PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO DIỄN CHÂU

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN LỚP 9
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: **Toán –** *(Thời gian làm bài 150 phút)*

Bài 1. *(5,0 điểm)*

1) Cho biểu thức $M = \dfrac{x\sqrt{x} - 3}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \dfrac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 1} + \dfrac{\sqrt{x} + 3}{3 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

Thu gọn M và tìm giá trị nhỏ nhất của M.

2) Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn: $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)^2 = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Chứng minh rằng: $P = a^3 + b^3 + c^3$ có ít nhất 2 ước là số nguyên tố.

Bài 2. *(3,0 điểm)*

1) Cho đa thức P(x) với hệ số thực thỏa mãn P(1) = 2 và P(-1) = 4. Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức P(x) cho đa thức $x^2 - 1$

2) Tìm các số nguyên tố p, q sao cho: $p^2 - q^2 - 12 = p - 7q$.

Bài 3. *(4,0 điểm)* Giải các phương trình:

a) $4\sqrt{x - 1} = x^2 - 9x + 28$

b) $(4x + 2)\sqrt{x + 8} = 3x^2 + 7x + 8$

Bài 4. *(2,0 điểm)* Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn: $\dfrac{1}{2 + x} + \dfrac{1}{2 + y} + \dfrac{1}{2 + z} = \dfrac{1}{2}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \dfrac{3}{4}\sqrt{xyz}.$

Bài 5. *(6,0 điểm)* Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BI, CK cắt nhau tại H. Trên đoạn BH lấy các điểm P sao cho $\widehat{APC} = 90^\circ$.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{APK} = \widehat{ABI}$

b) Chứng minh rằng: $\dfrac{AH.BH.CH}{AD.BI.CK} \leq \dfrac{8}{27}$

c) Qua H kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác AMN. Giả sử $\dfrac{AH}{AO} = \sqrt{2}$. Chứng minh rằng: 3 điểm K, I, O thẳng hàng.

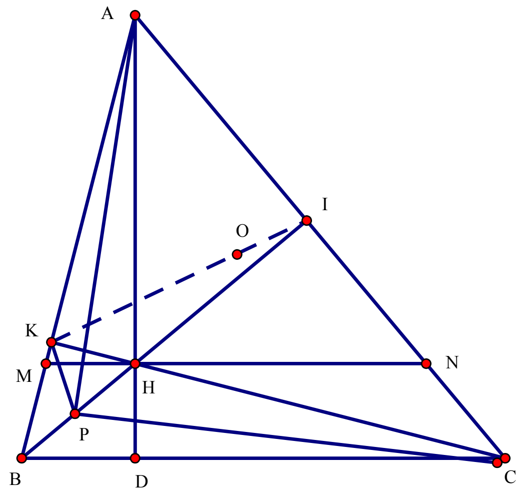
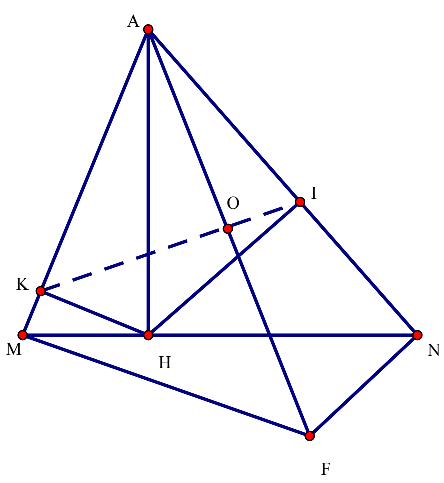
-----------*Hết*----------

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN 9

Bài	***Ý***	***Nội dung trình bày***	***Điểm***
1. (5đ)	1) *(3,0đ)*	Với $x \geq 0; x \neq 9$	
		$M = \dfrac{x\sqrt{x} - 3}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \dfrac{2\left(\sqrt{x} - 3\right)}{\sqrt{x} + 1} + \dfrac{\sqrt{x} + 3}{3 - \sqrt{x}}$	
		$= \dfrac{x\sqrt{x} - 3}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 3\right)} - \dfrac{2\left(\sqrt{x} - 3\right)^2}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 3\right)} - \dfrac{\left(\sqrt{x} + 3\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 3\right)}$	0,5
		$= \dfrac{x\sqrt{x} - 3 - 2\left(x - 6\sqrt{x} + 9\right) - \left(x + 4\sqrt{x} + 3\right)}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 3\right)}$	0,5
		$= \dfrac{x\sqrt{x} - 3 - 2x + 12\sqrt{x} - 18 - x - 4\sqrt{x} - 3}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 3\right)}$	
		$= \dfrac{x\sqrt{x} - 3x + 8\sqrt{x} - 24}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 3\right)} = \dfrac{\sqrt{x}\left(x + 8\right) - 3\left(x + 8\right)}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 3\right)}$	
		$= \dfrac{\left(x + 8\right)\left(\sqrt{x} - 3\right)}{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 3\right)} = \dfrac{x + 8}{\sqrt{x} + 1}$	0,5
		$M = \sqrt{x} - 1 + \dfrac{9}{\sqrt{x} + 1} = \left(\sqrt{x} + 1 + \dfrac{9}{\sqrt{x} + 1}\right) - 2$	0,5
		Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho $\sqrt{x} + 1 > 0, \dfrac{9}{\sqrt{x} + 1} > 0$ ta có	
		$\left(\sqrt{x} + 1\right) + \dfrac{9}{\sqrt{x} + 1} \geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x} + 1\right).\dfrac{9}{\sqrt{x} + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 + \dfrac{9}{\sqrt{x} + 1} - 2 \geq 6 - 2$	0,5
		$\Leftrightarrow M \geq 6 - 2 \Leftrightarrow M \geq 4$	
		Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \dfrac{9}{\sqrt{x} + 1}$ hay x = 4 (t/mđk)	0,5
		Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 4 khi $x = 4$	

	2) *(2,0đ)*	$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ $\Rightarrow 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=0$ $\Rightarrow a+b+c=0\ \ (\text{do}\, a,b,c\neq 0)$ Vì a + b + c = 0 $\Rightarrow a+b=-c\Rightarrow (a+b)^3=(-c)^3$ $\Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$ $\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ Vì a, b, c nguyên nên $a^3+b^3+c^3=3abc\,\vdots\,3$ (1) Lại có: a + b + c = 0 nên trong 3 số a, b, c có 1 số chia hết cho 2 $\Rightarrow abc\,\vdots\,2\Rightarrow a^3+b^3+c^3\,\vdots\,2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $a^3+b^3+c^3$ có ít nhất 2 ước nguyên tố là 2 và 3	0,25 0,25 0,5 0,25 0,5 0,25
2. (3đ)	1) *(1,0đ)*	Đặt $P(x)=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b.$ Ta có $P(1)=a+b=2$ $P(-1)=-a+b=4.$ Suy ra $a=-1;b=3.$ Vậy đa thức dư là $-x+3.$	0,25 0,5 0,25
	2) *(2,0đ)*	Ta có: $p^2-q^2-12=p-7q$ $\Rightarrow 4p^2-4q^2-48=4p-28q$ $\Rightarrow (2p-1)^2=(2q-7)^2$ * Nếu 2p – 1 = 2q – 7 $\Rightarrow$ p + 3 = q , mà p, q là các số nguyên tố $\Rightarrow$ p = 2, q = 5 * Nếu 2p – 1 = 7 – 2q $\Rightarrow$ p + q = 4 mà p, q là các số nguyên tố $\Rightarrow$ p = q = 2	0,5 0,5 0,5 0,5
3. (4đ)	a) *(2,0đ)*	Điều kiện $x\geq 1$ $4\sqrt{x-1}=x^2-9x+28$ $\Leftrightarrow x^2-9x+28-4\sqrt{x+1}=0$ $\Leftrightarrow x^2-10x+25+x-1-4\sqrt{x-1}+4=0$ $\Leftrightarrow (x-5)^2+\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2=0$ $\Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ \sqrt{x-1}-2=0 \end{cases}$ (Giải ra ta có x = 5 Vậy $x=5$ là nghiệm của phương trình đã cho.	0,25 0,5 0,25 0,25 0,5 0,25

	b) *(2,0đ)*	Điều kiện $x \geq -8$ $(4x+2).\sqrt{x+8} = 3x^2 + 7x + 8$ $\Leftrightarrow x + 8 - 3x.\sqrt{x+8} - (x+2)\sqrt{x+8} + 3x(x+2) = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+8}\left(\sqrt{x+8} - 3x\right) - (x+2)\left(\sqrt{x+8} - 3x\right) = 0$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+8} - x - 2\right)\left(\sqrt{x+8} - 3x\right) = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+8} = x+2 & (1) \\ \sqrt{x+8} = 3x & (2) \end{array}\right.$ Giải (1) và (2) đều tìm được x = 1 (t/m) Vậy x = 1 là nghiệm của phương trình	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,5 0,25
4. *(2,0 đ)*		Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn: $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{4}\sqrt{xyz}.$	
		Ta đặt $\frac{1}{2+x} = a, \frac{1}{2+y} = b, \frac{1}{2+z} = c$ (ĐK: $a,b,c > 0$) $\Rightarrow x = \frac{1-2a}{a} = 2.\frac{b+c}{a},\ y = \frac{1-2b}{b} = 2.\frac{a+c}{b},\ z = \frac{1-2c}{c} = 2.\frac{a+b}{c}$ Do đó $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{4}\sqrt{xyz}$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{\sqrt{xyz}} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \leq \frac{3}{4}$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}.\frac{a}{b+c}} \leq \frac{3}{2}$ (*) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương $\sqrt{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}\right)$ $\sqrt{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a}\right)$ $\sqrt{\frac{c}{a+b}.\frac{a}{b+c}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b}\right)$ Do đó: $\sqrt{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}.\frac{a}{b+c}}$ $\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b}\right) = \frac{3}{2}$ Vậy BĐT(*) luôn đúng Dấu = xảy ra khi x = y = z = 4	0,25 0,25 0,25 0,5 0,5 0,25
	Hình vẽ:		

<table>
<tr><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td>5.
(6,0 đ)</td><td>a) Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông APC ta có:
$AP^2 = AI.AC$
Có $\Delta ABI \backsim \Delta ACK$ (g.g)
$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AK}{AI} \Rightarrow AI.AC = AK.AB$
$\Rightarrow AP^2 = AK.AB$
$\Rightarrow \Delta ABP \backsim \Delta APK$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{APK} = \widehat{ABI}$</td><td>0,5
0,5
0,5
0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>b) Gọi S, S_1, S_2, S_3 là diện tích các tam giác ABC, ABH, ACH, BCH
ΔABC có các đường cao BK, CI cắt nhau tại H
Chứng minh được:
$\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{S_{ABH}}{S_{ABD}} = \dfrac{S_{ACH}}{S_{ACD}} = \dfrac{S_1 + S_2}{S}$
$\dfrac{BH}{BI} = \dfrac{S_1 + S_3}{S}, \dfrac{CH}{CK} = \dfrac{S_2 + S_3}{S}$
$\Rightarrow \dfrac{AH.BH.CH}{AD.BI.CK} = \dfrac{(S_1 + S_2)(S_1 + S_3)(S_2 + S_3)}{S^3} \le \dfrac{(S_1 + S_2 + S_1 + S_3 + S_2 + S_3)^3}{27S^3}$
$\Rightarrow \dfrac{AH.BH.CH}{AD.BI.CK} \le \dfrac{8}{27}.\dfrac{(S_1 + S_2 + S_3)^3}{S^3} = \dfrac{8}{27}$
Dấu bằng xảy ra khi ΔABC đều</td><td>0,25
0,5
0,5
0,5
0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>c)
</td><td></td></tr>
</table>

		Trên tia AO lấy F sao cho O là trung điểm của AF Ta có: $AH^2 = 2.AO^2 = AO.AF$ mà $AH^2 = AK.AM$ $\Rightarrow AK.AM = AO.AF$ $\Rightarrow \frac{AK}{AO} = \frac{AF}{AM}$ $\Rightarrow \Delta AOK \backsim \Delta AMF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AOK} = \widehat{AMF}$ mà $\widehat{AMF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AOK} = 90^0$ Tương tự $\widehat{AOI} = 90^0$ Suy ra 3 điểm K, O, I thẳng hàng	 0,5 0,5 0,5 0,5