệm

**Câu 3.a:** ***Tìm tất cả các số thực x để là số nguyên.***

Ta có:

Để p là số nguyên thì

**TH 1:**

**TH 2 :**

Vậy

**Câu 3.b:**  ***Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 thì không phải là số nguyên tố.***

Ta có :

Do

**Câu 4.a:**

****

**Giải:**

Vì MA là tiếp tuyến (O) nên MA AB tại A

Xét (O) có : là góc nội tiếp chắn nửa đường trên

tại E.

Xét vuông tại A, đường cao AE, theo hệ thức lượng

Ta có:

Ta có:

OM là trung trực của đoạn thẳng AC

⇒ OM AC tai H.

Xét MAO vuông tại A, đường cao AH, theo hệ thức lượng ta có:

Từ (1) và (2)

Xét OEM và BHM có:

**Câu 4.b:** Hình vẽ khi 

****

Kéo dài BC và AM cắt nhau tại Q.

Ta có: MA = MC cân tại M

Mặt khác:

là trung điểm của AQ

Ta có:

Xét BMQ có CI // MQ, theo hệ quả của định lý Talet có :

Xét ABM có IK // AM, theo hệ quả của định lý Talet ta có:

Từ (3) và (4) ta có:

Mà AM = MQ IK

I là trung điểm của CK

Chứng minh HI là đường trung bình của ACK

HI // AK hay HI // AB

Theo bài ra ta có:

Vì

C là điểm chính giữa của cung AB.

Xét có HI // AB theo hệ quả của định lý Ta-let ta có:

Ta có:

Vậy

**Câu 4.c:** ***điều cần chứng minh tương đương với***

* Đễ dàng chứng minh được tứ giác MAHE nội tiếp

Ta có

(góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn )

là phân giác của

là phân giác ngoài của (do HM HF)

**Câu 5.** ***Cho các số thực a, b, c thỏa mãn a > b > c ab + bc + ca > 0 và a + b + c = 1 .***

***Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức***

**Giải:**

Áp dụng

Dấu “ = ” xảy ra

Vậy GTNN của P bằng đạt được:

**Câu 6.** ***Cho x, y, z là các số chính phương. Chứng minh rằng (x + 1)(y + 1)(z + 1) luôn viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương.***

Giả sử

Ta có khai triển quen thuộc sau

Áp dụng khai triển trên ta có:

Bài toán được chứng minh.