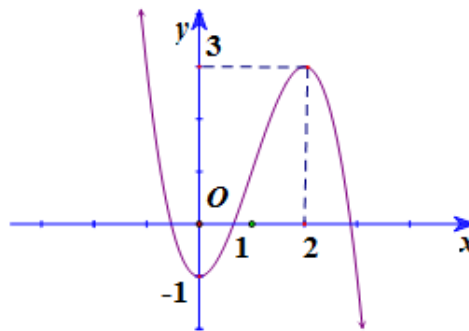


DẠNG 3**Tìm m liên quan đến tương giao hàm bậc 3**

- Câu 1:** Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C), đường thẳng (d): $y = mx - 1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?
- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. Không có m.
- Câu 2:** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$. Tổng các phần tử của S bằng
- A. 0. B. 3. C. 2. D. -1.
- Câu 3:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - (2+m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt
- A. $m > \frac{1}{2}$. B. $m \leq \frac{1}{2}$. C. $m > -\frac{1}{2}$. D. $m > -\frac{1}{2}; m \neq 4$.
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ sau.



- Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để phương trình $2f(|x|) - m = 0$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?
- A. 2020. B. 2022. C. 2021. D. 2019.
- Câu 5:** Biết đường thẳng $y = (3m-1)x + 6m + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?
- A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(0;1)$. C. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $(-1;0)$.
- Câu 6:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + (3m+1)x - m + 1$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt?
- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 7:** Cho đồ thị $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$
- A. $m \neq 0$. B. $m \in (0;2)$. C. $m = 1$. D. $m > -\frac{1}{4}$ và $m \neq 0$.

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

Câu 8: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C (B nằm giữa A, C) sao cho $AB = 2BC$. Tính tổng các phần tử thuộc S .

- A. -4 . B. $\frac{7-\sqrt{7}}{7}$. C. -2 . D. 0 .

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của a để đồ thị hàm số $y = x^3 + (a+10)x^2 - x + 1$ cắt trục hoành tại đúng một điểm?

- A. 10 . B. 8 . C. 11 . D. 9 .

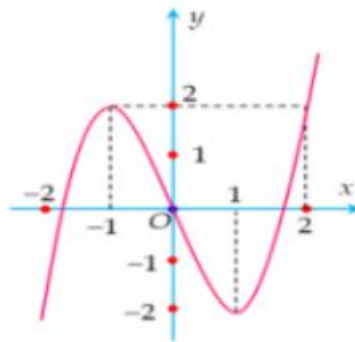
Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-2020; 2021]$ của hàm số m để đường thẳng $y = mx - m - 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

- A. 2021 . B. 2023 . C. 2024 . D. 2022 .

Câu 11: Cho bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + mx^2 - 2m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

- A. 1 . B. 2 . C. 3 . D. 0 .

Câu 12: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

- A. -1 . B. 0 . C. 1 . D. -2 .

Câu 13: Gọi S là tập hợp các số nguyên m để phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = 0$ có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 0 . B. -2 . C. 3 . D. -1 .

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}mx + m - 8$, $x \in \mathbb{R}$ với m là một hằng số khác 0 . Biết rằng phương trình $f(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thì có bao nhiêu giá trị nguyên dương k thỏa mãn phương trình $f(x) = k$ có 3 nghiệm phân biệt?

- A. 3 . B. 6 . C. 34 . D. 31 .

Câu 15: Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2$ có đồ thị (C_m) , đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ và điểm $I(1; 4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m , biết rằng đường

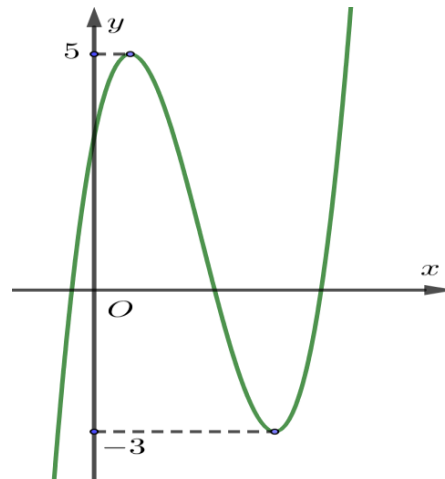
thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I .

A. -12 .B. -6 .C. -4 .D. -10 .

Câu 16: Gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m(m > 0)$ cắt đồ thị $(C): y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C . Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8, giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(5;8)$.B. $(-5;0)$.C. $(0;2)$.D. $(1;5)$.

Câu 17: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$f^3(x) - 2mf^2(x) + (m^2 - 3m - 9)f(x) + 3m^2 + 9m = 0$$
 có đúng 8 nghiệm phân biệt?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 18: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6(m+1)x^2 + 3(2m+1)x + 2$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1 . Biết rằng $S = \left(\frac{-a}{b}; +\infty\right)$; trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản.

Giá trị biểu thức $T = a + b$ tương ứng bằng

A. 4.

B. 8.

C. 5.

D. 7.

Câu 19: Điều kiện cần và đủ của tham số thực m để đường thẳng $y = 3x + m - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = (x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt là

A. $-3 \leq m \leq 1$.B. $-3 < m < 1$.C. $-1 < m < 3$.D. $-1 \leq m \leq 3$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho B là trung điểm AC . Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $m \in (-4; 0)$.B. $m \in (0; +\infty)$.C. $m \in (-\infty; -4)$.D. $m \in (-4; -2)$.

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C) , đường thẳng $(d): y = mx - 1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0; -1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. Không tồn tại m

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

- A. $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. B. $m < 1$. C. $-\frac{1}{4} < m < 1$. D. $\frac{1}{4} < m < 1$.

Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

- A. $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. B. $m < 1$. C. $-\frac{1}{4} < m < 1$. D. $\frac{1}{4} < m < 1$.

Câu 24: Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2$ có đồ thị là (C_m) , đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ và điểm $I(1; 4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m , biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I .

- A. -12 . B. -6 . C. -4 . D. -10 .

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2021 \cdot f(f(x)) = m$ có 7 nghiệm phân biệt?

- A. 8078. B. 0. C. 4041. D. 8076.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = (1-m^3)x^3 + 3x^2 + (4-m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số tự nhiên m sao cho phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$.

- A. 4. B. 7. C. 6. D. 5.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Khi đó giá trị $4a^2 + 8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(7; \frac{23}{2}\right)$. B. $(-2; 5)$. C. $\left(\frac{43}{3}; \frac{39}{2}\right)$. D. $\left(\frac{37}{3}; \frac{65}{4}\right)$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2 - 2^{1-2m} = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

- A. $\frac{1}{2} < m < 1$. B. $-1 < m < 0$. C. $0 < m < \frac{1}{2}$. D. $-1 < m < \frac{1}{2}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = x^3 - 2(m+1)x^2 + (5m+1)x - 2m - 2$ có đồ thị là (C_m) , với m là tham số. Tập S là tập hợp các giá trị nguyên của m ($m \in (-2021; 2021)$) để (C_m) cắt trục hoành tại

ba điểm phân biệt $A(2;0), B, C$ sao cho trong hai điểm B, C có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 1$. Tính số các phần tử của S ?

A. 4041.

B. 2020.

C. 2021.

D. 4038.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau có 3 nghiệm thực phân biệt $f'(x).e^{f(x)} + f(x).\pi^{f'(x)} = f'(x) + f(x)$

A. 1.

B. vô số.

C. 2.

D. 0.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C), đường thẳng (d): $y = mx - 1$ và điểm $K(4;11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0;-1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. Không có m .

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là:

$$x^3 - 2x^2 - 1 = mx - 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x - m = 0(1) \end{cases}$$

Để (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0. Ta có:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2 - 0 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1), ta có $B(x_1; mx_1 - 1); C(x_2; mx_2 - 1)$. Trọng tâm G của tam giác KBC, ta có

$$\begin{cases} x_G = \frac{4 + x_1 + x_2}{3} = 2 \\ y_G = \frac{11 + mx_1 + mx_2 - 2}{3} = \frac{2m + 9}{3} \end{cases}$$

Theo giả thiết G thuộc đường thẳng (d): $y = 2x + 1$ nên ta có: $\frac{2m + 9}{3} = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow m = 3(tm)$

Câu 2: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 0. B. 3. C. 2. D. -1.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2.$$

Giả sử đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ tại điểm x_0 thì $y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$.

Đk đủ: $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2$ thì PTTT là $y = 3x - 2 \Rightarrow m = -1$.

$x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0$ thì PTTT là $y = 3x + 3 \Rightarrow m = 3$.

Tổng các phần tử của S bằng 2.

Cách 2: Điều kiện tiếp xúc $\begin{cases} x^3 + 1 = 3x + m \\ 3x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 - 3x = m \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1; m = 3.$

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - (2+m)x + m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

- A. $m > \frac{1}{2}$. B. $m \leq \frac{1}{2}$. C. $m > -\frac{1}{2}$. D. $m > -\frac{1}{2}; m \neq 4$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục Ox:

$$2x^3 - (2+m)x + m = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2x - mx + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)[2x^2 + 2x - m] = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 + 2x - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

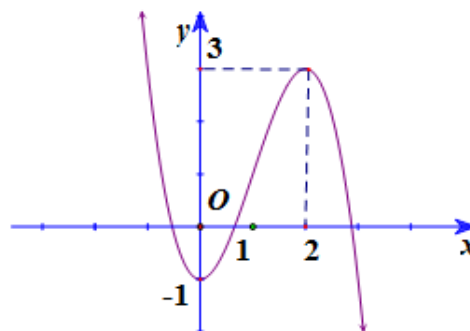
Để đồ thị hàm số cắt Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + 2m > 0 \\ g(1) = 2 + 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq 4 \end{cases}$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để phương trình

$2f(|x|) - m = 0$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

- A. 2020. B. 2022. C. 2021. D. 2019.

Lời giải

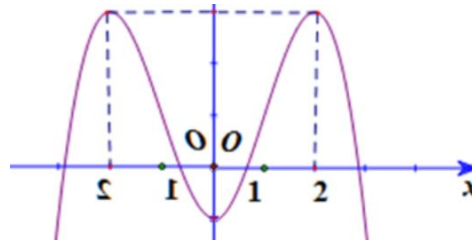
Chọn D

$$2f(|x|) - m = 0 \Leftrightarrow f(|x|) = \frac{m}{2} \quad (1)$$

Dựa vào đồ thị hàm $y = f(|x|)$ ta có: để phương trình (1) có đúng 2 nghiệm thực phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} = 3 \\ \frac{m}{2} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m < -2 \end{cases}$$

Vì $m \in [-2020; 2020] \Leftrightarrow m \in \{-2020; -2019; \dots; -3; 6\}$. Vậy có 2019 số.



Câu 5: Biết đường thẳng $y = (3m-1)x + 6m + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(0; 1)$. C. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm là $(3m-1)x + 6m + 3 = x^3 - 3x^2 + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - (3m-1)x - 6m - 2 = 0 \quad (1).$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 - (3m-1)x - 6m - 2 \quad (C_m)$.

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 3m + 1 \Rightarrow g''(x) = 6x - 6; \quad g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đồ thị (C_m) có điểm uốn là $I(1; -9m-3)$.

Để đường thẳng $y = (3m-1)x + 6m + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (-3)^2 - 3 \cdot (-3m+1) > 0 \\ I \in Ox \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{2}{3} \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3} \in (-1; 0).$$

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2m + 1 \quad x^2 + 3m + 1 \quad x - m + 1$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn D

♦ Xét phương trình

$$x^3 - 2m + 1 \quad x^2 + 3m + 1 \quad x - m + 1 = 0 \Leftrightarrow x - 1 \left[x^2 - 2mx + m + 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2mx + m + 1 = 0 \end{cases} *$$

♦ Theo yêu cầu bài toán phương trình $*$ xảy ra 2 trường hợp

TH1: phương trình có nghiệm kép khác 1, tức là $\begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 1 = 0 \\ 1 - 2m + m + 1 \neq 0 \end{cases}$ loại, do nghiệm không nguyên.

TH2: phương trình có 2 nghiệm phân biệt trong đó 1 là một nghiệm, tức là

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 1 > 0 \\ 1 - 2m + m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Nhận xét: cụm từ “cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt” được người ra đề hiểu là “có đúng 2 điểm chung với trục hoành”. Theo ý kiến chủ quan của người giải, ta nên phát biểu rõ ràng hơn.

Câu 7: Cho đồ thị $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$

- A. $m \neq 0$. B. $m \in (0; 2)$. C. $m = 1$. D. $m > -\frac{1}{4}$ và $m \neq 0$.

Lời giải

Chọn C

♦ Để hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì phương trình hoành độ giao điểm phải có 3 nghiệm phân biệt:

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0$$

$$(x-1)(x^2 - x - m) = 0$$

♦ Ta đặt $x_1 = 1$. Khi đó, để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình sau phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$x^2 - x - m = 0$$

♦ Do có nghiệm khác 1 nên $1-1-m \neq 0$ hay $m \neq 0$.

$$\text{Ta có } \Delta = 1 + 4m$$

♦ Để có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$ hay $m > -\frac{1}{4}$.

♦ Theo điều kiện của đề bài ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$

$$\Leftrightarrow 1 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 3$$

với x_2, x_3 là nghiệm của phương trình bậc 2 trên.

♦ Áp dụng Viet ta có

$$1^2 - 2(-m) = 3 \Leftrightarrow m = 1$$

♦ Kết hợp các điều kiện ta có $\Leftrightarrow m = 1$.

Câu 8: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C (B nằm giữa A, C) sao cho $AB = 2BC$. Tính tổng các phần tử thuộc S .

- A. -4 . B. $\frac{7-\sqrt{7}}{7}$. C. -2 . D. 0 .

Lời giải

Chọn A

♦ Ta có BBT của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ như sau:

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$

♦ Suy ra đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C
 $\Leftrightarrow -4 < m < 0$.

♦ Khi đó $x_A + x_B + x_C = 3, x_A x_B + x_B x_C + x_C x_A = 0, x_A x_B x_C = m$.

♦ Để B nằm giữa A, C và $AB = 2BC$ thì

$$\begin{cases} x_A < x_B < x_C \\ x_B - x_A = 2(x_C - x_B) \\ x_C < x_B < x_A \\ x_A - x_B = 2(x_B - x_C) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3x_B = x_A + 2x_C \Leftrightarrow 4x_B - 3 = x_C \Rightarrow x_A = 6 - 5x_B.$$

♦ Suy ra $\begin{cases} (6 - 5x_B) \cdot x_B + x_B \cdot (4x_B - 3) + (4x_B - 3) \cdot (6 - 5x_B) = 0 & (*) \\ (4x_B - 3) \cdot x_B \cdot (6 - 5x_B) = m & (**) \end{cases}$.

♦ Từ (*) được $x_B = \frac{7 \pm \sqrt{7}}{7}$. Thay vào (**) được $m = -\frac{98 + 20\sqrt{7}}{49}$ và $m = -\frac{98 - 20\sqrt{7}}{49}$.

♦ Vậy $S = \left\{ -\frac{98 + 20\sqrt{7}}{49}; -\frac{98 - 20\sqrt{7}}{49} \right\}$.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của a để đồ thị hàm số $y = x^3 + (a+10)x^2 - x + 1$ cắt trục hoành tại đúng một điểm?

A. 10.

B. 8.

C. 11.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

♦ Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là:

$$x^3 + (a+10)x^2 - x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 10x^2 - x + 1 = -ax^2.$$

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên

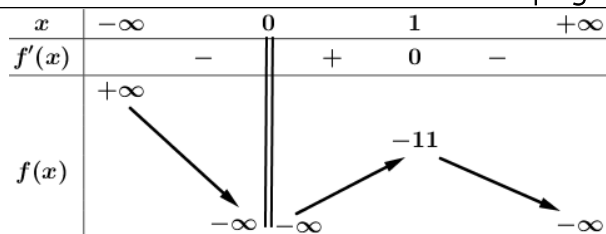
$$(1) \Leftrightarrow -\frac{x^3 + 10x^2 - x + 1}{x^2} = a.$$

♦ Xét hàm số $f(x) = -\frac{x^3 + 10x^2 - x + 1}{x^2}$ với $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\text{Ta có } f'(x) = -\frac{x^3 + x - 2}{x^3} = -\frac{(x-1) \cdot (x^2 + x + 2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:



♦ Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm khi (1) có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow a > -11$.

Do a nguyên âm nên $a \in \{-10, -9, -8, \dots, -1\}$. Vậy có 10 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $[-2020; 2021]$ của hàm số m để đường thẳng $y = mx - m - 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

A. 2021.

B. 2023.

C. 2024.

D. 2022.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x^2 + x = mx - m - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + (1-m)x + m + 1 = 0$.

$$(x-1)(x^2 - 2x - 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 1 - m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Để đường thẳng $y = mx - m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x$ tại ba điểm phân biệt A ,

B, C thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + m > 0 \\ -2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$ với mọi tham số m .

Trường hợp 1: $x_B = 1$.

$$\text{Khi đó yêu cầu bài toán trở thành } \begin{cases} x_A + x_C = 2x_B \\ y_A + y_C = 2y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ m(x_1 + x_2) - 2m + 2 = 2 \end{cases}$$

Điều này thỏa mãn với mọi $m > -2$.

Trường hợp 2: $x_B \neq 1$ và giả sử $x_1 < x_2$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành

$$\begin{cases} x_A + x_C = 2x_B \\ y_A + y_C = 2y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 1 = 2x_2 \\ y_1 + 1 = 2y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 1 = 2x_2 \\ mx_1 - m + 2 = 2(mx_2 - m + 1) \end{cases} (*)$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} x_1 + 1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \text{ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m > -2$.

Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [-2020; 2021] \Rightarrow m \in [-1; 2021] \Rightarrow$ có 2023 giá trị của m .

Câu 11: Cho bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + mx^2 - 2m$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

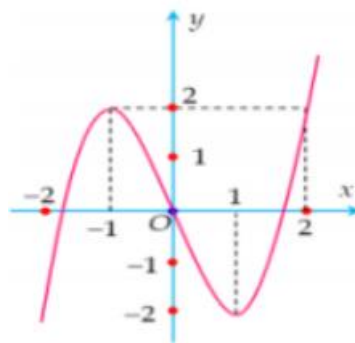
Chọn B

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

- ♦ Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3 + mx^2 - 2m = 0$ (*).
- ♦ Giả sử phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng, theo tính chất của cấp số cộng ta có: $x_1 + x_3 = 2x_2$.
- ♦ Áp dụng định lý Vi-et ta có: $x_1 + x_2 + x_3 = m \Rightarrow 3x_2 = m \Leftrightarrow x_2 = \frac{m}{3}$.
- ♦ Vì $x_2 = \frac{m}{3}$ là một nghiệm của phương trình (*) nên ta có:

$$-\left(\frac{m}{3}\right)^3 + m\left(\frac{m}{3}\right)^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow 2m^3 - 54m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3\sqrt{3} \\ m = -3\sqrt{3} \end{cases}.$$
- ♦ Thử lại:
 - + Với $m = 0$, phương trình trở thành: $-x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (**loại**).
 - + Với $m = 3\sqrt{3}$, phương trình trở thành: $-x^3 + 3\sqrt{3}x^2 - 6\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + \sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \\ x_3 = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$ và 3 nghiệm này lập thành 1 CSC.
 - + Với $m = -3\sqrt{3}$, phương trình trở thành: $-x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 6\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \\ x_3 = 3 - \sqrt{3} \end{cases}$ và 3 nghiệm này lập thành 1 CSC.
- ♦ Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán là $m = 3\sqrt{3}$ và $m = -3\sqrt{3}$.

Câu 12: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) = m$ có nghiệm

$$x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. -2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \cos x$, do $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên suy ra $t \in (-1; 0]$.

Trên khoảng $(-1; 0)$ hàm số nghịch biến nên suy ra

Với $t \in (-1; 0]$ thì $f(0) \leq f(t) < f(-1)$ hay $0 \leq f(t) < 2$.

Đặt $u = \sqrt{2f(\cos x)}$ thì $u = \sqrt{2f(t)}, u \in [0; 2)$. Khi đó bài toán trở thành:

Tìm m để phương trình $f(u) = m$ có nghiệm $u \in [0; 2)$.

Quan sát đồ thị ta thấy rằng với $u \in [0; 2)$ thì $f(u) \in [-2; 2) \Rightarrow -2 \leq m < 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1\} \Rightarrow \sum m = -2$.

Câu 13: Gọi S là tập hợp các số nguyên m để phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = 0$ có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân. Tổng các phần tử của S bằng

A. 0.

B. -2.

C. 3.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = 0$.

Khi đó ta có $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2m+1 \\ x_1 x_2 x_3 = 8 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 2(3m+2) \end{cases}$$

Do x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số nhân nên ta có $x_1 x_2 x_3 = 8 \Leftrightarrow x_2 = 2$.

Thay $x_2 = 2$ vào phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + 2(3m-2)x - 8 = 0$ ta có

$$8 - (2m+1) \cdot 4 + 4(3m-2) - 8 = 0 \Leftrightarrow 4m = 12 \Leftrightarrow m = 3.$$

Thử lại với $m = 3$ ta thấy thỏa mãn. Vậy $m = 3$. Đó đó tổng tất cả các giá trị của m bằng 3

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}mx + m - 8, x \in \mathbb{R}$ với m là một hằng số khác 0. Biết rằng phương trình $f(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thì có bao nhiêu giá trị nguyên dương k thỏa mãn phương trình $f(x) = k$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. 3.

B. 6.

C. 34.

D. 31.

Lời giải

Chọn D

$$\text{pt } f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2) \left(x^2 + 2x + 4 - \frac{m}{2} \right) = 0 \text{ có đúng 2 nghiệm phân biệt}$$

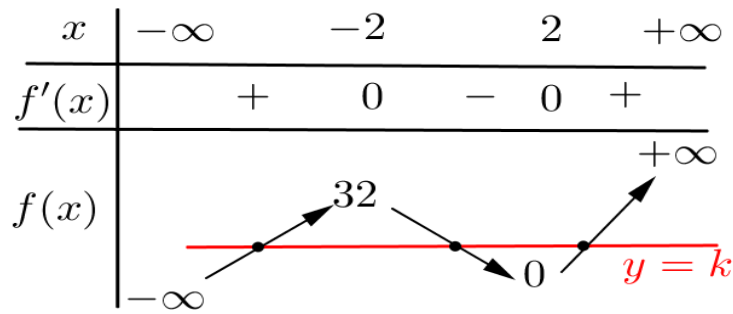
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + 2x + 4 - \frac{m}{2} = 0 \end{cases} \quad (1) \text{ có đúng 2 nghiệm phân biệt}$$

$$+ \underbrace{g(2) = 0}_{g(x)} \Rightarrow m = 24 \text{ (nhận)}$$

$$f(x) = x^3 - 12x + 16 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

BBT



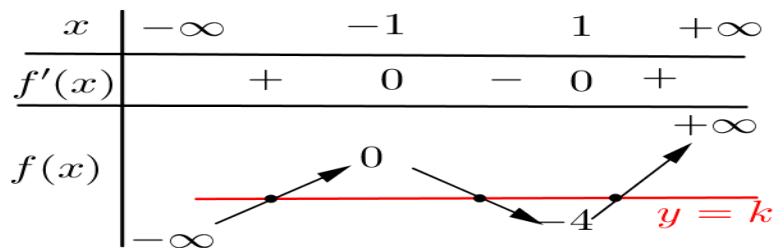
Phương trình $f(x) = k$ có 3 nghiệm phân biệt khi $0 < k < 32$ và $k \in \mathbb{N}^* \rightarrow k = \{1; 2; 3; \dots; 31\}$

+ Pt (1) có nghiệm kép và khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m = 6 \text{ (nhận)}$

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

BBT



Phương trình $f(x) = k$ có 3 nghiệm phân biệt khi $-4 < k < 0$ và $k \in \mathbb{N}^* \rightarrow k \in \emptyset$

Vậy có 31 giá trị k thỏa điều kiện bài toán.

Câu 15: Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2$ có đồ thị (C_m) , đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ và điểm $I(1; 4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m , biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I .

A. -12 .

B. -6 .

C. -4 .

D. -10 .

Lời giải

Chọn B

+ Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m) là:

$$x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2 = mx + m + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = m+5 \end{cases}$$

+ Để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C thì $\begin{cases} m \neq -7 \\ m \neq -6 \end{cases}$

+ Giả sử $B(-1; 8), C(m+5; m^2 + 6m + 8)$. Để tam giác IBC cân tại I

$$\text{thì } IB^2 = IC^2 \Leftrightarrow 20 = (m+4)^2 + (m^2 + 6m + 4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -6(l) \\ m = -2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy có ba giá trị của m thỏa mãn nên tổng các giá trị của m bằng -6 .

Câu 16: Gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc $m(m > 0)$ cắt đồ thị $(C): y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C . Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên trục tung. Biết rằng hình thang $BB'C'C$ có diện tích bằng 8, giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(5;8)$. B. $(-5;0)$. C. $(0;2)$. D. $(1;5)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình đường thẳng $d: y = m(x-2)$. Phương trình hoành độ giao điểm

$$-x^3 + 6x^2 - 9x + 2 = m(x-2) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow A(2;0) \\ x^2 - 4x + m+1 = 0 \end{cases}$$

Để (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$$\text{Giả sử } B(x_1, mx_1 - 2m), C(x_2, mx_2 - 2m) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m+1 \end{cases}$$

Ta có $B'(0, mx_1 - 2m), C'(0, mx_2 - 2m)$.

$$S_{BB'C'C} = \frac{1}{2} B'C' (BB' + CC') = 8 \Leftrightarrow B'C' (BB' + CC') = 16.$$

$$\text{Mà } B'C' = |m(x_1 - x_2)|, BB' = |x_1|, CC' = |x_2|.$$

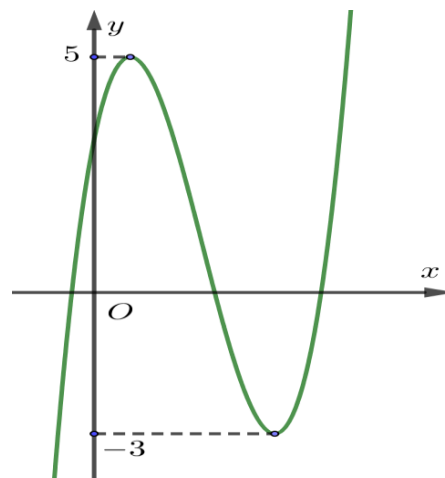
Do m dương nên $x_1 x_2 = m+1 > 0$ mà $x_1 + x_2 = 4 > 0 \Rightarrow x_1 > 0, x_2 > 0$.

$$\Rightarrow B'C' = m|x_1 - x_2|, BB' = x_1, CC' = x_2 \Rightarrow m|x_1 - x_2|(x_1 + x_2) = 16 \Leftrightarrow m|x_1 - x_2| = 4$$

$$\Leftrightarrow m^2(x_1 - x_2)^2 = 16 \Leftrightarrow m^2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 16 \Leftrightarrow m^2(16 - 4m - 4) = 16$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1(l) \\ m = 2 \end{cases}$$

Câu 17: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$f^3(x) - 2mf^2(x) + (m^2 - 3m - 9)f(x) + 3m^2 + 9m = 0 \text{ có đúng 8 nghiệm phân biệt?}$$

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn B

$$f^3(x) - 2mf^2(x) + (m^2 - 3m - 9)f(x) + 3m^2 + 9m = 0$$

Đặt $t = f(x)$, phương trình trở thành:

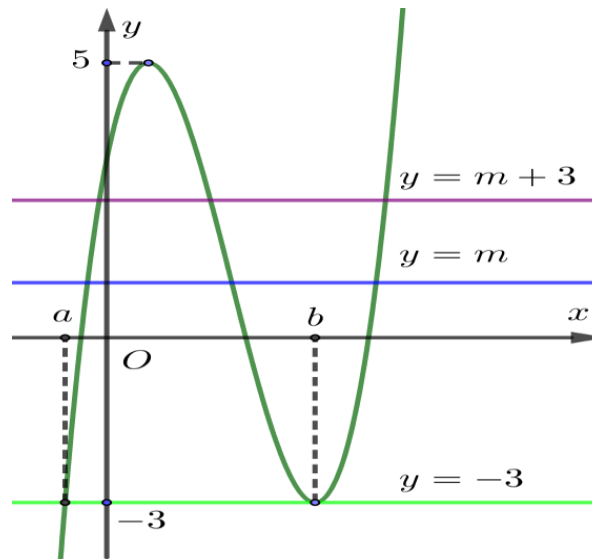
$$t^3 - 2mt^2 + (m^2 - 3m - 9)t + 3m^2 + 9m = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+3)[t^2 - (2m+3)t + m^2 + 3m] = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+3)(t-m)(t-m-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = m \\ t = m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -3 & (1) \\ f(x) = m & (2) \\ f(x) = m+3 & (3) \end{cases}$$

Nhận xét các phương trình (2) và (3) không có nghiệm chung.



Dựa vào đồ thị, ta thấy:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$$

YCBT $\Leftrightarrow$ Các phương trình (2) và (3) đều có 3 nghiệm phân biệt khác a, b

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 < 5 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 2$$

Mà m là số nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Câu 18: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6(m+1)x^2 + 3(2m+1)x + 2$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1 .

Biết rằng $S = \left(\frac{-a}{b}; +\infty\right)$; trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Giá trị

biểu thức $T = a + b$ tương ứng bằng

A. 4.

B. 8.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 6(m+1)x^2 + 3(2m+1)x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - (6m+5)x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 - (6m+5)x - 2 = 0(*) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ lớn hơn -1 và khác 1. Ta có:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \\ (x_1+1)(x_2+1) > 0 \\ 1^2 - (6m+5) - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36m^2 + 60m + 33 > 0 \\ 6m+5 > -2 \\ 6m+4 > 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{-2}{3}$$

$$\text{Do đó } a=2; b=3 \Rightarrow T=a+b=5$$

Câu 19: Điều kiện cần và đủ của tham số thực m để đường thẳng $y=3x+m-2$ cắt đồ thị hàm số $y=(x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt là

A. $-3 \leq m \leq 1$.

B. $-3 < m < 1$.

C. $-1 < m < 3$.

D. $-1 \leq m \leq 3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét phương trình: } (x-1)^3 = 3x+m-2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = m (*)$$

Đường thẳng $y=3x+m-2$ cắt đồ thị $y=(x-1)^3$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.

$$\text{Đặt } f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\searrow -3$	$\nearrow +\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ tại ba điểm phân biệt. Vậy $-3 < m < 1$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho B là trung điểm AC. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $m \in (-4; 0)$.

B. $m \in (0; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; -4)$.

D. $m \in (-4; -2)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là } x^3 + 3x^2 + m = 0(1).$$

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

Giả sử (1) có 3 nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3$ ($x_1 < x_2 < x_3$) thì $x_1; x_2; x_3$ lần lượt là hoành độ của A, B, C và $x^3 + 3x^2 + m = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + m = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

Nên ta có $x_1 + x_2 + x_3 = -3$.

Để B là trung điểm AC thì $x_1 + x_3 = 2x_2$ nên $3x_2 = -3 \Leftrightarrow x_2 = -1$.

Tức là (1) có 1 nghiệm là $x = -1$. Suy ra $-1 + 3 + m = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

$$\text{Thử lại với } m = -2 \text{ thì (1) trở thành } x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{3} \\ x = -1 \\ x = -1 + \sqrt{3} \end{cases} \quad (\text{thỏa điều kiện bài toán}).$$

Cách 2: Ta có $y' = 3x^2 + 6x$ và $y'' = 6x + 6$ nên (C) có điểm uốn $I(-1; m+2)$.

Để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho B là trung điểm AC thì $I \in Ox$

$$\Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C), đường thẳng (d): $y = mx - 1$ và điểm $K(4; 11)$. Biết rằng (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0; -1)$ còn trọng tâm tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. Không tồn tại m

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ:

$$x^3 - 2x^2 - 1 = mx - 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x - m = 0(1) \end{cases}$$

Suy ra $A(0; -1)$ và hoành độ của điểm B và C là nghiệm của phương trình (1)

Để (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\text{Khi và chỉ khi: } \begin{cases} \Delta'_{(1)} > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \end{cases} (*)$$

Giả sử: $B(x_1; mx_1 - 1)$, $C(x_2; mx_2 - 1)$. Theo Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2$

Gọi G là trọng tâm của tam giác KBC :

$$\begin{cases} x_G = \frac{4 + x_1 + x_2}{3} \\ y_G = \frac{11 + mx_1 - 1 + mx_2 - 1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = \frac{2m + 9}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(2; \frac{2m + 9}{3}\right)$$

Trọng tâm G nằm trên đường thẳng $y = 2x + 1$ suy ra $\frac{2m + 9}{3} = 2 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow m = 3$ thỏa mãn (*)

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

- A. $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. B. $m < 1$. C. $-\frac{1}{4} < m < 1$. D. $\frac{1}{4} < m < 1$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là:

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \end{cases} (*)$$

(C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+4m > 0 \\ 1^2 - 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó $x_1 = 1$, x_2 và x_3 là hai nghiệm của $(*)$.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 < 3 \Leftrightarrow 1 + 2m < 3 \Leftrightarrow m < 1.$$

$$\text{Vậy các giá trị cần tìm của } m \text{ là } \begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

- A. $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. B. $m < 1$. C. $-\frac{1}{4} < m < 1$. D. $\frac{1}{4} < m < 1$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \end{cases} \quad (2). \text{ Điều kiện để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt là phương trình}$$

$$(2) \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \Delta = 1 + 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Khi đó phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Ta có } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 < 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 3 \Leftrightarrow 1^2 + 2m < 3 \Leftrightarrow m < 1.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

- Câu 24:** Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2$ có đồ thị là (C_m) , đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ và điểm $I(1; 4)$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m , biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C với A có hoành độ bằng -2 và tam giác IBC cân tại I .
- A. -12 . B. -6 . C. -4 . D. -10 .

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với đường thẳng $d: y = mx + m + 8$ là

$$x^3 - (m+2)x^2 - (2m+13)x - m - 2 = mx + m + 8$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (m+2)x^2 - (3m+13)x - 2m - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)[x^2 - (m+4)x - (m+5)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ g(x) = 0 \end{cases} \text{ (với } g(x) = x^2 - (m+4)x - (m+5) \text{)}$$

Đồ thị (C_m) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $g(x) = 0$ có hai nghiệm

$$x_1, x_2 \text{ phân biệt khác } -2, \text{ nghĩa là } \begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \end{cases}.$$

Ta có $\Delta_g = (m+4)^2 + 4(m+5) = m^2 + 12m + 36 > 0, \forall m \neq -6$. và $g(-2) = m + 7$ do vậy

$$\begin{cases} g(-2) \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+7 \neq 0 \\ m \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -6 \\ m \neq -7 \end{cases} (*).$$

Với điều kiện $(*)$ ta có đồ thị (C_m) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt $A(-2; 8-m)$ và hai điểm $B(x_1; y_1), C(x_2; y_2)$ trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$ và $x_1 + x_2 = m + 4$.

Gọi K là trung điểm của BC ta có $K\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{m(x_1 + x_2) + 2m + 16}{2}\right)$ hay

$$K\left(\frac{m+4}{2}; \frac{m^2 + 6m + 16}{2}\right).$$

Tam giác IBC cân tại I nên ta có $IK \perp BC$ hay $\overrightarrow{IK}$ cùng phương với pháp tuyến của đường thẳng d .

Ta có $\overrightarrow{IK} = \left(\frac{m+2}{2}; \frac{m^2 + 6m + 8}{2}\right)$ và $\vec{n} = (m; -1)$ là một pháp tuyến của đường thẳng d , do đó

$$\text{ta cần có } \frac{m+2}{m} = \frac{m^2 + 6m + 8}{-1} \Leftrightarrow m^3 + 6m^2 + 9m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -2 \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

Kiểm tra lại thấy $m = -2$ không thỏa do khi đó $I \in d$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m để thỏa mãn bài toán và tổng tất cả các giá trị đó bằng -4 .

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2021 \cdot f(f(x)) = m$ có 7 nghiệm phân biệt?

A. 8078.

B. 0.

C. 4041.

D. 8076.

Lời giải**Chọn C**

Ta có: $2021 \cdot f(f(x)) = m \Leftrightarrow f(f(x)) = \frac{m}{2021}$.

Khảo sát hàm số $y = f(f(x))$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) = (3x^2 - 6x)(3(f(x))^2 - 6f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 = x_1 \\ x = 2 = x_2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

$$\text{Chú ý rằng: } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_3 \approx 2,879 \\ x = x_4 \approx 0,653 \\ x = x_5 \approx -0,532 \end{cases} \text{ và } f(x) = 2 \Leftrightarrow x = x_6 \approx 3,104.$$

Do 6 nghiệm trên đều là nghiệm đơn nên hàm số $y = f(f(x))$ có 6 cực trị là $x_i, i = 1, 2, \dots, 6$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_5	x_1	x_4	x_2	x_3	x_6	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\searrow -1$	$\nearrow 1$	$\searrow -1$	$\nearrow 1$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$	

Phương trình $2021 \cdot f(f(x)) = m$ có 7 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{m}{2021} < 1 \Leftrightarrow -2021 < m < 2021$$

Do m nguyên nên $m \in \{-2020, -2019, \dots, 2019, 2020\}$, do đó có 4041 số thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = (1 - m^3)x^3 + 3x^2 + (4 - m)x + 2$ với m là tham số. Có bao nhiêu số tự nhiên m sao cho phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$.

A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. 5.

Lời giải**Chọn D**

Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 = (mx)^3 + mx$ (*).

Xét $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow x+1=mx \Leftrightarrow (m-1)x=1$.

Để phương trình có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$ thì $\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \frac{1}{5} \leq \frac{1}{m-1} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{6}{5} \leq m \leq 6 \end{cases}$.

Vì m là số tự nhiên nên $m \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Vậy có 5 giá trị m thỏa đề.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Khi đó giá trị $4a^2 + 8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(7; \frac{23}{2}\right)$. B. $(-2; 5)$. C. $\left(\frac{43}{3}; \frac{39}{2}\right)$. D. $\left(\frac{37}{3}; \frac{65}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 6x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$				1		$+\infty$
						0	

Ta có: $\frac{2\sin x + 1}{2} = \sin x + \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ suy ra $f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right) \in [0; 1]$ nên

$$f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) \in [0; 1].$$

Phương trình $f\left(f\left(\frac{2\sin x + 1}{2}\right)\right) = f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \leq f(m) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 3m^2 + 1 \geq 0 \\ 2m^3 - 3m^2 \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } 4a^2 + 8b = 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{3}{2} = 13.$$

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2 - 2^{1-2m} = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

- A. $\frac{1}{2} < m < 1$. B. $-1 < m < 0$. C. $0 < m < \frac{1}{2}$. D. $-1 < m < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$2x^3 - 3x^2 + 2 - 2^{1-2m} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 2 = 2^{1-2m} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		2		1		$+\infty$

Phương trình (1) có 3 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow 1 < 2^{1-2m} < 2 \Leftrightarrow 0 < 1-2m < 1 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$

Câu 29: Cho hàm số $y = x^3 - 2(m+1)x^2 + (5m+1)x - 2m - 2$ có đồ thị là (C_m) , với m là tham số. Tập S là tập hợp các giá trị nguyên của m ($m \in (-2021; 2021)$) để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $A(2;0), B, C$ sao cho trong hai điểm B, C có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 1$. Tính số các phần tử của S ?

A. 4041.

B. 2020.

C. 2021.

D. 4038.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x^3 - 2(m+1)x^2 + (5m+1)x - 2m - 2 = 0 \quad (1)$

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2mx + m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ g(x) = x^2 - 2mx + m+1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

C_m cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 1 > 0 \\ 4 - 4m + m + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \\ m \neq \frac{5}{3} \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó: $A(2;0), B(x_1;0), C(x_2;0)$;

Hai điểm B, C thỏa mãn điều kiện đầu bài $\Leftrightarrow (OB-1)(OC-1) < 0$

$$\Leftrightarrow (|x_1|-1)(|x_2|-1) < 0 \Leftrightarrow |x_1x_2| + 1 < |x_1| + |x_2|$$

$$\Leftrightarrow (x_1x_2)^2 + 1 < (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 4m - 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (2; +\infty)$$

Kết hợp với đk ta có $m \in (-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (2; +\infty)$ thỏa mãn ycbt.

Vậy số các phân tử của S là 4038.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau có 3 nghiệm thực phân biệt $f'(x).e^{f(x)} + f(x).\pi^{f'(x)} = f'(x) + f(x)$

A. 1.

B. vô số.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Xét $f'(x).e^{f(x)} + f(x).\pi^{f'(x)} = f'(x) + f(x)$ (*).

Ta có $f(x) = x^3 - mx^2 + (m-2)x + 1 = (x-1)[x^2 + (1-m)x - 1] = (x-1).g(x)$.

Với $g(x) = x^2 + (1-m)x - 1$ và $g(1) = 1-m$ và $g(m-1) = -1$.

Lại có $f'(x) = 3x^2 - 2mx + m - 2$ với $\begin{cases} f'(1) = 1-m \\ f(1) = 0 \end{cases}$.

Với $f(1)$ nếu $f'(1) > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \geq 1$ suy ra $\begin{cases} e^{f(x)} \geq f(x) + 1 \\ \pi^{f'(x)} \geq f'(x) + 1 \end{cases}$.

Khi đó (*) $\Rightarrow f(x) + f'(x) \geq f'(x)[f(x) + 1] + f(x)[f'(x) + 1] \Leftrightarrow 2f(x).f'(x) \leq 0$ (**).

Trường hợp 1. Nếu $f(x) = 0$ thì $f'(x) = 0$.

Trường hợp 2. Nếu $f(x) > 0$ thì (**) $\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \leq 0$.

Mặt khác $\Delta'_{f'(x)} = m^2 - 3m + 6 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0, \forall m \Rightarrow f'(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt hay hàm số luôn có 2 điểm cực trị.

Giả sử rằng $f(x) = 0$ có các nghiệm $x = (x_1; x_2; \dots)$, ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i} \leq 0$ (1).

Do $f(x) = 0$ có ba nghiệm nên (1) có 2 nghiệm (**vô lý**).

Như vậy $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 + (1-m)x - 1 = 0; \Delta_{g(x)} = (1-m)^2 + 4 > 0 \\ h(x) = 3x^2 - 2mx + m - 2 = 0; \Delta_{h(x)} = m^2 - 3m + 6 > 0 \end{cases}$

Với $g(1) = 0 \Leftrightarrow 1-m = 0 \Leftrightarrow m = 1$ và $h(1) = 0 \Leftrightarrow -m+1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Do đó với $m \neq 1$, phương trình $f'(x).e^{f(x)} + f(x).\pi^{f'(x)} = f'(x) + f(x)$ luôn có 3 nghiệm thực phân biệt.

Vậy có vô số giá trị của m thỏa đề.

