

ĐỀ THI CHÍNH**Bài 1.(5 điểm)**

Cho x, y là hai số thay đổi thỏa mãn điều kiện $x > 0, y < 0$ và $x + y = 1$.

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{y-x}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2} \right]$.

b) Chứng minh rằng: $A < -4$.

Bài 2. (2 điểm)

Cho ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0,$$

Tính giá trị của biểu thức $T = (x-4)^{2014} + (y-4)^{2014} + (z-4)^{2014}$.

Bài 3.(2 điểm)

Cho số nguyên tố $p > 3$. Biết rằng có số tự nhiên n sao cho trong cách viết thập phân của số p^n có đúng 20 chữ số. Chứng minh rằng trong 20 chữ số này có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Bài 4.(8 điểm)

Cho hình vuông ABCD cạnh a và điểm N trên cạnh AB . Cho biết tia CN cắt tia DA tại E , tia Cx vuông góc với tia CE cắt tia AB tại F . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF .

a) Chứng minh $CE = CF$;

b) Chứng minh B, D, M thẳng hàng;

c) Chứng minh $\triangle EAC$ đồng dạng với $\triangle MBC$;

d) Xác định vị trí điểm N trên cạnh AB sao cho tứ giác $ACFE$ có diện tích gấp 3 lần diện tích hình vuông ABCD.

Bài 5. (3 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $3^x - y^3 = 1$

b) Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$

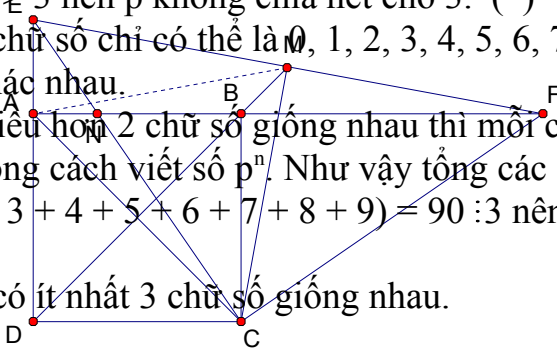
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

----- Hết -----
(Giám thị coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

Bài	Nội dung	Biểu điểm
Bài 1	a) Với $x + y = 1$, biến đổi và thu gọn A. $A = \frac{y-x}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2} \right]$ $= \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2(x+y)^2 - 2x^2y - x^2(x^2-y^2)}{(x-y)^2(x+y)^2}$ $= \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2 \cdot 1 - 2x^2y - x^2(x-y)}{(x-y)^2 \cdot 1}$ $= \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2 - x^2(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2 - x^2}{(x-y)^2} = \frac{(y-x)(x-y)^2}{xy(y^2 - x^2)} = \frac{(x-y)^2}{xy}$	3(điểm)
	b) $A + 4 = \frac{(x-y)^2}{xy} + 4 = \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{1}{xy} < 0$ (vì $x > 0$; $y < 0$ và $x + y = 1$) Suy ra $A < -4$.	2(điểm)
Bài 2	$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0$ $\Leftrightarrow [4x^2 - 4x(y+z) + (y+z)^2] + (y^2 + z^2 - 6y - 10z + 34) = 0$ $\Leftrightarrow (2x - y - z)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 0$... $\Leftrightarrow y = 3; z = 5; x = 4$ Khi đó $T = (4 - 4)^{2014} + (3 - 4)^{2014} + (5 - 4)^{2014} = 2$.	2(điểm)
Bài 3	Do p là số nguyên tố và $p \geq 3$ nên p không chia hết cho 3. (*) p^n có 20 chữ số. Các chữ số chỉ có thể là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gồm 10 chữ số đôi một khác nhau. Nếu không có quá nhiều hơn 2 chữ số giống nhau thì mỗi chữ số phải có mặt đúng 2 lần trong cách viết số p^n. Như vậy tổng các chữ số của số p^n là: $2(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 90 : 3$ nên $p^n : 3$ Điều này mâu thuẫn (*). Vậy trong số p^n phải có ít nhất 3 chữ số giống nhau. 	2(điểm)
Bài 4	a) Chứng minh được $\triangle CDE = \triangle CBF$ (g.c.g) $\Rightarrow CE = CF$.	2(điểm)

	b) Chỉ ra $AM = MC = \frac{1}{2}EF \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực BD của đoạn AC. Vậy B, D, M thẳng hàng.	2(điểm)
	c) Chỉ ra $\angle ACE = \angle BCM$ } $\Rightarrow \Delta EAC \sim \Delta MBC$ (g.g). Chỉ ra $\angle CAE = \angle CBM$ }	2(điểm)
	d) Đặt $BN = x \Rightarrow AN = a - x$. *) Tính $S_{AEFC} = S_{ACE} + S_{ECF} = \frac{1}{2}DC.AE + \frac{1}{2}CE^2$ - Tính AE: Lý luận để có $\frac{AE}{ED} = \frac{AN}{DC} \Leftrightarrow \frac{AE}{AE + AD} = \frac{AN}{DC} \Leftrightarrow \frac{AE}{AE + a} = \frac{a - x}{a} \Leftrightarrow AE.a = AE(a - x) + a(a - x)$ $\Leftrightarrow AE = \frac{a(a - x)}{x}$ - Tính CE^2: Lý luận để có $CE^2 = CD^2 + DE^2 = a^2 + (a + AE)^2$ $\Rightarrow CE^2 = a^2 + \left(a + \frac{a(a - x)}{x}\right)^2 = a^2 + \frac{a^4}{x^2}$ Do đó $S_{AEFC} = \frac{a^3(a + x)}{2x^2}$ *) Tính $S_{ABCD} = a^2$. Lý luận với $S_{AEFC} = 3S_{ABCD}$ để có $6x^2 - ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - a)(3x + a) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$ (vì $a, x > 0$). KL: N là trung điểm của AB thì $S_{AEFC} = 3S_{ABCD}$.	2(điểm)
Bài 5	a) $3^x - y^3 = 1 \Leftrightarrow 3^x = y^3 + 1$ (1) - Dễ thấy $x = y = 0$ là một nghiệm của (1). - Nếu $x < 0$ thì $3^x = \frac{1}{3^n}$ (n nguyên dương, $n = -x$) suy ra $0 < 3^x < 1$. Mà $y^3 + 1$ là số nguyên, suy ra (1) không có nghiệm nguyên. - Nếu $x > 0$ thì $3^x \vdots 3$ $(1) \Leftrightarrow 3^x = (y + 1)^3 - 3y(y + 1) \Rightarrow (y + 1)^3 \vdots 3$ nên $y + 1 \vdots 3$ Đặt $y + 1 = 3k$ (k nguyên), suy ra $y = 3k - 1$. Thay vào (1) ta được: $3^x = (3k - 1)^3 + 1 = 9k(3k^2 - 3k + 1)$ nên $3k^2 - 3k + 1$ là ước của 3^x mà $3k^2 - 3k + 1 \not\vdots 3$ và $3k^2 - 3k + 1 = 3\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$ nên $3k^2 - 3k + 1 = 1 \Leftrightarrow 3k(3k - 1) = 0 \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $k = 1$. Với $k = 0$ thì $y = -1$ suy ra $3^x = 0$ phương trình vô nghiệm. Với $k = 1$ thì $y = 2$ suy ra $3^x = 9$ nên $x = 2$. Vậy các cặp số nguyên $(x, y) \in \{(0; 0), (2; 2)\}$.	1.5(điểm)

	b) Từ giả thiết $0 \leq a, b, c \leq 2$ suy ra $(2 - a)(2 - b)(2 - c) + abc \geq 0$ $\Leftrightarrow 8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) \geq 0$ $\Leftrightarrow 8 - 12 + 2ab + 2bc + 2ac \geq 0$ (vì $a + b + c = 3$) $\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ac \geq 4$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \geq 4 + a^2 + b^2 + c^2$ $\Leftrightarrow (a + b + c)^2 \geq 4 + a^2 + b^2 + c^2$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$ (vì $a + b + c = 3$) Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a; b; c) = (0; 1; 2)$ và các hoán vị của bộ số này. Vậy P có GTLN nhất là 5 $\Leftrightarrow (a; b; c) = (0; 1; 2)$ và các hoán vị của bộ số này.	1.5(điểm)
--	---	-----------

Chú ý: - Điểm được lấy đến 0.25.

- Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.