# CHUYÊN ĐỀ: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

## HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHUYÊN ĐỀ

| Tỉnh, thành phố | Năm học |
|---|---|
| HSG Thanh Chương | 2018 – 2019; |
| HSG Chương Mỹ | 2018 – 2019; |
| HSG Thanh Chì | 2018 – 2019; |
| HSG Thanh Chương | 2018 – 2019; |
| HSG Ân Thi | 2017 – 2018; |
| HSG Kim Thành | 2017 – 2018; |
| HSG Hoài Nhơn | |
| HSG Yên Dũng | |
| HSG Sóc Trăng | 2014-2015 |
| HSG Quảng Ngãi | 2015-2016 |
| HSG Yên Bái | 2015-2016 |
| Chuyên Toán Quảng Ngãi | 2014-2015; 2015-2016 |
| Chuyên Toán Quảng Trị | 2015-2016 |
| HSG Yên Phong Bắc Ninh | 2014; 2016-2017 |
| HSG Ba Vì | 2018 – 2019; |

## A. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

**Khái niệm:** Nếu với mọi giá trị của biến thuộc một khoảng xác định nào đó mà giá trị của biểu thức $A$ luôn luôn lớn hơn hoặc bằng (nhỏ hơn hoặc bằng) một hằng số $k$ và tồn tại một giá trị của biến để $A$ có giá trị bằng k thì k gọi là giá trị nhỏ nhất (giá trị lớn nhất) của biểu thức A ứng với các giá trị của biểu thức thuộc khoảng xác định nói trên

**Xét biểu thức** $A(x)$

+) Ta nói $A(x)$ có giá trị lớn nhất là $M$, nếu

$A(x) \le M, \forall x$ và có giá trị $x_0$ sao cho $A(x_0) = M$ (Chỉ ra 1 giá trị là được)

+) Ta nói $A(x)$ có giá trị nhỏ nhất là $m$, nếu

$A(x) \ge m \forall x$ và có giá trị $x_0$ sao cho $A(x_0) = m$ (Chỉ ra 1 giá trị là được)

**Như vậy :**

a) Để tìm giá trị nhỏ nhất của $A$, ta cần :

- Chứng minh $A \ge k$ với $k$ là hằng số
- Chỉ ra dấu " = " có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

b) Để tìm giá trị lớn nhất của $A$, ta cần :

- Chứng minh $A \le k$ với $k$ là hằng số
- Chỉ ra dấu " = " có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

**Ký hiệu:** $MinA$ là giá trị nhỏ nhất của $A$ và $Max\,A$ là giá trị lớn nhất của $A$

**Ví dụ:** Sai lầm

$A(x) = 2x^2 - 2x + 3 = x^2 + (x-1)^2 + 2 \ge 2 \Rightarrow GTNN = 2$ (Không chỉ ra được dấu =)

Đáp án đúng là: $A(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \ge \frac{5}{2} \Rightarrow GTNN = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

## B. Các dạng toán

**Dạng 1:** Tìm GTLN, GTNN của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$

**Phương pháp:** Áp dụng hằng đẳng thức số 1 và số 2

**Bài 1:** Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A(x) = x^2 - 4x + 24$

b. $B(x) = 2x^2 - 8x + 1$

c. $C(x) = 3x^2 + x - 1$

## Lời giải

a) Ta có $A(x)=x^2-4x+24=(x-2)^2+20\ge 20\forall x\Rightarrow minA(x)=20\Leftrightarrow x=2$

b) Ta có $B(x)=2x^2-8x+1=2(x^2-4x+4)-7=2(x-2)^2-7\ge -7\Rightarrow minB=-7\Leftrightarrow x=2$

c) Ta có $C(x)=3x^2+x-1=3(x+\frac{1}{6})^2-\frac{13}{12}\ge\frac{-13}{12}\Leftrightarrow x=\frac{-1}{6}$

**Bài 2:** Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A(x)=-5x^2-4x+1$

b. $B(x)=-3x^2+x+1$

## Lời giải

a. Ta có $A(x)=-5x^2-4x+1=-5(x^2+\frac{4}{5}x-\frac{1}{5})=-5(x+\frac{2}{5})^2+\frac{9}{5}\le\frac{9}{5}\Leftrightarrow x=\frac{-2}{5}$

b. Ta có $B(x)=-3x^2+x+1=-3(x-\frac{1}{6})^2+\frac{13}{12}\le\frac{13}{12}\Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$

## **Dạng 2:** Tìm GTLN, GTNN của đa thức có bậc cao hơn 2

**Phương pháp:** Ta đưa về dạng tổng bình phương

**Bài 1:** Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A(x)=x^4-6x^3+10x^2-6x+9$

b. $B(x)=x^4-10x^3+26x^2-10x+30$

c. $C(x)=x^4-2x^3+3x^2-4x+2017$

d. $D(x)=x^4-x^2+2x+7$

**Lời giải**

a. Ta có $A(x)=x^4-6x^3+10x^2-6x+9=(x^4-6x^3+9x^2)+(x^2-6x+9)=(x^2-3x)^2+(x-3)^2\geq 0\forall x$

$$\Rightarrow \min A(x)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x=0 \\ x-3=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=3$$

b. Ta có $B(x)=x^4-10x^3+26x^2-10x+30=(x^2-5x)^2+(x-5)^2+5\geq 5\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x=0 \\ x-5=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=5$

c. Ta có $C(x)=x^2(x^2+2)-2x(x^2+2)+(x^2+2)+2015=(x^2+2)(x-1)^2+2015\geq 2015\Leftrightarrow x=1$

d. Ta có $D(x)=x^4-2x^2+1+x^2+2x+1+5=(x^2-1)^2+(x+1)^2+5\geq 5\Leftrightarrow x=-1$

**Bài 2:** Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $E(x)=x^4-4x^3+9x^2-20x+22$

b. $F(x)=x(x-3)(x-4)(x-7)$

c. $G(x)=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)-2006$

**Lời giải**

a. Ta có:

$$E(x)=x^4-4x^3+9x^2-20x+22=(x^4-4x^3+4x^2)+5(x^2-4x+4)+2=(x^2-2x)^2+5(x-2)^2+2\geq 2\Leftrightarrow x=2$$

b) Ta có $F(x)=x(x-3)(x-4)(x-7)=(x^2-7x)(x^2-7x+12)=y^2-36\geq -36\Leftrightarrow y=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right.$

c) Ta có $G(x)=(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)-2006=(x^2+5x)^2-2042\geq -2042\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-5 \end{array}\right.$

## **Dạng 3:** Đa thức có từ 2 biến trở lên

**Phương pháp:** Đa số các biểu thức có dạng $F(x;y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+h(a.b.c\neq 0)(1)$

- Ta đưa dần các biến vào trong hằng đẳng thức $(a^2\pm 2ab+b^2)=(a\pm b)^2$ như sau

$F(x;y)=mK[x;y]^2+nG[y]^2+r\,(2)$ hoặc $F(x;y)=mK[x;y]^2+nH[x]^2+r\,(3)$

Trong đó $G[y],H[x]$ là biểu thức bậc nhất đối với biến, còn $K[x;y]=px+qy+k$ cũng là biểu thức bậc nhất đối với cả hai biến $x$ và $y$

**Cụ thể:**

Ta biến đổi (1) để chuyển về dạng (2) như sau với $a\neq 0;4ac-b^2\neq 0$

Ta có: $4a.F(x;y)=4a^2x^2+4abxy+4acy^2+4adx+4aey+4ah=4a^2x^2+b^2y^2+d^2+4abxy+4adx+2bdy$

$(4ac-b^2)y^2+2y(2ae-bd)+4ah-d^2$

$$=(2ax+by+d)^2+(4ac-b^2)\left(y+\frac{2ae-bd}{4ac-b^2}\right)+4ah-d^2-\left(\frac{2ae-bd}{4ac-b^2}\right)^2$$

Vậy có (2) với

$$m=\frac{1}{4a}.F(x;y)=2ax+by+d;n=-\frac{b^2-4ac}{4a};G(y)=y+\frac{2ae-bd}{4ac-b^2};\mathrm{r}=\mathrm{h}-\frac{d^2}{4a}-\frac{(2ae-bd)^2}{4a(4ac-b^2)}$$

+) Nếu $a>0;4ac-b^2>0\Rightarrow m>0,n>0\Rightarrow(2):F(x;y)\geq r(*)$

+) Nếu $a<0;4ac-b^2>0\Rightarrow m<0,n<0\Rightarrow(2):F(x;y)\leq r(**)$

+) Nếu $m>0,n>0$, thì ta tìm được giá trị nhỏ nhất

+) Nếu $m<0,n<0$ thì ta tìm được giá trị lớn nhất

Dễ thấy rằng luôn tồn tại $(x;y)$ để có dấu của đẳng thức, như vậy ta sẽ tìm được cực trị của đa thức đã cho

Trong cả hai trường hợp trên:

- Nếu $r=0$ thì phương trình $F(x;y)=0$ có nghiệm

- Nếu $F(x;y)\geq r>0$ hoặc $F(x;y)\leq r<0$ thì không có $(x;y)$ nào thảo mãn $F(x;y)=0$

+) Nếu $a>0;4ac-b^2<0;r=0\Rightarrow(2):F(x;y)$ phân tích được tích của hai nhân tử, giúp ta giải được các bài toán khác.

**Bài 1:** Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 5$

b. $B = 2x^2 - 2y^2 + 5y^2 + 5$

**Lời giải**

a) Ta có $A(x) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 5 = \left(x^2 - 2xy + y^2\right) + \left(y^2 - 4y + 4\right) + 1 = (x-y)^2 + (y-2)^2 + 1$

$\Rightarrow A \ge 1 \forall x, y \in R \Rightarrow "=" \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy $\min A = 1 \Leftrightarrow x = y = 2$

b) Ta có $B = 2x^2 - 2y^2 + 5y^2 + 5 = \left(x^2 - 4xy + 4y^2\right) + \left(x^2 + 2xy + y^2\right) + y^2 + 5 = (x-2y)^2 + (x+y)^2 + 5 \ge 5$

$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$

**Bài 2:** Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A(x) = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3$

b. $B(x) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$

c. $C(x) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 2y + 18$

d. $D(x) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2(x + y + z) + 2$

e. $E(x) = 2x^2 + 8xy + 11y^2 - 4x - 2y + 6$

f. $F(x) = 2x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 6xy + 8yz - 2xz + 2y + 4z + 2$

g. $G(x) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 4y$

h. $H(x) = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1$

**Lời giải**

a. $A(x) = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3 = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x-y)^2 + (x-1)^2 + 2 \ge 2 \Leftrightarrow x = y = 1$

b. Ta có $B(x) = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + x(y-1) - (y-1) - 3 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)(y-1) - 3$

$= (x-1)^2 + 2(x-1).\frac{1}{2}.(y-1) + (\frac{y-1}{2})^2 - (\frac{y-1}{2})^2 + (y-1)^2 - 3 = \left[x - 1 + \frac{y-1}{2}\right]^2 - \frac{y^2 - 2y + 1}{4} + y^2 - 2y + 1 - 3$

$= \left[x - 1 + \frac{y-1}{2}\right]^2 + \frac{3(y-1)^2}{4} - 3 \ge -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 + \frac{y-1}{2} = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

c. Ta có $C(x) = 2x^2 + 4xy + 2y^2 + y^2 - 8x - 2y + 18 = 2\left[(x+y)^2 - 2(x+y)2 + 4\right] + (y^2 + 6y + 9) + 1$

$= 2(x + y - 2)^2 + (y+3)^2 + 1 \ge 1 \Rightarrow \min A = 1 \Leftrightarrow y = -3; x = 5$

d. Ta có $D(x) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2(x + y + z) + 2 = 2(x^2 - x) + (3y^2 - 2y) + (4z^2 - 2z) + 2$

$$=2(x^2-x+\frac{1}{4})+3(y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9})+\left[(2z)^2-2z+\frac{1}{4}\right]+2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$=2(x-\frac{1}{2})^2+3(y-\frac{1}{3})^2+(2z-\frac{1}{2})^2+\frac{11}{2}\geq\frac{11}{2}\Rightarrow(x,y,z)=(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4})$$

e. Ta có $E(x)=2(x^2+4xy+4y^2)+3y^2-4x-2y+6=\left[2(x+2y)^2-4(x+2y)+2\right]+3y^2+6y+4$

$$=2(x+2y-1)^2+3(y+1)^2+1\geq 1\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-1=0\\y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$$

f. Ta có $F(x)=2x^2+6y^2+5z^2-6xy+8yz-2xz+2y+4z+2(kho)$

$$F(x)=2x^2-2x(3y+z)+2(\frac{3y+z}{2})^2+6y^2+5z^2+8yz-(\frac{3y+z}{2})^2+2y+4z+2$$

$$=2(x-\frac{3y+z}{2})^2+\frac{3}{2}(y^2+\frac{10}{3}yz+\frac{25}{9}z^2)+\frac{1}{3}z^2+2y+4z+2$$

$$=2(x-\frac{3y+z}{2})^2+\left[\frac{3}{2}(y+\frac{5}{3}z)^2+2(y+\frac{5}{3}z)+\frac{2}{3}\right]+(\frac{1}{3}z^2+\frac{2}{3}z+\frac{1}{3})+1$$

$$=2(...)+\frac{3}{2}(y+\frac{5}{3}z+\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}(x+1)^2+1\geq 1\Leftrightarrow\begin{cases}x-\dfrac{3y+z}{2}=0\\y+\dfrac{5}{3}z+\dfrac{2}{3}=0\\z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=-1\end{cases}\Rightarrow\min A=1$$

g. Ta có $G(x)=2x^2+2y^2+z^2+2xy-2xz-2yz-2x-4y=(x-1)^2+(y-2)^2+(x+y-z)^2-5\geq -5$

$\Leftrightarrow x=1;y=2;z=3$

h. Ta có $H(x)=x^2+y^2-xy-x+y+1\Rightarrow 4H(x)=(2x)^2-2.2x.y+y^2+3y^2-4x+4y+4$

$$=(2x-y)^2-2(2x-y)+3y^2+2y+3+1=(2x-y-1)+3(y^2+\frac{2}{3}y+1)=(2x-y-1)+3(y+\frac{1}{2})^2+\frac{8}{3}\geq\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow min4A=\frac{8}{3}\Leftrightarrow x=\frac{2}{3};y=\frac{-1}{3}\Rightarrow minA=\frac{2}{3}$$

**Bài 3:** Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A=-4x^2-5y^2+8xy+10y+12$

b. $-x^2-y^2+xy+2x+2y$

**Lời giải**

a. $A=-4x^2-5y^2+8xy+10y+12=-4x^2+8xy-4y^2-y^2+10y-25+37=-4(x-y)^2-(y-5)^2+37\leq 37$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$

b. $A=-x^2-y^2+xy+2x+2y \Rightarrow 4A=-4x^2-4y^2+4xy+8x+8y$

$A=-4x^2+4x(y+2)-(y+2)^2+(y+2)^2-4y^2+8y$

$=-(2x-y-2)^2-3(y^2-4y)+4=-(2x-y-2)^2-3(y-2)^2+16\le 16 \Rightarrow A\le 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

**Bài 4:** Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A=5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+82$ b. $B=3x^2+3y^2+z^2+5xy-3yz-3xz-2x-2y+3$

**Lời giải**

a. Ta có $A=5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+82=9y^2-12y(x+4)+4(x+4)^2-4(x+4)^2+5x^2+24x+82$

$=\left[3y-2(x+4)\right]^2+(x-4)^2+2\ge 2 \forall x,y\in R \Leftrightarrow x=4; y=\frac{16}{3}$

b. Ta có $B=\left[z-\frac{3}{2}(x+y)\right]^2+\frac{3}{4}(x+\frac{y}{3}-\frac{4}{3})^2+\frac{2}{3}(y-2)^2+1\ge 1$

**Bài 5:**

Tìm GTLN của $A=x+y+z-(x^2+2y^2+4z^2)$

**Lời giải**

Ta có $-A=(x-\frac{1}{2})^2+2(y-\frac{1}{4})^2+(2z-\frac{1}{4})^2-\frac{-7}{16}\ge\frac{-7}{16}\Rightarrow A\le\frac{7}{16}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}; y=\frac{1}{4}; z=\frac{1}{8}$

**Bài 6:** Học sinh giỏi Yên Dũng Bắc Giang

Tìm GTNN của $A=x^2+2y^2+2xy+2x-4y+2013$

**Lời giải**

Ta có $A=x^2+2y^2+2xy+2x-4y+2013=x^2+2x(y+1)+(y+1)^2+(y-3)^2+2003\ge 2003 \Leftrightarrow x=-4; y=3$

**Bài 7:** Học sinh giỏi Chương Mỹ, năm học 2018 - 2019

Tìm GTNN của $H=2x^2+y^2-2xy+2y+2021$

**Lời giải**

Ta có $H=2x^2+y^2-2xy+2y+2021$

$=(x-y-1)^2+(x+1)^2+2019\ge 2019$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=-1; y=-2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $H$ bằng $2019$ khi $x=-1; y=-2$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1:**

Tìm GTNN của: $A=x^2-2xy+2y^2+2x-10y+17$

**Hướng dẫn**

Ta có $A=x^2-2x(y-1)+2y^2-10y+17=x^2-2x(y-1)+(y-1)^2+\left[2y^2-10y+17-(y-1)^2\right]$

$=(x-y+1)^2+(y^2-8y+16)$

**Bài 2:**

Tìm min của $B=x^2-xy+y^2-2x-2y$

**Hướng dẫn**

Ta có $B=x^2-x(y+2)+y^2-2y=\left[x^2-2.x.\dfrac{y+2}{2}+\dfrac{y^2+4y+4}{4}\right]+y^2-2y-\dfrac{y^2}{4}-y-1$

$4B=(x-y-2)^2+4y^2-8y-y^2-4y-4$

**Bài 3:**

Tìm min của: $C=x^2+xy+y^2-3x-3y$

**Hướng dẫn**

Ta có $C=x^2+x(y-3)+y^2-3y=\left[x^2+2.x.\dfrac{y-3}{2}+\dfrac{y^2-6y+9}{4}\right]+y^2-3y-\dfrac{y^2-6y+9}{4}$

$4C=(x+y-3)^2+\left[4y^2-12y-y^2+6y-9\right]$

**Bài 4:**

Tìm min của: $D=x^2-2xy+6y^2-12x+2y+45$

**Hướng dẫn**

Ta có $D=x^2-2x(y+6)+6y^2+2y+45=x^2-2x.(y+6)+(y+6)^2+6y^2+2y+45-(y^2+12y+36)$

$=(x-y-6)^2+5y^2-10y+9$

## Bài 5:

Tìm min của: $E=x^2-xy+3y^2-2x-10y+20$

### Hướng dẫn

Ta có $E=x^2-x(y-2)+3y^2-10y+20=x^2-2x.\frac{y-2}{2}+\frac{y^2-4y+4}{4}+3y^2-10y+20-\frac{y^2-4y+4}{4}$

$4E=(x-y+2)^2+(12y^2-40y+80)-(y^2-4y+4)=(x-y+2)^2+(11y^2-36y+76)$

## Bài 6:

Tìm max của: $F=-x^2+2xy-4y^2+2x+10y-3$

### Hướng dẫn

Ta có $-F=x^2-2xy+4y^2-2x-10y+3=x^2-2x(y+1)+4y^2-10y+3$

$-F=x^2-2x(y+1)+(y+1)^2+4y^2-10y+3-(y+1)^2$

## Bài 7:

Tìm min của: $G=(x-ay)^2+6(x-ay)+x^2+16y^2-8ay+2x-8y+10$

### Hướng dẫn

Ta có $G=\left[(x-ay)^2+6(x-ay)+9\right]+(x^2+2x+1)+16y^2-8ay-8y$

$G=(x-ay+3)^2+(x+1)^2+16y^2-8y(a+1)+(a+1)^2-(a+1)^2$

$G=(x-ay+3)^2+(x+1)^2+(4y-a-1)^2-(a+1)^2\ge-(a+1)^2$

## Bài 8:

Tìm max của: $H=-x^2+xy-y^2-2x+4y+11$

### Hướng dẫn

Ta có $-H=x^2-xy+y^2+2x-4y-11=x^2-x(y-2)+y^2-4y-11$

$-H=x^2-2x.\frac{y-2}{2}+\frac{y^2-4y+4}{4}+y^2-4y-11-\frac{(y-2)^2}{4}$

$\Rightarrow -4H=(x-y+2)^2+4y^2-16y-44-(y^2-4y+4)$

## Bài 9:

Tìm min của: $I=x^2+4xy+5y^2-6y+11$

**Hướng dẫn**

Ta có $I=\left(x^2+4xy+4y^2\right)+y^2-6y+11$

**Bài 10:**

Tìm min của: $K=x^2+y^2-xy+3x+3y+20$

**Hướng dẫn**

Ta có $4K=4x^2+4y^2-4xy+12x+12y+80=\left[4x^2-4x(y-3)+(y-3)^2\right]+\left[4y^2+12y+80-(y-3)^2\right]$

$4K=(2x-y+3)^2+3y^2+18y+71$

**Bài 11:**

Tìm min của: $M=x^2-2xy+2y^2-2y+1$

**Hướng dẫn**

Ta có $M=\left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(y^2-2y+1\right)$

**Bài 12:**

Tìm min của: $N=x^2-2xy+2y^2-x$

**Hướng dẫn**

Ta có $N=x^2-x(2y+1)+2y^2=x^2-2x.\dfrac{2y+1}{2}+\dfrac{(2y+1)^2}{4}+2y^2-\dfrac{(2y+1)^2}{4}$

$4N=(x-2y-1)^2+8y^2-\left(4y^2+4y+1\right)$

**Bài 13:**

Tìm min của: $A=x^2-2xy+3y^2-2x+1997$

**Hướng dẫn**

Ta có $A=x^2-2x(y+1)+3y^2+1997=x^2-2x(y-1)+(y-1)^2+3y^2+1997-\left(y^2+2y+1\right)$

**Bài 14:**

Tìm min của: $Q=x^2+2y^2-2xy+2x-10y$

**Hướng dẫn**

Ta có $Q=x^2-2x(y-1)+2y^2-10y=x^2-2x(y-1)+(y-1)^2+2y^2-10y-\left(y^2-2y+1\right)$

## Bài 15:

Tìm min của: $R = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y$

### Hướng dẫn

Ta có $R = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = (x+y)^2 + (y-1)^2 - 1 \ge -1$

## Bài 16:

Tìm min của: $A = 4x^2 + 5y^2 - 4xy - 16y + 32$

### Hướng dẫn

Ta có $A = 4x^2 + 5y^2 - 4xy - 16y + 32 = (4x^2 - 4xy + y^2) + (4y^2 - 16y + 32)$

## Bài 17:

Tìm min của: $B = x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 4z + 12$

### Hướng dẫn

Ta có $B = (x^2 - 4xy + 4y^2) + (y^2 - 4yz + 4z^2) + (z^2 - 4z + 4) + 8$

$= (x-2y)^2 + (y-2z)^2 + (z-2)^2 + 8 \ge 8$

## Bài 18:

Tìm min của: $C = 5x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 4$

### Hướng dẫn

Ta có $C = (4x^2 - 2.2x.3y + 9y^2) + (x^2 - 4x + 4) = (2x-3y)^2 + (x-2)^2 \ge 0$

## Bài 19:

Tìm max của: $D = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

### Hướng dẫn

Ta có $-D = x^2 + y^2 - xy - 2x - 2y = x^2 - x(y+2) + y^2 - 2y$

$$-D = x^2 - 2x.\frac{y+2}{2} + \frac{(y+2)^2}{4} + y^2 - 2y - \frac{y^2 + 4y + 4}{4}$$

## Bài 20:

Tìm min của: $E = x^2 + 5y^2 - 4xy + 2y - 3$

### Hướng dẫn

Ta có $E=x^2-4xy+4y^2+y^2+2y+1-4=(x-2y)^2+(y+1)^2-4\ge -4$

**Bài 21:**

Tìm GTNN của $A=a^2+ab+b^2-3a-3b+3$

**Hướng dẫn**

Ta có Ta có: $4P=a^2-2ab+b^2+3(a^2+b^2)+4+2ab-4a-4b=(a-b)^2+3(a+b-2)^2\ge 0$

**Bài 22:**

Tìm min của: $G=x^2+xy+y^2-3(x+y)+3$

**Hướng dẫn**

Ta có $4G=4x^2+4xy+4y^2-12x-12y+12$

$4G=4x^2+4x(y-3)+(y-3)^2+(4y^2-12y+12)-(y^2-6y+9)$

$4G=(2x+y-3)^2+3y^2-6y+3=(2x+y-3)^2+3(y-1)^2\ge 0$

**Bài 23:**

CMR không có giá trị x, y, z thỏa mãn: $x^2+4y^2+z^2-2x+8y-6z+15=0$

**Hướng dẫn**

Ta có $(x^2-2x+1)+(4y^2+8y+4)+(z^2-6z+9)+1\ge 1$

**Bài 24:**

Tìm min của: $A=2x^2+y^2-2xy-2x+3$

**Hướng dẫn**

Ta có $A=x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+2=(x-y)^2+(x-1)^2+2\ge 2$

**Bài 25:**

Tìm min của: $B=x^2-2xy+2y^2+2x-10y+17$

**Hướng dẫn**

Ta có $B=x^2-2x(y-1)+(y-1)^2+2y^2-10y+17-(y^2-2y+1)\ =(x-y+1)^2+(y^2-8y+16)$

**Bài 26:**

Tìm min của: $D=2x^2+2xy+5y^2-8x-22y$

**Hướng dẫn**

Ta có $2D = 4x^2 + 4xy + 10y^2 - 16x - 44y = 4x^2 + 4x(y-4) + 10y^2 - 44y$

$2D = 4x^2 + 2.2x(y-4) + (y-4)^2 + 10y^2 - 44y - y^2 + 8y - 16$

**Bài 27:**

Tìm min của: $E = 2x^2 + 9y^2 - 6xy - 6x - 12y + 2004$

**Hướng dẫn**

Ta có $2E = 4x^2 + 18y^2 - 12xy - 12x - 24y + 4008$

$2E = 4x^2 - 12x(y+1) + 9(y+1)^2 + 18y^2 - 24y + 4008 - 9(y^2 + 2y + 1)$

Ta có $2E = (2x - y - 1)^2 + 9y^2 - 42y + 3999$

**Bài 28:**

Tìm min của: $F = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 12y + 45$

**Hướng dẫn**

Ta có $F = x^2 - 2x(y+6) + (y+6)^2 + 6y^2 + 12y + 45 - (y^2 + 12y + 36) = (x - y - 6)^2 + 5y^2 + 9 \geq 9$

**Bài 29:**

Tìm GTNN của biểu thức : $a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3$

**Hướng dẫn**

Ta có $P = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3 => 4P = (a-b)^2 + 3(a+b-2)^2 \geq 0$

**Bài 30:**

Tìm min của: $A = x^2 + 6y^2 + 14z^2 - 8yz + 6zx - 4xy$

**Hướng dẫn**

Ta có $A = x^2 - 2x(2y + 3z) + 6y^2 - 14z^2$

$\Rightarrow A = x^2 - 2x(2y+3z) + (2y+3z)^2 + 6y^2 - 14z^2 - (4y^2 + 12yz + 9z^2)$

$\Rightarrow A = (x - 2y - 3z)^2 + 2y^2 - 12yz - 23z^2$

**Bài 31:**

Tìm min của: $B = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 2y - 8z + 2000$

## Hướng dẫn

Ta có $B=x^2-2x(y-z+1)+2y^2+3z^2-2y-8z+2000$

$=x^2-2x(y-z+1)+(y-z+1)^2+2y^2+3z^2-2y-2z+2000-\left(y^2+z^2+1-2yz-2z+2y\right)$

$=(x-y+z-1)^2+\left(y^2+2z^2-4y+2yz+1999\right)$

$=(x-y+z-1)^2+\left[y^2-2y(z+2)+(z+2)^2\right]+2z^2-\left(z^2+4z+4\right)+1999$

$=(x-y+z-1)^2+(y-z-2)^2+\left(z^2-4z+1995\right)$

## **Dạng 4:** Tìm GTLN, GTNN của biểu thức có quan hệ ràng buộc giữa các biến

**Phương pháp:**

**Cách 1:** Biểu thị ẩn này qua ẩn kia, rồi đưa về một tam thức bậc hai

**Cách 2:** Sử dụng điều kiện đã cho, làm xuất hiện một biểu thức mới có chứa biểu thức cần tìm cực trị

**Cách 3:** Sử dụng các bất đẳng thức đã biết và một số bất đẳng thức phụ

***) Hệ quả của bất đẳng thức Cosy**

+ $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ ( Dấu = khi a = b, với a, b không âm)

+ $a^2+b^2\ge 2ab$ ( Dấu = khi a = b)

+ $a+\frac{1}{a}\ge 2$ ( Dấu = khi a = 1)

+ $\left(a+b\right)^2\ge 4ab$

+ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$

***) Bất đăng thức Bunhiacopski**

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)\ge\left(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n\right)^2$$

### **Bài 1:** Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A=x^3+y^3+xy$ với $x+y=1$

b. $B=5x^2+y^2$ với $x+y=1$

c. $C=x^2+2y^2$ với $x+2y=1$

d. $D=2x^2+5y^2$ với $4x-3y=7$

**Lời giải**

a. Ta có $A=(x+y)(x^2-xy+y^2)+xy=x^2+y^2$

$$x+y=1\Rightarrow x=1-y\Rightarrow A=(1-y)^2+y^2=2y^2-2y+1=2(y^2-\frac{1}{2}y.2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})+1=2(y-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$$

Dấu ‘=’ xảy ra $x=\frac{1}{2};y=\frac{1}{2}$

b. Ta có

$$x+y=1\Rightarrow y=1-x\Rightarrow B=5x^2+(1-x)^2=6x^2-2x+1=6(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6})=6(x-\frac{1}{6})^2+\frac{5}{6}\ge\frac{5}{6}\Leftrightarrow x=\frac{1}{6};y=\frac{5}{6}$$

c. Ta có $C=x^2+2y^2=6y^2-4y+1\Rightarrow \min C=\frac{1}{3}\Leftrightarrow y=x=\frac{1}{3}$

d. Ta có

$$4x-3y=7\Rightarrow y=\frac{4x-7}{3}\Rightarrow D=2x^2+5\left(\frac{4x-7}{3}\right)^2\Rightarrow 9D=98x^2-280x+245=2(7x-10)^2+45\geq 45$$

$$\Rightarrow \min D=5\Leftrightarrow x=\frac{10}{7};y=\frac{-3}{7}$$

**Bài 2:** Học sinh giỏi Bắc Giang, năm học 2011

Cho $a+b=1$. Tìm GTNN của $A=a(a^2+2b)+b(b^2-a)$

**Lời giải**

Ta có $a+b=1$

$$\Rightarrow b=1-a\Rightarrow A=a(a^2+2b)+b(b^2-a)=a^3+2ab+b^3-ab=a^3+b^3+ab=a^3+(1-a)^3+a(1-a)=2a^2-2a+1$$

$$=2(a^2-a+\frac{1}{2})=2(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}\forall a\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

**Bài 3:** Học sinh giỏi Hà Nội, năm học 2006 - 2007

Cho các số thực $x,y$ thỏa mãn $x+y=2$. Tìm GTNN của $A=x^3+y^3+2xy$

**Lời giải**

$$A=x^3+y^3+2xy=(x+y)^3-3xy(x+y)+2xy$$

Theo giả thiết

$$x+y=2\Rightarrow y=2-x\Rightarrow A=2^3-6x(2-x)+2x(2-x)=4x^2-8x+8=4(x-1)^2+4\geq 4\forall\in R\Leftrightarrow x=y=1$$

**Bài 4:**

Cho các số thực $x,y$ thỏa mãn $x+y+4=0$. Tìm GTLN của $A=2(x^3+y^3)+3(x^2+y^2)+10xy$

**Lời giải**

Ta có: $A=2(x^3+y^3)+3(x^2+y^2)+10xy=2(x+y)^3-6xy(x+y)+3(x+y)^2-6xy+10xy$

$$=28xy-80=28x(-4-x)-80=-28(x^2+4x+4)+32\Rightarrow A=-28(x+2)^2+32\leq 32\Leftrightarrow x=-2\rightarrow y=-2$$

**Bài 5:** Học sinh giỏi Hà Nội, năm học 1996 - 1997

Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x^2+y^2-xy=4$. Tìm GTLN, GTNN của $P=x^2+y^2$

**Lời giải**

Ta có:

$$x^2+y^2-xy=4\Rightarrow 8=x^2+y^2+x^2+y^2-2xy=x^2+y^2+(x-y)^2\ge x^2+y^2\Rightarrow P\le 8\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\x^2+y^2-xy=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=\pm 2$$

Vậy GTLN của P = -2 $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=2\\x=y=-2\end{array}\right.$

Mặt khác:

$$8=2(x^2+y^2)-2xy=3(x^2+y^2)-(x-y)^2\le 3(x^2+y^2)\Rightarrow P\ge\frac{8}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0\\x^2+y^2-xy=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\\x=-y=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

Vậy GTNN của P = $\frac{8}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{\sqrt{3}};y=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}\\x=\dfrac{-2}{\sqrt{3}};y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$

**Bài 6:**

Cho các số thực $x,y,z$ thỏa mãn $2x+2y+z=4$. Tìm GTLN của biểu thức $A=2xy+yz+zx$

**Lời giải**

Từ giả thiết: $2x+2y+z=4\Rightarrow z=4-2x-2y\Rightarrow A=2xy+y(4-2x-2y)+x(4-2x-2y)$

$$=-2x^2-2y^2-2xy+4x+4y\Rightarrow 2A=-4x^2-4y^2-4xy+8x+8y=-4x^2-4x(y+2)-(y-2)^2+(y-2)^2-4y^2+8y$$

$$=-(2x+y-2)-3(y^2-\frac{4}{3}y)+4=-(2x+y-2)-3(y-\frac{2}{3})^2+\frac{16}{3}\le\frac{16}{3}\Rightarrow A\le\frac{16}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow z=\frac{4}{3}$$

**Bài 7:**

Cho các số thực $x,y,z$ thỏa mãn $x+y+z=6$. Tìm GTLN của $A=xy+2yz+3xz$

**Lời giải**

Từ giả thiết

$$\Rightarrow z=6-x-y\Rightarrow A=xy+z(2y+3x)=xy+(6-x-y)(2y+3x)=-3x^2-2y^2-4xy+18x+12y$$

$$\Rightarrow 3A=-9x^2-6y^2-12xy+54x+36y=-9x^2-6x(2y-9)-6y^2+36y=-(3x+2y-9)^2-2y^2+81\le 81$$

$$\Rightarrow A\le 27\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y-9=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}\Rightarrow z=3$$

## Bài 8:

Cho các số thực $x, y$ thỏa mãn $x^2+2xy+7(x+y)+2y^2+10=0$. Tìm GTNN $A=x+y+3$

**Lời giải**

Từ giả thiết

$x^2+2xy+7(x+y)+2y^2+10=0 \Rightarrow 4x^2+8xy+28x+28y+8y^2+40=0 \Leftrightarrow (2x+2y+7)^2+4y^2=9$

$\Rightarrow (2x+2y+7)^2 \le 9 \Rightarrow |2x+2y+7| \le 3 \Rightarrow -3 \le 2x+2y+7 \le 3 \Leftrightarrow -5 \le x+y \le -2 \Leftrightarrow -2 \le A \le 1$

+) $A=1 \Leftrightarrow x=-2; y=0$

+) $A=-2 \Leftrightarrow x=-5; y=0$

## Bài 9:

Tìm GTLN, GTNN của $S=ab+2009$, với $a,b$ là hai số thực khác 0 và $2a^2+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{1}{a^2}=4$

**Lời giải**

Ta có: $4=a^2+\dfrac{1}{a^2}-2+a^2+\dfrac{b^2}{4}-ab+ab-2=(a-\dfrac{1}{a})^2+(a-\dfrac{b}{2})^2+ab+a \ge ab+2 \Rightarrow ab \le 2 \Rightarrow S \le 2011$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-\dfrac{1}{a}=0 \\ a-\dfrac{b}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1; b=-2 \\ a=1; b=2 \end{cases}$$

Ta lại có: $4=(a-\dfrac{1}{a})^2+(a+\dfrac{b}{2})^2-ab+2 \ge -ab+2 \Rightarrow ab \ge -2 \Rightarrow S \ge 2007 \Leftrightarrow \begin{cases} a-\dfrac{1}{a}=0 \\ a+\dfrac{b}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1; b=-2 \\ a=-1; b=2 \end{cases}$

Vậy GTNN của S = 2007 $\Leftrightarrow (a,b)=(\pm 1; \pm 2)$

## Bài 10: Tuyển sinh vào 10 Thanh Hóa, năm học 2009 - 2010

Cho các số thực $m,n,p$ thỏa mãn: $n^2+np+p^2=1-\dfrac{3m^2}{2}$. Tìm GTNN, GTLN của $A=m+n+p$

**Lời giải**

Theo giả thiết có:

$n^2+np+p^2=1-\dfrac{3m^2}{2}\Rightarrow 2n^2+2np+2p^2+3m^2=2\Leftrightarrow m^2+n^2+p^2+2mn+2np+2mp+m^2-2mn+n^2+m^2-2np$

$+p^2=2\Leftrightarrow (m+n+p)^2+(m-n)^2+(m-p)^2=2\Rightarrow (m+n+p)^2\le 2\Rightarrow -\sqrt{2}\le m+n+p\le\sqrt{2}\Rightarrow -\sqrt{2}\le m+n+p\le\sqrt{2}$

+) $A=-\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}m-n=0\\m-p=0\\m+n+p=-\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow m=n=p=\dfrac{-\sqrt{2}}{3}$

+) $A=\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}m-n=0\\m-p=0\\m+n+p=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow m=n=p=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

## Bài 11:

Cho $x,y,z$ là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm GTLN, GTNN $A=x+y+2z$

## Lời giải

Từ $x^2+y^2+z^2=3\Leftrightarrow 6x^2+6y^2+6z^2=18\Leftrightarrow (x+y+2z)^2+(x-y)^2+(2x-z)^2+(2y-z)^2=18$

$\Rightarrow x+y+2z\le 18\Rightarrow -3\sqrt{2}\le A\le 3\sqrt{2}$

+) $A=-3\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\2x-z=0\\2y-z=0\\x+y+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\\z=-\sqrt{2}\end{cases}$

+) $A=3\sqrt{2}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2};z=\sqrt{2}$

## Bài 12:

Cho các số thực $m,n,p$ thỏa mãn $2m^2+2n^2+4p^2+3mn+mp+2np=\dfrac{3}{2}$ (1)

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A=m+n+p$

## Lời giải

$(1)\Leftrightarrow 4m^2+4n^2+8p^2+6mn+2mp+4np=3\Leftrightarrow 3(m^2+n^2+p^2+2mn+2np+2pm)+(m^2-4mp+4p^2)+$

$(n^2-2np+p^2)=3\Leftrightarrow 3(m+n+p)^2+(m-2p)^2+(n-p)^2=3\Rightarrow 3(m+n+p)^2\le 3\Rightarrow -1\le m+n+p\le 1$

+) $A=-1\Leftrightarrow\begin{cases}m-2p=0\\n-p=0\\m+n+p=-1\end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{-1}{2};n=p=\dfrac{-1}{4}$

+) $A=1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-2p=0 \\ n-p=0 \\ m+n+p=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}; n=p=\frac{1}{4}$

## Bài 13:

Cho $x+y+z=3; A=x^2+y^2+z^2; B=xy+yz+zx$

a. Chứng minh $A \ge B$

b. Tìm GTNN của $A$

c. Tìm GTLN của $B$

d. Tìm GTNN của $A+B$

### Lời giải

a. Xét hiệu $A-B=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right] \ge 0 \Rightarrow A \ge B \Leftrightarrow x=y=z$

b. $(x+y+z)^2=9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0 \\ x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx \end{cases} \Rightarrow 9=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \le 3(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow 9 \le 3A \Rightarrow A \ge 3 \Leftrightarrow x=y=z=1$

c. $9=(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx) \ge 3(xy+yz+zx)=3B \Rightarrow B \le 3 \Leftrightarrow x=y=z=1$

d. Có: $\begin{cases} A+2B=9 \\ B \le 3 \end{cases} \Rightarrow A+B=9-B \ge 6 \Leftrightarrow x=y=z=1$

## Bài 14:

Cho $a,b,c \in [-1;2]$ thỏa mãn $a+b+c=0$. Tìm GTLN của $P=a^2+b^2+c^2$

### Lời giải

Với $x \in [-1,2]$, ta có: $x \ge -1; x \le 2 \Rightarrow (x+1)(x-2) \le 0 \Rightarrow x^2-x-2 \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le x+2$

Áp dụng : $P=a^2+b^2+c^2 \le a+2+b+2+c+2=a+b+c+6=6 \Rightarrow (a,b,c)=(-1,-1,2) \Rightarrow GTLN=6$

## Bài 15:

Cho $a,b,c \in [-1;2]$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTLN của $P=a^2+b^2+c^2$

### Lời giải

Ta có : $(a+1)(b+1)(c+1) \ge 0 \Rightarrow abc+ab+bc+ca+a+b+c+1 \ge 0$

$(2-a)(2-b)(2-c) \ge 0 \Rightarrow 8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-abc \ge 0 \Rightarrow 3(ab+bc+ca)+9-3(a+b+c) \ge 0$

$\Leftrightarrow 3(ab+bc+ca) \ge -6 \Leftrightarrow ab+bc+ca \ge -2 \Rightarrow P=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=1-2(ab+bc+ca) \le 5$

Dấu \prime = \prime \prime xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)=(-1,0,2) \Rightarrow MaxP=5$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 11:**

Tìm min của: $A=3x^2+y^2$ biết $3x+y=1$

**Hướng dẫn**

Từ $3x+y=1 \Rightarrow y=1-3x \Rightarrow A=3x^2+(1-3x)^2=12x^2-6x^2+1$

**Bài 2:**

Tìm min của: $A=xy$, biết $3x+y=1$

**Hướng dẫn**

Ta có $3x+y=1 \Rightarrow y=1-3x \Rightarrow A=x(1-3x)=-3x^2+x$

**Bài 3:**

Tìm min của: $A=a^3-b^3-ab$ biết: a – b =1

**Hướng dẫn**

$a=b+1 \Rightarrow A=(b+1)^3-b^3-(b+1)b \ =2b^2+2b+1$

**Bài 4:**

Tìm max của: $B=a.b$, biết: $3a+5b=12$

**Hướng dẫn**

Từ gt ta có: $a=\dfrac{12-5b}{3}$, thay vào $B=b\left(\dfrac{12-5b}{3}\right)=\dfrac{-5}{3}b^2+\dfrac{12}{3}b$

**Bài 5:**

Tìm min của: $C=x^3+y^3+xy$, biết: $x+y=1$

**Hướng dẫn**

Từ gt $\Rightarrow y=1-x$ thay vào C ta được: $C=x^3+(1-x)^3+xy=2x^2-2x+1$

**Bài 6:**

Tìm min của: $D=x^2+2y^2$ biết: $x+2y=1$

**Hướng dẫn**

Từ gt $\Rightarrow x=1-2y$ thay vào $D=(1-2y)^2+2y^2$

## Bài 7:

Tìm min của: $E=2x^2+5y^2$ biết: $4x-3y=7$

### Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow y=\dfrac{4x-7}{3}$ thay vào E và làm tiếp

## Bài 8:

Cho a, b > 0 và a + b = 4, tìm GTLN của $P=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\left(1-\dfrac{1}{b}\right)$

### Hướng dẫn

Ta có: $P=1-\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{1}{ab}=1-\dfrac{a+b}{ab}+\dfrac{1}{ab}=1-\dfrac{4}{ab}+\dfrac{1}{ab}=1-\dfrac{3}{ab}$

Do $a,b>0\Rightarrow a+b=4\ge 2\sqrt{ab}\Rightarrow \sqrt{ab}\le\dfrac{4}{2}=2\Rightarrow ab\le 4$

Khi đó: $\dfrac{3}{ab}\ge\dfrac{3}{4}\Rightarrow 1-\dfrac{3}{ab}\le 1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$, dấu = xày ra khi $\begin{cases}a+b=4\\a=b\end{cases}$ <=> $a=b=2$

## Bài 9:

Tìm min của: $F=\left(1+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(1+\dfrac{1}{b}\right)^2$, biết a + b = 1 và a, b > 0

### Hướng dẫn

**Cách 1:**

Ta có: $\left(1+\dfrac{a+b}{a}\right)^2+\left(1+\dfrac{a+b}{b}\right)^2=\left(2+\dfrac{b}{a}\right)^2+\left(2+\dfrac{a}{b}\right)^2=8+4\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)$

$\ge 8+4.2+2=18$

**Cách 2:**

Ta có: $F=\left(1+\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a^2}\right)+\left(1+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{b^2}\right)=2+2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)=2+2\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)+\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)$

$F=2+\dfrac{2}{ab}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ (1)

Mà $a+b=1\Rightarrow a^2+b^2=1-2ab$ thay vào (1) ta được $F=2+\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1-2ab}{a^2b^2}=2+\dfrac{1}{a^2b^2}$

Lại có: $a+b=1\ge 2\sqrt{ab}\Rightarrow \sqrt{ab}\le \frac{1}{2}\Rightarrow ab\le \frac{1}{4}\Rightarrow a^2b^2\le \frac{1}{16}$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2b^2}\ge \frac{16}{}\Rightarrow F=2+\frac{1}{a^2b^2}\ge 2+16=18$

Dấu = khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=1 \\ a=b \end{cases}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

**Bài 10:**

Cho $x,y$ thỏa mãn $2x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y^2}{4}=4$. Tìm GTLN của $A=xy$

**Hướng dẫn**

Từ gt ta có: $4=\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)+\left(x^2+\frac{y^2}{4}-xy\right)+xy+2\Rightarrow 4=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+xy+2$

$\Rightarrow xy+2\le 4\Rightarrow xy\le 2$

**Bài 11:**

Cho hai số thực $a,b\ne 0$, thỏa mãn $2a^2+\frac{b^2}{4}+\frac{1}{a^2}=4$, Tìm min, max của $S=ab+2017$

**Hướng dẫn**

Từ gt ta có: $4=\left(a^2+\frac{1}{a^2}-2\right)+\left(a^2+\frac{b^2}{4}-ab\right)+ab+2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+ab+2$

$\Rightarrow ab+2\le 4\Rightarrow ab+2017\le 2019\Rightarrow S\le 2019$

Mặt khác: $4=\left(a^2+\frac{1}{a^2}-2\right)+\left(a^2+\frac{b^2}{4}+ab\right)-ab+2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-ab+2$

$\Rightarrow -ab+2\le 4\Rightarrow ab\ge -2\Rightarrow ab+2017\ge 2015\Rightarrow S\ge 2015$

**Bài 12:**

Cho hai số $x,y$ khác 0 thỏa mãn $x^2+\frac{8}{x^2}+\frac{y^2}{8}=8$. Tìm min, max của $A=xy+2024$

**Hướng dẫn**

Từ giả thiết ta có: $8=x^2+\frac{8}{x^2}+\frac{y^2}{8} => 16=2x^2+\frac{16}{x^2}+\frac{y^2}{4}=\left(x^2+\frac{16}{x^2}-8\right)+\left(x^2+\frac{y^2}{4}+xy\right)-xy+8$

$$\Rightarrow 8=\left(x-\frac{4}{x}\right)^2+\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-xy+8\Rightarrow -xy+8\le 16\Rightarrow xy\ge -8\Rightarrow A=xy+2024\ge 2016$$

Mặt khác: $16=\left(x^2+\frac{16}{x^2}-8\right)+\left(x^2+\frac{y^2}{4}-xy\right)+xy+8=\left(x-\frac{4}{x}\right)^2+\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+xy-8$

$$\Rightarrow xy-8\le 16\Rightarrow xy\le 8\Rightarrow S=xy+2024\le 2032$$

**Bài 13:**

Cho $x,y\in R$ khác 0 biết $8x^2+y^2+\frac{1}{4x^2}=4$. Tìm $x,y$ để $B=x.y$ đạt min và đạt max

**Hướng dẫn**

Ta có: $4=8x^2+y^2+\frac{1}{4x^2}=\left(4x^2+\frac{1}{4x^2}-2\right)+\left(4x^2+y^2-4xy\right)+4xy+2$

$4=\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2+\left(2x-y\right)^2+4xy+2 => 4xy+2\le 4 => B=xy\le\frac{1}{2}$

Mặt khác: $4=\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2+\left(2x+y\right)^2-4xy+2 => -4xy+2\le 4 => B=xy\ge\frac{-1}{2}$

**Bài 14:**

Cho $x,y>0$ thỏa mãn $x+y=1$. Tìm min của $A=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$

**Hướng dẫn**

Ta có: $A=16(xy)^2+12x^3+12y^3+9xy+25xy=6x^2y^2+12\left(x^3+y^3\right)+34xy$

Vì $x+y=1$ nên $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=(x+y)^2-3xy=1-3xy$, thay vào $A$

$A=6x^2y^2+12(1-3xy)+34xy$, Đặt $xy=t$ khi đó $A=6t^2-2t+12$

**Bài 15:**

Cho $x,y$ là các số thực thỏa mãn $x+y=1$. Tìm min của biểu thức $C=\left(x^2+4y\right)\left(y^2+4x\right)+8xy$

**Hướng dẫn**

Ta có: $C=\left(x^2+4y\right)\left(y^2+4x\right)+8xy=x^2y^2+4x^3+4y^3+16xy+8xy=x^2y^2+4\left(x^3+y^3\right)+24xy$

Do $x+y=1 => x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=1-3xy$ thay vào C ta được:

$$C=x^2y^2+4(1-3xy)+24xy=x^2y^2+12xy+4=\left(x^2y^2+2xy.6+36\right)-32=(xy+6)^2-32\ge -32$$

$MinC=-32$ , Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases} => \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

**Bài 16:**

Cho $x,y$ là hai số thực thỏa mãn $x+2y=3$. Tìm min của $A=x^2+2y^2$

**Hướng dẫn**

Từ gt ta có: $x=3-2y$ thay vào $A=(3-2y)^2+2y^2=6y^2-12y+9$

**Bài 17:**

Cho $x,y$ là hai số thực thỏa mãn $x^2+y^2-xy=4$. Tìm min và max của $A=x^2+y^2$

**Hướng dẫn**

Ta có: $x^2+y^2-xy=4 => 2x^2+2y^2-2xy=8 => (x-y)^2+x^2+y^2=8$

$\Rightarrow x^2+y^2 \le 8$ hay $A \le 8$

mặt khác: $8=2x^2+2y^2-2xy => 2x^2+2y^2=8+2xy => 3x^2+3y^2=8+(x+y)^2 \ge 8$ $=> x^2+y^2 \ge \frac{8}{3}$

hay $A \ge \frac{8}{3}$

**Bài 18:**

Cho $x,y$ thỏa mãn $x+y=2$. Tìm min của $A=x^3+y^3+2xy$

**Hướng dẫn**

Từ gt ta có : $y=2-x$ thay vào A ta được : $A=x^3+(2-x)^3+2x(2-x)$

**Bài 19:**

Cho các số thực $x,y$ thỏa mãn $x+y+4=0$. Tìm max của $A=2(x^3+y^3)+3(x^2+y^2)+10xy$

**Hướng dẫn**

Ta có: $x+y=-4$, nên $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=-64+12xy$,

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=16-2xy$ thay vào $A=2(-64+12xy)+3(16-2xy)+10xy$

**Bài 20:**

Cho $x,y,z \in R$, thỏa mãn $2x+2y+z=4$. Tìm max của $A=2xy+yz+zx$

**Hướng dẫn**

Từ giả thiết $\Rightarrow z=4-2x-2y$ thay vào $A$ ta được :

$$A=2xy+y(4-2x-2y)+x(4-2x-2y)=-2x^2-2y^2-2xy+4x+4y$$

## Bài 21:

Cho $x,y,z\in R$ thỏa mãn $x+y+z=6$. Tìm max của $A=xy+2yz+3zx$

### Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow z=6-x-y$ thay vào $A=xy+2y(6-x-y)+3x(6-x-y)$

## Bài 22:

Cho $x,y\in R$ thỏa mãn $x^2+2xy+7(x+y)+2y^2+10=0$. Tìm min và max của $S=x+y+3$

### Hướng dẫn

Từ gt ta có: $x^2+2xy+7x+7y+2y^2+10=0$

$$\Rightarrow x^2+2x\left(\frac{2y+7}{2}\right)+\frac{(2y+7)^2}{4}+2y^2+7y+10-\frac{(2y+7)^2}{4}=0 \Rightarrow \left(x+y+\frac{7}{2}\right)^2+y^2-\frac{9}{4}=0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}\le x+y+\frac{7}{2}\le\frac{3}{2} => -5\le x+y\le -2 \Rightarrow -2\le x+y+3\le 1$$

## Bài 23:

Cho các số thực $m,n,p$ thỏa mãn $n^2+np+p^2=1-\frac{3m^2}{2}$. Tìm min, max của $A=m+n+p$

### Hướng dẫn

Từ gt ta có: $2n^2+2np+2p^2=2-3m^2 => 3m^2+2n^2+2p^2+2np=2$

$$\Rightarrow (m^2+n^2+p^2+2mn+2np+2mp)+\left(2m^2+n^2+p^2-2mn-2mp\right)=2$$

$$\Rightarrow (m+n+p)^2+(m-p)^2+(m-n)^2\le 2 \Rightarrow -\sqrt{2}\le m+n+p\le\sqrt{2}$$

## Bài 24:

Cho $x,y,z$ là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$, Tìm min, max của $P=x+y+2z$

### Hướng dẫn

Ta có: $P^2=(x+y+2z)^2=x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4xz$, nên ta nhân 6 vào giả thiết:

$$18=6x^2+6y^2+6z^2=\left(x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4zx\right)+\left(5x^2+5y^2+2z^2-2xy-4yz-4zx\right)$$

$$18=(x+y+2z)^2+(x-y)^2+(2x-z)^2+(2y-z)^2 => (x+y+2z)^2\le 18$$

$-\sqrt{18} \le x+y+2z \le \sqrt{18}$

**Bài 25:**

Cho các số thực $m,n,p$ thỏa mãn: $2m^2+2n^2+4p^2+3mn+mp+2np=\dfrac{3}{2}$,

Tìm min, max của $B=m+n+p$

**Hướng dẫn**

Từ gt ta có: $4m^2+4n^2+8p^2+6mn+2mp+4np=3$

$\Rightarrow 3\left(m^2+n^2+p^2+2mn+2mp+2np\right)+\left(m^2+n^2+5p^2-4mp-2np\right)=3$

$\Rightarrow 3(m+n+p)^2+(2p-m)^2+(n-p)^2=3 \Longrightarrow 3(m+n+p)^2 \le 3 \Rightarrow -1 \le m+n+p \le 1$

**Bài 26:**

Cho $x,y,z$ thỏa mãn $x+y+z=3$, Tìm min, max của $A=xy+yz+zx$

**Hướng dẫn**

Từ gt $\Rightarrow z=3-x-y$ thay vào $A=xy+y(3-x-y)+x(3-x-y)=x^2-y^2-xy+3x+3y$

**Bài 27:**

Cho $x,y,z$ thỏa mãn $x+y+z=3$, Tìm min max của $B=-xy+3yz+4zx$

**Hướng dẫn**

Từ gt ta có: $z=3-x-y \Rightarrow B=-xy+3y(3-x-y)+4x(3-x-y)$

$\Rightarrow B=-4x^2-3y^2-16xy+9y+12x$

**Bài 28:**

Cho các số thực $x,y,z$ thỏa mãn $2x+3y-z=4$. Tìm min max của $A=-xy+yz+zx$

**Hướng dẫn**

Từ giả thiết $\Rightarrow z=2x+3y-4$ thay vào $A=-xy+y(2x+3y-4)+x(2x+3y-4)$

**Bài 29:**

Cho các số thực $x,y,z$ thỏa mãn $2x+3y-z=4$, tìm min max của $B=12xy-3yz-4zx$

**Hướng dẫn**

Từ gt ta có: $z=2x+3y-4$ thay vào $B=12xy-3y(2x+3y-4)-4x(2x+3y-4)$

## Bài 30:

Cho hai số thực $x, y$ thỏa mãn $x+y=-2$, tìm min của $A=2\left(x^3+y^3\right)-15xy+7$

### Hướng dẫn

Từ $x+y=-2$, ta có: $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=-8+6xy$

Thay vào $A=2(-8+6xy)-15xy+7=-3xy-9$ và $y=-x-2$ thay vào $A=-3x(-2-x)-9$

## Bài 31:

Cho hai số thực $x, y$ thỏa mãn: $x+y=-2$.

Tìm min của $B=x^4+y^4-x^3-y^3+2x^2y^2+2xy\left(x^2+y^2\right)+13xy$

### Hướng dẫn

$B=x^4+y^4-x^3-y^3+2x^2y^2+2xy\left(x^2+y^2\right)+13xy$

Từ $x+y=-2$, ta có: $x^4+y^4=\left[(x+y)^2-2xy\right]^2-2x^2y^2=(4-2xy)^2-2x^2y^2$

$x^3+y^3=6xy-8$, $x^2+y^2=4-2xy$

Thay vào $B$ ta được: $B=(4-2xy)^2-2x^2y^2-(6xy-8)+2x^2y^2+2xy(4-2xy)+13xy$

$B=-xy+24$, thay $y=-2-x \Rightarrow B=x^2+2x$

## Bài 32:

Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x+y=5$, tìm max của: $A=x^3+y^3-8\left(x^2+y^2\right)+xy+2$

### Hướng dẫn

Vì $x+y=5$ nên $x^3+y^3=125-15xy$ và $x^2+y^2=25-2xy$

thay vào $A=125-15xy-8(25-2xy)+xy+2$

## Bài 33:

Cho hai số $x, y$ thỏa mãn $x+y=5$. Tìm max của $B=x^4+y^4-4\left(x^3+y^3\right)-20\left(x^2+y^2\right)-2x^2y^2+xy$

### Hướng dẫn

$B=x^4+y^4-4\left(x^3+y^3\right)-20\left(x^2+y^2\right)-2x^2y^2+xy$

Vì $x+y=5$ nên $x^4+y^4=(25-2xy)^2-2x^2y^2$, $x^3+y^3=125-15xy$, $x^2+y^2=25-2xy$

$B=(25-2xy)^2-2x^2y^2-4(125-15xy)-20(25-2xy)-2x^2y^2+xy$

**Bài 34:**

Cho hai số $x,y$ thỏa mãn $x^4+y^4-7=xy(3-2xy)$. Tìm min max của $P=xy$

**Hướng dẫn**

Từ gt $\Rightarrow x^4+y^4-3xy+2x^2y^2=7\Rightarrow (x^4-2x^2y^2+y^4)+4x^2y^2-3xy=7 => (x^2-y^2)^2+\left(2xy-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{121}{16}$

$\Rightarrow \left(2xy-\frac{3}{4}\right)^2\le\frac{121}{16}$

**Bài 35:**

Cho các số thực $x,y$ thỏa mãn $7x^2+9y^2+12xy-4x-6y-15=0$. Tìm min max của $A=2x+3y+5$

**Hướng dẫn**

Từ gt $\Rightarrow (2x)^2+(3y)^2+2.2x.3y-2.2x-2.3y+1+3x^2=16\Rightarrow (2x+3y+1)^2+3x^2=16$

**Bài 36:**

Cho các số thực x,y,z thỏa mãn: $3x^2+2y^2+5z^2+4xy-2xz+2yz=5$, Tìm min max của: $P=x+y$

**Hướng dẫn**

Từ gt ta có: $(x^2+y^2+2xy)+(2x^2+y^2+5z^2+2xy-2xz+2yz)=5$

$\Rightarrow (x+y)^2+(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)+(4z^2-4xz+x^2)=5$

$\Rightarrow (x+y)^2\le 5 => -\sqrt{5}\le x+y\le\sqrt{5}$

**Bài 37:**

Cho các số x, y, z thỏa mãn: $3x+y+2z=1$. Tìm min max của: $p=x^2+y^2+z^2$

**Hướng dẫn**

Từ gt ta có: $y=1-3x-2z\ \Rightarrow y^2=1+9x^2+4z^2-6x+12xz-4z$

khi đó $P=10x^2+5z^2+12xz-6x-4z+1$

**Bài 38:**

Cho các số $x,y,z$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm max của $A=2xy+3yz+4zx$

**Hướng dẫn**

Từ gt $\Rightarrow z=1-x-y$ thay vào $A=2xy+3y(1-x-y)+4x(1-x-y)$

**Bài 39:**

Cho $x,y\in R$, thỏa mãn $x+2y=1$. Tìm max của $P=xy$

**Hướng dẫn**

Từ gt $\Rightarrow x=1-2y$ thay vào $P=y(1-2y)$

**Bài 40:**

Cho $x,y\geq 0;x+y=1$. Tìm min, max của $A=x^2+y^2$

**Hướng dẫn**

Từ giả thiết $\Rightarrow y=1-x$ thay vào $A=x^2+(1-x)^2$

**Bài 41:**

Tìm min max của $P=x+y+z$, biết $y^2+z^2+yz=1-\frac{3}{2}x^2$

**Hướng dẫn**

Từ giải thiết $\Rightarrow 2y^2+2z^2+2yz=2-3x^2 \Rightarrow 3x^2+2y^2+2z^2+2yz=2$

$\Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\right)+\left(2x^2+y^2+z^2-2xy-2zx\right)=2$

$\Rightarrow (x+y+z)^2+(x-y)^2+(x-z)^2=2 => (x+y+z)^2\leq 2$

**Bài 42:**

Cho $x^2+3y^2+2xy-10x-14y+18=0$. Tìm min, max của $S=x+y$

**Hướng dẫn**

Từ gt $\Rightarrow x^2+2x(y-5)+(y-5)^2+3y^2-14y+18-y^2+10y-25=0$

$\Rightarrow (x+y-5)^2+2\left(y^2-2y+1\right)=9 \Rightarrow (x+y-5)^2\leq 9 \Rightarrow -3\leq x+y-5\leq 3$

**Bài 43:**

Cho $a,b,c$ không âm thỏa mãn $3a+2c=51;c+5b=21$. Tìm max của $A=a+b+c$

**Hướng dẫn**

Cộng theo vế giả thiết ta được $3a+3c+5b=72 \Rightarrow 3(a+b+c)=72-2b\leq 72$

Do $b\ge 0\Rightarrow a+b+c\le \frac{72}{3}=24$

**Bài 44:**

Cho $a,b,c$ là các số không âm thỏa mãn $2a+b=6-3c$ và $3a+4b=3c+4$

Tìm min $E=2a+3b-4c$

**Hướng dẫn**

Cộng theo vế ta được: $a+b=2\Rightarrow \begin{cases} a=4-3c \\ b=3c-2 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} c\le \frac{4}{3} \\ c\ge \frac{2}{3} \end{cases}$, do $\begin{cases} a\ge 0 \\ b\ge 0 \end{cases}$

Khi đó $E=2(4-3c)+3(3c-2)-4c=2-c$

**Bài 45:**

Cho $x,y,z\ge 0, 2x+7y=2014, 3x+5z=3031$. Tìm GTLN của biểu thức $A=x+y+z$

**Hướng dẫn**

Cộng theo vế của gt ta có $5x+5y+5z=5045-2y\le 5045$ do $y\ge 0$

nên $5(x+y+z)\le 5045 => x+y+z\le 1009$

**Bài 46:**

Cho $a+b=2$ ,Tìm max của: $A=ab(a^2+b^2)$

**Hướng dẫn**

Ta có: $a+b=2 => a^2+b^2=4-2ab => A=ab(4-2ab)=-2a^2b^2+4ab$

$A=-(a^2b^2-2ab+1)+2\le 2$, Max $A=2$

**Bài 47:**

Cho $x,y$ thỏa mãn: $(11x+6y+2015)(x-y+3)=0$. Tìm min của $P=xy-5x+2016$

**Hướng dẫn**

Từ gt ta có: $11x+6y+2015=0$ hoặc $x-y+3=0$

TH1: Ta có : $11x+6y+2015=0\Rightarrow y=\frac{11x+2015}{6}$ thay vào $P$

TH2: ta có: $x-y+3=0\Rightarrow y=x+3$ thay vào $P$

**Bài 48:**

Cho 3 số $x, y, z$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm GTLN của $B=xy+yz+zx$

**Hướng dẫn**

Ta có: $B=xy+z(x+y)=xy+\left[3-(x+y)\right](x+y)$

$=xy+3(x+y)-(x+y)^2=-x^2-y^2-xy+3x+3y=-\left(x+\frac{y-3}{2}\right)^2+\frac{-3}{4}(y-1)^2+3\le 3$

**Bài 49:**

Cho $x^2+xy+3y^2=5$. Tìm Min hoặc max của biểu thức $P=x^2-2xy+2y^2$

**Hướng dẫn**

Ta có: $\frac{P}{5}=\frac{x^2-2xy+2y^2}{x^2+xy+3y^2}$

## **Dạng 5:** Phương pháp đổi biến số

**Phương pháp:**

- Phân tích thành các biểu thức tương đồng để đặt ẩn phụ.

- Sử dụng phương pháp nhóm hợp lý làm xuất hiện nhân tử để đặt ẩn phụ.

- Sử dụng các hằng đẳng thức $(a \pm b)^2, (a+b+c)^2$.

### **Bài 1:**

Tìm GTNN của biểu thức $A=(x-1)^2+(x-3)^2$

**Lời giải**

Đặt $y=x-2 \Rightarrow A=(y+1)^2+(y-1)^2=2y^2+2 \ge 2 \Rightarrow \min A=2 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow x=2$

### **Bài 2:**

Tìm GTNN của $A=(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)$

**Lời giải**

$A=(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)=(x^2-9x+8)(x^2-9x+20)$

Đặt $t=x^2-9x+8 \Rightarrow A=t(t+12)=t^2+12t=(t+6)^2-36 \ge -36 \Leftrightarrow t=6 \Leftrightarrow x^2-9x+14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=7 \end{array}\right.$

### **Bài 3:**

Tìm GTNN của biểu thức $A=\dfrac{x^2-4x+1}{x^2}(x \ne 0)$

**Lời giải**

$A=1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}=1-4y+y^2 (y=\dfrac{1}{x}) \Rightarrow A=(y-2)^2-3 \ge -3 \Leftrightarrow y=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

### **Bài 4:**

Tìm GTNN của: $D=(x+8)^4+(x+6)^4$

**Lời giải**

$A=x(x-7)(x-3)(x-4)=(x^2-7x)(x^2-7x+12)$, đặt $x^2-7x+6=t$, khi đó:

$A=(t-6)(t+6)=t^2-36 \ge -36$, dấu " = " khi $t^2=0 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right.$

Vậy $MinA=-36$ khi $x=1$ hoặc $x=6$

## Bài 5:

Tìm GTNN của $B=(x-1)(x-3)(x^2-4x+5)$

## Lời giải

$B=(x^2-4x+5)(x^2-4x+5)$, đặt $x^2-4x+4=0$.

Khi đó $B=(t-1)(t+1)=t^2-1\geq -1$ , dấu " = " khi $t^2=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow t=2$

## Bài 6:

Tìm min của $A=x(x+2)(x+4)(x+6)+8$

## Lời giải

$A=x(x+6)(x+2)(x+4)+8=(x^2+6x)(x^2+6x+8)+8$, đặt $x^2+6x+4=t$.

Khi đó $A=(t-4)(t+4)+8=t^2-16+8=t^2-8\geq -8$, dấu " = " xảy ra khi $t^2=0$

$$x^2+6x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3+\sqrt{5} \\ x=-3-\sqrt{5} \end{array}\right.$$

## Bài 7:

Tìm GTNN của: $B=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

## Lời giải

$B=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$ , Đặt $x^2+5x+5=t$, Khi đó:

$B=(t-1)(t+1)=t^2-1\geq -1$ , Dấu " = " khi $t^2=0 <=> x^2+5x+5=0 <=> x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$

## Bài 8:

Tìm GTNN của $A=(x^2+x-6)(x^2+x+2)$

## Lời giải

Đặt $x^2+x-2=t$. Khi đó $A=(t-4)(t+4)=t^2-16\geq -16$

Dấu " = " xảy ra khi $t=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

## Bài 9:

Tìm GTNN của $C=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

## Lời giải

$C=(x-1)(x+6)(x+2)(x+3)=(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)$, đặt $x^2+5x=t$.

Khi đó $C=(t-6)(t+6)=t^2-36\ge -36$, dấu " = " khi $t=0\Leftrightarrow x^2+5x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-5\end{array}\right.$

## Bài 10:

Tìm GTNN của $D=(2x-1)(x+2)(x+3)(2x+1)$

## Lời giải

$D=(2x-1)(x+3)(x+2)(2x+1)=(2x^2+5x-3)(2x^2+5x+2)$, đặt $2x^2+5x=t$

khi đó $D=(t-3)(t+2)=t^2-t-6=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}\ge\dfrac{-25}{4}$, dấu " = " khi $t=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x^2+5x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{29}}{4}$

## Bài 11:

Tìm min của $C=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2011$

## Lời giải

$C=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+2011=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+2011$, đặt $x^2+5x+5=t$

Khi đó $C=(t-1)(t+1)+2011\Leftrightarrow x^2+5x+5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$

## Bài 12:

Tìm max của $E=5+(1-x)(x+2)(x+3)(x+6)$

## Lời giải

$E=5-(x-1)(x+6)(x+2)(x+3)=-(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)+5$, đặt $x^2+5x=t$ .

Khi đó $E=-(t-6)(t+6)+5=-(t^2-36)+5=-t^2+41\le 41$

Dấu " = " Khi $t^2=0 <=\Leftrightarrow x^2+5x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-5\end{array}\right.$

## Bài 13:

Tìm GTNN của $M=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

**Lời giải**

$M=(x-1)(x+6)(x+2)(x=3)=(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)$, đặt $x^2+5x=t$ .

Khi đó $M=(t-6)(t+6)=t^2-36\geq -36$, dấu “ = ” khi $t=0\Leftrightarrow x^2+5x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-5\end{array}\right.$

**Bài 14:**

Tìm min của $D=(x+1)(x^2-4)(x+5)+2014$

**Lời giải**

$D=(x+1)(x+2)(x-2)(x+5)+2014=(x^2+3x-10)(x^2+3x+2)+2014$, đặt $x^2+3x-4=t$

Khi đó $D=(t-6)(t+6)+2014=t^2+1978$, dấu “= “ xảy ra khi $t^2=0\Leftrightarrow x^2+3x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-4\end{array}\right.$

**Bài 15:**

Tìm GTNN của $C=x^4-6x^3+10x^2-6x+9$

**Lời giải**

$C=(x^4-2.3x^2.x+9x^2)+(x^2-6x+9)=(x^2-3x)^2+(x-3)^2\geq 0$

**Bài 16:**

Tìm GTNN của $D=(x+8)^4+(x+6)^4$

**Lời giải**

Đặt: $x+7=y\Rightarrow D=(y+1)^4+(y-1)^4=2y^4+12y^2+2\geq 2$

**Bài 17:**

Tìm max của $F=2-3(x+1)^4-3(x-5)^4$

**Lời giải**

Đặt $x-2=t\Rightarrow F=2-3(t+3)^4-3(t-3)^4$

$-F=3(t^2+6t+9)^2+3(t^2-6t+9)^2-2=6t^4+324t^2+484=6(t^4+54t^2)+484$

$F=-6(t^2+27)^2+3890\leq 3890$

## Bài 18:

Tìm min của $G=(x+3)^4+(x-7)^4$

## Lời giải

Đặt $x-2=t \Rightarrow G=(t+5)^4+(t-5)^4=\left(t^2+10t+25\right)^2+\left(t^2-10t+25\right)^2$

$G=2t^4+300t^2+1250=2\left(t^4+2.75t^2+5625\right)-10^4=2\left(t^2+75\right)^2-10^4 \geq -10^4$

## Bài 19:

Tìm min của $I=x^4-6x^3+11x^2+12x+20$

## Lời giải

$I=x^4-6x^3+11x^2-12x+20=x^2\left(x^2-6x+9\right)+2x^2-12x+20$

$I=x^2(x-3)^2+2\left(x^2-6x+9\right)+2=x^2(x-3)^2+2(x-3)^2+2 \geq 2$

## Bài 20:

Tìm số nguyên $m$ lớn nhất sao cho BĐT luôn đúng với mọi $x$: $(x+1)(x+2)^2(x+3) \geq m$

## Lời giải

$VT=(x+1)(x+3)(x+2)^2=\left(x^2+4x+3\right)\left(x^2+4x+4\right)$, đặt $x^2+4x=t$, Khi đó:

$VT=(t+3)(t+4)=t^2+7t+12=t^2+2.t.\frac{7}{2}+\frac{49}{4}+12-\frac{49}{4}=\left(t+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \geq \frac{-1}{4}$