

MỤC LỤC

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. Góc lượng giác. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

§2. Các phép biến đổi lượng giác

§3. Hàm số lượng giác và đồ thị

§4. Phương trình lượng giác cơ bản

Bài tập cuối chương I

CHƯƠNG II. DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. Dãy số

§2. Cấp số cộng

§3. Cấp số nhân

Bài tập cuối chương II

CHƯƠNG III. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

§1. Giới hạn của dãy số

§2. Giới hạn của hàm số

§3. Hàm số liên tục

Bài tập cuối chương III

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chủ đề 1 . Một số hình thức đầu tư tài chính

CHƯƠNG IV. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

§2. Hai đường thẳng song song trong không gian

§3. Đường thẳng và mặt phẳng song song

§4. Hai mặt phẳng song song

§5. Hình lăng trụ và hình hộp

§6. Phép chiếu song song. Hình biểu diễn của một hình không gian

Bài tập cuối chương IV

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

CHƯƠNG I HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: góc lượng giác, giá trị lượng giác của góc lượng giác; các phép biến đổi lượng giác; hàm số lượng giác và đồ thị; phương trình lượng giác cơ bản.

§1 GÓC LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

Trên mặt chiếc đồng hồ, kim giây đang ở vị trí ban đầu chỉ vào số 3 (Hình 1). Kim giây quay ba vòng và một phần tư vòng

$3\frac{1}{4}$ (tức là $3\frac{1}{4}$ vòng) đến vị trí cuối chỉ vào số 6 . Khi quay như thế, kim giây đã quét một góc với tia đầu chỉ vào số 3 , tia cuối chỉ vào số 6 .



Hình 1

Góc đó gợi nên khái niệm gì trong toán học?
Những góc như thế có tính chất gì?



1. Góc hình học và số đo của chúng

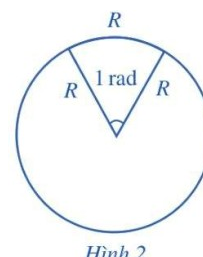
1 Nêu định nghĩa góc trong hình học phẳng.

Chúng ta đã biết, góc (còn được gọi là góc hình học) là hình gồm hai tia chung gốc. Mỗi góc có một số đo, đơn vị đo góc (hình học) là độ. Cụ thể như sau: Nếu ta chia đường tròn thành 360 cung tròn bằng nhau thì góc ở tâm chắn mỗi cung đó là 1° .

Số đo của một góc (hình học) không vượt quá 180° .

Một đơn vị khác được sử dụng nhiều khi đo góc là *radian* (đọc là ra-di-an).

Nếu trên đường tròn, ta lấy một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì góc ở tâm chắn cung đó gọi là góc có số đo 1 *radian*, gọi tắt là *góc 1 radian* (Hình 2). 1 radian còn viết tắt là 1 rad.



Hình 2

Nhận xét

Ta biết góc ở tâm có số đo 180° sẽ chắn cung bằng nửa đường tròn (có độ dài bằng πR) nên

số đo góc 180° bằng $\frac{\pi R}{R} \text{ rad} = \pi \text{ rad}$.

Do đó, $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ \approx 57^\circ 17' 45''$, và $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180} \right) \text{ rad} \approx 0,0175 \text{ rad}$.

Chú ý: Người ta thường không viết chữ radian hay rad sau số đo của góc. Chẳng hạn, $\frac{\pi}{2}$ rad

cũng được viết là $\frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 1 Hãy hoàn thành bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt sau.

Độ	30°	?	60°	?	120°	?	180°
Radian	?	$\frac{\pi}{4}$	?	$\frac{\pi}{2}$	?	$\frac{3\pi}{4}$	?

1 Hãy hoàn thành bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt sau.

Độ	18°	?	72°	?
Radian	?	$\frac{2\pi}{9}$	?	$\frac{5\pi}{6}$

Ta có bảng chuyển đổi số đo độ và số đo radian của một số góc đặc biệt.

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

2. Góc lượng giác và số đo của chúng

a) Khái niệm



So sánh chiều quay của kim đồng

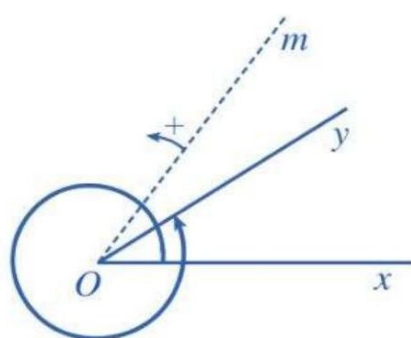
a) Chiều quay từ tia Om đến tia Ox theo

b) Chiều quay từ tia Om đến tia Oy trong Hình 3b

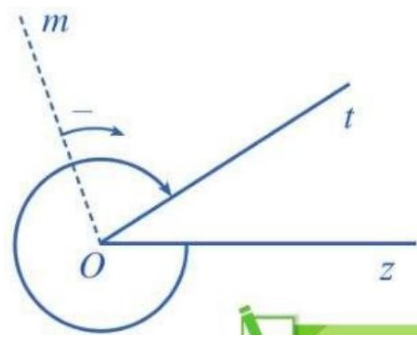
Để khảo sát việc quay tia Om quanh điểm O trong m là chiều dương. Thông thường, ta chọn chiều dương là hồ và chiều cùng chiều quay của kim đồng hồ gọi là chiều âm.

Cho hai tia Ou, Ov . Nếu tia Om quay chỉ theo chiều dương (hay chỉ theo chiều âm) xuất phát từ tia Ou đến trùng với tia Ov thì ta nói: Tia Om quét một góc lượng giác với tia đầu Ou và tia cuối Ov , kí hiệu là (Ou, Ov) .

Ví dụ 2: Đọc tên góc lượng giác, tia đầu và tia cuối của góc lượng giác đó trong Hình 4a.



a)



b)

Hình 4

Giải:

Trong Hình 4a, góc lượng giác là (Ox, Oy) với tia đầu Ox và tia cuối Oy .

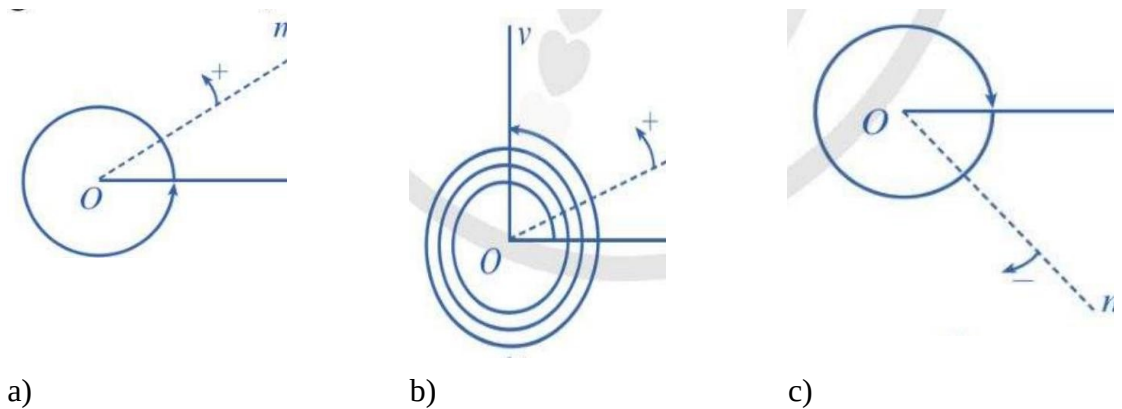
2. Đọc tên góc lượng giác, tia đầu và tia cuối của góc lượng giác đó trong Hình 4b.

3.

a) Trong Hình 5a, tia Om quay theo chiều dương đúng một vòng. Hỏi tia đó quét nên một góc bao nhiêu độ?

b) Trong Hình 5b, tia Om quay theo chiều dương ba vòng và một phần tư vòng (tức là $3\frac{1}{4}$ vòng). Hỏi tia đó quét nên một góc bao nhiêu độ?

c) Trong Hình 5c, tia Om quay theo chiều âm đúng một vòng. Hỏi tia đó quét nên một góc bao nhiêu độ?



Hình 5

Nhận xét: Khi tia Om quay góc a° thì góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo a° (hay $\frac{\pi a}{180} \text{ rad}$). Vì thế, mỗi một góc lượng giác đều có một số đo, đơn vị đo góc lượng giác là độ hoặc radian. Nếu góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo bằng α thì ta kí hiệu là $sđ(Ou, Ov) = \alpha$ hoặc $(Ou, Ov) = \alpha$.

Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo của góc đó.

Ví dụ 3. Hãy biểu diễn trên mặt phẳng góc lượng giác trong mỗi trường hợp sau:

a) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo 510° ;

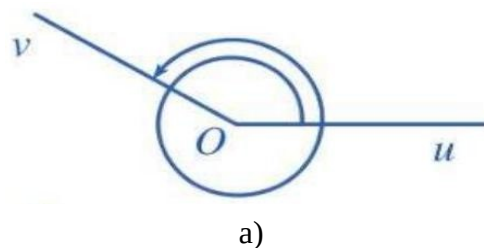
b) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo $-\frac{7\pi}{6}$.

Giải

a) Ta có $510^\circ = 360^\circ + 150^\circ$. Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo 510° được biểu diễn ở Hình 6a.

b) Ta có $-\frac{7\pi}{6} = -\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo $-\frac{7\pi}{6}$ được biểu diễn ở Hình 6b.

b) Tính chất 3 Hãy biểu diễn trên mặt phẳng góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo $-\frac{5\pi}{4}$.

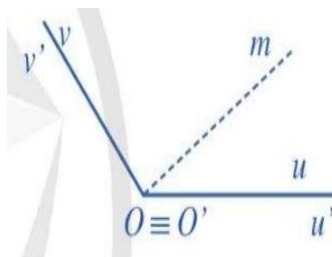




b)

Hình 6

4. Trong Hình 7, hai góc lượng giác (Ou, Ov) , $(O'u', O'v')$ có tia đầu trùng nhau $Ou \equiv O'u'$, tia cuối trùng nhau $Ov \equiv O'v'$. Nêu dự đoán về mối liên hệ giữa số đo của hai góc lượng giác trên.
Nhận xét: Quan sát Hình 7 ta thấy:



Hình 7

- Tia Om quay (chỉ theo chiều dương) xuất phát từ tia Ou đến trùng với tia Ov rồi quay tiếp một số vòng đến trùng với tia cuối Ov ;
- Tia Om quay (chỉ theo chiều dương) xuất phát từ tia $O'u' \equiv Ou$ đến trùng với tia $O'v' \equiv Ov$ rồi quay tiếp một số vòng đến trùng với tia cuối $O'v' \equiv Ov$.

Như vậy, sự khác biệt giữa hai góc lượng giác (Ou, Ov) , $(O'u', O'v')$ chính là số vòng quay quanh điểm O . Vì vậy, sự khác biệt giữa số đo của hai góc lượng giác đó chính là bội nguyên của 360° khi hai góc đó tính theo đơn vị độ (hay bội nguyên của 2π rad khi hai góc đó tính theo đơn vị radian).

Người ta có thể chứng minh được định lí sau:

Cho hai góc lượng giác (Ou, Ov) , $(O'u', O'v')$ có tia đầu trùng nhau $(Ou \equiv O'u')$, tia cuối trùng nhau $(Ov \equiv O'v')$. Khi đó, nếu sử dụng đơn vị đo là độ thì ta có:

$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k360^\circ \text{ với } k \text{ là số nguyên}$$

Nếu sử dụng đơn vị đo là radian thì công thức trên có thể viết như sau:

$$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + k2\pi \text{ với } k \text{ là số nguyên}$$

Ví dụ 4. Cho góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo 60° . Cho góc lượng giác $(O'u', O'v')$ có tia đầu $O'u' \equiv Ou$, tia cuối $O'v' \equiv Ov$. Viết công thức biểu thị số đo góc lượng giác $(O'u', O'v')$.

Giải

Ta có:

$$(O'u', O'v') = (Ou, Ov) + k360^\circ$$

$$= 60^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

4. Cho góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo $-\frac{4\pi}{3}$. Cho góc lượng giác $(O'u', O'v')$ có tia đầu $O'u' \equiv Ou$, tia cuối $O'v' \equiv Ov$. Viết công thức biểu thị số đo góc lượng giác $(O'u', O'v')$.

Với ba tia tùy ý Ou, Ov, Ow , ta có: $(Ou, Ov) + (Ov, Ow) = (Ou, Ow) + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

5. Cho góc (hình học) xOz , tia Oy nằm trong góc xOz (Hình 8). Nêu mối liên hệ giữa số đo của góc xOz và tổng số đo của hai góc xOy và yOz .

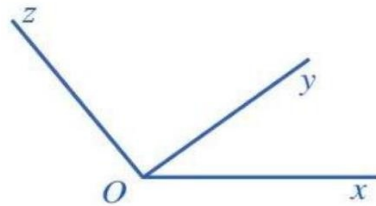
Người ta có thể chứng minh được định lí sau, gọi là hệ thức Chasles (Sa-lơ) về số đo của góc lượng giác:

Ví dụ 5. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{5\pi}{4}$. Tìm số đo của góc lượng giác (Ov, Ow) .

Giải

Theo hệ thức Chasles, ta có:

$$(Ov, Ow) = (Ou, Ow) - (Ou, Ov) + k2\pi = \frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + k2\pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$



Hình 8.5

5. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\frac{11\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$. Tìm số đo của góc lượng giác (Ov, Ow) .

II. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

Trong mục này, ta sẽ mở rộng các giá trị lượng giác của góc hình học thành giá trị lượng giác của góc lượng giác. Đó là cơ sở để xây dựng các hàm số lượng giác (biến số thực), những hàm số quan trọng trong toán học, khoa học - kĩ thuật và trong thực tiễn.

1. Đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , ta quy ước: Chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương và chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm. Như vậy, mặt phẳng toạ độ Oxy đã được định hướng.

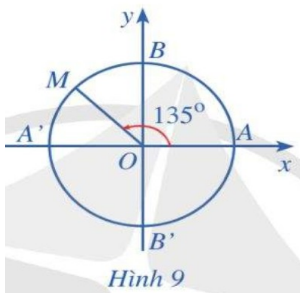
Hoạt động 6

- Trong mặt phẳng toạ độ (định hướng) Oxy , hãy vẽ đường tròn tâm O với bán kính bằng 1.
- Hãy nêu chiều dương, chiều âm với đường tròn tâm O với bán kính bằng 1.

Trong mặt phẳng toạ độ đã được định hướng Oxy , lấy điểm $A(1;0)$. Đường tròn tâm O , bán kính $OA = 1$ được gọi là đường tròn lượng giác (hay đường tròn đơn vị) gốc A .

Chú ý: Các điểm $B(0,1), A'(-1;0), B'(0,-1)$ nằm trên đường tròn lượng giác

Ví dụ 6: Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = 135^\circ$



Lời giải

Gọi M là điểm chính giữa cung BA' trên đường tròn lượng giác.

$$(OA, OM) = 135^\circ$$

Ta có (Hình 9)

2. Giá trị lượng giác của góc lượng giác.

Hoạt động 7.

a) Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = 60^\circ$.

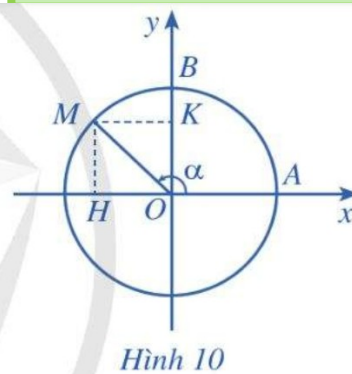
b) So sánh: hoành độ của điểm M với $\cos 60^\circ$; tung độ của điểm M với $\sin 60^\circ$.

Trong trường hợp tổng quát, với mỗi góc α , lấy điểm M trên đường

tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \alpha$ (Hình 10).

Gọi tọa độ của điểm M trong hệ tọa độ Oxy là $(x; y)$

6. Xác định điểm N trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, ON) = -\frac{\pi}{3}$



- Hoành độ x của điểm M gọi là *côsin* của góc lượng giác α và kí hiệu là $\cos \alpha$ hay $\cos \alpha = x$.
- Tung độ y của điểm M gọi là *sin* của góc lượng giác α và kí hiệu là $\sin \alpha$ hay $\sin \alpha = y$.
- Nếu $\cos \alpha \neq 0$ thì tỉ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi *tang* của góc lượng giác α và kí hiệu là $\tan \alpha$ hay $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- Nếu $\sin \alpha \neq 0$ thì tỉ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi *cotang* của góc lượng giác α và kí hiệu là $\cot \alpha$ hay $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Ví dụ 7: Tìm các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = 120^\circ$

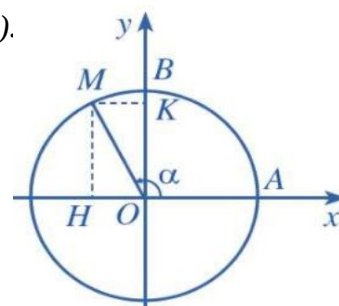
Lời giải

Lấy điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = \alpha = 120^\circ$ (Hình 11).

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của điểm M lên các trục Ox, Oy .

Khi đó, ta có $\angle AOM = 120^\circ$, suy ra $\angle BOM = \angle KOM = 30^\circ$

TÀI LIỆU TOÁN THPT



Theo hệ thức trong tam giác vuông KOM , ta có;

$$OK = OM \cdot \cos \angle KOM = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ và}$$

$$MK = OM \cdot \sin \angle KOM = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \text{ Do đó } M \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Vậy $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \tan 120^\circ = -\sqrt{3}, \cot 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

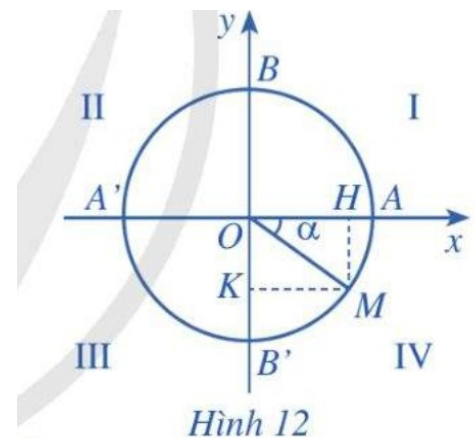
Hoạt động 8.

Xét dấu các giá trị lượng giác của góc $\alpha = -30^\circ$.

$$\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$$

Dấu của các giá trị lượng giác của góc phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên đường tròn lượng giác (Hình 12). Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác như sau:

Góc phần tư	I	II	III	IV
Giá trị lượng giác				
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



8. Xét dấu các giá trị lượng giác của góc lượng giác

$$\alpha = \frac{5\pi}{6}$$

Ví dụ 8: Xét dấu các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$

Lời giải

Do $-\pi < -\frac{3\pi}{4} < -\frac{\pi}{2}$ nên $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < 0, \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < 0, \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) > 0, \cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right) > 0$

Hoạt động 9.

Cho góc lượng giác α . So sánh:

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ và 1

b) $\tan \alpha \cdot \cot \alpha$ và 1 với $\sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0$

c) $1 + \tan^2 \alpha$ và $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ với $\cos \alpha \neq 0$

d) $1 + \cot^2 \alpha$ và $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$ với $\sin \alpha \neq 0$

- $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ với $\cos \alpha \neq 0$
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ với $\sin \alpha \neq 0$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ với $\sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0$

Ví dụ 9: Cho góc lượng giác của góc lượng giác α sao cho $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\tan \alpha = -2$. Tính $\cos \alpha, \sin \alpha$.

Lời giải

Do $\tan \alpha = -2$ nên $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2 \Rightarrow \sin \alpha = -2 \cos \alpha$

Vì $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ nên $\cos^2 \alpha + (-2 \cos \alpha)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$

Do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0$

Từ đó, ta có $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, suy ra $\sin \alpha = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Hoạt động 10.

Tìm các giá trị lượng giác của góc lượng giác $\alpha = 45^\circ$

Bảng dưới đây nêu lên các giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
----------	---	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	------------------	------------------	------------------	-------

sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	P	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	P	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	P

Ví dụ 10: Tính giá trị của biểu thức

$$P = \cos^2 \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4} + \cot^2 \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2}$$

Lời giải

$$P = \cos^2 \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4} + \cot^2 \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 + (\sqrt{3})^2 + 1 = \frac{21}{4}$$

Ta có

3. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

11. Trên đường tròn lượng giác, cho hai điểm M, M' sao cho góc lượng giác $(OA, OM) = \alpha$, góc lượng giác $(OA, OM') = -\alpha$. (Hình 13)

- a) Đối với hai điểm M, M' nêu nhận xét về: hoành độ của chúng, tung độ của chúng.
b) Nêu mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác tương ứng của hai góc lượng giác α và $-\alpha$.

Ta có các công thức sau cho hai góc đối nhau (α và $-\alpha$):

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

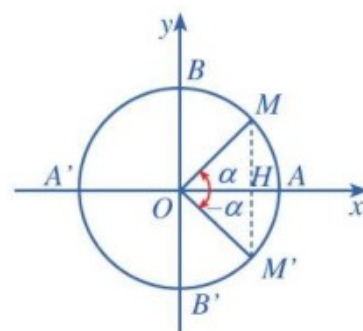
Ta cũng có các công thức sau cho:

- Hai góc hơn kém nhau π (α và $\alpha + \pi$) (Hình 14):

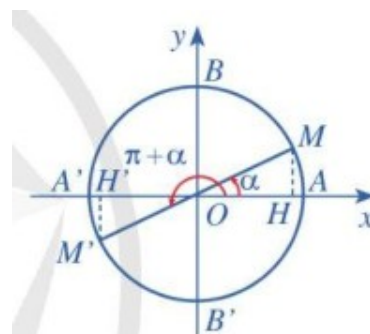
$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$	$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$
$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$	$\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$

10. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \tan^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2}$$



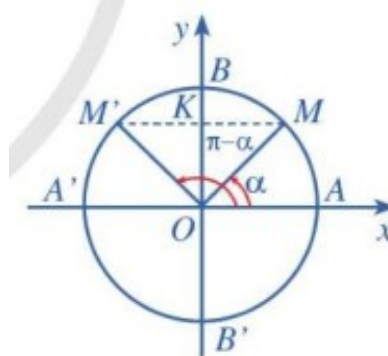
Hình 13



Hình 14

- Hai góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$) (Hình 15):

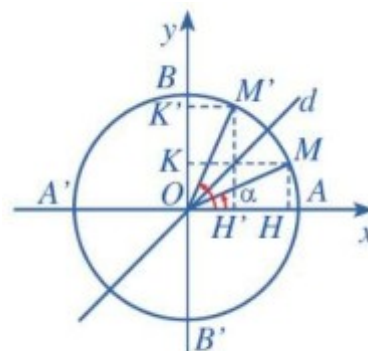
$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



Hình 15

- Hai góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$) (Hình 16):

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$



Hình 16

Ví dụ 11. Tính:

a) $\sin \frac{13\pi}{4}$;

b) $\sin \frac{\pi}{10} - \cos \frac{2\pi}{5}$;

11 Tính:

a) $\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8}$;

b) $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$.

Lời giải

Ta có:

a) $\sin \frac{13\pi}{4} = \sin \left(3\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin \frac{\pi}{10} - \cos \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{10} - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} \right) = \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} = 0$;

4. Sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác (đúng hoặc gần đúng) của một góc lượng giác khi biết số đo của góc đó. Cụ thể như sau:

- Nếu đơn vị của góc lượng giác là độ ($^\circ$), trước hết, ta chuyển máy tính sang chế độ "độ".

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\sin 35^\circ 15' 33''$	$\sin \boxed{3} \boxed{5} \boxed{.} \boxed{1} \boxed{5} \boxed{.} \boxed{3} \boxed{3} \boxed{.} \boxed{=}$	0.5772758359
$\tan(-205^\circ)$	$\tan \boxed{-} \boxed{2} \boxed{0} \boxed{5} \boxed{=}$	-0.4663076582

- Nếu đơn vị của góc lượng giác là radian (rad), trước hết, ta chuyển máy tính sang chế độ "radian".

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$	$\boxed{\cos} \boxed{-} \boxed{9} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\pi} \boxed{\div} \boxed{7} \boxed{=}$	- 0.6234898019
$\cot\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	$\boxed{1} \boxed{\div} \boxed{\tan} \boxed{2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\pi} \boxed{\div} \boxed{5} \boxed{=}$	0.3249196962

Ví dụ 12. Dùng máy tính cầm tay để tính:

a) $\sin 42^\circ 35' 13''$; b) $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$;

12 Dùng máy tính cầm tay để tính:

a) $\tan(-75^\circ)$; b) $\cot\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

Lời giải

a)

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\sin 42^\circ 35' 13''$	$\boxed{\sin} \boxed{4} \boxed{2} \boxed{00''} \boxed{3} \boxed{5} \boxed{00''} \boxed{1} \boxed{3} \boxed{00''} \boxed{=}$	0.6767082232

b)

Phép tính	Nút ấn	Kết quả
$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	$\boxed{\cos} \boxed{2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\pi} \boxed{\div} \boxed{5} \boxed{=}$	0.3090169944

BÀI TẬP

1. Gọi M, N, P là các điểm trên đường tròn lượng giác sao cho số đo của các góc lượng giác (OA, OM) , (OA, ON) , (OA, OP) lần lượt bằng $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$. Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác đều.

$$225^\circ; -225^\circ; -1035^\circ; \frac{5\pi}{3}; \frac{19\pi}{2}; -\frac{159\pi}{4}$$

2. Tính các giá trị lượng giác của mỗi góc sau:

3. Tính các giá trị lượng giác (nếu có) của mỗi góc sau:

a) $\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$;

b) $k\pi (k \in \mathbb{Z})$;

c) $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$;

d) $\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

4. Tính các giá trị lượng giác của góc α trong mỗi trường hợp sau:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ với $-\pi < \alpha < 0$;

c) $\tan \alpha = 3$ với $-\pi < \alpha < 0$;

d) $\cot \alpha = -2$ với $0 < \alpha < \pi$.

5. Tính:

a) $A = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 85^\circ$ (17 số hạng).

b) $B = \cos 5^\circ + \cos 10^\circ + \cos 15^\circ + \dots + \cos 175^\circ$ (35 số hạng).

6. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km . Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h .

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: $1 \text{ h}; 3 \text{ h}; 5 \text{ h}$.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

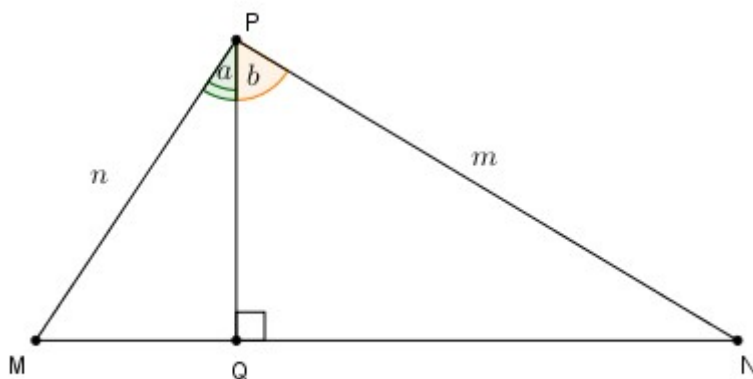
BÀI 2. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Ở lớp dưới, ta đã làm quen với một số phép tính trong tập hợp các số thực, chẳng hạn: phép tính lũy thừa với số mũ tự nhiên và những công thức để tính toán hay biến đổi những biểu thức chứa các lũy thừa như vậy. Việc lấy các giá trị lượng giác của góc lượng giác đã hình thành nên những phép tính mới trong tập hợp các số thực, đó là những *phép tính lượng giác*.

Có hay không những công thức để tính toán hay biến đổi những biểu thức chứa giá trị lượng giác?

I. CÔNG THỨC CỘNG

HĐ1: Cho tam giác MNP có đường cao PQ (Hình 17).



Hình 17

- a) Viết công thức tính PQ theo cạnh n và góc a ; công thức tính PQ theo cạnh m và góc b .
- b) Viết công thức tính diện tích mỗi tam giác MPQ, NPQ, MNP theo các cạnh m, n và các góc $a, b, a + b$.

- c) Sử dụng kết quả: $S_{MPN} = S_{MPQ} + S_{NPQ}$, hãy tìm công thức tính $\sin(a + b)$ theo $\sin a, \cos a, \sin b, \cos b$.

Từ đó rút ra đẳng thức $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ (*).

- d) Tính $\sin(a - b)$ bằng cách biến đổi $\sin(a - b) = \sin[a + (-b)]$ và sử dụng công thức (*).

Trong trường hợp tổng quát, với các góc lượng giác a, b ta có các công thức sau: (thường được gọi chung là *công thức cộng* đối với $\sin$):

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Ví dụ 1. Tính $\sin 75^\circ$

Lời giải

Áp dụng công thức cộng, ta có:

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

LT-VD1: Tính $\sin \frac{\pi}{12}$.

HĐ2:

a) Tính $\cos(a+b)$ bằng cách biến đổi $\cos(a+b) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$ và sử dụng công thức cộng đối với $\sin$.

b) Tính $\cos(a-b)$ bằng cách biến đổi $\cos(a-b) = \cos[a + (-b)]$ và sử dụng công thức $\cos(a+b)$ có được ở câu a.

Trong trường hợp tổng quát, đối với các góc lượng giác a, b , ta có các công thức sau (thường được gọi chung là *công thức cộng* đối với cosin):

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Ví dụ 2. Tính $\cos \frac{5\pi}{12}$

Lời giải

Áp dụng công thức cộng, ta có:

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

LT-VD2: Tính $\cos 15^\circ$.

HĐ3:

a) Sử dụng công thức cộng đối với $\sin$ và cosin, hãy tính $\tan(a+b)$ theo $\tan a$ và $\tan b$ khi các biểu thức đều có nghĩa.

b) Khi các biểu thức đều có nghĩa, hãy tính $\tan(a-b)$ bằng cách biến đổi $\tan(a-b) = \tan[a + (-b)]$ và sử dụng công thức $\tan(a+b)$ có được ở câu a.

Trong trường hợp tổng quát, với các góc lượng giác a, b , ta có các công thức sau (thường được gọi chung là *công thức cộng* đối với tang):

- $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

(khi các biểu thức đều có nghĩa)

Ví dụ 3. Tính $\tan \frac{7\pi}{12}$

Lời giải

Áp dụng công thức cộng đối với tang, ta có:

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2} = -2 - \sqrt{3}$$

LT-VD3: Tính $\tan 165^\circ$.

II. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

❖4. Tính $\sin 2a, \cos 2a, \tan 2a$ bằng cách thay $b = a$ trong công thức cộng.

Một cách tổng quát ta có các công thức sau (thường gọi là *công thức nhân đôi*):

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \quad (\text{khi các biểu thức đều có nghĩa}).$$

Nhận xét.

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}; \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad (\text{thường gọi là công thức hạ bậc}).$$

$$\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 4: Cho

a) $\sin 2a$.

b) $\cos 4a$.

Lời giải

a) Do $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ nên $(\sin a + \cos a)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 a + \cos^2 a + 2 \sin a \cos a = \frac{1}{4}$.

Hay $1 + 2 \sin a \cos a = \frac{1}{4}$. Suy ra $\sin 2a = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$.

$$\cos 4a = \cos(2 \cdot 2a) = 1 - 2 \sin^2 2a = -\frac{1}{8}.$$

b) Áp dụng công thức nhân đôi, ta có:

❖4 Cho $\tan \frac{a}{2} = -2$. Tính $\tan a$.

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos \frac{\pi}{12}$$

Ví dụ 5: Biết

Lời giải

Ta có: $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. Mà $\cos \frac{\pi}{12} > 0$ nên $\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$.

❖5 Tính $\sin \frac{\pi}{8}, \cos \frac{\pi}{8}$.

III. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

❖5. Sử dụng công thức cộng, rút gọn mỗi biểu thức sau:

$$\cos(a+b) + \cos(a-b); \cos(a+b) - \cos(a-b); \sin(a+b) - \sin(a-b)$$

Trong trường hợp tổng quát, ta có các công thức sau (thường gọi là công thức biến đổi tích thành tổng):

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

Ví dụ 6. Cho $\sin 2x = -\frac{1}{3}$. Tính $A = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin 2x + \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

⑥ Cho $\cos a = \frac{2}{3}$. Tính $B = \cos \frac{3a}{2} \cos \frac{a}{2}$.

IV. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH.

★6. Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng và đặt $a+b=u$; $a-b=v$ rồi biến đổi các biểu thức sau thành tích: $\cos u + \cos v$; $\cos u - \cos v$; $\sin u + \sin v$; $\sin u - \sin v$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có các công thức sau (thường gọi là *công thức biến đổi tổng thành tích*).

$$\begin{aligned} \cos u + \cos v &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}; \\ \cos u - \cos v &= -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}; \\ \sin u + \sin v &= 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}; \\ \sin u - \sin v &= 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 7. Tính

a) $\sin \frac{11\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12}$;

b) $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$.

Lời giải

a) $\sin \frac{11\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12} = 2 \cos \frac{\frac{11\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}}{2} \sin \frac{\frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}}{2} = 2 \cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ = 2 \cos \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cos 60^\circ \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$D = \frac{\sin \frac{7\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{7\pi}{9} - \cos \frac{\pi}{9}}$$

⑦ Tính:

Ví dụ 8. Hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong một thiết bị điện lần lượt được cho bởi các biểu thức sau:

$$u = 40 \sin(120\pi t) + 10 \sin(360\pi t) \quad (V)$$

$$i = 4 \sin(120\pi t) + \sin(360\pi t) \quad (A)$$

(Nguồn: Ron Larson, *Intermediate Algebra*, Cengage)

Biết rằng công suất tiêu thụ tức thời của thiết bị đó được tính theo công thức $P = u \cdot i$ (W). Hãy viết biểu thức biểu thị công suất tiêu thụ tức thời ở dạng không có lũy thừa và tích của các biểu thức lượng giác.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= u \cdot i = [40 \sin(120\pi t) + 10 \sin(360\pi t)] \cdot [4 \sin(120\pi t) + \sin(360\pi t)] \\ &= 160 \sin^2(120\pi t) + 10 \sin^2(360\pi t) + 80 \sin(120\pi t) \sin(360\pi t) \\ &= 80 [1 - \cos(240\pi t)] + 5 [1 - \cos(720\pi t)] + 40 [\cos(360\pi t - 120\pi t) - \cos(360\pi t + 120\pi t)] \\ &= 85 - 80 \cos(240\pi t) - 5 \cos(720\pi t) + 40 \cos(240\pi t) - 40 \cos(480\pi t) \\ &= 85 - 40 \cos(240\pi t) - 5 \cos(720\pi t) - 40 \cos(480\pi t) \quad (W) \end{aligned}$$

BÀI TẬP

1. Cho $\cos a = \frac{3}{5}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right), \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right), \tan\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Tính:

$$A = \sin(a - 17^\circ) \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cos(a - 17^\circ)$$

$$B = \cos\left(b + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - b\right) - \sin\left(b + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - b\right)$$

3. Cho $\tan(a + b) = 3, \tan(a - b) = 2$. Tính: $\tan 2a, \tan 2b$.

4. Cho $\sin a = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Tính: $\cos 2a, \cos 4a$.

5. Cho $\sin a + \cos a = 1$. Tính: $\sin 2a$.

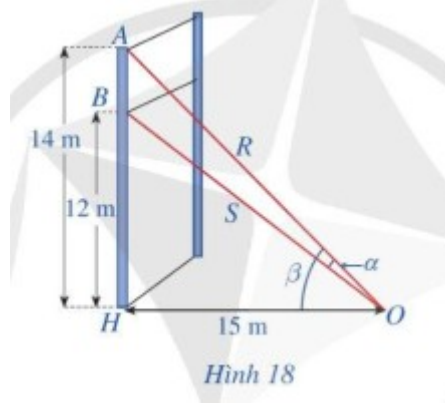
6. Cho $\cos 2a = \frac{1}{3}$ với $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính: $\sin a, \cos a, \tan a$.

7. Cho $\cos 2x = \frac{1}{4}$. Tính: $A = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right); B = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

$$A = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$$

8. Rút gọn biểu thức:

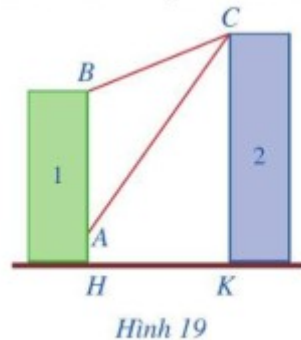
9. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14m . Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12m . Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15m (Hình 18).



a) Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

10. Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20\text{m}$. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C . Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (hình 19). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32\text{m}$, $AH = 6\text{m}$, $BH = 24\text{m}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



§3 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

Guồng nước (hay còn gọi là cọn nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hoá đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính $2,5\text{m}$; trục của nó đặt cách mặt nước 2m . Khi guồng quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = 2,5\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$, với x (phút) là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$).

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020).

Khoảng cách h phụ thuộc vào thời gian quay x như thế nào?

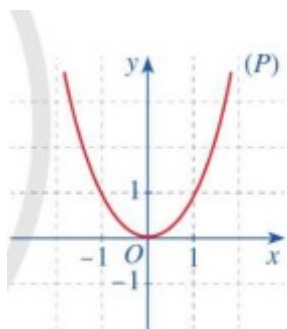
I. HÀM SỐ CHẴN, HÀM SỐ LẺ,, HÀM SỐ TUẦN HOÀN

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

a) Cho hàm số $f(x) = x^2$.

- Với $x \in \mathbb{R}$, hãy so sánh $f(-x)$ và $f(x)$.

- Quan sát parabol (P) là đồ thị của hàm số $f(x) = x^2$ (Hình 20) và cho biết trục đối xứng của (P) là đường thẳng nào.

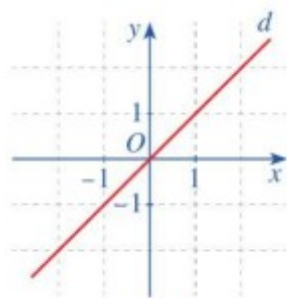


Hình 20

b) Cho hàm số $g(x) = x$.

- Với $x \in \mathbb{R}$, hãy so sánh $g(-x)$ và $-g(x)$.

- Quan sát đường thẳng d là đồ thị của hàm số $g(x) = x$ (Hình 21) và cho biết gốc toạ độ O có là tâm đối xứng của đường thẳng d hay không.



Hình 21

Ta nói hàm số $f(x) = x^2$ là hàm số chẵn; hàm số $g(x) = x$ là hàm số lẻ.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D .

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Chú ý

- Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x) = 3x^2 - 5$ là hàm số chẵn.

Giải

Hàm số $f(x) = 3x^2 - 5$ là hàm số chẵn vì:

- Tập xác định là $D = \mathbb{R}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5 = f(x)$.

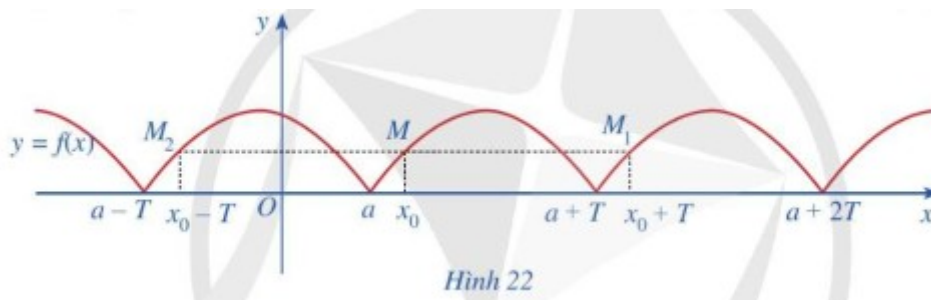
Luyện tập 1

- Chứng tỏ rằng hàm số $g(x) = x^3$ là hàm số lẻ.
- Cho ví dụ về hàm số không là hàm số chẵn và cũng không là hàm số lẻ.

2. Hàm số tuần hoàn

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như Hình 22.

- Có nhận xét gì về đồ thị hàm số trên mỗi đoạn $[a; a+T], [a+T; a+2T], [a-T; a]$?



Hình 22

- Lấy điểm $M(x_0; f(x_0))$ thuộc đồ thị hàm số với $x_0 \in [a; a+T]$. So sánh mỗi giá trị $f(x_0 + T), f(x_0 - T)$ với $f(x_0)$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D . Hàm số $y = f(x)$ được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in D$, ta có:

* $x + T \in D$ và $x - T \in D$

* $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn (nếu có) các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{neu } x \text{ là số hữu tỉ} \\ 0 & \text{neu } x \text{ là số vô tỉ} \end{cases}$$

Ví dụ 2. Cho hàm số

và T là một số hữu tỉ dương.

Chứng minh: $f(x + T) = f(x)$ với mọi x . Từ đó suy ra hàm số $f(x)$ là tuần hoàn.

Luyện tập 2. Cho ví dụ về hàm số tuần hoàn.

Giải

Ta thấy hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Xét một số thực x tùy ý.

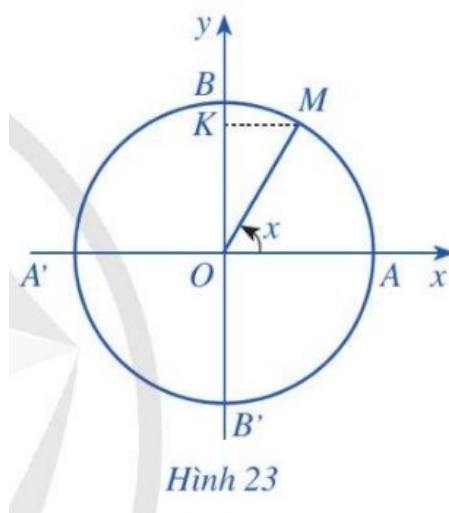
Nếu x là số hữu tỉ thì $x + T$ cũng là số hữu tỉ. Nếu x là số vô tỉ thì $x + T$ cũng là số vô tỉ. Vì thế $f(x + T) = f(x)$ với mọi x . Từ đó suy ra hàm số $f(x)$ là tuần hoàn.

Nhận xét

Cho hàm số tuần hoàn chu kì T . Từ đồ thị hàm số đó trên đoạn $[a; a + T]$, ta dịch chuyển song song với trục hoành sang phải (hoặc sang trái) theo đoạn có độ dài T thì được đồ thị hàm số trên đoạn $[a + T; a + 2T]$ (hoặc $[a - T; a]$).

II. HÀM SỐ $y = \sin x$

1. Định nghĩa



Hình 23

- Với mỗi số thực x , tồn tại duy nhất điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = x(\text{rad})$ (Hình 23). Hãy xác định $\sin x$.

- Ứng với mỗi số thực x , có duy nhất một giá trị $\sin x$.

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với một số thực $\sin x$ được gọi là hàm số $y = \sin x$.

Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ là $\mathbb{R}$.

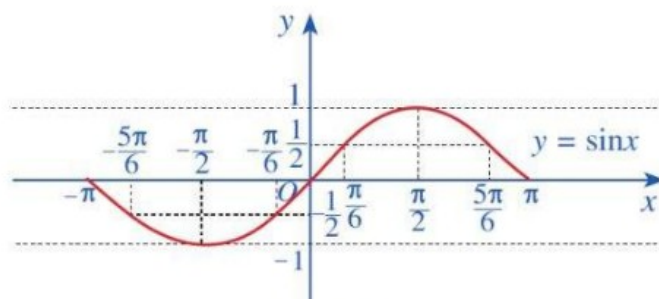
2. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$

- Cho hàm số $y = \sin x$.

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \sin x$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy biểu diễn các điểm $(x; y)$ trong bảng giá trị ở câu a. Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $(x; \sin x)$ với $x \in [-\pi; \pi]$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ (Hình 24).

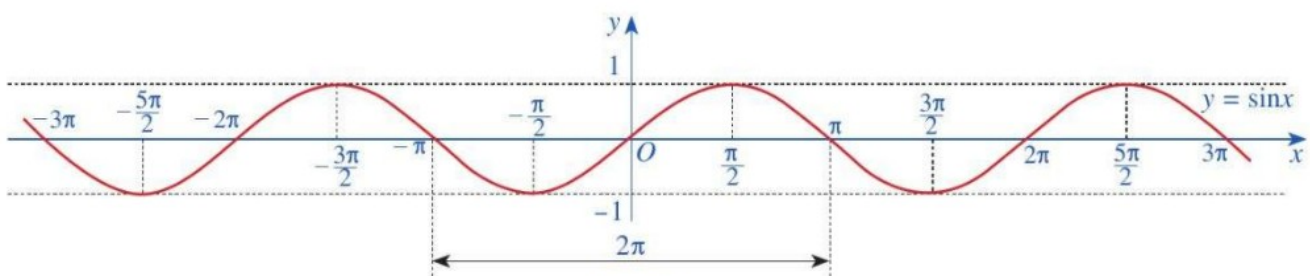


Hình 24

c) Làm tương tự như trên đối với các đoạn $[-3\pi; -\pi], [\pi; 3\pi], \dots$, ta có đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ được biểu diễn ở Hình 25.

- Tính chất của hàm số $y = \sin x$

- Quan sát đồ thị hàm số $y = \sin x$ ở Hình 25.



Hình 25

a) Nêu tập giá trị của hàm số $y = \sin x$.

b) Gốc tọa độ có là tâm đối xứng của đồ thị hàm số không? Từ đó kết luận tính chẵn, lẻ của hàm số $y = \sin x$.

c) Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài 2π , ta có nhận được đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[\pi; 3\pi]$ hay không? Hàm số $y = \sin x$ có tuần hoàn hay không?

d) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \sin x$.

Hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$ và có tính chất sau:

- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O ;

- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn chu kỳ 2π ;

- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 3. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{11\pi}{2}; \frac{13\pi}{2}\right)$?

Giải

- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right)$?

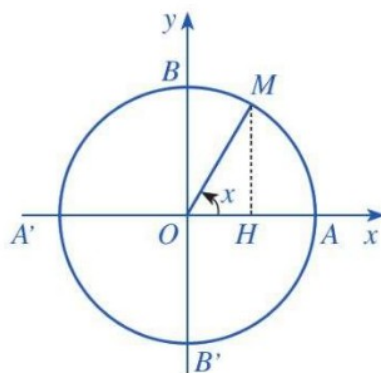
Do $\left(\frac{11\pi}{2}; \frac{13\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2} + 6\pi; \frac{\pi}{2} + 6\pi\right)$ nên hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{11\pi}{2}; \frac{13\pi}{2}\right)$.

Nhận xét: Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$ (Hình 25), ta thấy $\sin x = 0$ tại những giá trị $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Vì vậy, tập hợp các số thực x sao cho $\sin x \neq 0$ là $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

III. HÀM SỐ $y = \cos x$

1. Định nghĩa

- Với mỗi số thực x , tồn tại duy nhất điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA, OM) = x(\text{rad})$ (Hình 26). Hãy xác định $\cos x$.



Hình 26

Ứng với mỗi số thực x , có duy nhất một giá trị $\cos x$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với một số thực $\cos x$ được gọi là hàm số $y = \cos x$.

Tập xác định của hàm số $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$.

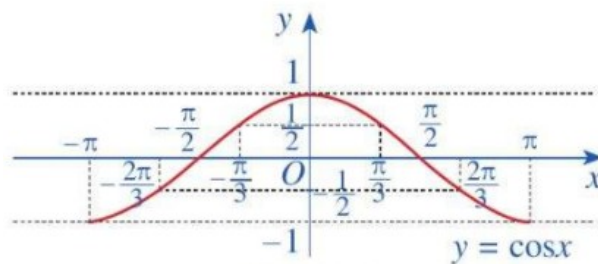
2. Đồ thị của hàm số $y = \cos x$

- Cho hàm số $y = \cos x$.

a) Tìm giá trị y tương ứng với giá trị của x trong bảng sau:

x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$y = \cos x$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy biểu diễn các điểm $(x; y)$ trong bảng giá trị ở câu a. Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $(x; \cos x)$ với $x \in [-\pi; \pi]$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ (Hình 27).



c) Làm tương tự như trên đối với các đoạn $[-3\pi; -\pi], [\pi; 3\pi], \dots$, ta có đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\mathbb{R}$ được biểu diễn ở Hình 28.