PHÒNG GD-ĐT VỤ BẢN
TRƯỜNG THCS CỘNG HÒA

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
VÒNG I

Môn: TOÁN - Lớp: 9
Năm học: 2020- 2021
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi gồm: 01trang)

Bài 1:

a) Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{15-10\sqrt{2}}+\sqrt{13+4\sqrt{10}}-\sqrt{11+2\sqrt{10}}}{\sqrt{12+8\sqrt{2}}-\sqrt{9-4\sqrt{2}}}.$

b) Cho 3 số thực a,b,c thay đổi khác 0 và thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0.$

Chứng minh biểu thức $Q=\dfrac{ab}{c^2}+\dfrac{bc}{a^2}+\dfrac{ac}{b^2}$ có giá trị không đổi.

Bài 2.

1. Giải các phương trình

a) $x-\sqrt{x-8}-3\sqrt{x}+1=0$

b) $x+2\sqrt{7-x}+\sqrt{7x-x^2}-2\sqrt{x}-7=0.$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{|x|}{y+3}+y-3=0\\ |x|-y^2=1\end{cases}.$

Bài 3.

a) Cho $a\geq 1;\ b\geq 1$. Chứng minh $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\leq ab$.

b) Cho $x+y=15.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{y-3}.$

Bài 4. ChoΔABC có 3 góc nhọn. Các đường cao AF, BE và CD cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: AE.AC = AB.AD

b)Chứng minh; 4 điểm B, C, E, D cùng nằm trên một đường tròn. Hãy xác định vị trí tâm O đường tròn này.

c) Chứng minh rằng: OE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE.

Bài 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau:

$4\sqrt{x} - y = y\sqrt{x}.$

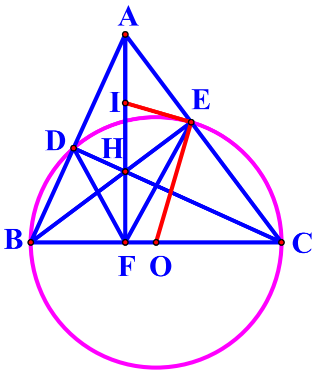
-----*HẾT*-----

Đáp án và Hướng dẫn chấm

Bài	**Nội dung**	**Điểm**
Bài 1 **3đ**	a) Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{15 - 10\sqrt{2}} + \sqrt{13 + 4\sqrt{10}} - \sqrt{11 + 2\sqrt{10}}}{\sqrt{12 + 8\sqrt{2}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}.$ $P = \dfrac{\sqrt{15 - 2\sqrt{50}} + \sqrt{13 + 2\sqrt{40}} - \sqrt{11 + 2\sqrt{10}}}{\sqrt{\left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(1 - 2\sqrt{2}\right)^2}}.$ $P = \dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{5} - \sqrt{10}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5} + \sqrt{8}\right)^2} - \sqrt{\left(1 + \sqrt{10}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(1 - 2\sqrt{2}\right)^2}}.$ $P = \dfrac{\sqrt{10} - \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{8} - 1 - \sqrt{10}}{1 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 1}$ $= \dfrac{2\sqrt{2} - 1}{2}$	0,5 0,5 0,5
	b) Cho 3 số thực a, b, c thay đổi khác 0 và thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0.$ Chứng minh biểu thức $Q = \dfrac{ab}{c^2} + \dfrac{bc}{a^2} + \dfrac{ac}{b^2}$ có giá trị không đổi.	
	Đặt $x = \dfrac{1}{a}; y = \dfrac{1}{b}; z = \dfrac{1}{c}$ khi đó $x + y + z = 0$ Suy ra $x = -(y+z)$ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = -(y+z)^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ Xét biểu thức $= -3yz(x + y + z) = 0$.	0,5 0,5

	$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz \Rightarrow \dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}=\dfrac{3}{abc}$ $Q=\dfrac{ab}{c^2}+\dfrac{bc}{a^2}+\dfrac{ac}{b^2}=abc\left(\dfrac{1}{c^3}+\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\right)$ Do đó $Q=abc.\dfrac{3}{abc}=3$ Vậy biểu thức Q có giá trị không đổi	0,5
Bài 2. **6đ**	1.Giải các phương trình a) $x-\sqrt{x-8}-3\sqrt{x}+1=0$ b) $x+2\sqrt{7-x}+\sqrt{7x-x^2}-2\sqrt{x}-7=0.$	
	a) $x-\sqrt{x-8}-3\sqrt{x}+1=0$ Điều kiện $x\geq 8$. Phương trình $\Leftrightarrow 2x-2\sqrt{x-8}-6\sqrt{x}+2=0$ $\Leftrightarrow x-8-2\sqrt{x-8}+1+1x-6\sqrt{x}+9=0$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-8}-1\right)^2+\left(\sqrt{x}-3\right)^2=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-8}=1\\ \sqrt{x}=3\end{cases}$ $\Leftrightarrow x=9$ Vậy nghiệm của phương trình là $x=9$. b) $x+2\sqrt{7-x}+\sqrt{7x-x^2}-2\sqrt{x}-7=0$ Điều kiện: $0\leq x\leq 7$. Khi đó, ta có $x+2\sqrt{7-x}+\sqrt{7x-x^2}-2\sqrt{x}-7=0$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{7-x}-2\sqrt{x}+\sqrt{x(7-x)}-(7-x)=0$ $\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{x}\right)-\sqrt{7-x}\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{x}\right)=0$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{7-x}-\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{7-x}\right)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{7-x}-\sqrt{x}=0\\ 2-\sqrt{7-x}=0\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}7-x=x\\ 7-x=4\end{array}\right.$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$ (Tmđk) Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{3;\dfrac{7}{2}\right\}$.	
	2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{\lvert x\rvert}{y+3}+y-3=0\\ \lvert x\rvert-y^2=1\end{cases}$.	
	ĐKXĐ: $y\neq -3$ $\begin{cases}\dfrac{\lvert x\rvert}{y+3}+y-3=0\\ \lvert x\rvert-y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lvert x\rvert+y^2-9=0\\ \lvert x\rvert-y^2=1\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}2\lvert x\rvert=10\\ \lvert x\rvert-y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lvert x\rvert=5\\ y^2=4\end{cases}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=-5\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=5\\ y=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x=-5\\ y=-2\end{cases}\end{array}\right.$ vậy hệ phương trình có nghiệm $(5;2);(-5;2);(5;-2);(-5;-2)$	0,5 0,5 0,5 0,5
Bài 3. 3đ	a) Cho $a\geq 1;\ b\geq 1$. Chứng minh $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\leq ab$.	
	Có $\sqrt{b-1}=\sqrt{1.(b-1)}\leq\dfrac{1+(b-1)}{2}=\dfrac{b}{2}\Rightarrow a\sqrt{b-1}\leq\dfrac{ab}{2};$ Và tương tự: $b\sqrt{a-1}\leq\dfrac{ab}{2}$ $\Rightarrow a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\leq\dfrac{ab}{2}+\dfrac{ab}{2}=ab\Rightarrow$ đpcm Dấu '=' xảy ra khi a = b = 2	0,5 0,5 0,5

	b) Cho $x+y=15.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{y-3}.$ Trước hết ta chứng minh : với $a+b\ge 0.$ ta có $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)\Rightarrow a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$ (*) Áp dụng (*) ta có : $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{y-3}\le\sqrt{2(x-4+y-3)}=4$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-4}=\sqrt{y-3}\\ x+y=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=7\end{cases}$ (thỏa mãn) Vậy giá trị lớn nhất là A=4 tại x=8; y=7	0,5 0,5 0,5
Bài 4 **6đ**		
	a) Chứng minh: AE.AC = AB.AD chứng minh được tam giác ABE và tam giác ADC đồng dạng suy ra $\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AE}\Rightarrow AC.AE=AB.AD$	1,5đ
	b)Do BE và CD là đường cao của tam giác ABC nên $\Delta BCE;\Delta BCD$ vuông tại E, D Do đó 4 điểm B,C,E,D thuộc đường tròn đường kính BC với tâm O là trung điểm của BC.	1,5đ
	c) Gọi I là trung điểm của AH suy ra I là tâm đường tròn đường kính AH. Do H là giao điểm của 3 đường cao . nên ta có $\Delta ADH;\Delta AEH$ vuông tại D và tại E. do đó 4 điểm A, D, H, E thuộc đường tròn đường kính AH.Nên E là điểm chung của đường tròn (I) và OI (1) Vì tam giác AHE vuông tại E có đường trung tuyến EI nên EI=HI=AI . suy ra tam giác IAE cân Do đó góc AEI bằng góc IAE Tương tự có BCE bằng CEO Mà $\widehat{IAE}+\widehat{BCE}=90^0$ do tam giác AFC vuông tại F	1 0,5 1

	$\Rightarrow \widehat{AEI}+\widehat{CEO}=90^0 \Rightarrow \widehat{OEI}=90^0 \Rightarrow OI \perp IE$ (2) Từ (1) và (2) suy ra OI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH. Vậy OI là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE	0,5
Bài 5. **2đ**	Tìm nghiệm nguyên của phương trình. $4\sqrt{x} - y = y\sqrt{x}$	
	ĐKXĐ $x \geq 0$ $4\sqrt{x} - y = y\sqrt{x} \Leftrightarrow y = \dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 4 - \dfrac{4}{\sqrt{x}+1}$ Do đó với các giá tri nguyên của x thì y nguyên khi $4 \vdots \sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \in \{1;2;4\} \Rightarrow \sqrt{x} \in \{0;1;3\}$ $\Rightarrow x \in \{0;1;9\}$ Với x= 0 thì y=0 Với x=1 thì y=2 Với x=9 thì y=3 Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(0;0);(1;2);(9;3)$	0,5 0,5 0,5 0,5

***Ghi chú**: Các cách giải khác với đáp án mà đúng và phù hợp với chương trình, thì giám khảo thống nhất chia điểm thành phần tương ứng.*

-----------HẾT---------

Cộng Hòa, ngày 04 tháng 12 năm 2020

Giáo viên biên soạn

Nguyễn Thành Công