

MÔN THI: TOÁN – LỚP 8

Thời gian: 150 phút (không tính giao đề)

Bài 1. (1,5 điểm)

- a) Chứng minh rằng $2^{2008} + 2^{2009} + 2^{2010}$ chia hết cho 7
b) Chứng minh rằng không có giá trị tự nhiên n nào để giá trị của biểu thức $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ chia hết cho giá trị của biểu thức $n^2 - n$

Bài 2. (1,5 điểm)

Hưởng ứng ngày chủ nhật xanh – sạch – đẹp. Học sinh khối lớp 8 nhận làm vệ sinh một đoạn đường em chăm. Lớp 8/1 nhận 10 mét và $\frac{1}{10}$ của phần còn lại, lớp 8/2 nhận 20 mét và $\frac{1}{10}$ của phần còn lại, lớp 8/3 nhận 30 mét và $\frac{1}{10}$ của phần còn lại ... cứ chia như vậy cho đến lớp cuối cùng thì vừa đủ và phần đường của mỗi lớp dài bằng nhau. Hỏi khối 8 có bao nhiêu lớp và đoạn đường mỗi lớp nhận dài bao nhiêu mét ?

Bài 3. (2,0 điểm)

$$M = \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{2x^2 + x - 1} + \frac{x}{2x - 1}$$

Cho biểu thức:

- a) Tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa
b) Rút gọn biểu thức M
c) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức M có giá trị nguyên.

Bài 4. (2,0 điểm)

- a) Cho $a + b = 3$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a^2 + b^2$
b) Cho $\frac{1}{x^2} + x^2 = 14 (x \neq 0)$. Hãy tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x^3} + x^3$

Bài 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác AHB và AHC. MN cắt AB, AH, AC lần lượt tại I, E, K

- a) Chứng minh : BM vuông góc với AN
b) Chứng minh : $ME \cdot NK = MI \cdot NE$

- c) Biết diện tích của tam giác ABC là S . Tính diện tích lớn nhất của tam giác AIK theo S .

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a. $2^{2008} + 2^{2009} + 2^{2010} = 2^{2008} \cdot (1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^{2008} : 7$

b. Chia $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ cho $n^2 - n$ dư 3

Vì $n^2 - n = n(n - 1)$ là số chẵn nên $n(n - 1) \notin U(3)$.

Bài 2.

Gọi $x^{(m)}$ là chiều dài đoạn đường cả khối 8 là vệ sinh ($x > 0$)

Lớp 8/1 nhận đoạn đường dài : $10 + 0,1(x - 10) = 0,1x + 9$

Sau khi lớp 8/1 nhận, đoạn đường còn lại: $x - (0,1x + 9) = 0,9x - 9$

Lớp 8/2 nhận đoạn đường dài : $20 + 0,1(0,9x - 9 - 20) = 0,09x + 17,1$

Ta có phương trình : $0,1x + 9 = 0,09x + 17,1$

Giải ra : $x = 810$ (thích hợp)

Khối 8 có 9 lớp

Mỗi lớp chăm đoạn đường dài 90m

Bài 3.

a.

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

$$2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + x - 1 = (x + 1)(2x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1; x \neq \frac{1}{2}$$

b.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \right) \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(2x-1)} + \frac{x}{2x-1} \\
&= \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{x(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) \frac{x-1}{2x-1} + \frac{x}{2x-1} \\
&= \left(\frac{2x^3 + x^2 - x - x^3 - x^2 - x}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) \cdot \frac{x-1}{2x-1} + \frac{x}{2x-1} \\
&= \left(\frac{x^3 - 2x}{x^2+x+1} \right) \cdot \frac{1}{2x-1} + \frac{x}{2x-1} = \frac{x^3 - 2x + x(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(2x-1)} \\
&= \frac{2x^3 + x^2 - x}{(x^2+x+1)(2x-1)} = \frac{(2x-1)(x^2+x)}{(x^2+x+1)(2x-1)} = \frac{x^2+x}{x^2+x+1}
\end{aligned}$$

c)

$$M = \frac{x^2+x}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-1}{x^2+x+1} = 1 - \frac{1}{x^2+x+1}$$

M có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x^2+x+1 \in \mathbb{U}(1)$

$$x^2+x+1=1 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0(tm) \\ x=-1(ktm) \end{cases}$$

$$x^2+x+1=-1 \Leftrightarrow x^2+x+2=0(VN)$$

Vậy $x=0$

Bài 4.

4a.

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (\text{với mọi } a, b)$$

$$a+b=3 \Leftrightarrow (a+b)^2=9 \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=9$$

$$\Rightarrow 2(a^2+b^2) \geq 9 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 4,5$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2=4,5$

4b.

$$\frac{1}{x^2} + x^2 = \left(\frac{1}{x} + x \right)^2 - 2$$

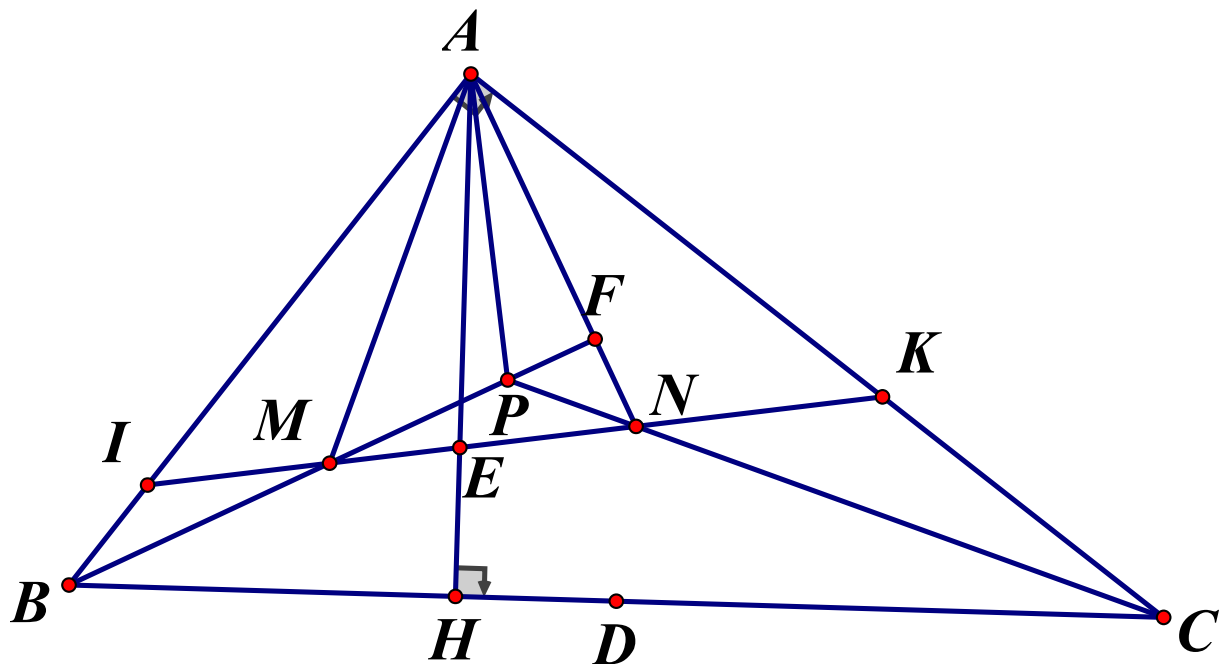
$$\left(\frac{1}{x} + x \right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{1}{x} + x = \pm 4$$

$$\frac{1}{x^3} + x^3 = \left(\frac{1}{x} + x \right) \left(\frac{1}{x^2} + x^2 - 1 \right)$$

Với $x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + x = -4$; thì $\frac{1}{x^3} + x^3 = -4 \cdot (14 - 1) = -52$

Với $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + x = 4$; thì $\frac{1}{x^3} + x^3 = 4 \cdot (14 - 1) = 52$

Bài 5.



a) Gọi F là giao điểm của BM và AN

$$\angle ABH = \angle HAC \text{ (cùng phụ với } \angle BAH \text{)}$$

$$\angle ABF = \angle AN \left(\angle ABF = \frac{1}{2} \angle ABH; \angle AN = \frac{1}{2} \angle BAH \right)$$

$$\angle ABF + \angle BAF = 90^\circ \text{ (vì } \angle AN + \angle BAF = 90^\circ \text{)}$$

$$\Delta ABF \text{ vuông tại F} \Rightarrow BM \perp AN$$

b) Gọi P là giao điểm của BM và CN $\Rightarrow AP$ là phân giác $\angle BAC$ nên AP là phân giác $\triangle AIK$

Chứng minh tương tự câu a ta có: $CN \perp AM$

P là trực tâm $\triangle AMN \Rightarrow AP \perp IK$; AP là đường cao $\triangle AIK$

$\triangle AIK$ vuông cân tại A $\Rightarrow AI = AK$.

Áp dụng tính chất đường phân giác vào $\triangle AIE$ và $\triangle AEK$ ta có:

$$\frac{MI}{ME} = \frac{AI}{AE}; \frac{NK}{NE} = \frac{AK}{AE} \Rightarrow \frac{MI}{ME} = \frac{NK}{NE} \text{ (Do } AI = AK) \\ \Rightarrow ME \cdot NK = MI \cdot NE$$

c) Gọi D là trung điểm BC; $AD = \frac{1}{2}BC$

$$\triangle AMI = \triangle AMH \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AI = AH$$

$$S_{AIK} = \frac{1}{2} AI \cdot AK = \frac{1}{2} AH^2$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AH \cdot 2AD = AH \cdot AD$$

$$\text{Vì } AH \leq AD \Rightarrow S_{AIK} \leq \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow S_{AIK} \leq \frac{1}{2} S$$

Vậy diện tích lớn nhất của $\triangle AIK$ là $\frac{1}{2}S$