

THÔNG TIN CHUNG VỀ SÁNG KIẾN

1. Tên sáng kiến:

“GIẢI PHÁP GIẢNG DẠY PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC KHÔNG CHỨA THAM SỐ ”.

2. Lĩnh vực áp dụng sáng kiến

Lĩnh vực áp dụng sáng kiến: Công tác chuyên môn: Áp dụng trong giảng dạy chương Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác, bộ môn Đại số và Giải tích 11

3. Tác giả

Họ và tên:

Ngày/tháng/năm sinh:

Chức vụ, đơn vị công tác:

Điện thoại di động:

4. Đơn vị áp dụng sáng kiến

Tên đơn vị:

Địa chỉ:

Điện thoại:

I. MÔ TẢ GIẢI PHÁP ĐÃ BIẾT

Với nội dung nghiên cứu “ **GIẢI PHÁP GIẢNG DẠY PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỤC KHÔNG CHỨA THAM SỐ** ” .tôi đã dựa trên thực tế khả năng giải các bài về phương trình lượng giác của học sinh, dựa trên kết quả học tập của các em cuối năm lớp 10. Trên cơ sở đó, tôi đã tìm ra những hạn chế của đối tượng học sinh này.

Trong quá trình giảng dạy chương I đại số- Lớp 11: “ Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác ” tôi nhận thấy phương trình lượng giác là một nội dung rất quan trọng trong chương trình Đại số và giải tích 11, hơn nữa đây cũng là nội dung “cứng” trong cấu trúc ra đề thi đại học của Bộ GD và ĐT và thi học sinh giỏi. Trong chương học này học sinh đã nắm được các dạng phương trình lượng giác cơ bản và phương trình lượng giác thường gặp. Tuy nhiên khi đụng đến biến đổi lượng giác nói chung và giải phương trình lượng giác nói riêng thì học sinh còn khá lúng túng, thậm chí một bộ phận lớn học sinh còn cảm giác “sợ” nội dung này, phương trình lượng giác không mẫu mực rất đa dạng và không thể có phương pháp chung nào để giải mọi phương trình lượng giác đó nên học sinh thường thấy lúng túng trong việc phân tích, lựa chọn cách giải phù hợp, ngắn gọn.

Phương trình lượng giác rất đa dạng nhưng có thể nói có hai dạng riêng biệt: phương trình chứa tham số và phương trình không chứa tham số. Những phương trình lượng giác mẫu mực đã có cách giải cụ thể ở sách giáo khoa vì vậy ở đây tôi chỉ nghiên cứu một số phương pháp giải phương trình không chứa tham số ở những phương trình không mẫu mực.

Có rất nhiều tài liệu tham khảo về giải phương trình lượng giác, nhưng hầu hết đều chú ý đến số lượng các ví dụ nhiều hơn là đi định hướng cho học sinh có một cái nhìn sâu sắc, bản chất .

Việc cung cấp kiến thức cho học sinh một cách chi tiết là khó khăn, bởi số tiết dành cho nội dung này là hạn chế, so với một lượng kiến thức có thể nói là rất đồ sộ. Vì vậy việc tìm ra cho mình một phương pháp giảng dạy có tính hiệu quả cao, trong một thời gian ngắn là một điều rất cần thiết đối với bất kì giáo viên nào.

Là người giáo viên trực tiếp giảng dạy cho các em tôi thấy rằng mình không chỉ nắm được các kiến thức mà điều cần thiết là vận dụng các phương pháp linh hoạt, hệ thống kiến thức một cách sáng tạo, truyền thụ cho học sinh dễ hiểu nhất.

Do đó tôi muốn chia sẻ qua sáng kiến kinh nghiệm nhỏ này với mong muốn mang đến cho bạn đọc một cách nhìn mới trên nội dung cũ nhằm góp phần đưa những tiết học về nội dung giải phương trình lượng giác trở nên sôi động và hiệu quả hơn.

II. NỘI DUNG, GIẢI PHÁP ĐỀ NGHỊ CÔNG NHẬN SÁNG KIẾN

II.1. Nội dung, giải pháp đề xuất:

Các phương trình lượng giác rất đa dạng không thể có một công thức chung nào để giải mọi phương trình lượng giác, bởi vậy cần thiết sử dụng các phép biến đổi lượng giác thông thường để đưa phương trình ban đầu về các dạng cơ bản. Thông thường để giải phương trình lượng giác ta phải thực hiện các bước sau:

* Nếu phương trình chứa nhiều hàm lượng giác khác nhau thì sử dụng phép biến đổi tương đương đưa về phương trình chỉ chứa một hàm lượng giác.

* Nếu phương trình chứa các hàm lượng giác của các cung khác nhau thì sử dụng phép biến đổi tương đương đưa về phương trình chỉ chứa các hàm lượng giác của một cung.

- Biến đổi phương trình đã cho về các phương trình đơn giản quen thuộc.
Các phương pháp biến đổi theo hướng này gồm có

+ Phương pháp đặt ẩn phụ : Đưa phương trình lượng giác về việc giải phương trình đại số.

+ Phương pháp hạ bậc : Nếu phương trình cần giải có bậc cao thì dùng công thức hạ bậc để biến đổi về bậc thấp hơn.

+ Phương pháp biến đổi thành phương trình tích.

+ Phương pháp đánh giá hai vế

Bài toán 1: Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp đặt ẩn phụ để giải phương trình lượng giác đã được nêu trong các chủ đề:

- Phương trình bậc 2 và bậc cao đối với một hàm số lượng giác
- Phương trình đẳng cấp bậc 2 và bậc cao đối với sin và cos
- Phương trình đối xứng

Trong bài toán này ta xét thêm những trường hợp khác

- Đặt $t = \frac{1}{\sin x}$ hoặc $t = \frac{1}{\cos x}$, điều kiện $|t| \geq 1$
- Đặt $t = a \sin x + b \cos x$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Khi gặp phương trình dạng $R(\tan x, \cot x, \sin 2x, \cos 2x, \tan 2x)$ với R là

hàm hữu tỷ thì ta đặt $t = \tan x$. (Đk: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$) Khi đó: $\tan 2x = \frac{2t}{1-t^2}$;

$\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; . Hiển nhiên, lúc này phương trình đã cho đưa về

phương trình đại số với biến t mà ta có thể giải dễ dàng tìm $t \rightarrow x$. Lưu ý

rằng, ở đây x có thể là $\dots, \frac{x}{4}, \frac{x}{3}, \frac{x}{2}, x, 2x, 3x, 4x, \dots$

Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$ (*)

Giải: Đặt $t = \tan x$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow (1-t)(1+t^2) = (1-t^2)t \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \text{ (N)} \\ 2t^2 - t + 1 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \quad (\text{Nhận do } \sin 2x = 1 \neq 0)$$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sin 2x + 2 \tan x = 3$ (*)

Giải:

ĐK: $\cos x \neq 0$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2t}{1+t^2} + 2t = 3 \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$ (*)

Giải

+ **Điều kiện:** $\cos x \neq 0$

+ Đặt $t = \tan x \Rightarrow \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$(*) \Leftrightarrow (1-t) \left(1 + \frac{2t}{1+t^2} \right) = 1+t \Leftrightarrow (1-t) \frac{(t+1)^2}{1+t^2} = 1+t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ \frac{(1-t)(1+t)}{1+t^2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + l2\pi \\ x = k\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 4: Giải phương trình $\frac{1}{\cos^2 x} = (\sqrt{2} - 1)\tan x - \sqrt{2} + 3$ (1); ĐK $0 < x < \frac{\pi}{3}$

Giải: Do $0 < x < \frac{\pi}{3}$ nên $\cos x > 0$, ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 1 + \tan^2 x = (\sqrt{2} - 1)\tan x - \sqrt{2} + 3 \\ &\Leftrightarrow \tan^2 x - (\sqrt{2} - 1)\tan x + \sqrt{2} - 2 = 0 \end{aligned}$$

Đặt $\tan x = t$ ta được phương trình

$$t^2 - (\sqrt{2} - 1)t + \sqrt{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \sqrt{2} - 2 \end{cases}$$

vì $0 < x < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 0 < \tan x < \sqrt{3}$ do đó chỉ nhận $t = 1$

$$t = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad (\text{Vì } 0 < x < \frac{\pi}{3})$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{\pi}{4}$

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\tan 2x + \cot x = 8 \cos^2 x$

Điều kiện để phương trình có nghĩa là

$$\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq k\pi \end{cases} \quad (1.1)$$

* Xét hai khả năng sau

+ Nếu $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ khi đó $\tan 2x + \cot x - 8\cos^2 x = 0$

Và lại chúng thỏa mãn ĐK (1.1) nên $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

*) Nếu $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (và thỏa mãn (1.1)) . Khi đó viết phương trình đã cho

dưới dạng $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} + \frac{1}{\tan x} = \frac{8}{1 + \tan^2 x}$

Đặt $\tan x = t$ ($t \neq 0; |t| \neq 1$) ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{2t}{1-t^2} + \frac{1}{t} &= \frac{8}{1+t^2} \\ \Leftrightarrow 2t^2(1+t^2) + 1-t^4 &= 8t(1-t^2) \Leftrightarrow t^4 + 8t^3 + 2t^2 - 8t + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow t^2 + 8t + 2 - \frac{8}{t} + \frac{1}{t^2} &= 0 \quad (t \neq 0) \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 8\left(t - \frac{1}{t}\right) + 4 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt $y = t - \frac{1}{t}$ khi đó đưa (*) trở về phương trình $y^2 + 8y + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow y = -4 \pm 2\sqrt{3}$$

(chú ý rằng $t - \frac{1}{t} = \tan x - \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\cos 2x}{\sin x \cos x} = -2 \cot 2x$)

Ta có hai trường hợp sau

$$1 / \cot 2x = 2 - \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{12} = \cot \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{24} + k \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 / \cot 2x = 2 + \sqrt{3} = \tan \frac{5\pi}{12} = \cot \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + k \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Đối chiếu với ĐK (1.1) ta suy ra mọi nghiệm đều chấp nhận được . Tóm lại phương trình đã cho có các nghiệm là:

$$x = \frac{5\pi}{24} + k \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{24} + k \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý :

*, Nếu dùng phép biến đổi $t = \sin x$ hoặc $t = \cos x$ thì không có gì đáng nói.

*, Nếu thực hiện phép biến đổi $t = \tan x$ (hoặc $t = \cot x$) thì lưu ý các điểm sau đây :

+, Nếu trong ĐK của phương trình đã có $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($x \neq k\pi$) thì việc đặt ẩn phụ $t = \tan x$ ($t = \cot x$) không phạm sai lầm gì.

+, Nếu trong ĐK của phương trình không có $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($x \neq k\pi$) thì việc đặt ẩn phụ $t = \tan x$ ($t = \cot x$) mà không xét thêm khả năng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($x = k\pi$) có thể sẽ dẫn đến mất nghiệm.

Ví dụ 6: Giải phương trình $8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$

Lg: Đk: $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ pt $\Leftrightarrow 4 \sin 2x = \sqrt{3} + \cot x$

Đặt: $t = \tan x \Rightarrow$ pt có dạng:

$$4 \frac{2t}{1+t^2} = \sqrt{3} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow \sqrt{3}t^3 - 7t^2 + \sqrt{3}t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t - \frac{\sqrt{3}}{3})(\sqrt{3}t^2 - 6t - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ t^2 - 2\sqrt{3}t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3} \pm 2 \end{cases}$$

$$t = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$t = \sqrt{3} - 2 \Rightarrow \tan x = -(2 - \sqrt{3}) = -\tan \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$$

$$t = 2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{12}} = \cot \frac{\pi}{12} = \tan \frac{5\pi}{12} = \tan x \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Kết hợp nghiệm ta được $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 7: Giải phương trình sau $3 \cot^2 x + 2\sqrt{2} \sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2}) \cos x$

Lg: Đk: $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chia hai vế phương trình cho $\sin^2 x \neq 0$, ta có

$$3\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)^2 + 2\sqrt{2} = (2 + 3\sqrt{2}) \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \Rightarrow 3t^2 - (2 + 3\sqrt{2})t + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$t = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x = \sqrt{2} \sin^2 x \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$t = \frac{2}{3} \Rightarrow 3 \cos x = 2 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Kl: pt có nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1) $1 + 3 \tan x = 2 \sin 2x$

2) $2 + \cos x = 2 \tan \frac{x}{2}$

3) $3 \sin x + \cos x - 4 \cot \frac{x}{2} + 1 = 0$

4) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

Bài toán 2: Dùng phương pháp hạ bậc

Nếu phương trình cần giải có bậc cao thì dùng công thức hạ bậc để biến đổi về bậc thấp hơn.

B1: Đặt ĐK để phương trình có nghĩa (nếu cần)

B2: Thực hiện việc hạ bậc của phương trình bằng một trong các công thức hạ bậc sau.

1. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

2. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

3. $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

4. $\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$

5. $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

$$6. \sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$$

$$7. \cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x)$$

$$8. \tan^3 x = \frac{(3 \sin x - \sin 3x)}{(3 \cos x + \cos 3x)}$$

$$9. \cot^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{3 \sin x - \sin 3x}$$

Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$ (*)

Giải: (*) $\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos 2x + \cos 6x) + \cos 4x}{2} + \cos^2 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 4x \cos 2x + \cos 4x + 2 \cos^2 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x (2 \cos 2x + 1 + 2 \cos 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x (4 \cos^2 2x + 2 \cos 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 0 \\ \cos 2x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ \cos 2x = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{5} \\ \cos 4x = \cos \frac{2\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{4} \\ x = \pm \frac{\pi}{5} + l\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{5} + m\pi \end{cases} \quad (k, l, m \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2} \cdot \cos 2x - \frac{1+\cos 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 6x \cdot \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \cos 4x = -\frac{3}{2} \end{cases} (L)$$

$$\Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} \cot \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cot \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$ (1)

Giải : Điều kiện $\begin{cases} \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \neq 0 \\ \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) \neq 0 \end{cases} \quad (*)$

Nhận xét $x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x = \frac{\pi}{2}$ nên có

$$\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right] = 1$$

Với điều kiện (*) thì (1) $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Phương trình có nghiệm là $x = \pm \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 4: Giải phương trình : $1 + 2\cos^2 \frac{3x}{5} = 3\cos \frac{4x}{5}$

Giải : Ta có : $\cos^2 \frac{3x}{5} = \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{6x}{5}) = \frac{1}{2}[1 + \cos(3 \cdot \frac{2x}{5})]$

Đặt $t = \frac{2x}{5}$, phương trình được biến đổi về dạng :

$$1 + 1 + \cos 3t = 3\cos 2t \Leftrightarrow 2 + 4\cos^3 t + 3\cos t = 3(2\cos^2 t - 1)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - 6\cos^2 t - 3\cos t + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = 1 \\ \cos t = \frac{1 - \sqrt{21}}{4} = \cos \alpha \\ \cos t = \frac{1 + \sqrt{21}}{4} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{5} = 2k\pi \\ \frac{2x}{5} = \pm \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5k\pi \\ x = \pm \frac{5\alpha}{2} + 5k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm

Ví dụ 5: Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$

Giải: Ta có $\sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 + \frac{1}{4}\left(1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 + (1 - \sin 2x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Phương trình có nghiệm là $x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 6: Giải phương trình:

$$4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) \quad (*), \quad \forall x \in (0; \pi)$$

Giải:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 2(1 - \cos x) - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 1 + \cos \left(2x - \frac{3\pi}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow 2 - 2\cos x - \sqrt{3}\cos 2x = 2 - \sin 2x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = -2\cos x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = \cos x \\ &\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{6} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$\text{Do: } x \in (0; \pi) \Rightarrow x_1 = \frac{5\pi}{18}; x_2 = \frac{17\pi}{18}; x_3 = \frac{5\pi}{6}$$

Ví dụ 7: Giải phương trình $\cos^2 2x - \sin^4 x + 3 = 0 \quad (1)$

Giải:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x)^2 - 4\sin^4 x + 3 = 0 \Leftrightarrow -4\sin^2 x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 8 : Giải phương trình $3\tan^3 x - \tan x + \frac{3(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = 8\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \quad (1)$

Giải

$$\text{Điều kiện } \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (*)$$

Với điều kiện (*) thì

$$(1) \Leftrightarrow \tan x(3\tan^2 x - 1) + 3(1 + \sin x)(1 + \tan^2 x) = 4 \left[1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \tan x(3 \tan^2 x - 1) + 3(1 + \sin x)(1 + \tan^2 x) = 4(1 + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow (3 \tan^2 x - 1)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \tan^2 x = 1 & (2) \\ \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Giải (3) Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($|t| \leq \sqrt{2}$, $t \neq \pm 1$) $\Rightarrow t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$

Khi đó phương trình (3) trở thành

$$t + \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - \sqrt{2} & (l) \\ t = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Với $t = -1 + \sqrt{2}$ có $\sin x + \cos x = -1 + \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin \frac{\sqrt{2} - 1}{2} - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{\sqrt{2} - 1}{2} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Phương trình có nghiệm : $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$; $x = \arcsin \frac{\sqrt{2} - 1}{2} - \frac{\pi}{4} + k2\pi$;

$$x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{\sqrt{2} - 1}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 9 : Giải phương trình $\frac{4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 6 \cos 2x + 2 \cos 4x}{\sin 2x} = 0$ (1)

Giải: Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (*)$

Với điều kiện (*) thì (1) $\Leftrightarrow 4(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x) - 6 \cos 2x + 2(2 \cos^2 2x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 4 - 3 \sin^2 2x - 6 \cos 2x + 4 \cos^2 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3(1 - \cos^2 2x) - 6 \cos 2x + 4 \cos^2 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3 + 3 \cos^2 2x - 6 \cos 2x + 4 \cos^2 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7 \cos^2 2x - 6 \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 & (L) \\ \cos 2x = -\frac{1}{7} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + k2\pi \\ 2x = -\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + k\pi \quad ; \quad (k \in \mathbb{Z})$

Bài tập tự rèn luyện: Giải các phương trình sau

1, $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

2, $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$

3, $\frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4\cos^2 2x + 2\sin^2 2x}$

4, $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \sin\left(10x + \frac{17\pi}{2}\right)$

5, $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x$

6, $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0$

7, $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cos x$

8, $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$

Bài toán 3: Biến đổi phương trình lượng giác đã cho thành phương trình tích

Phương pháp chung : Việc biến đổi phương trình lượng giác thành phương trình tích cần lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1 : Biến đổi tổng, hiệu thành tích.

Cách 2 : Lựa chọn phép biến đổi $\cos 2x; \sin 2x$.

Cách 3 : Phương pháp luận hệ số.

Cách 4 ; Sử dụng phép biến đổi hỗn hợp.

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{trong đó các phương trình } A=0, B=0 \text{ là các phương trình}$$

dạng chuẩn

Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Giải phương trình $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0, \quad \forall x \in [0; 14]$

Giải: Ta có $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (4\cos^3 x - 3\cos x) - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 2 \end{cases} \quad (VN)$$

$$* \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } x \in [0; 14], k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 14 \Leftrightarrow \begin{cases} -0,5 \leq k \leq \frac{14}{\pi} - \frac{1}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là } x \in \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right\}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$\frac{(1 - \cos x)^2 + (1 + \cos x)^2}{4(1 - \sin x)} - \tan^2 x \cdot \sin x = \frac{1}{2}(1 + \sin x) + \tan^2 x \quad (1)$$

Giải: Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

Với điều kiện trên phương trình thì (1)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{2(1 + \cos^2 x)}{4(1 - \sin x)} - \frac{\sin^3 x}{1 - \sin^2 x} &= \frac{1}{2}(1 + \sin x) + \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \\ \Leftrightarrow (1 + \cos^2 x)(1 + \sin x) - 2\sin^3 x &= (1 + \sin x)(1 - \sin^2 x) + 2\sin^2 x \\ \Leftrightarrow (1 + \cos^2 x)(1 + \sin x) &= (1 + \sin x)\cos^2 x + 2\sin^2 x(1 + \sin x) \\ \Leftrightarrow (1 + \sin x)(1 - 2\sin^2 x) &= 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \quad (\forall \cos x \neq 0) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 3: Giải phương trình $\frac{\cos x + \cos 3x}{\sin x + \cos x} - \sin x + \cos x = 0$

Giải: Điều kiện : $\cos x + \sin x \neq 0 \quad (*)$

Với điều kiện (*) thì phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} \cos 3x + \cos x + \cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos 2x(2\cos x + 1) &= 0 \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(2\cos x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 & (1) \\ \cos x + \sin x = 0 & (I) \\ 2\cos x + 1 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(1) \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (2) \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\text{Nghiệm của phương trình : } x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 4: Giải phương trình

$$\sin 2x(\cos x + 3) - 2\sqrt{3} \cdot \cos^3 x - 3\sqrt{3} \cdot \cos 2x + 8(\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0 \quad (1)$$

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos^2 x + 6\sin x \cdot \cos x - 2\sqrt{3} \cdot \cos^3 x - 6\sqrt{3} \cos^2 x + 3\sqrt{3} + 8(\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x) - 3\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\cos^2 x(\sqrt{3} \cos x - \sin x) - 6 \cdot \cos x(\sqrt{3} \cos x - \sin x) + 8(\sqrt{3} \cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} \cos x - \sin x)(-2\cos^2 x - 6\cos x + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos^2 x + 3\cos x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} \\ \cos x = 1 \\ \cos x = 4 \end{cases} \quad (VN) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 5: Giải phương trình $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \sin 2x \quad (1)$

Giải: Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Với điều kiện trên thì phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(1 + \sin 2x + \cos 2x) = 2\sqrt{2} \sin^2 x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin 2x + \cos 2x = 2\sqrt{2} \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\sin x \cos x - 2\sqrt{2} \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos x + \sin x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x + \sin x = \sqrt{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$* \quad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$* \quad (2) \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

Phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 6 : Giải phương trình $\tan x - \tan 3x = 2\sin 2x \quad (1)$

Giải : Điều kiện $\cos x \neq 0, \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (*)$

Với điều kiện (*) thì phương trình

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin(-2x)}{\cos x \cos 3x} = 2 \sin 2x \Leftrightarrow -\sin 2x = 2 \sin 2x \cos x \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(2 \cos x \cos 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 & (2) \\ 2 \cos x \cos 3x + 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$$

$$\text{Do } \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$(3) \Leftrightarrow 1 + \cos 4x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Phương trình có nghiệm là } x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; x = \pm \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Chú ý: Qua một số ví dụ vừa xét ta thấy rằng khi giải phương trình cần phải đặt điều kiện và cần phải kiểm tra lại các điều kiện này đối với các giá trị tìm được để loại bớt nghiệm ngoại lai (nếu có)

$$\text{Ví dụ 7: Giải phương trình } 4 \cot x - 2 = \frac{3 + \cos 2x}{\sin x} \quad (1)$$

$$\text{Giải: Điều kiện } \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Với điều kiện trên thì (1)

$$\Leftrightarrow 4 \cos x - 2 \sin x = 3 + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x) + 3(\cos x - \sin x) = 3 + (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x + \sin x)(\cos x + \sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = -1 \\ \sin x + \cos x = 3 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \text{ (L)} \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình cho có nghiệm là } x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ví dụ 8: Giải phương trình } \sin 3x - 3 \sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x + 3 \cos x - 2 = 0 \quad (1)$$

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow \sin 3x - 3 \sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + 2 \sin x - 3 \sin 2x - (\cos 2x + 2 - 3 \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x \cdot \cos x + 2 \sin x - 6 \sin x \cdot \cos x - (2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \sin x - 6 \sin x \cdot \cos x - (2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$* \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$* \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$* \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 9: Giải phương trình: $5 \cos 3 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 3 \cos 5 \left(x - \frac{\pi}{10} \right) = 0 \quad (1)$

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow 5 \cos \left(3x + \frac{\pi}{2} \right) + 3 \cos \left(5x - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \sin 3x = 3 \sin 5x \Leftrightarrow 2 \sin 3x = 3(\sin 5x - \sin 3x)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x (3 \cos 4x + 4 \sin^2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 3 \cos^2 2x - \cos 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{2}{3} \right) + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài tập tự rèn luyện: Giải các phương trình sau

1, $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$

2, $2 \sin x (1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$

3, $3 \sin x + \cos 2x + \sin 2x = 4 \sin x \cos^2 \frac{x}{2}$

4, $\sin 2x + \sin x - \frac{1}{2 \sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2 \cot 2x$

5, $\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \tan x - \cot x$

6, $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$

Bài toán 4: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đánh giá

4.1 Phương pháp đưa về tổng các biểu thức không âm

$$A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Ví dụ minh họa: Giải các phương trình sau:

$$1) \quad 4 \cos^2 x + 3 \tan^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 2\sqrt{3} \tan x + 4 = 0 \quad (1)$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (*)$$

$$(1) \Leftrightarrow (4 \cos^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 3) + (3 \tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} \tan x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3} \tan x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad k, l \in \mathbf{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases}$$

Kết hợp với (*), suy ra nghiệm của (1) là: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$

$$2) \quad 8 \cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0 \quad (2)$$

Giải

$$(2) \Leftrightarrow 4 \cos 4x (1 + \cos 4x) + 1 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 \cos^2 4x + 4 \cos 4x + 1) + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos 4x + 1)^2 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos 4x + 1 = 0 \\ 1 - \cos 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\frac{1}{2} \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, \quad k, l \in \mathbf{Z} \\ 3x = l2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{l2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + m2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + m2\pi \end{cases}, k, l, m \in \mathbf{Z}$$

Vậy nghiệm của (2) là $x = \frac{2\pi}{3} + m2\pi$, $x = -\frac{2\pi}{3} + m2\pi$ ($m \in \mathbf{Z}$)

4.2 Phương pháp đối lập

$$\begin{cases} A \leq M \leq B \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = M \\ B = M \end{cases}$$

Ví dụ minh họa: Giải phương trình

a) $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2 \sin 3x$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow 4 \sin^2 3x \sin^2 x = 6 + 2 \sin 3x$$

Ta có $\begin{cases} 4 \sin^2 3x \sin^2 x \leq 4 \\ 6 + 2 \sin 3x \geq 4 \end{cases}$

$$\text{Do đó } 4 \sin^2 3x \sin^2 x = 6 + 2 \sin 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \sin^2 3x \sin^2 x = 4 \\ 6 + 2 \sin 3x = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 3x \sin^2 x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ 3 \sin x - 4 \sin^3 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Vậy nghiệm của (1) là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

b) Giải phương trình $\sqrt{3 - \cos x} - \sqrt{\cos x + 1} = 2$ (2)

Giải

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{3 - \cos x} = 2 + \sqrt{\cos x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 3 - \cos x = 5 + \cos x + 4\sqrt{\cos x + 1} \Leftrightarrow -2(\cos x + 1) = 4\sqrt{\cos x + 1} \quad (2')$$

Ta có $\begin{cases} -2(\cos x + 1) \leq 0 \\ 4\sqrt{\cos x + 1} \geq 0 \end{cases}$

$$\text{Do đó } (2') \Leftrightarrow \begin{cases} -2(\cos x + 1) = 0 \\ 4\sqrt{\cos x + 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Vậy nghiệm của (2) là $x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

4.3 Phương pháp phản chứng

*) Đưa về tổng bằng 2

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \leq 1 \\ B \leq 1 \end{cases} \Rightarrow A + B \leq 2 \quad \text{Do đó } A + B = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Ví dụ minh họa: Giải các phương trình sau:

a) $\sin x + \cos 2x = 2$

Giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin x \leq 1 \\ \cos 2x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \sin x + \cos 2x \leq 2$$

$$\text{Do đó } \sin x + \cos 2x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ 1 - 2\sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) $\sin 3x(\cos x - 2\sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin x - 2\cos 3x) = 0 \quad (2)$

Giải

$$(2) \Leftrightarrow (\sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x) + \cos 3x - 2(\sin^2 3x + \cos^2 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \cos 3x = 2$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin 4x \leq 1 \\ \cos 3x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \sin 4x + \cos 3x \leq 2$$

$$\text{Do đó } \sin 4x + \cos 3x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \cos 3x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 3x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbf{Z} \quad \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

*) Đưa về tổng bằng -2

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \geq -1 \\ B \geq -1 \end{cases} \Rightarrow A + B \geq -2 \quad \text{Do đó } A + B = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Ví dụ minh họa: Giải các phương trình sau:

a) $\tan x - \tan 2x = \sin x \quad (1)$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin(x-2x)}{\cos x \cos 2x} = \sin x \Leftrightarrow \sin x \cos x \cos 2x = -\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x (\cos x \cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x \cos 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

+ Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

+ Với $\cos x \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x \cos 2x = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) = -1 \Leftrightarrow \cos 3x + \cos x = -2$$

Ta có $\begin{cases} \cos 3x \geq -1 \\ \cos x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \cos 3x + \cos x \geq -2$

$$\text{Do đó } \cos 3x + \cos x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = -1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^3 x - 3\cos x = -1 \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Vậy nghiệm của (2) là $x = k\pi, x = \pi + k2\pi (k \in \mathbf{Z})$

b) $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4(\sin x - \cos x) \quad (2)$

Giải

$$(2) \Leftrightarrow \cos 4x + 1 - \sin 4x + 4(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 2\sin 2x \cos 2x + 4(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x - \sin 2x) + 2(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)[(\sin x + \cos x)(\cos 2x - \sin 2x) - 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 & (2.1) \\ (\sin x + \cos x)(\cos 2x - \sin 2x) - 2 = 0 & (2.2) \end{cases}$$

Giải (2.1) $\Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Giải (2.2) $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos 2x - \sin 2x) = 2$

$$\Leftrightarrow 2\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 2 \Leftrightarrow \sin(3x + \frac{\pi}{2}) - \sin x = 2$$

$$\Leftrightarrow -\cos 3x - \sin x = 2 \Leftrightarrow \cos 3x + \sin x = -2 \quad (2.3)$$

Ta có $\begin{cases} \cos 3x \geq -1 \\ \sin x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \cos 3x + \sin x \geq -2$

$$\text{Do đó } \cos 3x + \sin x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = -1 \\ \sin x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^3 x - 3\cos x = -1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

Vậy nghiệm của (2) là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbf{Z})$

***) Dạng tổng quát**

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \leq M \\ B \leq N \end{cases} \Rightarrow A+B \leq M+N \quad \text{Do đó } A+B = M+N \Leftrightarrow \begin{cases} A = M \\ B = N \end{cases}$$

Ví dụ minh họa

1) Giải phương trình $\sin^8 x + \cos^{11} x = 1$

Giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin^8 x \leq \sin^2 x \\ \cos^{11} x \leq \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \sin^8 x + \cos^{11} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\text{Do đó } \sin^8 x + \cos^{11} x = 1 = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^8 x = \sin^2 x \\ \cos^{11} x = \cos^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}$$

Vậy nghiệm của (1) là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$

2) Giải phương trình $\sin^{2016} x + \cos^{2016} x = 1$

Giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin^{2016} x \leq \sin^2 x \\ \cos^{2016} x \leq \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow \sin^{2016} x + \cos^{2016} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{Do đó } \sin^{2016} x + \cos^{2016} x = 1 = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^{2016} x = \sin^2 x \\ \cos^{2016} x = \cos^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x (\sin^{2014} x - 1) = 0 \\ \cos^2 x (\cos^{2014} x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \quad \text{hoặc} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Vậy nghiệm của (2) là $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)

II. 2. Tính mới và tính sáng tạo:

Nghiên cứu một số vấn đề liên quan đến nội dung phương trình lượng giác được trình bày trong một số sách tham khảo và đề thi đại học nhằm nâng cao nghiệp vụ chuyên môn và rút kinh nghiệm trong quá trình giảng dạy. Với mục đích giúp việc giảng dạy có hiệu quả và các em học sinh có được cái nhìn tổng quan, hiểu được bản chất của mỗi vấn đề đặt ra, từ đó đưa ra phương pháp giải mạch lạc phù hợp với mỗi bài toán. Đồng thời nhằm nâng cao chất lượng hiệu quả của quá trình giảng dạy và học tập của học sinh lớp 11, mở rộng kiến thức cho học sinh, nhằm phát huy tinh thần tự giác học tập cũng như khả năng sáng tạo trong học tập của học sinh. Sau khi đề tài được thực hiện, qua việc hướng dẫn phương pháp chung và giải một số bài tập mẫu học sinh có thể vận dụng giải những bài tập trong sách giáo khoa, sách bài tập, bài tập nâng cao phần nào giúp học sinh thuận tiện hơn trong quá trình học và quá trình ôn tập củng cố kiến thức chuẩn bị cho các kỳ thi quan trọng.

Sáng kiến đã đáp ứng được nhu cầu tự học, tự nghiên cứu của học sinh, điều đó có tác dụng rèn luyện năng lực tự giải toán cho học sinh.

Sáng kiến giúp các em học sinh có cái nhìn tổng quát về phương trình lượng giác, đồng thời giúp các em làm thành thạo dạng toán này và phát huy được năng lực tự học, tự sáng tạo của từng học sinh. Sáng kiến đã rèn luyện kỹ năng, thói quen, ý trí tự học, khơi dậy nội lực vốn có của mỗi học sinh nhằm đạt được kết quả học tập cao nhất có thể.

II. 3. Khả năng áp dụng và nhân rộng

Sáng kiến này được áp dụng cho đối tượng là học sinh lớp 11, học sinh giỏi và học sinh dự thi vào các trường đại học, cao đẳng. Tùy theo mức độ nhận thức của từng học sinh mà các em có thể tìm thấy những phương pháp, kỹ năng và những điều cần thiết cho bản thân về giải phương trình lượng giác. Sáng kiến này còn có thể áp dụng trong quá trình dạy chuyên đề về phương trình lượng giác ở các lớp mũi nhọn, bồi dưỡng học sinh giỏi, học sinh ôn thi tốt nghiệp trung học phổ thông quốc gia, mặt khác sáng kiến còn có thể được

coi là nguồn tài liệu tham khảo cho giáo viên trong giảng dạy và học sinh trong quá trình tự học.

II.4. Hiệu quả, lợi ích thu được do áp dụng giải pháp

Ngay từ những năm học trước tôi đã thu thập các tài liệu, các bài tập phương trình lượng giác không mẫu mực, tiếp thu các ý kiến của các đồng nghiệp để xây dựng nội dung cho đề tài. Với cách thức là phát huy các kiến thức cơ bản về phương trình mà học sinh đã biết cách giải tôi đưa ra một số phương trình đặc biệt để học sinh khai thác, tôi thấy học sinh thực sự say mê và hứng thú.

Việc giải phương trình lượng giác là hình thức tốt nhất để học sinh củng cố, hệ thống hóa kiến thức và rèn luyện kỹ năng, là một hình thức vận dụng các công thức, các kiến thức lượng giác đã học vào những vấn đề cụ thể, vào thực tế, vào những vấn đề mới, là hình thức tốt nhất để giáo viên kiểm tra về năng lực, về mức độ tiếp thu và khả năng vận dụng kiến thức đã học. Mặt khác nó có tác dụng lớn trong việc gây hứng thú học tập cho học sinh nhằm phát triển trí tuệ và góp phần giáo dục, rèn luyện con người học sinh về nhiều mặt.

Thực tiễn dạy học cho thấy việc giải phương trình lượng giác đòi hỏi học sinh phải biết vận dụng các công thức nghiệm và các công thức lượng giác một cách thành thạo, suy luận để giải toán, tránh được ảnh hưởng không có lợi của trực giác. Đây cũng là dịp tốt để học sinh làm quen với ngôn ngữ toán học cao cấp. Thế nhưng việc học không thành thạo các công thức lượng giác trên đã làm học sinh gặp nhiều khó khăn và lúng túng, hạn chế tới kết quả học tập.

Qua đề tài này, tôi thu được một số bài học như sau:

- Phải đưa ra một hệ thống bài tập đa dạng, hợp lý, được sắp xếp từ dễ đến khó giúp học sinh củng cố kiến thức, rèn luyện kỹ năng phát triển tư duy và biết áp dụng toán vào thực tiễn.
- Phải cho học sinh tiếp cận với nhiều bài toán với những cách giải khác nhau.
- Rèn luyện cho học sinh phân tích bài toán theo nhiều hướng khác nhau để tìm ra lời giải tối ưu nhất.
- Rèn luyện cho học sinh trình bày lời giải ngắn gọn, chặt chẽ, hợp logic.

- Phải phát huy tối đa tính tích cực, chủ động sáng tạo của học sinh.
- Phải tạo điều kiện tối đa để học sinh chủ động giải quyết các bài toán dựa trên cơ sở lý thuyết tương ứng.

Sau khi áp dụng sáng kiến vào trong giảng dạy kết quả rất khả quan, tỷ lệ học sinh khá, giỏi tăng, tỷ lệ học sinh yếu kém giảm. Tôi đã tiến hành kiểm tra học sinh kết quả thu được như sau:

Lớp	Sĩ số	0 – 3,4		3,5 – 4,9		5,0 – 6,4		6,5 – 7,9		8,0 – 10	
		SL	%	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
11B6	41	2	4,9	2	4,9	22	53,7	4	9,8	11	26,7
11B7	37	3	8,1	2	5,4	11	29,7	11	29,7	10	27,1

Kết quả bộ môn đạt được tuy chưa cao so với mặt bằng chung nhưng tôi nhận thấy bước đầu đã có những chuyển biến tích cực, khả quan đáng mừng.

Trên đây là phương pháp giải phương trình lượng giác không mẫu mực trong quá trình giải toán tôi gặp phải và đã vận dụng, vì vậy tôi đưa ra một số ví dụ để các bạn đồng nghiệp cùng tham khảo.

CƠ QUAN ĐƠN VỊ
ÁP DỤNG SÁNG KIẾN
(Xác nhận)

Hải phòng, ngày 18 tháng 02 năm 2018

Người viết đơn

.....

(Ký tên, đóng dấu)