

DẠNG 1**Ứng dụng để giải bài toán HHKG****I. PHẦN ĐỀ BÀI**

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tam giác vuông với $AB = AC = 2$. Cạnh bên $SA \perp$ đáy và $SA = 3$. Gọi M là trung điểm của SC .

Tính khoảng cách giữa AM và BC .

A. $d(AM, BC) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $d(AM, BC) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $d(AM, BC) = \frac{3\sqrt{22}}{11}$.

D. $d(AM, BC) = \frac{\sqrt{22}}{6}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB > 2a$ và $ABC = BAS = BCS = 90^\circ$. Biết sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{11}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 3: Trong không gian cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = AD = 2, CD = 1$, cạnh bên $SA = 2$ và SA vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm AB . Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.

A. $S_{mc} = 41\pi$.

B. $S_{mc} = \frac{14}{4}\pi$.

C. $S_{mc} = \frac{41}{2}\pi$.

D. $S_{mc} = 14\pi$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và $((C'AB); (BCC'B')) = \alpha$, giá trị $\tan \alpha$ bằng

A. $\sqrt{6}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm DD' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

A. $\frac{2a}{3}$.

B. $\frac{4a}{3}$.

C. $\frac{3a}{4}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Câu 6: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = 2a, OC = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $a\sqrt{2}$.

B. a .

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{3a}{4}$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a . Khoảng cách giữa A_1B và B_1C bằng

A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $a\sqrt{6}$.

- Câu 8:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $4x - 4y + 2z - 1 = 0$ và $2x - 2y + z + 1 = 0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó bằng
- A. $V = \frac{1}{27}$. B. $V = \frac{1}{8}$. C. $V = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. D. $V = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- Câu 9:** Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a , $AA' = a$ và $\angle ABC = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng MO và $C'D$ bằng
- A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}a$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{5}a$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{12}a$. D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$.
- Câu 10:** Trong không gian Oxyz, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng ABC luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng
- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.
- Câu 11:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q , lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' . Thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là
- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{1}{24}$.
- Câu 12:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi D, E, F lần lượt là điểm đối xứng của A qua C , của S qua B và của A qua mặt phẳng (SBC) . Thể tích của khối tứ diện $ADEF$ bằng
- A. $\frac{2a^3}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.
- Câu 13:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của $C'D'$, G là trọng tâm tam giác ABD . Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(B'MG)$.
- A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.
- Câu 14:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(-1;2;2)$ và $B(3;-2;4)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có dạng $2x + by + cz + d = 0$. Giá trị của $2b + 2c + d$ bằng
- A. 10. B. -4. C. -10. D. 6.
- Câu 15:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên $SA = a$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Hãy tính $\cos$ của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) ?
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. D. 1.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với (ABC) . Góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SBC) là α . Khi đó $\tan \alpha$ bằng:

- A. 1. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{6}$. D. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 17: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = a\sqrt{3}$. Trên BB' lấy điểm N sao cho $BN = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(AC'N)$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $a\sqrt{6}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

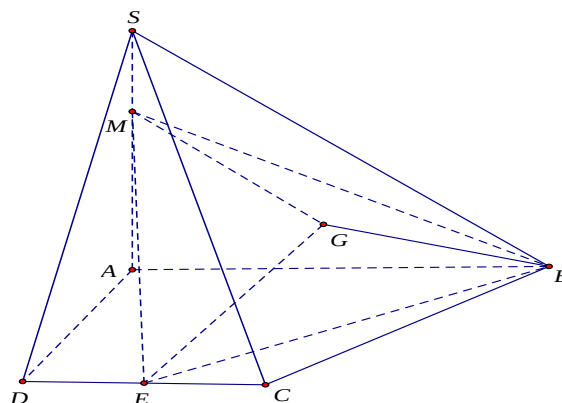
Câu 18: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Khoảng cách từ điểm B đến $(AB'D')$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Biết $AB = 4a$, $AD = CD = 2a$. Cạnh bên $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC , M là điểm sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MS}$ và E là trung điểm cạnh CD . Tính thể tích V của khối đa diện $MGABE$.

- A. $\frac{27a^3}{8}$. B. $\frac{10a^3}{3}$. C. $\frac{13a^3}{4}$. D. $\frac{25a^3}{9}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Biết $AB = 4a$, $AD = CD = 2a$. Cạnh bên $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC , M là điểm sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MS}$ và E là trung điểm của CD (Tham khảo hình vẽ).



Tính thể tích V của khối đa diện $MGABE$.

- A. $\frac{27a^3}{8}$. B. $\frac{10a^3}{3}$. C. $\frac{13a^3}{4}$. D. $\frac{25a^3}{9}$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;3)$, $B(1;4;3)$, $C(5;1;3)$. Ba mặt cầu tiếp xúc nhau từng đôi một và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại ba đỉnh A, B, C . Tổng bán kính của ba mặt cầu trên bằng

- A. 6. B. $\frac{769}{120}$. C. $\frac{769}{60}$. D. $\frac{37}{5}$.

Câu 22: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng 1 và $BAD = DAA' = A'AB = 60^\circ$. Cho hai điểm M, N thỏa mãn lần lượt $\overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DD'}$. Độ dài đoạn thẳng MN là

- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{19}$. D. $\sqrt{15}$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$. Xét một điểm M thay đổi trên mặt phẳng (P) . Gọi khối nón (N) có đỉnh là điểm M và có đường tròn đáy là tập hợp các tiếp điểm vẽ từ M đến mặt cầu (S) . Khi (N) có thể tích nhỏ nhất, mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình có dạng $x + ay + bz + c = 0$. Tính $a + b + c$

- A. -2. B. 0. C. 3. D. 2.

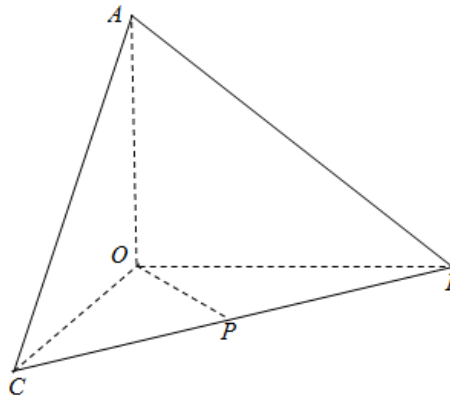
Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O . Biết $A(2;0;0)$, $B(0;1;0)$, $S(0;0;2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC . Mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N . Tính thể tích khối chóp $S.ABMN$.

- A. $V = \sqrt{2}$. B. $V = 2\sqrt{3}$. C. $V = 3\sqrt{2}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 25: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' . Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$.

- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{1}{24}$.

Câu 26: Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi P là trung điểm của BC (minh họa như hình vẽ).



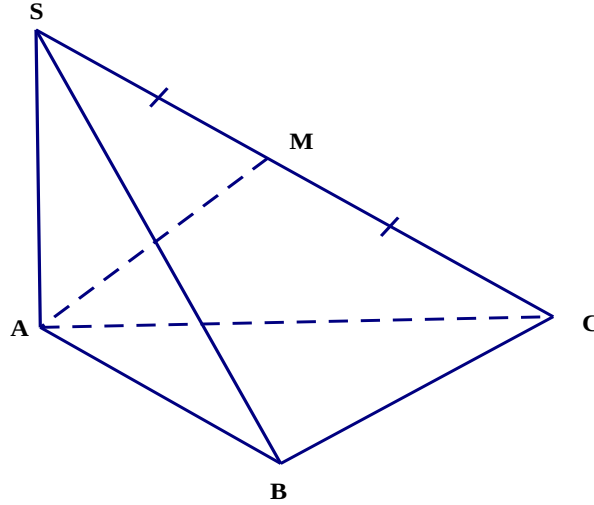
Khoảng cách giữa hai đường thẳng OP và AB bằng:

- A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. B. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. C. a . D. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

- Câu 27:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; -2)$ và đi qua gốc tọa độ O . Gọi $d_1; d_2; d_3$ là ba đường thẳng thay đổi, không đồng phẳng cùng đi qua O và cắt (S) tại điểm thứ hai là A, B, C . Khi thể tích khối tứ diện $OABC$ lớn nhất thì mặt phẳng (ABC) đi qua điểm nào sau đây
- A. $P(1; -2; -6)$. B. $F(1; -2; -8)$. C. $E(-1; 2; -8)$. D. $Q(2; -3; 5)$.
- Câu 28:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; 2)$ bán kính $R = 1$. Xét điểm M thay đổi trên (P) . Khối nón (N) có đỉnh là I và đường tròn đáy là đường tròn đi qua tất cả các tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) . Khi (N) có thể tích lớn nhất, mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình là $x + ay + bz + c = 0$. Giá trị của $a + b + c$ bằng
- A. -2 . B. 0 . C. 3 . D. 2 .
- Câu 29:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; 3)$ và $B(6; 5; 5)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình dạng $2x + by + cz + d = 0$. Giá trị của $b + c + d$ bằng
- A. -21 . B. -12 . C. -18 . D. -15 .
- Câu 30:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 25$. Xét khối tứ diện $ABCD$ có các đỉnh đều thuộc (S) sao cho tam giác ABC vuông cân tại B và $DA = DB = DC$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?
- A. 40 . B. 50 . C. 48 . D. 51 .

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tam giác vuông với $AB = AC = 2$. Cạnh bên $SA \perp$ đáy và $SA = 3$. Gọi M là trung điểm của SC .



Tính khoảng cách giữa AM và BC .

A. $d(AM, BC) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $d(AM, BC) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $d(AM, BC) = \frac{3\sqrt{22}}{11}$. D. $d(AM, BC) = \frac{\sqrt{22}}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Gắn hệ trục tọa độ ta có $A(0;0;0)$ là gốc tọa độ, $S(0;0;3), B(2;0;0), C(0;2;0)$.

Điểm $M\left(0;1;\frac{3}{2}\right)$. Ta có $\overrightarrow{AM} = \left(0;1;\frac{3}{2}\right), \overrightarrow{BC} = (-2;2;0)$

Gọi $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}] = (-3; -3; 2)$

Gọi (P) là mặt phẳng qua $B(2;0;0)$ nhận $\vec{n} = (-3; -3; 2)$ làm véc tơ pháp tuyến.

$(P): -3x - 3y + 2z + 6 = 0$.

Ta có $d(AM, BC) = d(A, (P)) = \frac{|-3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB > 2a$ và $\angle ABC = \angle BAS = \angle BCS = 90^\circ$. Biết sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{11}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

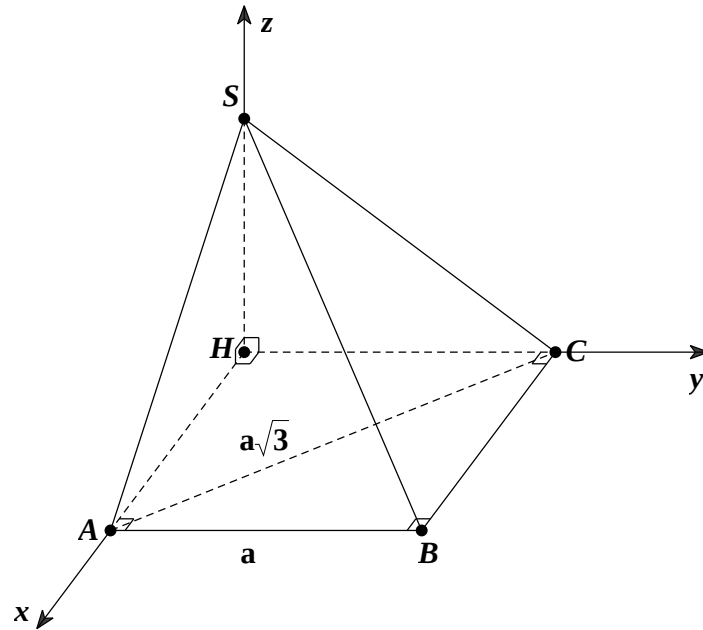
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB$ và $SH \perp BC$.

$$\text{Mà } \angle ABC = \angle BAS = \angle BCS = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp SA \\ BC \perp SC \end{cases}.$$

Suy ra $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Giả sử $SH = x(x > 0) \Rightarrow S(0; 0; x)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AC} &= (-a\sqrt{2}; a; 0), \overrightarrow{SA} = (a\sqrt{2}; 0; -x) \\ \Rightarrow [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SA}] &= (-ax; -ax\sqrt{2}; -a^2\sqrt{2}) // \vec{n} = (x; x\sqrt{2}; a\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Lại có $\overrightarrow{SB} = (a\sqrt{2}; a; -x)$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \sin(\angle(\vec{SB}, (\vec{SAC}))) &= \left| \cos(\angle(\vec{SB}, \vec{n})) \right| = \left| \frac{\vec{SB} \cdot \vec{n}}{|\vec{SB}| \cdot |\vec{n}|} \right| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{11}}{11} = \left| \frac{xa\sqrt{2} + xa\sqrt{2} - xa\sqrt{2}}{\sqrt{3x^2 + 2a^2} \cdot \sqrt{3a^2 + x^2}} \right| \\ \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 2a^2} \cdot \sqrt{3a^2 + x^2} &= \sqrt{11} |xa\sqrt{2}| \Leftrightarrow (3x^2 + 2a^2)(3a^2 + x^2) = 11(2a^2x^2) \\ \Leftrightarrow 9a^2x^2 + 3x^4 + 6a^4 + 2a^2x^2 &= 22x^2a^2 \Leftrightarrow 3x^4 - 11x^2a^2 + 6a^4 = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 2a^2)(x^2 - 3a^2) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{2}{3}a^2 \\ x^2 = 3a^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Có $HB = AC = a\sqrt{3}$ nên với $SH = x^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = a\sqrt{6} > 2a$ (thỏa mãn).

Do đó $SH = a\sqrt{3}$. Diện tích của tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$.

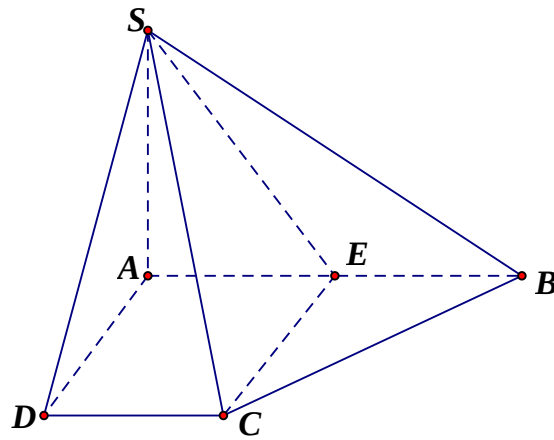
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$.

Câu 3: Trong không gian cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = AD = 2, CD = 1$, cạnh bên $SA = 2$ và SA vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm AB . Tính diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.

- A. $S_{mc} = 41\pi$. B. $S_{mc} = \frac{14}{4}\pi$. C. $S_{mc} = \frac{41}{2}\pi$. D. $S_{mc} = 14\pi$.

Lời giải

Chọn D



♦ Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$A(0;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(2;0;0)$, $C(2;1;0)$, $S(0;0;2)$ và $E(0;1;0)$.

Phương trình mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Do mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4 - 4b + d = 0 \\ 1 - 2b + d = 0 \\ 5 - 2b - 4a + d = 0 \\ 4 - 4c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \\ d = 2 \end{cases}$$

♦ Khi đó (S) có tâm $I\left(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

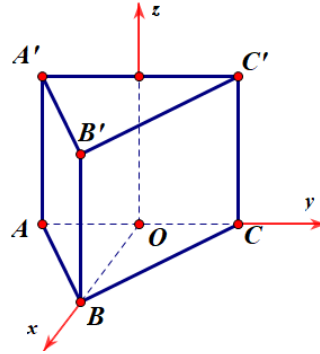
♦ Diện tích mặt cầu (S) là: $S_{mc} = 4\pi R^2 = 14\pi$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau $((C'AB); (BCC'B')) = \alpha$, giá trị $\tan \alpha$ bằng

- A. $\sqrt{6}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



- ♦ Giả sử lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1.
- ♦ Chọn hệ trục $Oxyz$, với O là trung điểm AC , $B \in Ox$, $C \in Oy$.

♦ Ta có $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$, $B'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1\right)$, $C'\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$.

$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{BC'} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$, $\overrightarrow{CC'} = (0; 0; 1)$

♦ Mặt phẳng $(C'AB)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC'}] = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Mặt phẳng $(BCC'B')$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CC'}] = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

♦ Ta có $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0\right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 0}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

♦ Ta lại có $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2} - 1} = \sqrt{6}$.

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm DD' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

A. $\frac{2a}{3}$.

B. $\frac{4a}{3}$.

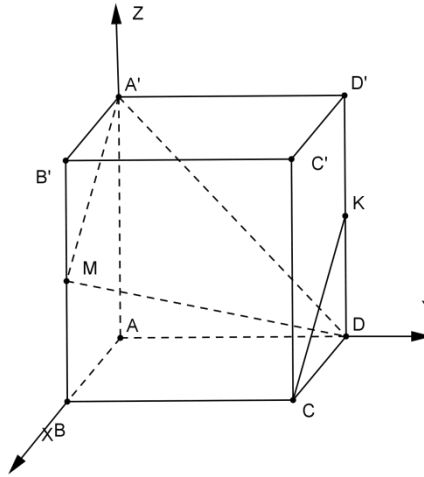
C. $\frac{3a}{4}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn D

- ♦ Gọi M là trung điểm BB' . Ta có $CK \parallel A'M \Rightarrow CK \parallel (A'MD)$
- ♦ Suy ra $d(CK, A'D) = d(CK, (A'MD)) = d(C, (A'MD))$
- ♦ Chọn trục toạ độ như hình vẽ:



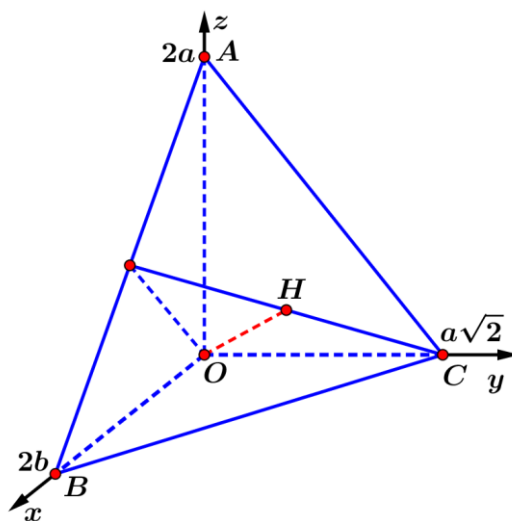
- ♦ Ta có $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;a), C(a;a;0), B'(a;0;a), M\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$
- ♦ $\overrightarrow{A'M} = \left(a;0;-\frac{a}{2}\right), \overrightarrow{A'D} = (0;a;-a) \Rightarrow [\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'D}] = \left(\frac{a^2}{2}; a^2; a^2\right)$.
- ♦ Suy ra mặt phẳng $(A'MD)$ có một vec-tơ pháp tuyến là $(1;2;2)$
- ♦ Phương trình mặt phẳng $(A'MD)$ có dạng: $x + 2y + 2z - 2a = 0$.
- ♦ Vậy $d(C, (A'MD)) = \frac{|a + 2a - 2a|}{3} = \frac{a}{3}$.

Câu 6: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = 2a, OC = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng

- A. $a\sqrt{2}$. B. a . C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ như sau điểm O là gốc tọa độ $OA \equiv Oz; OB \equiv Ox$ và $OC \equiv Oy$. Khi đó ta có $O(0;0;0); A(0;0;2a); B(2a;0;0)$ và $C(0;a\sqrt{2};0)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{2a} + \frac{y}{a\sqrt{2}} + \frac{z}{2a} = 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{2}y + z - 2a = 0$.

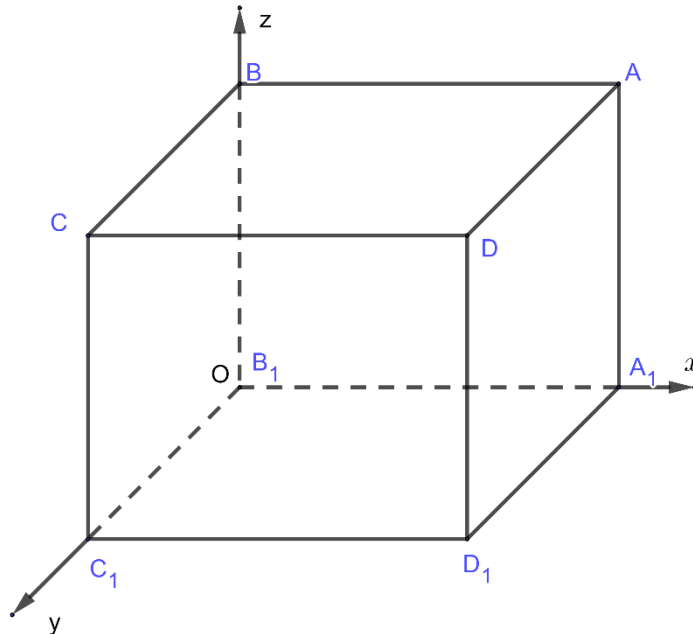
Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) là $d(O, (ABC)) = \frac{|0 + \sqrt{2} \cdot 0 + 0 - 2a|}{\sqrt{1+2+1}} = a$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cạnh bằng a . Khoảng cách giữa $A_1 B$ và $B_1 C$ bằng

- A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{\sqrt{6}}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $a = 1$. Chọn $B_1 A_1$ là trục Ox , $B_1 C_1$ là trục Oy , $B_1 B$ là trục Oz

Suy ra $B_1(0;0;0)$, $A_1(1;0;0)$, $C_1(0;1;0)$, $B(0;0;1)$, $C(0;1;1)$

Ta có $\overrightarrow{A_1 B} = (-1;0;1)$, $\overrightarrow{B_1 B} = (0;0;1)$, $\overrightarrow{B_1 C} = (0;1;1)$

$$\text{Vậy } d(A_1 B, B_1 C) = \frac{|\overrightarrow{A_1 B} \cdot \overrightarrow{B_1 C}|}{\|\overrightarrow{A_1 B} \times \overrightarrow{B_1 C}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Chọn đáp án A

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $4x - 4y + 2z - 1 = 0$ và $2x - 2y + z + 1 = 0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó bằng

- A. $V = \frac{1}{27}$. B. $V = \frac{1}{8}$. C. $V = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. D. $V = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $(P): 4x - 4y + 2z - 1 = 0$, $(Q): 2x - 2y + z + 1 = 0$.

Ta có $(P) \parallel (Q)$

Lấy điểm $M(0;0;-1) \in (Q)$.

Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương, ta có

$$a = d((P), (Q)) = d(M; (P)) = \frac{|-3|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } V = a^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Câu 9: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a , $AA' = a$ và $\angle ABC = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng MO và $C'D$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}a$.

B. $\frac{3\sqrt{5}}{5}a$.

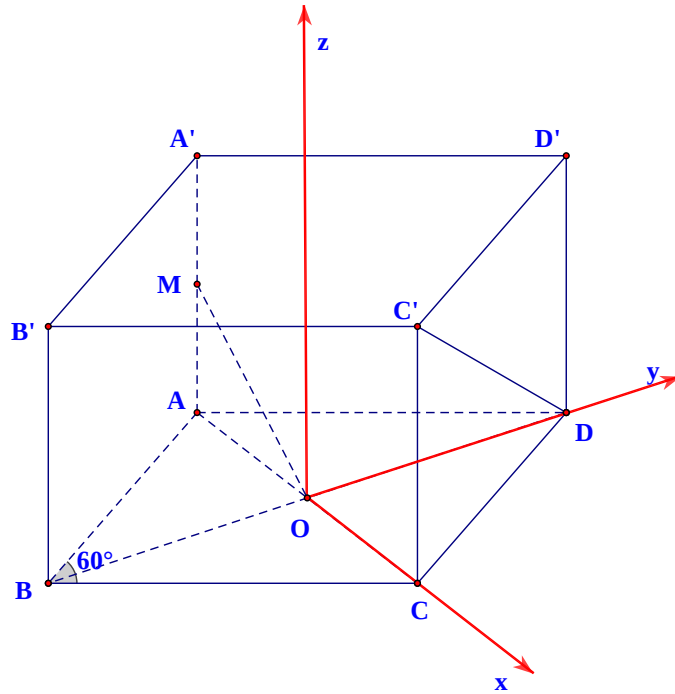
C. $\frac{2\sqrt{5}}{12}a$.

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$.

Lời giải

Chọn A

Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chọn $a = 1$.

Dễ dàng tính được $O(0;0;0)$, $M\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và $C'\left(\frac{1}{2};0;1\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM} = \left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{CD} = \left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-1\right)$ và $\overrightarrow{OC'} = \left(\frac{1}{2};0;1\right)$.

Khi đó $[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{CD}] = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

$$d(OM; C'D) = \frac{|[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{CD}] \cdot \overrightarrow{OC'}|}{\|[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{CD}]\|} = \frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right|}{\sqrt{\frac{3}{16} + \frac{9}{16} + \frac{3}{16}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{10} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}.$$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng ABC luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải**Chọn D**

Gọi V_{OABC} là thể tích khối tứ diện $OABC$ và $S_{\Delta ABC}$ là diện tích tam giác ABC .

$$\text{Ta có } V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot d(O, ABC) \cdot S_{\Delta ABC} \Leftrightarrow d(O, ABC) = \frac{3V_{OABC}}{S_{\Delta ABC}} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

Vậy ABC luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính bằng 2.

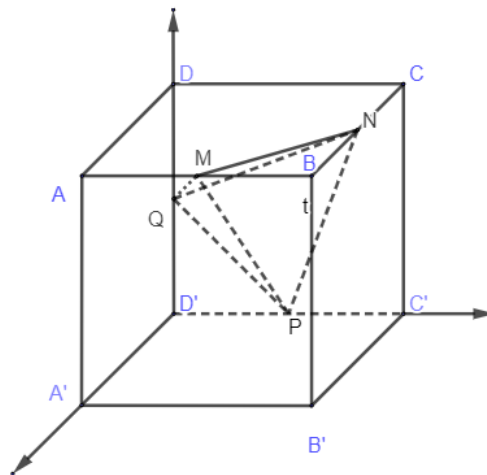
Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' . Thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là

A. $\frac{1}{12}$.B. $\frac{1}{8}$.C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{1}{24}$.**Lời giải****Chọn A**

$$\text{Chọn hệ trục tọa độ } Oxyz \text{ sao cho: } \begin{cases} D' \equiv O \\ Ox \equiv D'A' \\ Oy \equiv D'C' \\ Oz \equiv D'D \end{cases}$$

Khi đó:

$$A(1;0;1), B(1;1;1), C(0;1;1), D(0;0;1), A'(1;0;0), B'(1;1;0), C'(0;1;0)$$



$$M\left(1; \frac{1}{2}; 1\right), N\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right), P\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), Q\left(0; 0; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), \overrightarrow{MP} = (-1; 0; -1), \overrightarrow{MQ} = \left(-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

$$\left| [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MQ} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

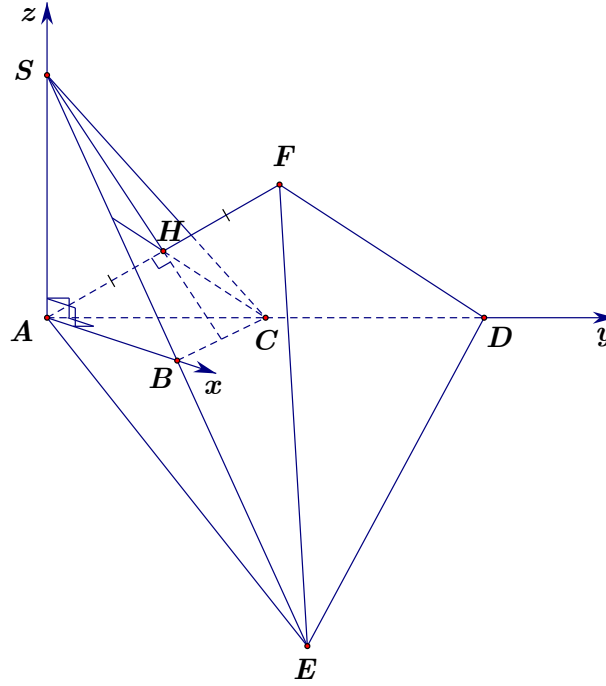
$$\Rightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{6} \cdot \left| [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MQ} \right| = \frac{1}{12}.$$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi D, E, F lần lượt là điểm đối xứng của A qua C , của S qua B và của A qua mặt phẳng (SBC) . Thể tích của khối tứ diện $ADEF$ bằng

- A. $\frac{2a^3}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ với độ dài vector đơn vị bằng a , ta được tọa độ các điểm như sau:

$$A(0;0;0), B(1;0;0), C(0;1;0), S(0;0;1) \Rightarrow D(0;2;0), E(2;0;-1).$$

Gọi H là trọng tâm tam giác $SBC \Rightarrow H\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Vì tam giác SBC là tam giác đều nên H cũng là trực tâm của tam giác $SBC \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow F$ là điểm đối xứng với A qua H
 $\Rightarrow F\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

$$\text{Ta tính được: } \overrightarrow{AD} = (0;2;0), \overrightarrow{AE} = (2;0;-1), \overrightarrow{AF} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = (-2;0;-4)$$

$$\Rightarrow V_{A.DEF} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] \cdot \overrightarrow{AF} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| -2 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}.$$

Vì độ dài vector đơn vị trên trục bằng a nên ta được thể tích cần tính là $\frac{2a^3}{3}$.

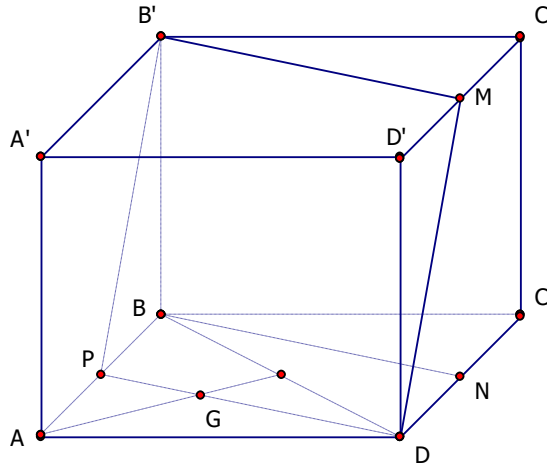
Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của $C'D'$, G là trọng tâm tam giác ABD . Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(B'MG)$.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải**Chọn B**

Gọi N, P lần lượt là trung điểm của CD và AB .

Ta có $B'M \parallel BN \parallel DP \Rightarrow B'M \parallel DP$ suy ra B', M, D, P đồng phẳng.

$$\Rightarrow d(C; (B'MG)) = d(C; (B'DP)) = 2d(N; (B'DP)) = 2d(B; (B'DP))$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $B \equiv O(0;0;0)$, A thuộc tia Ox , C thuộc tia Oy , B' thuộc tia Oz .

không mất tính tổng quát ta chọn $a = 1$

Ta có $D(1;1;0); P(\frac{1}{2};0;0); B'(0;0;1)$; 1 véc tơ pháp tuyến của $(B'DP)$ là $\vec{n} = (2; -1; 1)$

Mặt phẳng $(B'DP)$ có phương trình: $2x - y + z - 1 = 0$

$$\text{Để tính được } d(B; (B'DP)) = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow d(C; (B'DP)) = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy } d(C; (B'DP)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;2)$ và $B(3;-2;4)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có dạng $2x + by + cz + d = 0$. Giá trị của $2b + 2c + d$ bằng

A. 10.

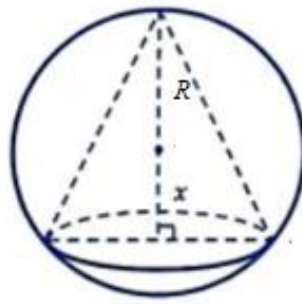
B. -4.

C. -10.

D. 6.

Lời giải**Chọn C**

Xét bài toán: Cho khối nón nội tiếp mặt cầu bán kính R . Tìm khối nón có thể tích đạt giá trị lớn nhất?



Ta thấy 2 khối nón nội tiếp mặt cầu bán kính R có chung đỉnh và có 2 đường tròn đáy bằng nhau thì khối nón có chiều cao lớn hơn R có thể tích lớn hơn khối nón có chiều cao nhỏ hơn R . Do đó để có được khối nón có thể tích lớn nhất ta chỉ xét các khối nón có chiều cao lớn hơn mặt cầu bán kính R .

Giả sử khối nón có chiều cao là $h = R + x$ ($0 \leq x < R$), khi đó bán kính đường tròn đáy của khối nón là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Thể tích khối nón là } V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (R^2 - x^2)(R + x) = \frac{1}{6} \pi (2R - 2x)(R + x)(R + x) \\ &\leq \frac{1}{6} \pi \left(\frac{2R - 2x + R + x + R + x}{3} \right)^3 = \frac{32R^3}{81} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $2R - 2x = R + x \Leftrightarrow x = \frac{R}{3}$.

Vậy khối nón có thể tích lớn nhất bằng $\frac{32R^3}{81}$ khi chiều cao khối nón bằng $\frac{4R}{3}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -4; 2)$, $AB = 6$.

Do khối nón (N) có đỉnh A , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB nên đáy của khối nón nằm trên mặt phẳng (α) nhận $\overrightarrow{AB} = (4; -4; 2)$ làm vector pháp tuyến.

Do đó mặt phẳng (α) có phương trình dạng $2x - 2y + z + m = 0$

$$\begin{aligned} \text{Khi } (N) \text{ có thể tích lớn nhất thì } d(A, (\alpha)) &= \frac{2AB}{3} \\ \Rightarrow \frac{|2(-1) - 2 \cdot 2 + 2 + m|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} &= 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 = 12 \\ m - 4 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 16 \\ m = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

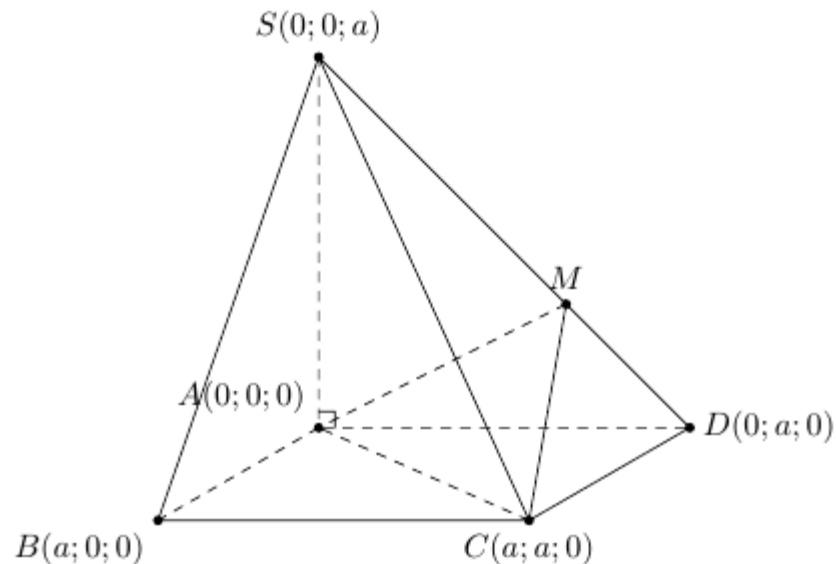
Nhận $m = -8$ vì $d(A, (\alpha)) > d(B, (\alpha))$. Vậy mặt phẳng (α) có phương trình dạng $2x - 2y + z - 8 = 0 \Rightarrow b = -2, c = 1, d = -8 \Rightarrow 2b + 2c + d = -10$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên $SA = a$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Hãy tính **cosin** của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) ?

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. D. 1.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho điểm $A \equiv O$, các điểm B, D, S lần lượt thuộc chiều dương các trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Suy ra tọa độ các điểm như trên hình vẽ.

Do M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$ suy ra

$$\overrightarrow{SM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{SD} \Rightarrow M\left(0; \frac{2a}{3}; \frac{a}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \left(0; \frac{2a}{3}; \frac{a}{3}\right) \\ \overrightarrow{AC} = (a; a; 0) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}] = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{3}; \frac{a^2}{3}; -\frac{2a^2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{a^2}{3}(1; -1; 2).$$

$$\text{Có } \begin{cases} \overrightarrow{SB} = (a; 0; -a) \\ \overrightarrow{SC} = (a; a; -a) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (a^2; 0; a^2) = a^2(1; 0; 1).$$

Chọn vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (AMC) là $\vec{n}_1 = (1; -1; 2)$.

Chọn vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\vec{n}_2 = (1; 0; 1)$.

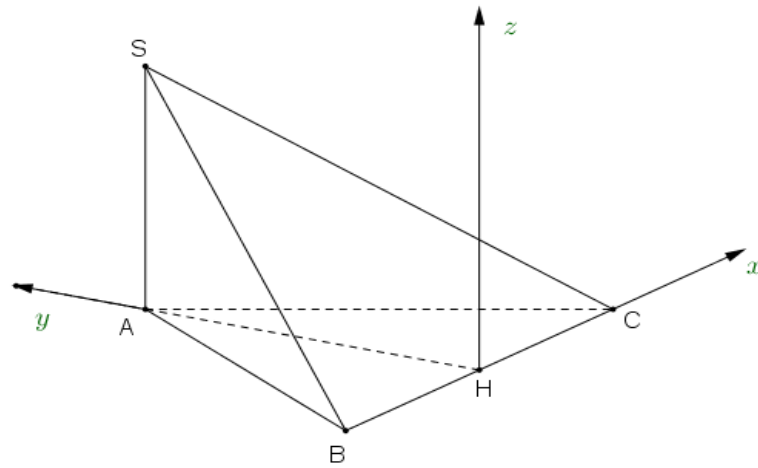
$$\text{Khi đó } \cos((AMC), (SBC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với (ABC) . Góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SBC) là α . Khi đó $\tan \alpha$ bằng:

- A. 1. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{6}$. D. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C



Gắn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ

Ta có: $H(0;0;0)$, $C\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right)$

Suy ra $\vec{n}_{(SAB)} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}; \frac{a^2}{2}; 0\right)$, $\vec{n}_{(SBC)} = [\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}] = \left(0; a^2; -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{(SAB)} \cdot \vec{n}_{(SBC)}|}{|\vec{n}_{(SAB)}| \cdot |\vec{n}_{(SBC)}|} = \frac{\frac{a^4}{2}}{\sqrt{\frac{3a^4}{4} + \frac{a^4}{4}} \cdot \sqrt{a^4 + \frac{3a^4}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

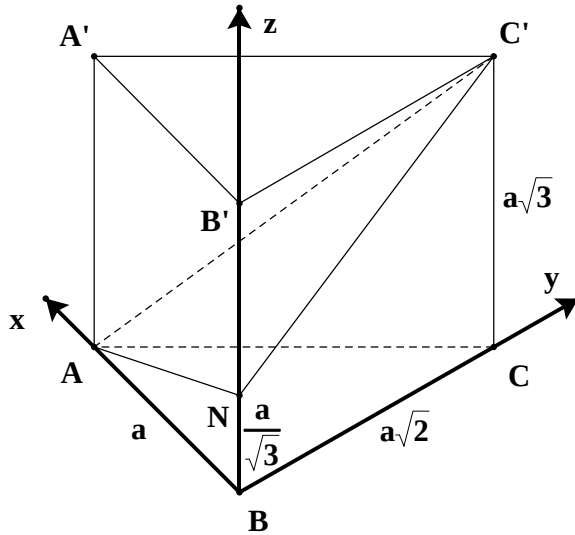
$$\text{Vậy } \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \sqrt{6}$$

Câu 17: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = a\sqrt{3}$. Trên BB' lấy điểm N sao cho $BN = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(AC'N)$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $a\sqrt{6}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D.



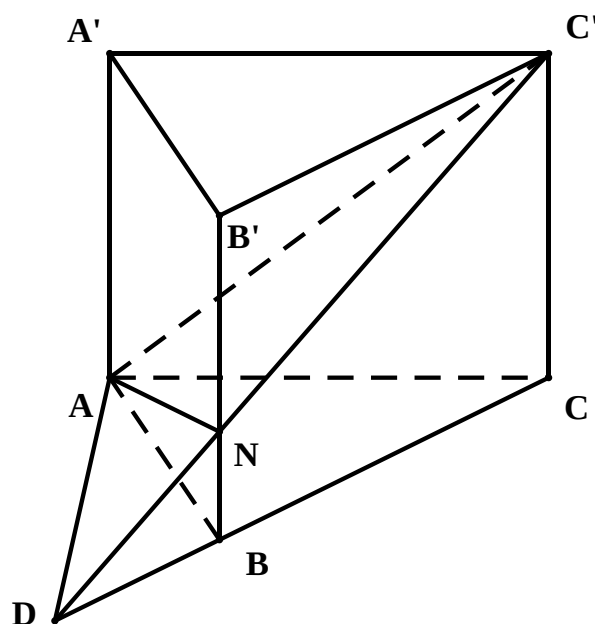
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó ta có: $A(a;0;0)$, $N\left(0;0;\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $C'(0;a\sqrt{2};a\sqrt{3})$, $B'(0;0;a\sqrt{3})$. $\overrightarrow{AN} = \left(-a;0;\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $\overrightarrow{AC'} = (-a;a\sqrt{2};a\sqrt{3})$.

Mặt phẳng $(AC'N)$ đi qua $A(a;0;0)$ có vtpt $\vec{n} = [\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC'}] = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}a; \frac{4a}{\sqrt{3}}; -a\sqrt{2}\right)$ có phương

trình là: $(AC'N): \frac{-\sqrt{6}}{3}(x-a) + \frac{4}{\sqrt{3}}y - \sqrt{2}z = 0$.

$$d(B', (AC'N)) = \frac{\left|\frac{\sqrt{6}a}{3} - \sqrt{6}a\right|}{\sqrt{\frac{6}{9} + \frac{16}{3} + 2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Cách 2:



Gọi D là giao điểm của BC và $C'N$.

$$\text{Ta có } \frac{BN}{BB'} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow B'N = 2BN \Rightarrow d(B', (AC'N)) = 2d(B, (AND)).$$

$$\text{Ta có: } BD \parallel C'B' \Rightarrow \frac{BD}{C'B'} = \frac{NB}{NB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow BD = \frac{1}{2}B'C' = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{d^2(B, (AND))} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BD^2} = \frac{6}{a^2} \quad (BAND \text{ là tam diện vuông})$$

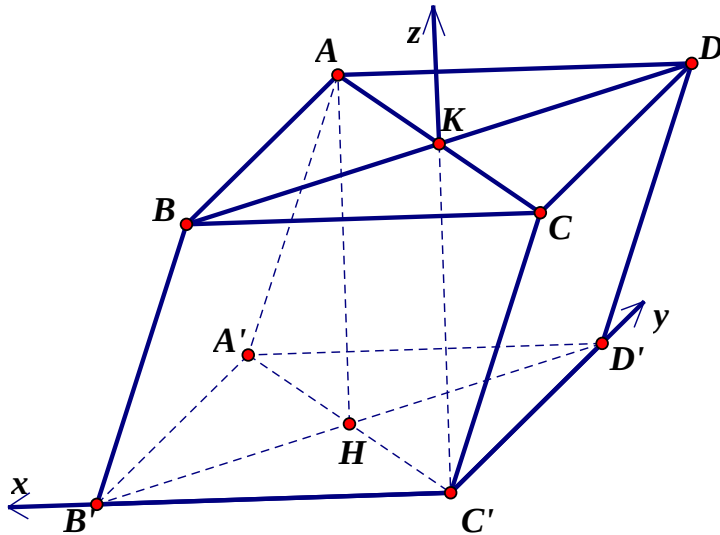
$$\Rightarrow d(B, (AND)) = \frac{a}{\sqrt{6}} \Rightarrow d(B', (AC'N)) = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 18: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Khoảng cách từ điểm B đến $(AB'D')$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $H = A'C' \cap B'D'$ và $K = AC \cap BD$.

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $C' \equiv O, B' \in Ox, D' \in Oy, K \in Oz$.

Đặt $AH = m > 0$.

$$\text{Khi đó } B'(a\sqrt{3}; 0; 0), D'(0; a; 0), A'(a\sqrt{3}; a; 0), H\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; m\right).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'A} \Rightarrow B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; m\right).$$

Mặt khác $\overrightarrow{B'D'} = (-a\sqrt{3}; a; 0), \overrightarrow{B'A} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; m\right)$ nên $(AB'D')$ có vectơ pháp tuyến là

$$[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{B'A}] = (am; \sqrt{3}am; 0) \text{ nên } (AB'D') \text{ có phương trình } x + \sqrt{3}y - a\sqrt{3} = 0.$$

$$\text{Vậy } d(B; (AB'D')) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

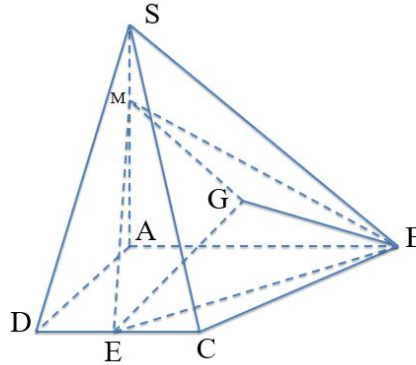
Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Biết $AB = 4a$, $AD = CD = 2a$. Cạnh bên $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC , M là điểm sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MS}$ và E là trung điểm cạnh CD (**tham khảo hình vẽ**). Tính thể tích V của khối đa diện $MGABE$.

A. $\frac{27a^3}{8}$.

B. $\frac{10a^3}{3}$.

C. $\frac{13a^3}{4}$.

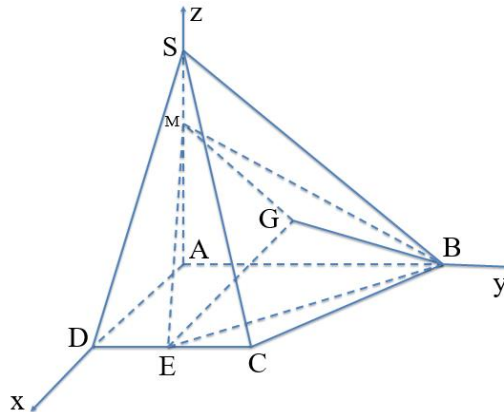
D. $\frac{25a^3}{9}$.



Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Chọn $a = 1$.



Ta có: $A(0;0;0)$, $S(0;0;3)$, $B(0;4;0)$, $D(2;0;0)$, $C(2;2;0)$.

Do E là trung điểm của CD nên $E(2;1;0)$, G là trọng tâm tam giác SBC nên $G\left(\frac{2}{3};2;1\right)$.

$$\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MS} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = -2(x_S - x_M) \\ y_A - y_M = -2(y_S - y_M) \\ z_A - z_M = -2(z_S - z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 0 \\ z_M = 2 \end{cases} \Rightarrow M(0;0;2).$$

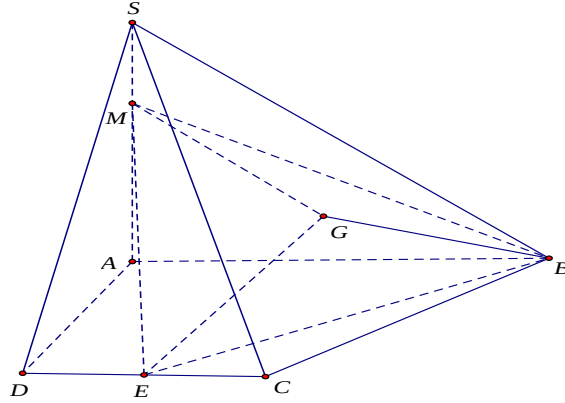
Ta có: $\overrightarrow{AM} = (0;0;2)$, $\overrightarrow{AB} = (0;4;0) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}] = (-8;0;0)$; $\overrightarrow{AE} = (2;1;0)$.

$\overrightarrow{EM} = (-2;-1;2)$, $\overrightarrow{EB} = (-2;3;0) \Rightarrow [\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EB}] = (-6;-4;-8)$; $\overrightarrow{EG} = \left(-\frac{4}{3};1;1\right)$.

$$V_{MGABE} = V_{AMBE} + V_{GMBE} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}] \cdot \overrightarrow{AE}| + \frac{1}{6} |[\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EB}] \cdot \overrightarrow{EG}| = \frac{1}{6} |-16| + \frac{1}{6} |8 - 4 - 8| = \frac{10}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{MGABE} = \frac{10a^3}{3}.$$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Biết $AB = 4a, AD = CD = 2a$. Cạnh bên $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC , M là điểm sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MS}$ và E là trung điểm của CD (Tham khảo hình vẽ).



Tính thể tích V của khối đa diện $MGABE$.

A. $\frac{27a^3}{8}$.

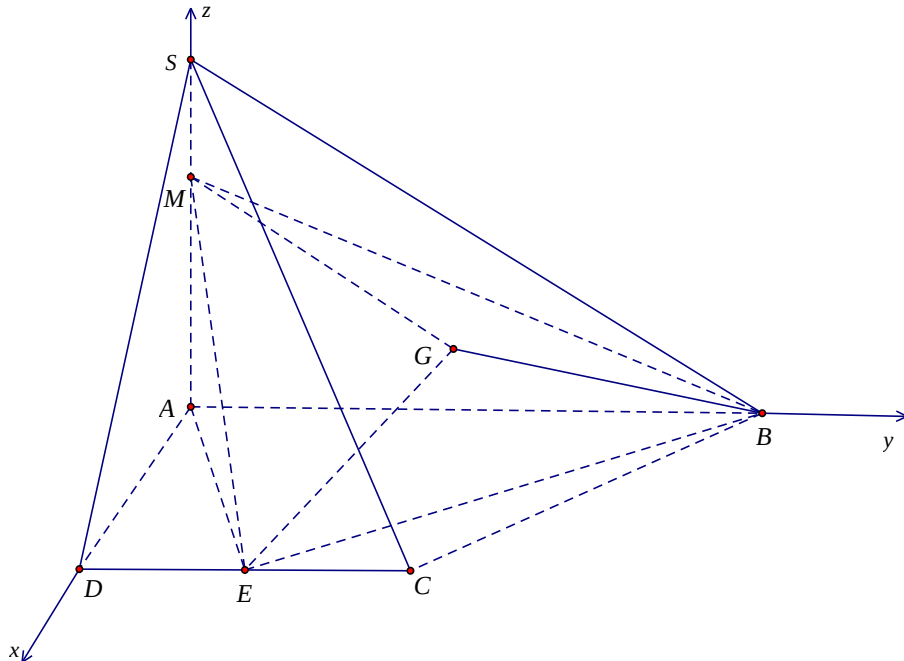
B. $\frac{10a^3}{3}$.

C. $\frac{13a^3}{4}$.

D. $\frac{25a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } V_{MGABE} = V_{MABE} + V_{GMEB}$$

$$V_{M.ABE} = \frac{1}{3} MA \cdot S_{ABE} = \frac{1}{3} \cdot MA \cdot \frac{1}{2} AD \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a = \frac{8a^3}{3}.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$$M(0;0;2a), E(2a;a;0), B(0;4a;0), C(2a;2a;0); S(0;0;3a) \Rightarrow G\left(\frac{2a}{3}; 2a; a\right)$$

$$\overrightarrow{MG} = \left(\frac{2a}{3}; 2a; -a\right), \overrightarrow{ME} = (2a; a; -2a), \overrightarrow{MB} = (0; 4a; -2a)$$

$$[\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MB}] = (6a^2; 4a^2; 8a^2)$$

$$\Rightarrow V_{MAGE} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MB}] \cdot \overrightarrow{MG}| = \frac{1}{6} (4a^3 + 8a^3 - 8a^3) = \frac{2a^3}{3}.$$

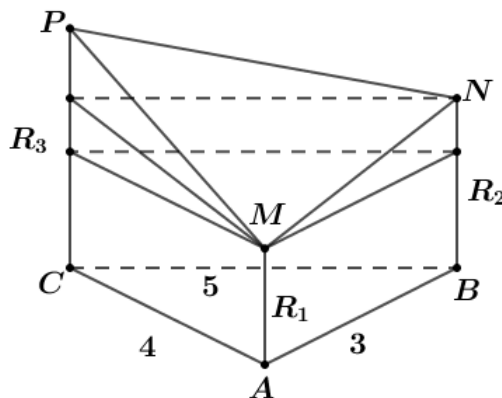
$$\Rightarrow V_{MGABE} = V_{MABE} + V_{GMEB} = \frac{8a^3}{3} + \frac{2a^3}{3} = \frac{10a^3}{3}.$$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;3)$, $B(1;4;3)$, $C(5;1;3)$. Ba mặt cầu tiếp xúc nhau từng đôi một và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại ba đỉnh A, B, C . Tổng bán kính của ba mặt cầu trên bằng

- A. 6. B. $\frac{769}{120}$. C. $\frac{769}{60}$. D. $\frac{37}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AB=3, AC=4, BC=5$.

Gọi M, N, P lần lượt là tâm của các mặt cầu tiếp xúc với (ABC) tại A, B, C và R_1, R_2, R_3 là các bán kính tương ứng.

Suy ra $MA=R_1, NB=R_2, PC=R_3$.

Vì các mặt cầu tiếp xúc nhau nên $MN=R_1+R_2, NP=R_2+R_3, MP=R_3+R_1$.

Sử dụng định lý Pitago, ta có

$$\begin{cases} (BN - AM)^2 + AB^2 = MN^2 \\ (CP - AM)^2 + AC^2 = MP^2 \\ (CP - BN)^2 + BC^2 = NP^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (R_2 - R_1)^2 + AB^2 = (R_1 + R_2)^2 \\ (R_3 - R_1)^2 + AC^2 = (R_1 + R_3)^2 \\ (R_3 - R_2)^2 + BC^2 = (R_3 + R_2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2R_1R_2 + 9 = 2R_1R_2 \\ -2R_1R_3 + 16 = 2R_1R_3 \\ -2R_2R_3 + 25 = 2R_2R_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4R_1R_2 = 9 \\ 4R_1R_3 = 16 \\ 4R_2R_3 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{6}{5} \\ R_2 = \frac{15}{8} \\ R_3 = \frac{10}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Tổng bán kính } R_1 + R_2 + R_3 = \frac{769}{120}$$

Câu 22: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng 1 và $BAD = DAA' = A'AB = 60^\circ$. Cho hai điểm M, N thỏa mãn lần lượt $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DD'}$. Độ dài đoạn thẳng MN là

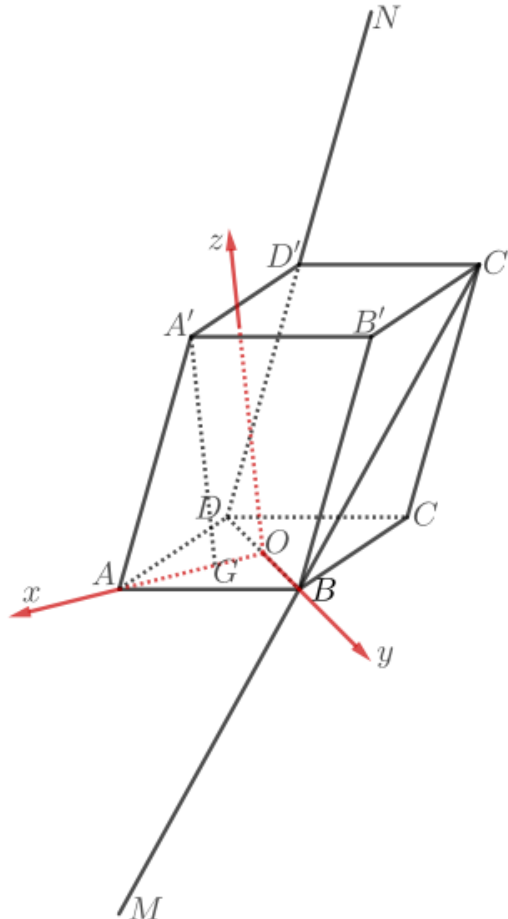
A. $\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{19}$.

D. $\sqrt{15}$.

Lời giải



Từ giả thiết, suy ra các $\triangle AA'B$, $\triangle ABD$, $\triangle AA'D$ là các tam giác đều bằng nhau và có cạnh bằng 1. Từ đó suy ra tứ diện $A'.ABD$ là tứ diện đều.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Suy ra $A'G \perp (ABD)$.

$$\text{Dễ dàng tính được } CO = AO = \frac{\sqrt{3}}{2}; GO = \frac{\sqrt{3}}{6}; AG = \frac{\sqrt{3}}{3}; A'G = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Nên } IM : \begin{cases} x = t \\ y = 1+t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2+t \end{cases} \text{ suy ra } M(t; 1+t; 2+t).$$

Ta

có

$$M = IM \cap (P) \Rightarrow M \in (P) \Leftrightarrow t+t+1+2+t=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow M(-1; 0; 1) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (-1; -1; -1).$$

$$\text{Gọi } K \text{ là giao điểm của } IM \text{ và đáy hình nón, ta có } \frac{IK}{IM} = \frac{IA^2}{IM^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{IM} = 3\overrightarrow{IK} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 3(x_K - 0) \\ -1 = 3(y_K - 1) \\ -1 = 3(z_K - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = -\frac{1}{3} \\ y_K = \frac{2}{3} \\ z_K = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

Mặt phẳng cần tìm qua $K\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$ (vì song song (P)) có

$$\text{phương trình } x + y + z - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 0.$$

Câu 24: Trong không gian Oxyz, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O . Biết $A(2; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $S(0; 0; 2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC . Mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N . Tính thể tích khối chóp $S.ABMN$.

$$\text{A. } V = \sqrt{2}. \quad \text{B. } V = 2\sqrt{3}. \quad \text{C. } V = 3\sqrt{2}. \quad \text{D. } V = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Lời giải

Chọn A

O là trung điểm của $AC, BD \Rightarrow C(-2; 0; 0), D(0; -1; 0)$.

M là trung điểm của $SC \Rightarrow M(-1; 0; \sqrt{2})$.

Phương trình mặt phẳng (ABM) là $\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 3z - 2\sqrt{2} = 0$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } SD \text{ là } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1+t \\ z = 2\sqrt{2}t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

N là giao điểm của (ABM) và $SD \Rightarrow N\left(0; -\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABMN$ là:

$$V = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}] \cdot \overrightarrow{SM} \right| + \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] \cdot \overrightarrow{SN} \right| = \frac{4\sqrt{2}}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}.$$

Câu 25: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' . Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$.

A. $\frac{1}{12}$.

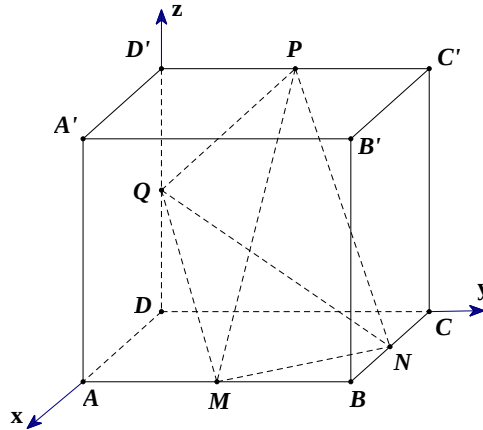
B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{1}{24}$.

Lời giải

Chọn A



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có $D(0;0;0), A(1;0;0), B(1;1;0), C(0;1;0), A'(1;0;1), B'(1;1;1), C'(0;1;1), D'(0;0;1)$.

Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' nên

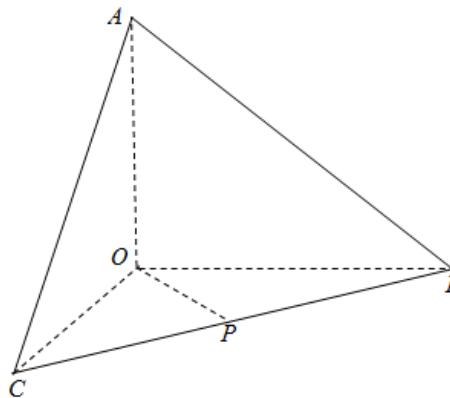
$$M\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right), P\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), Q\left(0; 0; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), \overrightarrow{MP} = (-1; 0; 1), \overrightarrow{MQ} = \left(-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}] = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \Rightarrow [\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{MNPQ} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MQ}| = \frac{1}{6} \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{12}.$$

Câu 26: Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi P là trung điểm của BC (minh họa như hình vẽ).



Khoảng cách giữa hai đường thẳng OP và AB bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

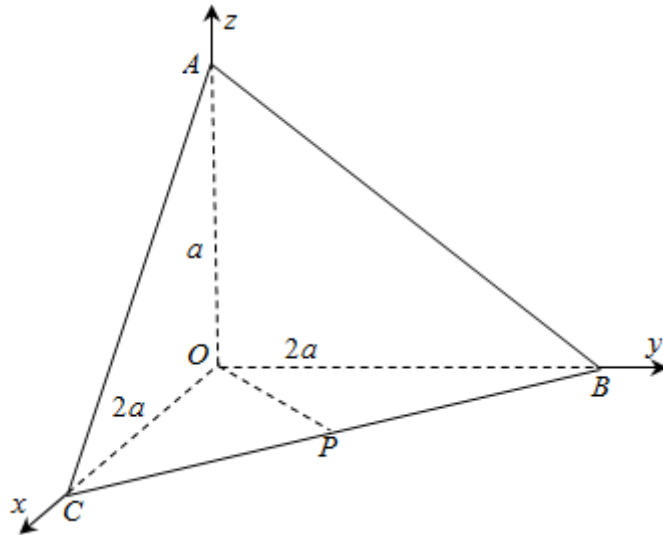
B. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

C. a .

D. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn B



♦ Đặt khối tứ diện $O.ABC$ vào hệ trục tọa độ gốc $Oxyz$: các điểm A, B, C lần lượt thuộc các trục tọa độ Oz, Oy, Ox . Ta có:

$O(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(0;2;0)$, $C(2;0;0)$, $P(1;1;0)$, $\overrightarrow{AB} = (0;2;-1)$.

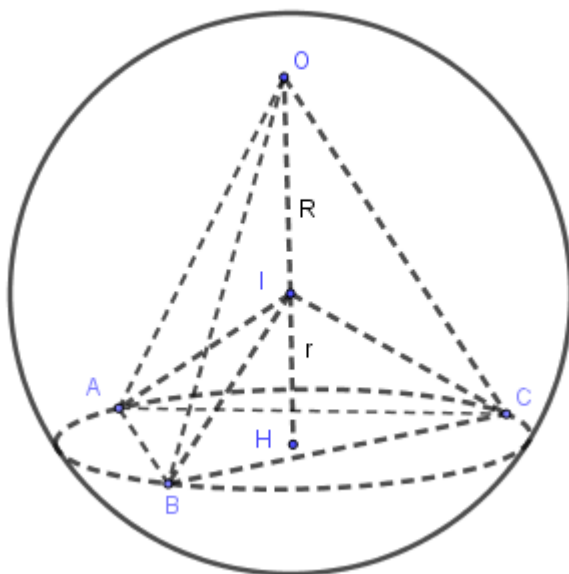
♦
$$d(OP; AB) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{OP}; \overrightarrow{AB} \right] \cdot \overrightarrow{OB} \right|}{\left| \left[\overrightarrow{OP}; \overrightarrow{AB} \right] \right|} = \frac{\sqrt{6}}{3}(a).$$

Câu 27: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;-2)$ và đi qua gốc tọa độ O . Gọi $d_1; d_2; d_3$ là ba đường thẳng thay đổi, không đồng phẳng cùng đi qua O và cắt (S) tại điểm thứ hai là A, B, C . Khi thể tích khối tứ diện $OABC$ lớn nhất thì mặt phẳng (ABC) đi qua điểm nào sau đây

A. $P(1;-2;-6)$. B. $F(1;-2;-8)$. C. $E(-1;2;-8)$. D. $Q(2;-3;5)$.

Lời giải

Chọn C



Có $R = OI = 3$. Ta thấy thể tích khối tứ diện $OABC$ lớn nhất khi đường thẳng OI vuông góc với (ABC) tại tâm H của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Dấu bằng đạt tại $x = \sqrt{3} \Leftrightarrow M(-1; 0; 1)$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) .

Suy ra $\begin{cases} A \in (S) \\ AM = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1 \\ (x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x + y + z - 2 = 0$ là mặt phẳng chứa các tiếp điểm.

Vậy $a + b + c = 1 + 1 - 2 = 0$.

Câu 29: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2; 1; 3)$ và $B(6; 5; 5)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB . Khi (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình dạng $2x + by + cz + d = 0$. Giá trị của $b + c + d$ bằng

A. -21.

B. -12.

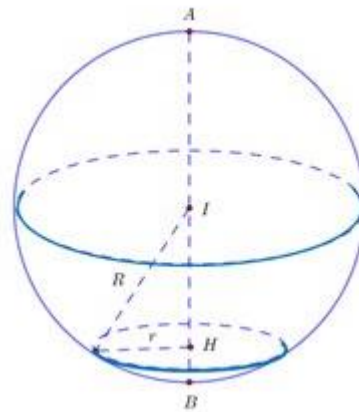
C. -18.

D. -15.

Lời giải

Chọn C

(Hình vẽ)



Ta có: $AB = 6$

Gọi h, r là chiều cao và bán kính đáy hình nón (N) , R là bán kính mặt cầu (S) đường kính AB . Gọi I là trung điểm AB và H là tâm đường tròn đáy của (N) .

Để thể tích hình nón (N) lớn nhất thì $h \geq R$.

Ta có: $r^2 = R^2 - IH^2 = R^2 - (h - R)^2$

Thể tích khối nón (N) : $V = \frac{1}{3}h.\pi r^2 = \frac{1}{3}h.\pi.[R^2 - (h - R)^2] = \frac{1}{3}\pi(2Rh^2 - h^3)$

Xét hàm số $f(h) = \frac{1}{3}\pi(2Rh^2 - h^3)$ với $R \leq h < 2R$ ta suy ra $V_{\max}$ khi

$h = \frac{4R}{3} \Rightarrow AH = 4, BH = 2$.

Gọi $H(x; y; z)$, khi đó: $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow H = \left(\frac{14}{3}; \frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right)$

Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) đi qua H và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp

tuyến là: $2\left(x - \frac{14}{3}\right) + 2\left(y - \frac{11}{3}\right) + 1\left(z - \frac{13}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z - 21 = 0 \Rightarrow b + c + d = -18$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$. Xét khối tứ diện $ABCD$ có các đỉnh đều thuộc (S) sao cho tam giác ABC vuông cân tại B và $DA = DB = DC$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABCD$ gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. 40. B. 50. C. 48. D. 51.

Lời giải**Chọn A**

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=5$ là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Theo giả thiết ta đặt $\begin{cases} BA = BC = x \Rightarrow AC = x\sqrt{2}. \\ DA = DB = DC = y \end{cases}$

Diện tích đáy $S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{x^2}{2}$.

Tam giác ABC vuông, có bán kính đường tròn ngoại tiếp là: $R_d = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}x}{2}$. Vì vậy chiều

cao của khối chóp là $h = \sqrt{cb^2 - R_d^2} = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2}}$.

Thể tích khối chóp là: $V_{D.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \frac{x^2}{2} \cdot \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2}}$.

Mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $D.ABC$ có các cạnh bên bằng nhau nên bán kính mặt cầu (S) được tính theo công thức:

$$R = \frac{cb^2}{2h} = \frac{y^2}{2h} = \frac{y^2}{2\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2}}} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2}} = \frac{y^2}{10} \Leftrightarrow x^2 = 2y^2 - \frac{y^4}{50}$$

Vì vậy

$$V_{D.ABC} = \frac{1}{6} \left(2y^2 - \frac{y^4}{50} \right) \frac{y^2}{10} = \frac{1}{6000} \cdot y^2 \cdot y^2 (200 - 2y^2) \leq \frac{1}{6000} \left(\frac{y^2 + y^2 + 200 - y^2}{3} \right)^3 = \frac{4000}{81}.$$