ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường CĐSP Nam Định

Câu 1.

a) Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 2x + m = 0$ có duy nhất nghiệm với mọi m.

b) Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(x^3 + 2x - 2) = 3x - 1$. Chứng minh rằng: tồn tại duy nhất hàm f thỏa mãn điều kiện trên. $I = \int\limits_1^{10} f(x)dx$

Câu 2. Cho hàm f khả vi đến cấp 2 trên đoạn $[0, 2]$ sao cho $f(0) - (a+1)f(1) + af(2) = 1$, $f'(2) = 0$ với a là hằng số dương.

Chứng minh rằng: $\int\limits_0^2 [f''(x)]^2\, dx \geq \dfrac{3}{a^2 - 3a + 4}$

Câu 3. Cho hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ khả vi trên khoảng (a, b) sao cho $f(a) = f(b) = 0$ và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Chứng minh rằng tồn tại dãy $(x_n) \subset (a, b)$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(x_n) \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)}{\tan \frac{1}{n} . f(x_n)} = 2012$

Câu 4. Đặt $L_n = \left\{x_1x_2...x_n \middle| \, x_i \in \{a, b, c, d\}, x_ix_{i+1} \neq ab \ \forall i = 1, .., n-1\right\}$

Đặt $u_n = |L_n|$: số phần tử của L_n. Tính u_{2012}.

Câu 5. Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f\left(x_0 + \dfrac{1}{2012}\right) = f(x_0)$.

Câu 6. Cho $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $[0; +\infty)$, $f(0) = 1$. Chứng minh rằng nếu $f'(x) \geq f(x)$ với mọi $x \geq 0$ thì $f(x + 1) - f(x) \geq \dfrac{1}{2}e^x$

Đáp án

Câu 1.

a) Xét $g(x) = x^3 + 2x + m$ liên tục trên $\mathbb{R}$

$g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ nên $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $g(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm. (1)

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{m}{x^3}\right) = -\infty$

do đó tồn tại $a < 0$ sao cho $g(a) < 0$

Tương tự: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ do đó tồn tại $b > 0$ sao cho $g(b) > 0$

Vậy $g(a).g(b) < 0$ nên tồn tại $\alpha \in (a,b)$ sao cho $g(\alpha) = 0$ (2)

Từ (1),(2) ta có $g(x) = 0$ có duy nhất nghiệm với mọi m.

Đặt $y = x^3 + 2x - 2 \Leftrightarrow x^3 + 2x - y - 2 = 0$

Theo câu a) ta có tồn tại duy nhất nghiệm $x = \varphi(y)$ với mọi y

Vậy $f(y) = 3\varphi(y) - 1 \Rightarrow f(x) = 3\varphi(x) - 1$

và tồn tại duy nhất hàm f thỏa mãn điều kiện.

$I = \int\limits_1^{10} f(x)dx$

Đặt $x = t^3 + 2t - 2$, $dx = (3t^2 + 2)dt$

$x = 1 \Rightarrow t^3 + 2t - 2 = 1 \Leftrightarrow t = 1$

$x = 10 \Rightarrow t^3 + 2t - 2 = 10 \Leftrightarrow t = 2$

Vậy $I = \int\limits_1^2 f(t^3 + 2t - 2)(3t^2 + 2)dt = \int\limits_1^2 (3t - 1)(3t^2 + 2)dt = \int\limits_1^2 (9t^3 - 3t^2 + 6t - 2)dt$

$= \left(\frac{9t^4}{4} - t^3 + 3t^2 - 2t\right)\Big|_1^2 = 36 - \frac{9}{4} = \frac{135}{4}$

Câu 2. Từ giả thiết ta có:

$1 = -(f(1) - f(0)) + a(f(2) - f(1)) = \int\limits_0^1 -f'(x)dx + \int\limits_1^2 a.f'(x)dx$

$= -xf'(x)|_0^1 + \int\limits_0^1 xf''(x)dx + (ax - a - 1)f'(x)|_1^2 - \int\limits_1^2 (ax - a - 1)f''(x)dx$

$= -f'(1) + (a - 1)f'(2) + f'(1) + \int\limits_0^1 xf''(x)dx + \int\limits_1^2 (a + 1 - ax)f''(x)dx$

$= \int\limits_0^1 xf''(x)dx + \int\limits_1^2 (a + 1 - ax)f''(x)dx$

Vậy $1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}.\int\limits_0^1 xf''(x)dx + \sqrt{\frac{a^2 - 3a + 3}{3}}.\sqrt{\frac{3}{a^2 - 3a + 3}}.\int\limits_1^2 (a + 1 - ax)f''(x)dx\right)^2$

$\leq \left(\frac{1}{3} + \frac{a^2 - 3a + 3}{3}\right).\left(3\left[\int\limits_0^1 xf''(x)dx\right]^2 + \frac{3}{a^2 - 3a + 3}.\left[\int\limits_1^2 (a + 1 - ax)f''(x)dx\right]^2\right)$

(Bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ số)

$\leq \frac{a^2 - 3a + 4}{3}.\left(3.\int\limits_0^1 x^2dx.\int\limits_0^1 [f''(x)]^2 dx + \frac{3}{a^2 - 3a + 3}\int\limits_1^2 (a + 1 - ax)^2dx.\int\limits_1^2 [f''(x)]^2 dx\right)$

(Bất đẳng thức Bunhiacopxki với tích phân)

$\Rightarrow 1 \leq \frac{a^2 - 3a + 4}{3}.\left(\int\limits_0^1 [f''(x)]^2dx + \int\limits_1^2 [f''(x)]^2dx\right)$

$$\Rightarrow \int_0^2 [f''(x)]^2 dx \geq \frac{3}{a^2 - 3a + 4}$$

Câu 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(x_n).\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{\tan\frac{1}{n}.f(x_n)} = 2012 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(x_n).\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}f(x_n)} = 2012 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2f'(x_n)}{nf(x_n)} = 2012$

Xét $g_n(x) = f(x).e^{-1006nx}$ trên đoạn $[a, b]$

g_n liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b)

$g_n(a) = g_n(b) = 0$ nên g_n thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle trên đoạn $[a, b]$ vậy tồn tại $x_n \in (a, b)$ sao cho $g_n'(x_n) = 0$ do đó $f'(x_n).e^{-1006nx_n} - 1006n.f(x_n).e^{-1006nx_n} = 0$

$\Leftrightarrow f'(x_n) = 1006nf(x_n)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2f'(x_n)}{nf(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2.1006nf(x_n)}{nf(x_n)} = 2012$$

Câu 4. $L_n = A_n - B_n$

$A_n = \{x_1x_2..x_n |\ x_1x_2..x_{n-1} \in L_{n-1}, x_n \in \{a, b, c, d\}\}$

$B_n = \{x_1x_2..x_{n-2}ab |\ x_1x_2..x_{n-2}a \in L_{n-1}\}$

Rõ ràng $x_1x_2..x_{n-2}a \in L_{n-1} \Leftrightarrow x_1x_2..x_{n-2} \in L_{n-2}$ nên $|B_n| = |L_{n-2}| = u_{n-2}$

$B_n \subset A_n$, $|A_n| = 4|L_{n-1}| = 4u_{n-1}$

Nên $u_n = |L_n| = |A_n| - |B_n| = 4u_{n-1} - u_{n-2}$

$u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2} = 0$

$u_1 = 4$, $u_2 = 16 - 1 = 15$

Phương trình đặc trưng: $x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$

$u_n = \alpha.(2+\sqrt{3})^n + \beta.\left(2-\sqrt{3}\right)^n$

Vì $u_1 = 4, u_2 = 15$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \alpha(2+\sqrt{3}) + \beta(2-\sqrt{3}) = 4 \\ \alpha(2+\sqrt{3})^2 + \beta(2-\sqrt{3})^2 = 15 \end{cases}$$

$D = -2\sqrt{3}$, $D_x = -2 - \sqrt{3}$, $D_y = 2 - \sqrt{3}$

Vậy $\alpha = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$, $\beta = -\dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

Do đó $u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}\right)$

Vậy $u_{2012} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^{2013} - (2-\sqrt{3})^{2013}\right)$

Câu 5. Đặt $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2012}\right)$ liên tục trên đoạn $[0; \frac{2011}{2012}]$

$g(0) + g\left(\frac{1}{2011}\right) + ... + g\left(\frac{2011}{2012}\right) = f(0) - f(1) = 0 \quad (1)$

Ta xét 4 trường hợp:

+) Trường hợp 1: nếu $\exists i \in \{0, 1, ..., 2011\}$ sao cho $g\left(\frac{i}{2012}\right) = 0$

Chọn $x_0 = \frac{i}{2012}$

+) Trường hợp 2: nếu $\forall i \in \{0, 1, ..., 2011\}$ $g\left(\frac{i}{2012}\right) > 0$ điều này mâu thuẫn với (1).

+) Trường hợp 3: nếu $\forall i \in \{0, 1, ..., 2011\}$ $g\left(\frac{i}{2012}\right) < 0$ điều này mâu thuẫn với (1).

+) Trường hợp 4: tồn tại $i, j \in \{0, 1, .., 2011\}$ sao cho $g\left(\frac{i}{2012}\right) < 0$, $g\left(\frac{j}{2012}\right) > 0$

do đó tồn tại x_0 ở giữa $\frac{i}{2012}, \frac{j}{2012}$ sao cho $g(x_0) = 0$.

Do đó trong các trường hợp đều tồn tại $x_0 : f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{2012}\right)$.

Câu 6. Xét $F(x) = f(x).e^{-x}$, $F(0) = f(0).e^{-0} = 1$.

$F'(x) = f'(x).e^{-x} - f(x).e^{-x} = e^{-x}(f'(x) - f(x)) \geq 0$

$F(x)$ là hàm đồng biến. Do đó $F(x) \geq F(0) = 1$ với mọi $x \geq 0$

$f(x).e^{-x} \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq e^x$ với mọi $x \geq 0$

Vì $f'(x) \geq f(x)$ với mọi $x \geq 0$ nên: $f'(x) \geq e^x$ với mọi $x \geq 0$

$g(x) = f(x) - e^x$ có $g'(x) = f'(x) - e^x \geq 0$ với mọi $x \geq 0$

$g(x)$ là hàm đồng biến trên $[0; +\infty)$

Do đó $g(x+1) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x+1) - e^{x+1} \geq f(x) - e^x$

$\Leftrightarrow f(x+1) - f(x) \geq e^x(e-1) \geq \dfrac{1}{2}e^x$ với mọi $x \geq 0$.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường CĐSP Hà Nội

Câu 1. Cho dãy số (x_n) xác định như sau
$$x_1 = 5,\ x_{n+1} = x_n^2 - 2, n = 1, 2, \ldots$$
Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1x_2} + \cdots + \frac{1}{x_1x_2\ldots x_n}\right)$.

Đáp án. Có thể chứng minh theo qui nạp $x_k > 2, \forall k \geq 1$. Khi đó, xuất phát từ giả thiết ta có
$$x_{n+1}^2 - 4 = \left(x_n^2 - 2\right)^2 - 4 = x_n^4 - 4x_n^2 = x_n^2(x_n^2 - 4) = x_n^2x_{n-1}^2(x_{n-1}^2 - 4), \forall n \geq 1.$$
Do đó $x_{n+1}^2 - 4 = x_n^2x_{n-1}^2 \cdots x_1^2(x_1^2 - 4) = 21\,(x_1x_2\ldots x_n)^2$. Từ đây ta có
$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n}\right)^2 = 21 + \frac{4}{(x_1x_2\ldots x_n)^2}.$$
Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n} = \sqrt{21}$. Mặt khác với mỗi $k \in \mathbf{N}^*$ chúng ta có
$$\frac{1}{x_1x_2\ldots x_k} = \frac{x_k^2 - x_{k+1}}{2x_1x_2\ldots x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_k}{x_1x_2\ldots x_{k-1}} - \frac{x_{k+1}}{x_1x_2\ldots x_k}\right)$$
Do đó
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1x_2} + \cdots + \frac{1}{x_1x_2\ldots x_n} = \frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{x_{n+1}}{x_1x_2\ldots x_n}\right)$$
Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1x_2} + \cdots + \frac{1}{x_1x_2\ldots x_n}\right) = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

Câu 2. Cho f, g là hai hàm số khả vi trên $[0, a]$ và thỏa mãn điều kiện
$$f(0) = g(0) = 0 \text{ và } g(x) > 0,\ g'(x) > 0, \forall x \in (0, a].$$
Chứng minh rằng nếu $\frac{f'}{g'}$ tăng trên $(0, a]$ thì hàm số $\frac{f}{g}$ cũng tăng trên khoảng này.

Đáp án. Với $0 < x \leq a$ chúng ta có
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} = \frac{g'(x)}{g(x)}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}\right)$$
Áp dụng định lý giá trị trung bình tồn tại $\theta : 0 < \theta < x \leq a$ sao cho
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{g(x)}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}\right)$$
Vì $\frac{f'}{g'}$ đơn điệu tăng nên $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' > 0, \forall x > 0$. Do đó ta có đpcm.

Câu 3. Cho hàm số f xác định và khả vi trên (a, b) và thoả mãn

(i) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$

(ii) $f'(x) + f^2(x) + 1 \geq 0, \forall x \in (a, b)$.

Chứng minh rằng $b - a \geq \pi$.

Đáp án. Xét hàm số $g(x) = \arctan f(x)$, $x \in (a, b)$. Dễ kiểm tra $g(x)$ khả vi liên tục trên (a, b) và $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$, $\forall x \in (a, b)$.

Khi đó, với mọi $x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$; áp dụng định lý Lagrange ta có

$$\arctan f(x_2) - \arctan f(x_1) = \frac{f'(x_0)}{1 + f^2(x_0)}(x_2 - x_1), x_0 \in (x_1, x_2).$$

Do đó, theo (ii) ta có

$$\arctan f(x_2) - \arctan f(x_1) \geq -(x_2 - x_1).$$

Cho $x_2 \to b^-, x_1 \to a^+$ chúng ta có $-\pi \geq -(b - a)$ hay $b - a \geq \pi$.

Câu 4. Tìm tất cả các hàm số khả vi liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho: $\forall a \in \mathbb{R}$ ta có

$$f^2(a) = 2012 + \int_0^a [f^2(x) + f'^2(x)]\, dx.$$

Đáp án. Đạo hàm hai vế của đẳng thức $f^2(a) = 2012 + \int_0^a [f^2(x) + f'^2(x)]\, dx$ ta có

$$f^2(x) + f'^2(x) = 2f(x)f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

hay $f(x) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $f(x) = Ae^x, A$ là số được xác định sau. Thay $a = 0$ vào hai vế của biểu thức ban đầu ta có

$$A^2 = 2012$$

hay $A = \pm\sqrt{2012}$.
Vậy các hàm số cần tìm là $f(x) = \pm\sqrt{2012}e^x$.

Câu 5. Cho dãy số $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ xác định bởi

$$x_0 = 1, x_n > 0, \forall n = 1, 2, \ldots \text{ và } x_n = 2 + \sqrt{x_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{x_{n-1}}}, \forall n \geq 1.$$

Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} 2^i x_i$.

Đáp án. Đặt $y_n = 1 + \sqrt{x_n}, n \geq 0$. Khi đó, $y_n > 1$ và $y_0 = 2$. Từ giả thiết ta có $x_n = (\sqrt{1 + \sqrt{x_{n-1}}} - 1)^2, \forall n = 1, 2, \ldots$. Từ đó ta có

$$y_n = 1 + \sqrt{x_n} = \sqrt{1 + \sqrt{x_{n-1}}} = \sqrt{y_{n-1}}, \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Suy ra $y_n = 2^{2^{-n}}, n \geq 0$. Do đó

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} 2^i x_i &= \sum_{i=1}^{n} 2^i (y_i - 1)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 2^i - y_i 2^{i+1} + 2^i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} [(y_{i-1} - 1)2^i - (y_i - 1)2^{i+1}]\\ &= (y_0 - 1)2^1 - (y_n - 1)2^{n+1}\\ &= 2 - 2\frac{2^{2^{-n}} - 1}{2^{-n}}.\end{aligned}$$

Đặt $x = 2^{-n}$ khi đó $x \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2^i x_i = \lim_{n\to\infty} \left(2 - 2\frac{2^{2^{-n}} - 1}{2^{-n}}\right) = \lim_{x\to 0} \left(2 - 2\frac{2^x - 1}{x}\right) = 2 - 2\ln 2.$$

Câu 6. Cho hàm số f khả vi liên tục trên $[0, a]$ và $f(0) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\, dx \leq \frac{a}{2} \int_0^a \left(f'(x)\right)^2 dx.$$

Đáp án. Với $0 \leq x \leq a$ đặt $h(x) = \int_0^x |f'(t)|\, dt$. Khi đó

$$h'(x) = |f'(x)|$$

và

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\, dt\right| \leq \int_0^x |f'(t)|\, dt = h(x).$$

Do đó $\int_0^a |f(x)f'(x)|\, dx \leq \int_0^a h(x)h'(x)\, dx = \frac{1}{2}h^2(a)$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\int_0^a |f(x)f'(x)|\, dx &\leq \int_0^x h(x)h'(x)\, dx = \frac{1}{2}h^2(a)\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^a |f'(t)|\, dt\right)^2\\ &\leq \frac{a}{2}\int_0^a \left(f'(x)\right)^2 dx\end{aligned}$$

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Vinh

Câu1. Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 \geqslant 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_1 + u_2 + \cdots + u_n},\ n \geqslant 1. \end{cases}$$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

Câu2. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Giả sử $f(x) + f''(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$, chứng minh rằng $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu3. Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x+y}{2012}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng $g(x) = f(x) - f(0)$ là hàm cộng tính (nghĩa là $g(x+y) = g(x) + g(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$).
b) Tìm hàm f.

Câu4. Cho dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định theo công thức

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}),\ \forall m \geqslant n \geqslant 0. \end{cases}$$

Xác định a_n.

Câu5. Cho $f : [0;1] \to [0;+\infty)$ là hàm liên tục, thỏa mãn

$$f^2(x) \leqslant 1 + 2012 \int_0^x f(t)dt \quad \text{với mọi } x \in [0;1].$$

Chứng minh rằng $f(x) \leqslant 1006x + 1$ với mọi $x \in [0;1]$.

Câu6. Cho $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ là hàm có đạo hàm f' liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = f(1/2) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 f^2(x)dx \leqslant \frac{1}{32} \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

Đáp án

Câu1. Dễ thấy rằng $\{u_n\}_{n=2}^{\infty}$ là dãy đơn điệu tăng với $u_2 \geqslant 1$. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a < +\infty$. Khi đó, $a \geqslant 1$ và

$$u_{n+1} = \sqrt{u_1 + u_2 + \cdots + u_n} = \sqrt{u_n^2 + u_n}.$$

Cho $n \to \infty$ ta được $a = \sqrt{a^2 + a}$, điều này dẫn đến $a = 0$: mâu thuẫn với $a \geqslant 1$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$. Xét

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Áp dụng Định lý Stolz ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{n} = \lim_{n\to\infty}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}.$$

Câu2. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, xét hàm số $g(t) = \sin t.f'(x+t) - \cos t.f(x+t), t \in [0;\pi]$. Theo giả thiết, f có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ nên f' khả vi trên $\mathbb{R}$, do đó $g(t)$ khả vi trên $[0;\pi]$. Ta có

$$g'(t) = \sin t(f(x+t) + f''(x+t)) \geqslant 0, \forall t \in [0;\pi].$$

Do vậy, $g(t)$ là hàm đơn điệu tăng trên $[0;\pi]$. Từ đó, $g(\pi) \geqslant g(0)$, hay $f(x+\pi) \geqslant -f(x)$. Vậy $f(x+\pi) + f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu3. a) Từ giả thiết ta có

$$\frac{g(x)+g(y)}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2} - f(0) = f\left(\frac{x+y}{2012}\right) - f(0).$$

Thay x bởi $x+y$ và thay $y=0$ trong giả thiết ta được

$$f\left(\frac{x+y}{2012}\right) = f\left(\frac{(x+y)+0}{2012}\right) = \frac{f(x+y)+f(0)}{2}.$$

Kết hợp với lập luận trên ta suy ra

$$\frac{g(x)+g(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2012}\right) - f(0) = \frac{f(x+y)+f(0)}{2} - f(0) = \frac{f(x+y)-f(0)}{2} = \frac{g(x+y)}{2}.$$

Vậy $g(x)$ là hàm cộng tính.

b) Từ $g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y, \in \mathbb{R}$, bằng quy nạp ta chứng minh được $g(kx) = kg(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. Mặt khác, ta có

$$g\left(\frac{x+y}{2012}\right) = f\left(\frac{x+y}{2012}\right) - f(0) = \frac{f(x)+f(y)}{2} - f(0) = \frac{g(x)+g(y)}{2}.$$

Thay $y = 2011x$ ta thu được

$$g(x) = \frac{g(x) + g(2011x)}{2} = 1006g(x),$$

ta suy ra $g(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy $f(x) = f(0)$ là hằng số với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu4. Với $n \geqslant 0$, đặt $b_n = a_n - n^2$. Từ giả thiết ta có

$$b_{m+n} + (m+n)^2 + b_{m-n} + (m-n)^2 = \frac{1}{2}\Big(b_{2m} + (2m)^2 + b_{2n} + (2n)^2\Big).$$

Sau khi rút gọn ta được

$$b_{m+n} + b_{m-n} = \frac{1}{2}\Big(b_{2m} + b_{2n}\Big), \quad \text{với mọi } m \geqslant n \geqslant 0. \tag{4.1}$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $b_n = 0$ với mọi $n \geqslant 0$.
Với $n = 0$. Trong (4.1), thay $m = n = 0$ thì $b_0 = 0$.
Với $n = 1$, ta có $b_1 = a_1 - 1 = 0$.

Giả sử khẳng định đúng đến $n = k$, tức là $b_i = 0, 0 \leqslant i \leqslant k$. Trong (4.1), thay $n = 0$ ta được $b_m + b_0 = \frac{1}{2}b_{2m}$, hay $b_{2m} = 2b_m$ với mọi $m \geqslant 0$. Bởi vậy, nếu $b_m = 0$ thì $b_{2m} = 0$.
Trong (4.1), thay $m = k$, $n = 1$

$$b_{k+1} + b_{k-1} = \frac{1}{2}\Big(b_{2k} + b_2\Big).$$

Theo giả thiết quy nạp và lập luận trên thì $b_{k-1} = b_{2k} = b_2 = 0$. Điều này dẫn đến $b_{k+1} = 0$: khẳng định đúng với $n = k+1$. Do đó, $b_n = 0$ với mọi $n \geqslant 0$, và $a_n = n^2$ với mọi $n \geqslant 0$.

Câu5. Xét hàm số

$$g(x) = 1 + 2012\int_0^x f(t)dt, \quad \text{với } x \in [0;1].$$

Theo giả thiết thì $f^2(x) \leqslant g(x)$ với mọi $x \in [0;1]$, do đó $f(x) \leqslant \sqrt{g(x)}$. Ta có

$$g'(x) = 2012f(x) \leqslant 2012\sqrt{g(x)} \quad \text{với mọi } x \in [0;1].$$

Để ý rằng $g(0) = 1$ và $g(x) \geqslant 1, \forall x \in [0;1]$, ta suy ra

$$\int_0^x \frac{g'(t)}{\sqrt{g(t)}}dt \leqslant \int_0^x 2012dt = 2012x,$$

hay $2\sqrt{g(x)} - 2 \leqslant 2012x$. Điều này dẫn đến $f(x) \leqslant \sqrt{g(x)} \leqslant 1006x + 1$ với mọi $x \in [0;1]$.

Câu6. Ta xét bài toán sau: "Cho $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ là hàm có đạo hàm f' liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn $f(a) = f(b) = 0$. Khi đó

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b (f'(x))^2dx.\text{"} \tag{6.1}$$

Với $a \leqslant x \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ ta có

$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakovski cho tích phân ta thu được

$$f^2(x) = \left|\int_a^x f'(t)dt\right|^2 \leqslant (x-a)\int_a^x (f'(t))^2 dt \leqslant (x-a)\int_a^{\frac{a+b}{2}} (f'(t))^2 dt.$$

Ta suy ra

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f^2(x)dx \leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)dx \int_a^{\frac{a+b}{2}} (f'(t))^2 dt = \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (f'(x))^2 dx. \qquad (6.2)$$

Tương tự, với $\dfrac{a+b}{2} \leqslant x \leqslant b$ ta có

$$f(x) = -\int_x^b f'(t)dt.$$

Điều này dẫn đến

$$f^2(x) = \left|-\int_x^b f'(t)dt\right|^2 \leqslant (b-x)\int_x^b (f'(t))^2 dt \leqslant (b-x)\int_{\frac{a+b}{2}}^b (f'(t))^2 dt,$$

và vì thế

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f^2(x)dx \leqslant \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)dx \int_{\frac{a+b}{2}}^b (f'(t))^2 dt = \frac{(b-a)^2}{8}\int_{\frac{a+b}{2}}^b (f'(x))^2 dx. \qquad (6.3)$$

Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức trong (6.2) và (6.3) ta thu được khẳng định (6.1).
Trở lại bài toán, từ $f(0) = f(1/2) = f(1) = 0$, bằng cách áp dụng (6.1) ta có

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)dx \leqslant \frac{1}{32}\int_0^{\frac{1}{2}} (f'(x))^2 dx,$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x)dx \leqslant \frac{1}{32}\int_{\frac{1}{2}}^1 (f'(x))^2 dx.$$

Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức trên ta thu được điều phải chứng minh.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Hùng Vương, Phú Thọ

Câu 1.

Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi: $x_0 = 1; x_{n+1} = \sqrt[3]{2011 + x_n}$ với mọi $n \geq 0$.
Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

Câu 2.

Tìm hàm $f : IR \to IR$ thỏa mãn

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2), \forall x, y \in IR.$$

Câu 3.

Cho f là hàm số xác định trên đoạn $[0; +\infty]$ và có đạo hàm liên tục. Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Câu 4.

Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi qui luật sau

$$x_0 > 0;$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 2a)}{2x_n^2 + a}, \quad a \geq 0$$

Chứng minh rằng dãy trên có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 5.

Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx = 0.$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{2001 + x}; \quad x \geq 1$.

Ta có $f''(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(2010+x)^2}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{(2012+x)^2}} = k < 1, \quad \forall x \geq 1$.

Theo định lí Lagrange ta có

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$
\begin{aligned}
&= f'(\xi)|x_n - x_{n-1}| \\
&\le k|x_n - x_{n-1}| \\
&\ldots \\
&\le k^n|x_1 - x_0|
\end{aligned}
$$

từ đó suy ra

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\le k^n(1 + k + k^2 + \ldots + k^{p-1})|x_1 - x_0| \\
&= \frac{k^n(1-k^p)}{1-k}|x_1 - x_0| \\
&\le \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| \to 0 \quad \text{khi} \quad n \to +\infty.
\end{aligned}
$$

Do đó dãy x_n là dãy Cauchy. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 2.

$$
\begin{aligned}
&(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2) \\
&\Leftrightarrow (x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) \\
&= [(x+y)-(x-y)][(x+y)+(x-y)]\left\{\frac{1}{4}[(x+y)+(x-y)]^2 - \frac{1}{4}[(x+y)-(x-y)]^2\right\}
\end{aligned}
$$

Đặt

$$
\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}
$$

ta có

$$
\begin{aligned}
&uf(v) - vf(u) = \frac{1}{4}(u+v)(u-v)[(u+v)^2 - (u-v)^2]^2 \\
&\Leftrightarrow uf(v) - vf(u) = u^3v - uv^3 \\
&\Leftrightarrow v[f(u) - u^3] = u[f(v) - v^3]
\end{aligned}
$$

Nếu $uv \neq 0$ thì

$$
\frac{f(u)-u^3}{u} = \frac{f(v)-v^3}{v}, \quad \forall u, v \neq 0 \Rightarrow \frac{f(u)-u^3}{u} = a, \quad \forall u \neq 0
$$

$$
\Rightarrow f(u) = au + u^3 \quad \forall u \neq 0
$$

Nếu $uv = 0$ thì $f(0) = 0$.

Hàm $f(u) = au + u^3$ thỏa mãn $f(0) = 0$. Vậy $f(u) = au + u^3 \quad \forall u \in IR$.

Hàm cần tìm là $f(u) = au + u^3 \quad (a \in IR)$.

Câu 3.

Từ $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ suy ra $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ sao cho

$$
f'(x) < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall x > M
$$

Cố định $x_0 > M$. Từ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x_0)}{x-x_0} = 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{x_0}{x} = 0$ suy ra có số $M_1 > M$ sao cho với $x > M_1$ thì $\left|\frac{f(x_0)}{x-x_0}\right| < \frac{\epsilon}{3}$ và $\left|1 - \frac{x_0}{x}\right| < \frac{3}{2}$ Viết

$$\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)}{x - x_0}\right)\left(1 - \frac{x_0}{x}\right)$$

Với $x > M_1$ thì theo định lí Lagrange ta có $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| = |f'(c)| < \frac{\epsilon}{3}$. Do đó

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \left(\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| + \left|\frac{f(x_0)}{x - x_0}\right|\right)\left|1 - \frac{x_0}{x}\right| < \left(\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}\right)\frac{3}{2} = \epsilon \qquad (1)$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4.

Giả sử tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ thì ta có $A = \frac{A(A^2)+2a}{2A^2+a} \Rightarrow A\sqrt{a}$.

Giả sử $x_0^2 < a$ thì ta chứng minh được $x_n^2 < a$.

Khi đó $\frac{x_n^2+2a}{2x_n^2+a} > 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n$.

Ta có

$$x_{n+1}^2 = \frac{x_n^2(x_n^2 + 2a)^2}{(2x_n^2 + a)^2} = \varphi(x_n^2) \quad \text{với} \quad \varphi(z) = \frac{z(z + 2a)^2}{(2z + a)^2}$$

Do $\varphi'(z) > 0 \quad \forall a > z > 0$ nên $x_{n+1}^2 = \varphi(x_n^2) < \varphi(a) = a$.

Như vậy với $x_0^2 < a$ thì dãy x_n đơn điệu tăng và hội tụ đến $\sqrt{a}$.

Tương tự, khi $x_0^2 > a$ thì dãy x_n đơn điệu giảm và hội tụ đến $\sqrt{a}$.

Và với $x_0^2 = a$ thì dãy x_n hội tụ đến $\sqrt{a}$.

Câu 5.

Đặt $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx$.

Với $n \geq 2$, ta có

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}x cos^2 x dx \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

suy ra $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \forall n \geq 2$.

Lại có

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin x dx = 1$$

nên

$$I_{2n} = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)} I_0 = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)} \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}} \to 0 \quad \text{khi} n \quad \to \infty$$

$$I_{2n+1} = \frac{2.4.6....(2n)}{3.5.7....(2n+1)} I_1 = \frac{2.4.6....(2n)}{3.5.7....(2n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty$$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Sư phạm Huế

Câu 1. (5 điểm) Cho dãy số $(u_n)_n$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 &= 0 \\ u_{n+1} &= u_n + 4n + 3 \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

Tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \ldots + \sqrt{u_{4^{20}n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \ldots + \sqrt{u_{2^{20}n}}}.$$

Câu 2. (5 điểm) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Giả sử $P(x)$ là đa thức thỏa mãn $P(a) < (a-b)^2 < P(b)$. Chứng minh tồn tại $c_1, c_2 \in (a, b)$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(c_1)\sqrt{P(c_2)}.$$

Câu 3. (5 điểm) Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{2012}) = 1$ với $x_1, x_2, \ldots, x_{2012} \in [0,1]$ và $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2012} = 1$.

Câu 4. (5 điểm) Cho hai dãy số $(a_n)_n$ và $(b_n)_n$ xác định như sau: $a_0 = -2$, $b_0 = 1$

$$a_{n+1} = a_n + b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad b_{n+1} = a_n + b_n - \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, n \geq 0.$$

Tìm a_{2012}.

Câu 5. (5 điểm) Giả sử hàm $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $(0, +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2) \leq xf(x)$ với mọi $x \in (0, +\infty)$. Chứng minh

$$2\int_1^2 f(x)dx \leq 3f(1).$$

Câu 6. (5 điểm) Cho $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục thỏa mãn

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 2\int_0^1 f(x)dx$$

và $f(1) = \frac{-1}{6}$. Xác định hàm số $f(x)$.

Câu	Nội dung
1 (5đ)	Ta có $u_k = u_1 + 4(1+2+\ldots+k-1) + 3(k-1) = (k-1)(2k+3)$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{u_{kn}}}{n} = \sqrt{2}k$ nên ta có kết quả là $\frac{1+4+4^2+\ldots+4^{20}}{1+2+2^2+\ldots+2^{20}} = \frac{4^{21}-1}{3(2^{21}-1)} = 699051$.
2 (5đ)	Theo định lí giá trị TB tích phân, $\exists c_1 \in (a,b) : \int\limits_a^b f(x)dx = f(c_1)(b-a)$. Đặt $Q(x) = P(x) - (a-b)^2$, thì $Q(a)Q(b) = [P(a) - (a-b)^2][P(b) - (a-b)^2] < 0$. Do đó tồn tại $c_2 \in (a,b)$ sao cho $Q(c_2) = 0$ hay $P(c_2) = (a-b)^2$. Từ đó tồn tại $c_1, c_2 \in (a,b)$ sao cho $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c_1)\sqrt{P(c_2)}$.
3 (5đ)	Với $x, y \in [0,1]$, $x+y \le 1$ ta có $f(x+y) + f(0) + f(1-x-y) + f(0) + \ldots + f(0) = 1$ $f(x) + f(y) + f(1-x-y) + f(0) + \ldots + f(0) = 1$. Kết hợp 2 đẳng thức trên ta được $f(x) + f(y) = f(x+y) + f(0)$. Suy ra $f(x) = ax + b$. Vì $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{2012}) = 1 = a(x_1 + \ldots + x_{2012}) + 2012b =$ $a + 2012b$ với $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2012} = 1$ nên $a = 1 - 2012b$.
4(5đ)	Ta có $\begin{cases} a_{n+1}b_{n+1} = 2a_nb_n \\ a_{n+1} + b_{n+1} = 2(a_n + b_n). \end{cases}$ Suy ra $\begin{cases} a_n + b_n = -2^n \\ a_nb_n = -2^{n+1}. \end{cases}$ Do đó a_{2012}, b_{2012} $(a_{2012} \ge b_{2012})$ là nghiệm của phương trình $x^2 + 2^{2012}x - 2^{2013}$. Suy ra $a_{2012} = 2^{1006}\sqrt{2^{1010}+2} - 2^{2011}$.
5(5đ)	Với mọi $x \in (0, \infty)$, ta có $$f(x^2) \le xf(x) \le x\sqrt{x}f(\sqrt{x}) \le \ldots \le x\sqrt{x}\ldots \sqrt[2^n]{x}f(\sqrt[2^n]{x}).$$ Do đó $f(x) \le x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}} f(\sqrt[2^n]{x}) = x^{1-\frac{1}{2^n}} f(\sqrt[2^n]{x})$. Cho $n \to \infty$ ta được $f(x) \le xf(1)$. Lấy tích phân từ 1 đến 2 ta có kết quả.
6(5đ)	Ta có $$0 \le \int\limits_0^1 [f'(x)+x]^2dx = \int\limits_0^1 [f'(x)]^2dx + 2\int\limits_0^1 xf'(x)dx + \frac{1}{3}$$ $$= \int\limits_0^1 [f'(x)]^2dx + 2xf(x)\Big\|_0^1 - 2\int\limits_0^1 f(x)dx + \frac{1}{3}.$$ Suy ra $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2dx - 2\int\limits_0^1 f(x)dx \ge 0$. Kết hợp BĐT trong giả thiết ta có $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2dx - 2\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$. Do đó $\int\limits_0^1 [f'(x)+x]^2dx = 0$ hay $f'(x) + x \equiv 0$. Để ý $f(1) = \frac{-1}{6}$ ta có $f(x) = \frac{-x^2}{2} + \frac{1}{3}$.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN ĐẠI SỐ

Trường Cao đẳng Sư phạm Hà Nội

Câu 1. Có tồn tại hay không ma trận vuông A cấp 3 sao cho $Tr(A) = 0$ và $A^T + A^2 = I$ trong đó $Tr(A)$ là tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận A.

Đáp án. Giả sử tồn tại ma trận vuông A cấp 3 sao cho $Tr(A) = 0$ và $A^T + A^2 = I$. Khi đó

$$A = (A^T)^T = (I - A^2)^T = I - (A^2)^T = I - (A^T)^2 = I - (I - A^2)^2 = -A^4 + 2A^2$$

hay

$$A^4 - 2A^2 + A = 0.$$

Do đó, A là nghiệm của đa thức $p(x) = x^4 - 2x^2 + x$. Các nghiệm của đa thức $p(x)$ là $0, 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Giả sử $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là các giá trị riêng thực hoặc phức của ma trận A (các $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ có thể trùng nhau), khi đó λ_i là nghiệm của đa thức $p(x)$. Từ đó $\lambda_i \in \{0, 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$. Chú ý rằng, nếu λ là giá trị riêng của A thì λ^k là giá trị riêng của $A^k, k \geq 1$. Do đó các giá trị riêng của A^2 là $\lambda_i^2 \in \{0, 1, \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\}$. Mặt khác, ta có

$$tr(A^2) = tr(I - A^T) = tr(I) + tr(A) = 3$$

Từ đó, nếu A là ma trận thoả mãn bài toán thì A có các tính chất sau

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$
$$tr(A^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

Điều này không thể đồng thời xảy ra vì $\lambda_i \in \{0, 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$, $\lambda_i^2 \in \{0, 1, \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\}$. Vậy giả sử là sai, tức không tồn tại ma trận cấp 3 nào thoả mãn bài toán.

Câu 2. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Tính A^{2012}.

Đáp án. Từ giả thiết bài toán ta thấy, đa thức đặc trưng của ma trận A là $f_A(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$. Đa thức này có các nghiệm là

$$x_{1,2} = \pm i, x_{3,4} = \pm 2i \text{ trong đó } i^2 = -1.$$

Chia x^{2012} cho $f_A(x)$ ta có

$$x^{2012} = f_A(x)p(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{1}$$

trong đó $p(x) \in \mathbb{R}[x], a, b, c, d \in \mathbb{R}$ được xác định sau. Thay $x = i$ vào hai vế của (1) chúng ta có

$$i^{2012} = f_A(i)p(i) - ai - b + ci + d$$

suy ra

$$\begin{aligned} c - a &= 0 \\ d - b &= 1 \end{aligned}$$

Tương tự, thay $x = 2i$ vào hai vế của (1) chúng ta có

$$\begin{aligned} 2c - 8a &= 0 \\ b + d &= 2^{2012} \end{aligned}$$

Từ đó, $a = c = 0, b = \dfrac{1 - 2^{2012}}{3}, d = \dfrac{4 + 2^{2012}}{3}$. Do đó

$$x^{2012} = f_A(x)p(x) + \frac{1 - 2^{2012}}{3}x^2 + \frac{4 + 2^{2012}}{3}.$$

Suy ra $A^{2012} = f_A(A)p(A) + \dfrac{1 - 2^{2012}}{3}A^2 + \dfrac{4 + 2^{2012}}{3}I$, I là ma trận đơn vị cấp 4. Từ đó

$$A^{2012} = \frac{1 - 2^{2012}}{3}A^2 + \frac{4 + 2^{2012}}{3}I$$

Tính toán ta có

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -30 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Do đó

$$A^{2012} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3}2^{2012} & 5.2^{2013} - 10 & 2^{2012} - 1 & 2^{2012} - 1 \\ \frac{2^{2013} - 2}{3} & \frac{2^{2012} - 1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3}2^{2012} & 2^{2014} - 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3}2^{2012} \end{pmatrix}$$

Câu 3. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n sao cho

$$A^{2012} = 0, AB = BA, B \neq 0$$

Chứng minh rằng $rank(AB) \leq rank(B) - 1$.

Đáp án. Trước hết ta chứng minh $Im(AB) \subset Im(B)$. Thật vậy, $\forall y \in Im(AB)$ tồn tại x sao cho $y = AB(x) = BA(x) = B(Ax)$ hay $y \in Im(B)$. Mặt khác dễ dàng chứng minh theo qui nạp

$$A^kB = BA^k, \forall k \geq 1.$$

Giả sử $Im(AB) = Im(B)$.

Chứng minh qui nạp theo k: $Im(BA^k) = Im(B)$.

Theo giả sử, tính chất đúng với $k = 1$. Giả sử tính chất đúng với $n = k > 1$ tuỳ ý. Đặt $X = Mat(n \times 1, \mathbb{R})$ ta có

$$\begin{aligned} Im(BA^{k+1}) &= BA^{k+1}(X) = A^{k+1}B(X) = AA^kB(X) \\ &= AB(X) = BA(X) = Im(BA) = Im(B) \end{aligned}$$

Vì $A^{2012} = 0$ nên ta có: $Im(B) = Im(BA^{2012}) = \{0\}$, nên $B = 0$, trường hợp này bị loại. Điều này chứng tỏ: $Im(AB) \subsetneq Im(B)$ và do đó $rank(AB) = rank(BA) < rank(B)$.

Câu 4. Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^3 = A + I$. Chứng minh rằng $det(A) > 0$.

Đáp án. Theo giả thiết A là nghiệm của đa thức $p(x) = x^3 - x - 1$; đa thức này có một nghiệm dương là x_0 và hai nghiệm phức liên hợp là $z_0, \overline{z_0}$. Ký hiệu n_1 là cấp bội của giá trị riêng x_0 của ma trận A (nếu x_0 không phải là giá trị riêng cảu ma trận A thì $n_1 = 0$); n_2 là cấp bội giá trị riêng z_0 của ma trận A. Vì cấp bội nếu có của giá trị riêng z_0 cũng bằng cấp bội của giá trị riêng $\overline{z_0}$ nên ta có $n_1 + 2n_2 = n$ và

$$\begin{aligned} det(A) &= det(D), \text{ trong đó } D = diag(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{n_1}, \underbrace{z_0, \ldots, z_0}_{n_2}, \underbrace{\overline{z_0}, \ldots, \overline{z_0}}_{n_2}) \\ &= x_0^{n_1} z_0^{n_2} \overline{z_0}^{n_2} = x_0^{n_1} |z_0|^{2n_2} > 0 \end{aligned}$$

Câu 5. Cho A là ma trận cấp 4×2, B là ma trận cấp 2×4 sao cho

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

trong đó a, b là các số thực khác không. Xác định BA.

Đáp án. Phân tích A và B dưới dạng khối

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$$

trong đó A_1, A_2, B_1, B_2 là các ma trận vuông cấp 2. Khi đó

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{pmatrix}$$

Từ đó và từ giả thiết ta có

$$A_1B_1 = aI, A_2B_2 = aI, A_2B_1 = bI, A_1B_2 = bI.$$

Do đó $B_1 = \frac{1}{a}A_1^{-1}, B_2 = \frac{1}{b}A_1^{-1}, A_2 = aB_2^{-1} = \frac{a}{b}A_1$. Bởi vậy

$$BA = (B_1 \quad B_2)\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = B_1A_1 + B_2A_2 = \frac{1}{a}A_1^{-1}A_1 + \frac{a}{b}\frac{1}{b}A_1^{-1}A_1 = (\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2})I.$$

Câu 6. Xác định tất cả các đa thức với hệ số thực $P(x)$ sao cho

$$P(x)^2 - 2 = 2P(2x^2 - 1). \tag{2}$$

Đáp án.

- Dễ kiểm tra hai đa thức hằng $P(x) = 1 \pm \sqrt{3}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.
- Nếu $P(x)$ khác hằng số. Đặt $P(1) = a$, thay $x = 1$ vào hai vế của đẳng thức (2) ta có $a^2 - 2 = 2a$ hay $a^2 - 2a - 2 = 0$. Chia đa thức $P(x)$ cho $x - 1$ ta có

$$P(x) = (x-1)P_1(x) + P(1) = (x-1)P_1(x) + P(1)$$

Thay vào (2) và rút gọn ta có

$$(x-1)P_1(x)^2 + 2aP_1(x) = 4(x+1)P_1(2x^2 - 1).$$

Lại cho $x = 1$ vào hai vế của đẳng thức trên ta có

$$2aP_1(1) = 8P_1(1)$$

Vì $P(1) = a \neq 4$ nên từ đẳng thức trên ta có $P_1(1) = 0$. Giả sử $P(x) = (x-1)^nQ(x) + a, Q(1) \neq 0$. Lại thay $P(x), Q(x)$ vào phương trình (2) và rút gọn ta có

$$(x-1)^nQ(x)^2 + 2aQ(x) = 2(2x+2)^nQ(2x^2 - 1).$$

Từ đẳng thức cuối ta có $Q(1) = 0$, mâu thuẫn.

Vậy có hai đa thức hằng thoả mãn bài toán là $P(x) = 1 \pm \sqrt{3}$.

Đề và đáp án: Môn Đại số

Trường Cao đẳng Sư phạm Hà Nội

Câu 1. Cho $F(x) = f(x^3) + x^2.g(x^3)$. Chứng minh rằng: nếu $F(x)$ chia hết cho x^2+x+1 thì $f(x), g(x)$ chia hết cho $x-1$.

Đáp án. Gọi w là nghiệm của x^2+x+1 thì $w^3 = 1$, tức là w có thể lấy 2 giá trị phức liên hợp của $\sqrt[3]{1}$.

Nếu gọi w là một trong hai giá trị phức của $\sqrt[3]{1}$ thì giá trị phức liên hợp với nó sẽ là w^2. Vì $F(x)$ chia hết cho x^2+x+1 nên ta có

$$F(w) = f(w^3) + w^2.g(w^3) = f(1) + w^2.g(1) = 0 \ (1)$$

$$F(w^2) = f(w^6) + w^4.g(w^6) = f(1) + w.g(1) = 0 \ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(1) = g(1) = 0$, tức là $f(x), g(x)$ chia hết cho $x-1$.

Câu 2. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & \dots & \sin x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & \dots & \sin^2 x \\ 1 & 3 & 3.2! & 3! & \dots & \sin^3 x \\ & \dots & & & & \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & \dots & \sin^n x \end{vmatrix}$$

Đáp án. Trừ mỗi hàng cho hàng phía trên nó ta được:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \sin x - 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \dots & \sin^2 x - \sin x \\ 0 & 1 & 2.2 & 3.2! & \dots & \sin^3 x - \sin^2 x \\ & & \dots & & & \\ 0 & 1 & 2(n-1) & 3(n-1)(n-2) & \dots & \sin^n x - \sin^{n-1} x \end{vmatrix}.$$

Khai triển D_{n+1} theo cột 1 ta được:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & \sin x - 1 \\ 1 & 2.2 & 3.2! & \dots & \sin^3 x - \sin^2 x \\ & & \dots & & \\ 1 & 2(n-1) & 3(n-1)(n-2) & \dots & \sin^n x - \sin^{n-1} x \end{vmatrix}.$$

Cột 2 đặt thừa số 2, cột 3 đặt thừa số 3, ..., cột n đặt $\sin x - 1$ ra ngoài ta được:

$$D_{n+1} = 1.2\dots(n-1)(\sin x - 1).D_n = (n-1)!D_n.$$

Tiếp tục tính D_n như tính D_{n+1} ta được:

$$D_n = (n-2)!(\sin x - 1)D_{n-1}.$$

Tiếp tục tính D_{n-1}, D_{n-2}. Cuối cùng ta được

$$D_{n+1} = (n-1)!(n-2)!\dots 2!1!(\sin x - 1)^n.$$

Câu 3. Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} - \sqrt{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

và

$$B = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Chứng minh A và B đồng dạng. **Đáp án.** Ta sẽ chỉ ra một ma trận khả nghịch S thỏa $A = SBS^{-1}$.

Xét

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} & -1 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

và

$$A_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 & -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $A_0 = SA_1S^{-1}$, $A_0^n = SA_1^nS^{-1}$ và bằng qui nạp ta có

$$A_1^n = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{n\pi}{6} + \sin\dfrac{n\pi}{6} & -2\sin\dfrac{n\pi}{6} \\ \sin\dfrac{n\pi}{6} & \cos\dfrac{n\pi}{6} - \sin\dfrac{n\pi}{6} \end{pmatrix}.$$

Do đó $A_1^{2012} = B$, và $A = A_0^{2012} = SA_1^{2012}S^{-1} = SBS^{-1}$. Vậy

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Câu 4. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Tìm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n - I}{n}$$

, với I là ma trận đơn vị cấp 3.

Đáp án. Ta có

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

Suy ra dạng chuẩn Jordan của A gồm một khối Jordan cấp 1 và một khối Jordan cấp 2 đều ứng với

$$\lambda = 1$$

. Nghĩa là

$$A \sim J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bây giờ ta sẽ tìm một ma trận không suy biến P để AP = PJ. Đặt

$$P = [p_{ij}]$$

, bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính

$$A\,[p_{ij}] = [p_{ij}]\,J$$

ta tìm được

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

,

suy ra

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

. Vậy

$$A = PJP^{-1}$$

. Do đó

$$A^n = PJ^nP^{-1}.$$

.

Bây giờ ta sẽ tính

$$J^n$$

. Bằng cách thử trực tiếp ta thấy

$$J^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

,

$$J^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots$$

Ta sẽ chứng minh

$$J^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

. Thật vậy, công thức đã cho đúng với n = 1. Giả sử công thức này đúng với

$$n = k \geq 1$$

, với n = k + 1 ta có

$$J^{k+1} = J^k J = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Từ đó suy ra

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n+1 & -2n & n \\ n & -2n+1 & n \\ n & -2N & n+1 \end{bmatrix}$$

$$= n \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + I$$

, nên

$$\frac{A^n - I}{n} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

. Từ đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n - I}{n} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Câu 5. Cho

$$A = [a_{ij}] \in M_n(R)$$

thỏa

$$a_{ij} = 0, \forall i \leq j.$$

Chứng minh rằng với mọi k thỏa

$$1 \le k \le n-1$$

thì

$$rankA^k = rank(A^k + A^{k+1} + ... + A^{n-1})$$

Đáp án. Ký hiệu các phần tử của ma trận A^q là

$$a_{ij}^q$$

, trước hết ta sẽ chứng minh rằng ma trận A^q cũng có tính tương tự như ma trận A. Thật vậy, kết luận hiển nhiên đúng với q = 1. Giả sử ma trận A^k thỏa

$$a_{ij}^k = 0, \forall i \le j.$$

Thế thì

$$A^{k+1} = AA^k$$

có phần tử

$$a_{ij}^{k+1} = a_{i1}a_{1j}^k + a_2 a_{2j}^k + ... + a_{ii}a_{ij}^k + a_{i,i+1}a_{i+1,j}^k + ... + a_{in}a_{nj}^k$$

Với

$$i \le j$$

thì

$$a_{1j}^k = ... = a_{ij}^k = 0$$

theo giả thiết quy nạp, còn

$$a_{i,i+1} = ... = a_{in} = 0$$

theo giả thiết bài toán, nên

$$a_{ij}^{k+1} = 0.$$

Nghĩa là

$$A^{k+1}$$

cũng thỏa

$$a_{ij}^{k+1} = 0, \forall i \le j$$

.

Bây giờ ta chứng minh $A^n = 0$. Thật vậy, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $q(1 \le q \le n)$ rằng ma trận $A^q = 0$ có q dòng đầu bằng 0.

Với q = 1, ma trận A có các phần tử dòng đầu là

$$a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$$

nên đều bằng 0 theo giả thiết bài toán. Giả sử ma trận

$$A^k (1 \le k \le n-1)$$

có k dòng đầu bằng 0.

Xét ma trận A^{k+1}, do $A^{k+1} = AA^k$, nên phần tử của A^{k+1} là

$$a_{ij}^{k+1} = a_{i1}a_{1j}^k + a_2a_{2j}^k + ... + a_{ii}a_{ij}^k + a_{i,i+1}a_{i+1,j}^k + ... + a_{in}a_{nj}^k$$

Với

$$1 \leq i \leq k$$

thì

$$a_{1j}^k = a_{2j}^k = ... = a_{ij}^k = 0$$

theo giả thiết quy nạp, còn

$$a_{i,i+1} = ... = a_{in} = 0$$

theo giả thiết bài toán, nên

$$a_{ij}^{k+1} = 0, \forall j = \overline{1,n}.$$

Suy ra A^{k+1} có k dòng đầu bằng 0.

Xét dòng thứ k+1, ta có

$$a_{k+1,j}^{k+1} = a_{k+1,1}a_{1j}^k + a_{k+1,2}a_{2j}^k + ... + a_{k+1,k}a_{kj}^k + a_{k+1,k+1}a_{k+1,j}^k + ... + a_{k+1,n}a_{nj}^k = 0, \forall j = \overline{1,$$

. Vì

$$a_{1j}^k = a_{2j}^k = ... = a_{kj}^k = 0$$

theo giả thiết quy nạp, còn

$$a_{k+1,k+1} = ... = a_{k+1,n} = 0$$

theo giả thiết bài toán.Vậy $A^n = 0$.

Suy ra

$$I - A^n = I \Rightarrow (I - A)(I + A + ... + A^{n-1}) = I \Rightarrow I + A + ... + A^{n-1}$$

khả nghịch, hay

$$\det(I + A + ... + A^{n-1}) \neq 0.$$

Suy ra

$\det A^k = \det(A^k(I + A + ... + A^{n-1})) = \det(A^k + A^{k+1} + ... + A^{n-1} + A^n + ... + A^{n-1+k}) =$

$= \det(A^k + A^{k+1} + ... + A^{n-1})$, vì

$$A^n = ... = A^{n-1+k} = 0.$$

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN ĐẠI SỐ

Trường Đại học Sài Gòn

Câu1. Giải hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 0 \\ 2011x_1 + 2012x_2 - x_3 & = 0 \\ 2011^2x_1 + 2011\cdot 2012x_2 + 2012x_3 - x_4 & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 2011^{2011}x_1 + 2012\cdot 2011^{2010}x_2 + \cdots + 2012x_{2012} & = 0 \end{cases}$$

Câu2. Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp 2012 thỏa mãn $a_{i,i+1} = i, 1 \le i \le 2011$, $a_{2012,1} = 2012$ các phần tử còn lại đều bằng 0. Tính

$$det(I + A + \cdots + A^{2011}).$$

Câu3. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n sao cho $A + B = I$. Đặt $a = rank(A), b = rank(B)$. Gọi S là tập hợp tất cả các ma trận vuông X cấp n sao cho $Xu \in ImA, \forall u \in ImA$ và $Xv \in ImB, \forall v \in ImB$, trong đó, ký hiệu ImM là không gian véc tơ con sinh bởi các cột của M. Chứng minh rằng S là không gian con của không gian các ma trận vuông cấp n, tính số chiều của S theo a, b, n.

Câu4. Cho A là ma trận cỡ 6×3 và ma trận B cỡ 3×6 sao cho

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tìm BA.

Câu5. Cho $P(x) = x^2 - 1$. Tìm số nghiệm thực của đa thức sau:

$$P_n(x) = \underbrace{P(P(\dots P}_{n \text{ lần}}(x)\dots))$$

ĐÁP ÁN

Câu1. Gọi A là ma trận hệ số của hệ phương trình đã cho.

$$D_{2012} = det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 2011 & 2012 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2011^{2011} & 2012 \cdot 2011^{2010} & 2012 \cdot 2011^{2009} & \cdots & 2012 \end{vmatrix}$$
$$= (2011 + 2012)D_{2011} = \dots$$
$$= (2011 + 2012)^{2012} \neq 0.$$

Như vậy hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường.

Câu2. Tính toán trực tiếp ta nhận thấy $A^{2012} = 2012!$. Do đó,

$$(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{2011}) = I - A^{2012} = (1 - 2012!)I.$$

Suy ra $det(I - A)det(I + A + A^2 + \cdots + A^{2011}) = (1 - 2012!)^{2012}$.

$$det(I - A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2011 \\ -2012 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 + (-1)^{2012+1}(-2012) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & -2011 \end{vmatrix}$$
$$= 1 + (-1)^{2012+1}(-1)^{2012}2012! = 1 - 2012!.$$

Từ đó suy ra $det(I + A + A^2 + \cdots + A^{2011}) = (1 - 2012!)^{2011}$.

Câu3. Với mọi $X, Y \in S$, với mọi $u \in ImA$, vì $Xu \in ImA$ và $Yu \in ImA$ nên $(\alpha X + \beta Y)u \in ImA, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tương tự $(\alpha X + \beta Y)u \in ImB, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in ImB$. Suy ra $\alpha X + \beta Y \in S$. Như vậy S là không gian con.

Với mọi $X \in S$, từ giả thiết suy ra $Xu \in ImA \cap ImB$, $\forall u \in ImA \cap ImB$. Đặt c là số chiều của $ImA \cap ImB$. Vì $A + B = I$ nên $\mathbb{R}^n = ImI = Im(A + B) \subset ImA + ImB$, suy ra $c = a + b - n$.

Gọi $\{u_1, \dots, u_c\}$ là một cơ sở của $ImA \cap ImB$. Ta có thể bổ sung các véc tơ thích hợp để được các cơ sở $\{u_1, \dots, u_c, v_1, \dots, v_{a-c}$ của ImA và $\{u_1, \dots, u_c, w_1, \dots, w_{b-c}\}$ của ImB.

Khi đó, $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_c, v_1, \dots, v_{a-c}, w_1, \dots, w_{b-c}\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\mathcal{B}$.

Vì $Xu_i \in ImA \cap ImB, 1 \leq i \leq c$, $Xv_i \in ImA, 1 \leq i \leq a - c$ và $Xw_i \in ImB, 1 \leq i \leq b - c$, nên

$$P^{-1}XP = \begin{pmatrix} M_{cc} & M_{c,a-c} & M_{c,b-c} \\ 0 & M_{a-c,a-c} & 0 \\ 0 & 0 & M_{b-c,b-c} \end{pmatrix} = X'.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} dimS = dimS' &= c^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 + c(a-c) + c(b-c) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc = a^2 + b^2 + c(c-a-b) \\ &= a^2 + b^2 - (a+b-n)n = a^2 + b^2 + n^2 - (a+b)n, \end{aligned}$$

trong đó S' là tập hợp tất cả các ma trận có dạng X'.

Câu4. Đặt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix},$$

trong đó A_1, A_2, B_1, B_2 là các ma trận vuông cấp 3.

Theo đề bài ta có

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix},$$

trong đó I là ma trận đơn vị cấp 3.

Suy ra $A_1B_1 = I$; $A_2B_2 = I$, hệ quả là $A_1^{-1} = B_1$, $A_2^{-1} = B_2$. Do đó,

$$BA = B_1A_1 + B_2A_2 = 2I.$$

Câu5. Từ giả thiết ta thấy $P_n(x) \geq -1$ nên phương trình $P_n(x) = a$ không có nghiệm thực với $a < -1$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh phương trình $P_n(x) = a$ có hai nghiệm thực phân biệt với mọi $a > 1$. Dễ thấy $P_1(x) = a$ có hai nghiệm thực phân biệt với mọi $a > 1$.

Ta có $P_{n+1}(x) = P_n(x)^2 - 1$, nên $P_{n+1}(x) = a$ tương đương với $P_n(x) = \pm\sqrt{a+1}$. Vì $-\sqrt{a+1} < -1$ nên phương trình $P_n(x) = -\sqrt{a+1}$ không có nghiệm thực. Vì $\sqrt{a+1} > 1$ nên theo giả thiết quy nạp phương trình $P_n(x) = \sqrt{a+1}$ có hai nghiệm thực phân biệt. Suy ra $P_{n+1}(x) = a$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Cuối cùng, ta sẽ chứng minh đa thức $P_n(x)$ có $n+1$ nghiệm thực phân biệt.

Thật vậy, ta dễ dàng nhận thấy $P_1(x)$ có hai nghiệm thực phân biệt là ± 1, $P_2(x) = x^2(x^2-2)$ có 3 nghiệm thực phân biệt là $0, \pm\sqrt{2}$.

Vì $P_{n+2}(x) = P_n(x)^2(P_n(x)^2 - 2)$. Vì theo chứng minh trên $P_n(x) = -\sqrt{2}$ không có nghiệm thực, $P_n(x) = \sqrt{2}$ có hai nghiệm thực phân biệt, và theo giả thiết quy nạp $P_n(x)$ có $n+1$ nghiệm thực phân biệt do đó đa thức $P_{n+2}(x)$ có $n+3$ nghiệm thực phân biệt.

Như vậy đa thức $P_n(x)$ có $n+1$ nghiệm thực.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN ĐẠI SỐ

Trường Đại học Quảng Bình

Câu 1. a) Chứng minh rằng tồn tại ma trận vuông A có cấp n với các phần tử hữu tỷ, thoả mãn $A^{-1} = I + A^t$ khi và chỉ khi n chẵn. Với A^{-1} và A^t lần lượt là ma trận nghịch đảo và ma trận chuyển vị của A, I là ma trận đơn vị cấp n.

Câu 2. Cho $A; B$ là các ma trận vuông cấp n thỏa mãn

$$A^2 - A + AB - B + B^2 = 0.$$

Chứng minh rằng ma trận $A + B$ có giá trị riêng là 1 khi và chỉ khi ma trận A hoặc ma trận B có giá trị riêng là 1.

Câu 3. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tính tổng các phần tử nằm trên đường chéo phụ của ma trận A^{2012}.

Giải.

Câu 1. Giả sử tồn tại ma trận A sao cho $A^{-1} = I + A^t$.
Ta có $A^t = A^{-1} - I \Leftrightarrow A = (A^{-1} - I)^t = (A^{-1})^t - I = (A^t)^{-1} - I = (A^{-1} - I)^{-1} - I \Leftrightarrow$ $A + I = (A^{-1} - I)^{-1} \Leftrightarrow (A^{-1} - I)(A + I) = I \Leftrightarrow (I - A)(A + I) = A \Leftrightarrow I - A^2 = A \Leftrightarrow$ $A^2 + A - I = 0$. Vậy A là một nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 + x - 1$. Đa thức này có 2 nghiệm $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$, mà A là đa thức hệ số hữu tỷ nên đa thức tối tiểu của A phải là $f(x) = x^2 + x - 1$. Suy ra đa thức đặc trưng của A phải có dạng $(x^2 + x - 1)^k$, suy ra $n = 2k$ hay n chẵn.

Ngược lại giả sử n chẵn, ta xét ma trận $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
ta có $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = I_2 + B^t$

Gọi A là ma trận vuông cấp n trên đường chéo chính là $\frac{n}{2}$ khối ma trận B các phần tử còn lại bằng 0. Khi đó $A^{-1} = I + A^t$.

Câu 2. Ta có $A^2 - A + AB - B + B^2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A^2 - 2A + AB + BA - 2B + B^2 + I = -A + BA - B + I \Leftrightarrow (A + B - I)^2 = (B - I)(A - I)$
Suy ra $\det(A + B - I) = 0 \Longleftrightarrow \det(B - I) = 0$ hoặc $\det(A - I) = 0$. (đpcm)

Câu 3. Ta có $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 3I + B.$

Mà $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$; $B^3 = 0$

Vậy $A^{2012} = 3^{2012}I_3 + 2012 * 3^{2011}B + \frac{2012*2011}{2} * 3^{2010}B^2$,
vì tổng các phần tử nằm trên đường chéo phụ của B là 4 của B^2 là 0.
Suy ra tổng các phần tử nằm trên đường chéo phụ của A^{2012} là $3^{2012} + 4 * 2012 * 3^{2011} = 8051 * 3^{2011}$.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN ĐẠI SỐ

Trường Đại học Sư phạm Huế

Câu 1. (5 điểm) Cho A là ma trận cấp 2011×2012 trên $\mathbb{R}$. Ký hiệu A^T là ma trận chuyển vị của A và $B = \widetilde{A^T A}$ là ma trận phụ hợp của $A^T A$. Chứng minh rằng $B^2 = \operatorname{tr}(B)B$.

Câu 2. (5 điểm) Cho A, B là các ma trận vuông cấp n, hệ số thực thỏa mãn $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m sao cho $(AB - BA)^m = 0$.

Câu 3.(5 điểm) Cho A là ma trận vuông cấp n hệ số thực như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Giả sử $b_i \neq 0$, với mọi i. Chứng minh rằng A có n giá trị riêng phân biệt.

Câu 4.(5 điểm) Cho ba dãy số $(u_n), (v_n)$ và (w_n) xác định như sau

$$\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 1, w_0 = -1, \\ u_{n+1} = 5u_n + 4v_n + 6w_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 5v_n + 6w_n \\ w_{n+1} = -4u_n - 4v_n - 5w_n \end{cases}$$

Chứng minh rằng u_n chia hết cho 3^n, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Câu 5.(5 điểm) Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(x^2 + 1) = P(x)P(x + 1).$$

Câu 6.(5 điểm) Cho m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đa thức $x^m + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ là $mn - 2$ chia hết cho 3.

Đáp án

Câu	Nội dung	Điểm
1 (5đ)	Ta có A^TA là ma trận cấp 2012 và có $\text{rank}(A^TA) \leq \text{rank}(A) \leq 2011$. • Nếu $\text{rank}(A^TA) < 2011$ thì tất cả các định thức con cấp 2011 thu được từ A^TA đều bằng 0. Do đó $B = 0$ và hiển nhiên $B^2 = \text{Tr}(B)B$.	1 đ
	• Nếu $\text{rank}(A^TA) = 2011$ thì A^TA có ít nhất một định thức con cấp 2011 khác không nên B có ít một phần tử khác 0. Do đó $\text{rank}(B) \geq 1$.	1đ
	* Mặt khác vì $A^TA.B^T = \det(A^TA)I = 0$ nên $\text{Im}(B^T) \subset \text{Ker}(A^TA)$. Do đó $\text{rank}(B) \leq \dim(\text{Ker}(A^TA)) = 2012 - 2011 = 1$. Vậy $\text{rank}(B) = 1$.	1đ
	* Khi đó ma trận B có dạng $B = \begin{pmatrix} c_1 & d_2c_1 & \cdots & d_{2012}c_1 \\ c_2 & d_2c_2 & \cdots & d_{2012}c_2 \\ . & . & \cdots & . \\ c_{2012} & d_2c_{2012} & \cdots & d_{2012}c_{2012} \end{pmatrix} = C^TD,$	1 đ
	với $C = (c_1, c_2, \dots, c_{2012}) \neq 0$ và $D = (1, d_2, \dots, d_{2012})$ nên $DC^T = \text{Tr}(B)$. Vậy $B^2 = BB = C^TDC^TD = C^T(\text{Tr}(B))D = \text{Tr}(B)B$.	1đ
2 (5đ)	Trước hết, ta đặt $C = AB - BA$ và chứng minh A và C giáo hoán nhau. Ta có $AC - CA = A(AB - BA) - (AB - BA)A = A^2B + BA^2 - 2ABA = O$.	1đ
	Chứng minh bằng quy nạp ta được $C^m = AC^{m-1}B - C^{m-1}BA, \forall m \geq 1$.	1 đ
	Sử dụng $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ ta có $\text{Tr}(C^m) = 0, \forall m \geq 1$.	1 đ
	Chứng minh tất cả các giá trị riêng của C bằng 0, do đó tồn tại $m \in \mathbb{N}$ sao cho $C^m = 0$.	2 đ
3 (5đ)	Do các $b_i \neq 0$ nên tồn tại định thức con cấp $n-1$ của A khác 0. Do đó $\text{rank}(A) \geq n - 1$.	1 đ
	Do A la ma trận đối xứng nên A chéo hóa được. Ta chứng minh số chiều của các không gian con riêng của A bằng 1.	1 đ
	Gọi λ là một giá trị riêng của A, lúc đó $\text{rank}(A - \lambda I) \geq n - 1$ và $\det(A - \lambda I) = 0$ nên $\text{rank}(A - \lambda I) = n - 1$.	2đ
	Do đó $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) = n - (n-1) = 1$. Vậy A có n giá trị riêng phân biệt.	1 đ
4 (5đ)	Ta đặt ma trận $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ và $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ Khi đó dãy số $(u_n), (v_n), (w_n)$ được viết dạng $\begin{cases} X_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ X_{n+1} = AX_n, \forall n \geq 0 \end{cases}$.	1đ

Câu	Nội dung	Điểm
	Đa thức đặc trưng là $P_A(x) = -(x-1)^2(x-3)$. Do đó A có các giá trị riêng là $\lambda = 1$ và $\lambda = 3$.	1 đ
	Chéo hóa A với $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.	2 đ
	Vậy $A^n = CB^nC^{-1} = \begin{pmatrix} -1+2.3^n & -2+2.3^n & -3+3.3^n \\ -2+2.3^n & -1+2.3^n & -3+3.3^n \\ 2-2.3^n & 2-2.3^n & 4-3.3^n \end{pmatrix}$.	
	Vậy $u_n = 3^n$.	1đ
5(5đ)	Tìm đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $P(x^2+1) = P(x)P(x+1)$. (1) Nếu $P(x) = c \in \mathbb{R}$ (hằng số) thì từ đẳng thức (1) ta suy ra $c = 0$ hoặc $c = 1$. Vậy $P(x) = 0$ hoặc $P(x) = 1$ là hai đa thức thỏa mãn bài toán.	1 đ
	Giả sử $P(x)$ có $\deg(P(x)) = n \geq 1$. Nếu $x_0 \in \mathbb{R}$ là một nghiệm của $P(x)$. Khi đó $x_1 = x_0^2 + 1 > x_0$ cũng là nghiệm của $P(x)$. Do đó $P(x)$ có vô số nghiệm là $x_0, x_1 = x_0^2+1 > x_0, \ldots, x_k = x_{k-1}^2 + 1 > x_{k-1}, \ldots$. Điều này không xảy ra với đa thức bậc n. Do đó $P(x)$ không có nghiệm thực.	1 đ
	Do đó $P(x)$ có bậc bằng $2n$ và gọi $P(x) = a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0$, với $a_{2n}, a_0 \neq 0$. Thay vào (1) và đồng nhất hệ số ta có $a_{2n} = a_0 = 1$. Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ là các nghiệm phức (kể cả bội) của $P(x)$. Theo Viet ta có $\prod x_j = (-1)^{2n}\frac{a_0}{a_{2n}} = 1$ nên $\prod \lvert x_j\rvert = 1$.	1đ
	Nếu tồn tại x_j sao cho $\lvert x_j\rvert > 1$ thì các nghiệm $x_j^2 + 1$ cũng có $\lvert x_j^2+1\rvert > \lvert x_j\rvert$. Điều này suy ra $P(x)$ có vô số nghiệm. Điều này vô lý. Nếu tồn tại x_j sao cho $\lvert x_j\rvert < 1$ nên từ $\prod \lvert x_j\rvert = 1$ suy ra tồn tại x_i để $\lvert x_i\rvert > 1$. Lý luận như trên cũng dẫn đến điều vô lý.	1 đ
	Vậy $\lvert x_j\rvert = 1, \forall j = \overline{1,2n}$ nên $x_j = \cos\theta_j + i\sin\theta_j$ nên $P(x) = (x^2+1)^n$. Thay $P(x) = (x^2+1)^n$ vào (1) ta thấy không thỏa mãn. Vậy chỉ có hai đa thức thỏa mãn là $P(x) = 0$ hoặc $P(x) = 1$.	1đ
6(5đ)	Biểu diễn $m = 3k + r$ và $n = 3l + s$, với $k, l \in \mathbb{N}, r, s \in \mathbb{N}$ và $0 \leq r, s \leq 2$. Khi đó $x^m + x^n + 1 = (x^{3k}-1)x^r + (x^{3l}-1)x^s + x^r + x^s + 1$.	1 đ
	Vì $x^{3k}-1$ và $x^{3l}-1$ cùng chia hết cho $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Vậy $x^m + x^n + 1$ chia hết cho x^2+x+1 khi và chỉ khi $x^r + x^s + 1$ chia hết cho x^2+x+1.	1 đ
	Do $r, s \in \{0,1,2\}$ nên $x^r + x^s + 1$ chia hết cho x^2+x+1 khi và chỉ khi $r = 2, s = 1$ hoặc $r = 1, s = 2$.	1 đ
	Mặt khác $mn - 2 = (3k+r)(3l+s) - 2 = 3(3kl + ks + lr) + rs - 2$.	1đ
	Nhưng $rs - 2$ chia hết cho 3 khi và chỉ khi $r = 2, s = 1$ hoặc $r = 1, s = 2$.	1đ
	Vậy $x^m + x^n + 1$ chia hết cho x^2+x+1 khi và chỉ khi $mn - 2$ chia hết cho 3.	

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

Câu 1.

Liệu có tồn tại hàm liên tục f:\RR\to \RR nhận giá trị hữu tỉ tại những điểm x vô tỷ và nhận giá trị vô tỷ tại những điểm x hữu tỷ.

Câu 2.

Liệu có tồn tại hàm khả vi liên tục f:\RR\to \RR thỏa mãn

$$|f(x)| < 2,\ f(x)f'(x) \geq \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 3.

Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$x^n - a_1x^{n-1} - \ldots - a_n = 0$ có đúng một nghiệm thực dương.

Câu 4.

Cho dãy số $\begin{cases} x_1 = a \in (0,1) \\ x_{n+1} = \ln(x_n + 1) \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n$.

Câu 5:

Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn với mọi $x, y \in [0,1]$ ta luôn có

$xf(y) + yf(x) \leq 1$. Chứng minh $\int_0^1 f(x)dx \leq \dfrac{\pi}{4}$.

Câu 6:

Cho hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(x) \geq |\sin x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng đạo hàm của $f(x)$ tại 0 không tồn tại.

Đáp án

Câu 1. [1.5đ]

Liệu có tồn tại hàm liên tục f:\RR\to\RR nhận giá trị hữu tỉ tại những điểm x vô tỷ và nhận giá trị vô tỷ tại những điểm x hữu tỷ.

Giải:

Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó tập $f(\mathbb{Q})$ - tập ảnh của một tập đếm được - sẽ không qua đếm được. Tập $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ nên cũng không quá đếm được. Từ đó suy ra tập giá trị của hàm f là một tập không quá đếm được và có ít nhất 2 giá trị (loại trừ trường hợp f là hàm hằng). Nhưng f là hàm liên tục nên theo định lý về giá trị trung gian (định lý Bolzano-Cauchy), f nhận mọi giá trị trung gian giữa 2 giá trị nói trên. Điều này mâu thuẫn với tính đếm được của tập giá trị của f.

Câu 2. [1.5đ]

Liệu có tồn tại hàm khả vi liên tục f:\RR\to\RR thỏa mãn

$$|f(x)| < 2,\ f(x)f'(x) \geq \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Giải:

Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó

$f^2(x) - f^2(0) = \int\limits_0^x 2f(t)f'(t)dt \geq \int\limits_0^x \sin t dt = 2(1 - \cos x)$. Trong bất đẳng thức trên, cho $x = \pi$ ta được $f^2(x) - f^2(0) = 4$, từ đó suy ra $f^2(x) \geq 4$, mâu thuẫn giả thiết $|f(x)| < 2$. Vậy không tồn tại hàm số theo yêu cầu đề bài.

Câu 3. [1.5đ]

Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$x^n - a_1 x^{n-1} - \ldots - a_n = 0$ có đúng một nghiệm thực dương.

Giải:

Xét hàm $f(x) = \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \ldots + \dfrac{a_n}{x^n}$. Với giả thiết đã cho, trên khoảng $(0, +\infty)$, $f(x)$ là hàm giảm ngặt và giảm từ $+\infty$ về 0. Do đó phương trình $f(x) = 1$ có đúng một nghiệm x_0 trên $(0, +\infty)$. Tức là có đúng một giá trị x_0 trên $(0, +\infty)$ sao cho $\dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \ldots + \dfrac{a_n}{x^n} = 1$. Từ đó suy ra đpcm

Câu 4. [2.5đ]

Cho dãy số $\begin{cases} x_1 = a \in (0,1) \\ x_{n+1} = \ln(x_n + 1) \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} n x_n$.

Giải:

Dễ thấy x_n đơn điệu giảm dần về 0. Ta có

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\ln(1 + x_n)} = \frac{1}{x_n\left(1 - \dfrac{x_n}{2} + o(x_n)\right)} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} + o(1).$$

Hay $\dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{2} + y_n$, trong đó $y_n \to 0$. Suy ra

$\dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{n}{2} + y_1 + \ldots + y_n$ hay $\dfrac{1}{n x_{n+1}} = \dfrac{1}{n x_1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$.

Do $y_n \to 0$ nên $\dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \to 0$, suy ra $\dfrac{1}{n x_{n+1}} \to \dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} n x_n = 2$.

Câu 5: [1.5đ]

Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn với mọi $x, y \in [0,1]$ ta luôn có

$xf(y) + yf(x) \le 1$. Chứng minh $\int_0^1 f(x)dx \le \frac{\pi}{4}$.

Giải:

Bằng phép đổi biến ta có:

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin t)\cos t dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)\sin t dt.$$

Suy ra $2I = \int_0^{\pi/2} (f(\sin t)\cos + f(\cos t)\sin) t dt \le \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$. Đpcm.

Câu 6: [1.5đ]

Cho hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0, f(x) \ge |\sin x|\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng đạo hàm của $f(x)$ tại 0 không tồn tại.

Giải:

Với mọi $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, ta có

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \ge \frac{\sin x}{x} \Rightarrow f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \ge \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Với mọi $x \in (\frac{-\pi}{2}, 0)$, ta có

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \le \frac{-\sin x}{x} \Rightarrow f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \le \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin x}{x} = -$$

Từ đó suy ra không tồn tại $f'(0)$.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Học Viện PKKQ

Câu I

Cho hàm liên tục $f: [-1; 1] \to$. Chứng minh rằng phương trình:

$$xf^{2012}(x) - 2012f(x) + 2011x = 0$$

có nghiệm $x \in [-1; 1]$.

Đáp án:

Phương trình đã cho tương đương với

$$x\left[f^{2012}(x)+2011\right]=2012f(x)\Leftrightarrow x=\frac{2012f(x)}{f^{2012}(x)+2011}$$

(1)

Đặt $g(x)=\dfrac{2012f(x)}{f^{2012}(x)+2011}$

Rõ ràng g(x) liên tục trên đoạn [-1; 1]. Khi đó $(1)\Leftrightarrow x=g(x)\Leftrightarrow g(x)-x=0$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2012 số không âm ta có:

$$f^{2012}(x)+2011=f^{2012}(x)+\underbrace{1+1+...+1}_{2011}\geq 2012\sqrt[2012]{f^{2012}(x)}=2012\left|f(x)\right|$$

Từ đó suy ra

$$\left|g(x)\right|=\frac{2012\left|f(x)\right|}{f^{2012}(x)+2011}\leq\frac{f^{2012}(x)+2011}{f^{2012}(x)+2011}=1\Rightarrow -1\leq g(x)\leq 1$$

(3)

Đặt $h(x)=g(x)-x$.

Ta có $h(1)=g(1)-1\leq 0;\ h(-1)=g(-1)-(-1)=1-g(-1)\geq 0$ (sử dụng (3))

Từ tính liên tục của hàm h(x) suy ra h(x) = 0 có nghiệm $x\in[-1;\ 1]$, hay phương trình (2) có nghiệm $x\in[-1;\ 1]$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x\in[-1;\ 1]$.

Câu II

Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\cos(x^n)dx$

Đáp án:

Ta có $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\cos(x^n)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{1}\cos(x^n)dx+\lim_{n\to\infty}\int_1^{\pi}\cos(x^n)dx$$

(1)

Khi $0\leq x<1$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$. Từ đó suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1}\cos(x^n)dx=\int_0^{1}\cos(0)dx=\int_0^{1}dx=1$$

(2)

Đặt $y=x^n$, ta có:

$$\int_1^{\pi}\cos(x^n)dx=\frac{1}{n}\int_1^{\pi^n}\cos y\frac{dy}{y^{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{n}\int_1^{\pi^n}\frac{d(\sin y)}{y^{1-\frac{1}{n}}}=\frac{\sin y}{ny^{1-\frac{1}{n}}}\Bigg|_1^{\pi^n}+\frac{n-1}{n^2}\int_1^{\pi^n}\sin y\frac{dy}{y^{2-\frac{1}{n}}}$$

(3)

Ta có $\left.\dfrac{\sin y}{ny^{1-\frac{1}{n}}}\right|_1^{\pi^2} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\sin(\pi^2)}{\pi^{2(1-\frac{1}{n})}} - \dfrac{\sin(1)}{1}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left.\dfrac{\sin y}{ny^{1-\frac{1}{n}}}\right|_1^{\pi^2} = 0$

(4)

Ta lại có:

$$\left|\frac{n-1}{n^2}\int_1^{\pi^2}\sin y\frac{dy}{y^{2-\frac{1}{n}}}\right| \le \frac{n-1}{n^2}\int_1^{\pi^2}\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} < \frac{n-1}{n^2}\int_1^{\pi^2}\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} \to 0, \quad \text{khi} \quad n\to\infty$$

(5)

Từ (3), (4) và (5) ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{\pi}\cos(x^n)dx = 0$ (6)

Từ (1), (2) và (6) ta có: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\cos(x^n)dx = 1$.

Câu III:

Cho các hàm số $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{2012}(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0; 1]$. Giả sử $\int_0^1 f_k(x)dx = a_k;\ k = 1, 2, \ldots, 2012$. Chứng minh rằng tồn tại $x \in [0; 1]$ sao cho:

$$f_1(x)f_2(x)\ldots f_{2012}(x) \le a_1a_2\ldots a_{2012}$$

Đáp án:

Do $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{2012}(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0; 1]$, nên

$$\int_0^1 f_k(x)dx = a_k > 0;\ k = 1, 2, \ldots, 2012.$$

Đặt $g_k(x) = \dfrac{f_k(x)}{a_k};\ k = 1, 2, \ldots, 2012$. Ta có:

$$\int_0^1 g_k(x)dx = \frac{1}{a_k}\int_0^1 f_k(x)dx = \frac{a_k}{a_k} = 1;\ k = 1, 2, \ldots, 2012.$$

(1)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\int_0^1 \sqrt[2012]{g_1(x)g_2(x)\ldots g_{2012}(x)}dx \le \int_0^1 \frac{g_1(x)+g_2(x)+\ldots+g_{2012}(x)}{2012}dx = 1 \text{ (Sử dụng (1))}$$

Từ đó suy ra tồn tại $x \in [0; 1]$ sao cho $\sqrt[2012]{g_1(x)g_2(x)\ldots g_{2012}(x)} \le 1$ (2)

(Vì nếu $\sqrt[2012]{g_1(x)g_2(x)...g_{2012}(x)} > 1;\ \forall x \in [0;\ 1]$, thì $\int_0^1 \sqrt[2012]{g_1(x)g_2(x)...g_{2012}(x)}dx > 1$)

Từ (2) suy ra tồn tại $x \in [0;\ 1]$ sao cho $g_1(x)g_2(x)...g_{2012}(x) \le 1$

Hay ta có:

$$\frac{f_1(x)}{a_1}\frac{f_2(x)}{a_2}...\frac{f_{2012}(x)}{a_{2012}} \le 1 \Leftrightarrow f_1(x)f_2(x)...f_{2012}(x) \le a_1a_2...a_{2012}.$$

Câu IV:

Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^{2012} - x^{2011}}{\ln x}dx$

Đáp án:

Đặt $\Phi(b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx\ \ (a > 0,\ b > 0)$. Ta có:

$$\Phi'(b) = \int_0^1 \frac{x^b \ln x}{\ln x}dx = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1}x^{b+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{b+1}.$$ Từ đó suy ra

$$\Phi(b) = \int_0^b \frac{db}{b+1} + C = \ln(b+1) + C$$

Mặt khác, khi $b = a$ thì $\Phi(b) = 0$. Do vậy, ta có $\ln(a+1) + C = 0 \Rightarrow C = -\ln(a+1)$.

Từ các kết quả trên, ta nhận được $\Phi(b) = \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln\frac{b+1}{a+1}$.

Áp dụng bằng số với $a = 2011,\ b = 2012$ ta được: $I = \ln\frac{2013}{2012}$.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Ngoại thương

Câu 1. Cho phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-2} + \cdots + \frac{1}{x^n - n} = 0,\ n \in$.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình trên luôn có duy nhất nghiệm $x_n \in (0,1)$.

b) Chứng minh dãy x_n xác định ở câu a) luôn có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Câu 2. Xét dãy hàm khả vi $f_n : R \to R$ thỏa mãn điều kiện $\left|f_n'(x)\right| \le 1$, với mọi $x \in$, $n = 1,2,...$ Giả sử $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x)$ với mọi x, chứng minh rằng g là hàm liên tục trên .

Câu 3. Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{2+2\cos x-\cos(n-1)x-2\cos nx-\cos(n+1)x}{1-\cos 2x}dx$, với $n \in$.

Câu 4. Xét một cung cong L được cho bởi phương trình $y = f(x)$ trong đó $f:[0,1]\to[0,1]$ là một hàm lõm, khả vi liên tục thỏa mãn $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng độ dài của cung cong đã cho không vượt quá 3.

LỜI GIẢI

Câu 1. a) Với mỗi số nguyên dương n, đặt

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-2} + \cdots + \frac{1}{x^n-n},\ x \in (0,1).$$

Dễ chứng minh $f_n'(x) < 0, \forall x \in (0,1)$ nên $f_n(x)$ nghịch biến trên $(0,1)$. Hơn nữa, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty$, $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$ và do $f_n(x)$ liên tục nên $f_n(x)$ có nghiệm duy nhất $x_n \in (0,1)$ với mọi số nguyên dương n.

b) Ta chứng minh dãy (x_n) là dãy đơn điệu giảm. Thật vậy, ta có

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \frac{1}{x_n^{n+1}-(n+1)} < 0$$

và $\lim\limits_{x\to 0^+} f_{n+1}(x) = +\infty$ nên theo phần a), ta suy ra $f_{n+1}(x)$ có nghiệm duy nhất $x_{n+1} \in (0;x_n)$. Tức là $x_{n+1} < x_n$, hay x_n là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi 0. Do đó, $\lim x_n$ tồn tại hữu hạn và giả sử $\lim x_n = a \ge 0$. Nếu $a > 0$, thì do x_n giảm nên $x_n \ge a \ge 0, \forall n \in$. Suy ra

$$0 = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n-1} + \cdots + \frac{1}{x_n^n-n} \le \frac{1}{a} - \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right), \forall n. \quad (*)$$

Điều này là vô lý vì từ $\lim\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right) = +\infty$ nên ta có thể chọn N sao cho với mọi $n > N$, ta có $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{a}$, tức là bất đẳng thức (*) sẽ không thỏa mãn với $n > N$. Do vậy, $a = 0$ hay $\lim x_n = 0$.

Câu 2. Giả sử a,b là các số thực thỏa mãn $a < b$ và ε là số thực dương tùy ý. Lấy n đủ lớn sao cho

$$\left|f_n(a) - g(a)\right| < \varepsilon \text{ và } \left|f_n(b) - g(b)\right| < \varepsilon.$$

Áp dụng định lý Lagrange ta có

$$|g(a)-g(b)| \le |g(a)-f_n(a)|+|f_n(a)-f_n(b)|+|f_n(b)-g(b)| < 2\varepsilon+|f_n'(c)||b-a|,$$

trong đó $c \in (a,b)$. Vì ε dương tùy ý và $|f'(x)| \le 1$ nên ta thu được

$$|g(a)-g(b)| \le |a-b|, \forall a,b.$$

Suy ra g liên tục.

Câu 3. Ký hiệu a_n là tích phân đã cho. Ta có $a_0 = 0$, $a_1 = \pi$. Với $n \ge 1$, ta có

$$a_{n+1}-2a_n+a_{n-1} = \int_0^{\pi} \frac{\cos(-2+n)x - 2\cos nx + \cos(2+n)x}{-1+2\cos x}dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{2\cos nx(-1+\cos^2 x)}{-1+\cos 2x}dx = \int_0^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Suy ra $a_{n+1}-a_n = a_n - a_{n-1}$, và do đó (a_n) là một cấp số cộng. Từ đó, dễ dàng ta có $a_n = n\pi$.

Câu 4. Từ giả thiết của bài toán, sử dụng định lý Rolle, ta suy ra tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 0$. Vì hàm f là hàm lõm nên $f'' < 0$, tức là f' là hàm giảm. Suy ra f tăng trong $(0,c)$ và giảm trong $(c,1)$. Độ dài của phần cung cong L ứng với $x \in [0,c]$ được cho bởi công thức

$$L_{[0,c]} = \int_0^c \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{c}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2},$$

trong đó $\xi_k \in \left(\frac{kc}{n}, \frac{(k+1)c}{n}\right)$. Vì tích phân trên không phụ thuộc vào cách chọn điểm ξ_k nên theo định lý Lagrange, ta có thể chọn ξ_k thỏa mãn

$$f'(\xi_k) = \frac{f\left(\frac{(k+1)c}{n}\right) - f\left(\frac{kc}{n}\right)}{\frac{c}{n}}.$$

Từ đó, lưu ý rằng f là hàm tăng trong $(0,c)$, ta suy ra rằng

$$L_{[0,c]} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{c}{n}\right)^2 + \left(f\left(\frac{(k+1)c}{n}\right) - f\left(\frac{kc}{n}\right)\right)^2} \le \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{c}{n} + f\left(\frac{(k+1)c}{n}\right) - f\left(\frac{kc}{n}\right)\right)$$

$$= c + f(c)$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được $L_{[c,1]} \le 1 - c + f(c)$. Vì thế,

$$L_{[0,1]} \le c + f(c) + 1 - c + f(c) = 1 + 2f(c) \le 3.$$

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Hồng Đức, Thanh Hóa

Câu 1. *(5 điểm)* Cho hàm số f là hàm số khả vi trên $[0;1], f(0)=0, f(1)=1$. Chứng minh rằng tồn tại $a,b \in (0;1)$ sao cho $a \neq b$ và $\dfrac{1}{f'(a)}+\dfrac{2}{f'(b)}=3$

Câu 2. *(5 điểm)* Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+u_n^2\right)-2012, \quad n \geq 1 \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy số $\{u_n\}$ hội tụ.

Câu 3. *(5 điểm)* Cho f là một hàm số liên tục trên và thỏa mãn $f(x)=f(\sin x), \forall x \in$. Chứng minh rằng f là một hàm hằng.

Câu 4. *(5 điểm)* Cho f là một hàm số liên tục, nhận giá trị dương và tuần hoàn với chu kỳ 2012. Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^{2012} \frac{f(x)}{f(x+1)}dx \ldots 2012$.

Câu 5. *(5 điểm)* Đa thức $P(x)$ xác định với mọi $x \in$ và thỏa mãn điều kiện $2.P(x)+P(1-x)=x^2, \forall x \in$. Tính $\displaystyle\int_0^1 e^x P(x)dx$.

Câu 6. *(5 điểm)* Tìm hàm số $f:\ \setminus\{0;1\} \to$ thỏa mãn:

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x, \forall x \in .$$

ĐÁP ÁN

Câu 1. *(5 điểm)* Cho hàm số f là hàm số khả vi trên $[0;1], f(0)=0, f(1)=1$. Chứng minh rằng tồn tại $a,b \in (0;1)$ sao cho $a \neq b$ và $\dfrac{1}{f'(a)}+\dfrac{2}{f'(b)}=3$

<u>**Giải**</u>: Xét hàm $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}$. Ta có $\varphi(0)=f(0)-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}<0$,

$\varphi(1)=f(1)-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}>0$.

Vì $\varphi(0).\varphi(1)<0$, nên tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho $\varphi(c)=0 \Leftrightarrow f(c)=\dfrac{1}{3}$.

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên $[0,c]$ ta có: $\exists a\in(0,c)$:

$f(c)-f(0)=f'(a).c$

Do đó $\frac{1}{3}=f'(a).c \Leftrightarrow \frac{1}{f'(a)}=3c$.

(1)

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên $[c,1]$ ta có: $\exists b\in(c,1)$:

$f(1)-f(c)=f'(b).(1-c)$

Do đó $\frac{2}{3}=f'(b).(1-c) \Leftrightarrow \frac{2}{f'(b)}=3-3c$.

(2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{f'(a)}+\frac{2}{f'(b)}=3$. Rõ ràng $a\neq b; a,b\in(0;1)$ sao cho

$\frac{1}{f'(a)}+\frac{2}{f'(b)}=3$.

Câu 2. *(5 điểm)* Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(1+u_n^2\right)-2012, \quad n\geq 1 \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy số $\{u_n\}$ hội tụ.

<u>**Giải**</u>: Ta có $f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-2012$ là hàm số khả vi trên   và

$f'(x)=\frac{x}{1+x^2}\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

với mọi $x\in$. Mặt khác, đặt $g(x)=x+2012-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=x-f(x)$ thì g cũng khả vi trên

và $g'(x)=1-\frac{x}{1+x^2}>0$ với mọi $x\in$. Hơn nữa

$g(0).g(-2012)=-1006.\ln(1+2012^2)<0$. Từ đó suy ra tồn tại $L\in(-2012,0)$ sao cho: $g(L)=0\Leftrightarrow f(L)=L$. Áp dụng định lý Lagrange ta có $c\in$ sao cho

$|u_{n+1}-L|=|f(u_n)-f(L)|=|f'(c)|.|u_n-L|\leq\frac{1}{2}|u_n-L|$. Từ đó ta được:

$|u_n-L|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_1-L|, \forall n\in$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}u_n=L$ (đpcm).

Câu 3. *(5 điểm)* Cho f là một hàm số liên tục trên   và thỏa mãn $f(x)=f(\sin x), \forall x\in$.
Chứng minh rằng f là một hàm hằng.

Giải: Với mỗi số thực x đặt $x_1 = \sin x$, $x_2 = \sin x_1$, ... , $x_{n+1} = \sin x_n$. Khi đó, ta chứng minh được rằng (x_n) là dãy đơn điệu và bị chặn. Gọi $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$; từ phương trình $a = \sin a$ ta suy ra $a = 0$. Ta thấy $f(x) = f(x_n), \forall n \in$. Vì vậy $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = f(0)$.

Từ đó, ta kết luận được $f(x) = f(0)$ với mọi $x \in$, tức là f là hàm hằng.

Câu 4. *(5 điểm)* Cho f là một hàm số liên tục, nhận giá trị dương và tuần hoàn với chu kỳ 2012. Chứng minh rằng $\int\limits_0^{2012} \frac{f(x)}{f(x+1)}dx \ldots 2012$.

Giải: $\int\limits_0^{2012} \frac{f(x)}{f(x+1)}dx = \int\limits_0^{1} \frac{f(x)}{f(x+1)}dx + \int\limits_1^{2} \frac{f(x)}{f(x+1)}dx + \cdots + \int\limits_{2011}^{2012} \frac{f(x)}{f(x+1)}dx$

Trong mỗi tích phân $\int\limits_i^{i+1} \frac{f(x)}{f(x+1)}dx, 0 \le i \le 2011$, thực hiện phép đổi biến $t = x - i$, ta có

$\int\limits_i^{i+1} \frac{f(x)}{f(x+1)}dx = \int\limits_0^{1} \frac{f(x+i)}{f(x+i+1)}dx$. Vì vậy

$$\int\limits_0^{2012} \frac{f(x)}{f(x+1)}dx = \int\limits_0^{1} \frac{f(x)}{f(x+1)}dx + \int\limits_0^{1} \frac{f(x+1)}{f(x+2)}dx + \cdots + \int\limits_0^{1} \frac{f(x+2011)}{f(x+2012)}dx$$

$= \int\limits_0^{1} \frac{f(x)}{f(x+1)}dx + \int\limits_0^{1} \frac{f(x+1)}{f(x+2)}dx + \cdots + \int\limits_0^{1} \frac{f(x+2011)}{f(x)}dx$ (vì *f(x)* tuần hoàn với chu kỳ 2012)

Bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta nhận được

$$\int\limits_0^{2012} \frac{f(x)}{f(x+1)}dx \ge 2012\int\limits_0^{1} dx = 2012 \qquad \text{(đpcm).}$$

Câu 5. *(5 điểm)* Đa thức $P(x)$ xác định với mọi $x \in$ và thỏa mãn điều kiện $2.P(x) + P(1-x) = x^2, \forall x \in$. Tính $\int\limits_0^1 e^x P(x)dx$.

Giải: Ta nhận thấy vế trái của biểu thức dưới dấu P là bậc nhất: *x*, *1-x*; vế phải là bậc hai x^2. Vậy $P(x)$ phải có dạng: $P(x) = ax^2 + bx + c$. Khi đó

$2.P(x) + P(1-x) = x^2, \forall x \in$ trở thành

$2.(ax^2 + bx + c) + a(1-x)^2 + b(1-x) + c = x^2, \forall x \in$, do đó $a = \frac{1}{3}; b = \frac{2}{3}; c = -\frac{1}{3}$.

Vậy $P(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Do đó $\int\limits_0^1 e^x P(x)dx = 1$.

Câu 6. *(5 điểm)* Tìm hàm số $f: \ \backslash\{0;1\} \to$ thỏa mãn:

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x,\forall x\in\ . \qquad (1)$$

Giải: Đặt $x_1=\dfrac{x-1}{x}$, ta có (1) $\Leftrightarrow f(x)+f\left(x_1\right)=1+x.$

Đặt $x_2=\dfrac{x_1-1}{x_1}=\dfrac{1}{x-1}$, ta có (1) $\Leftrightarrow f(x_1)+f\left(x_2\right)=1+x_1.$

Đặt $x_3=\dfrac{x_2-1}{x_2}=x$, ta có (1) $\Leftrightarrow f(x_2)+f\left(x\right)=1+x_2.$

Ta có hệ $\begin{cases} f(x)+f\left(x_1\right)=1+x. \\ f(x_1)+f\left(x_2\right)=1+x_1. \\ f(x_2)+f\left(x\right)=1+x_2. \end{cases} \Rightarrow f(x)=\dfrac{1+x-x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$. Thử lại thấy đúng. Vậy hàm số cần tìm có dạng $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH
Trường Đại học Đồng Tháp

Câu 1. (3,0 điểm) Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi công thức $\begin{cases} x_0=1 \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^2}{2012} \end{cases}$.

Chứng minh rằng $x_{2012}<\dfrac{1}{2}$.

Câu 2. (3,0 điểm) Cho f khả vi trên $(0;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}[af(x)+2\sqrt{x}f'(x)]=2$ với $a>0$. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Câu 3. (3,0 điểm) Cho f liên tục trên $[0;1]$ và $\int_0^1 f(x)dx=0$. Chứng minh rằng tồn tại $a,b\in(0;1)$, $a<b$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(a) + f(b).$$

Câu 4. (4,0 điểm) Cho f, g là hai hàm thực, khả vi khác hàm hằng trên $\mathbb{R}$, $f'(0) = 0$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R},$$
$$g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 5. (4,0 điểm) Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số thực và đa thức $Q(x)$ cho bởi hệ thức

$$Q(x) = (x^2+1)P(x)P'(x) + x\{[P(x)]^2 + [P'(x)]^2\}.$$

Chứng minh rằng nếu phương trình $P(x) = 0$ có đúng n nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1 thì phương trình $Q(x) = 0$ có ít nhất $2n - 1$ nghiệm thực phân biệt.

Câu 6. (3,0 điểm) Tìm các hàm f liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$(f(x))^2 = \int_0^x [(f(t))^2 + (f'(t))^2]dt + 2012.$$

ĐÁP ÁN

Câu 1. Ta nhận thấy $0 < x_n < 1$. Ta có

$$d_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}x_n}$$

$$= \frac{x_n^2}{2012x_{n+1}x_n} = \frac{x_n}{2012x_{n+1}} = \frac{1}{2012 - x_n} \in \left(\frac{1}{2012}; \frac{1}{2011}\right)$$

Suy ra

$$\frac{1}{x_{2012}} = d_{2012} + d_{2011} + \ldots + d_1 + \frac{1}{x_0} \in \left(1 + \frac{2012}{2012}; 1 + \frac{2012}{2011}\right)$$

Do đó $x_{2012} < \frac{1}{2}$.

Câu 2. Với $a > 0$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{a\sqrt{x}}f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{a\sqrt{x}} = +\infty$.

Sử dụng qui tắc L'Hopital, ta được

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{a\sqrt{x}}f(x)}{e^{a\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{a\sqrt{x}}\left(f'(x)+\dfrac{a}{2\sqrt{x}}f(x)\right)}{\dfrac{a}{2\sqrt{x}}e^{a\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{1}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x}f'(x) + af(x)\right) = \frac{2}{a}.$$

Câu 3. Đặt $g(x) = e^{-x}\int\limits_{\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}+x} f(t)dt$ với $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Ta có g liên tục trên $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, khả vi trên $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ và $g(0) = g(\frac{1}{2}) = 0$. Áp dụng định lí Rolle, tồn tại $c \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$ sao cho $g'(c) = 0$. Mà

$$g'(x) = e^{-x}\left[f(x+\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}-x) - \int\limits_{\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}+x} f(t)dt\right].$$

Do đó

$$f(c+\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}-c) = \int\limits_{\frac{1}{2}-c}^{\frac{1}{2}+c} f(t)dt.$$

Đặt $a = \frac{1}{2} - c$ và $b = \frac{1}{2} + c$, ta có điều phải chứng minh.

Câu 4. Lấy đạo hàm theo y ta nhận được

$$f'(x+y) = f(x)f'(y) - g(x)g'(y)$$

$$g'(x+y) = f(x)g'(y) + g(x)f'(y)$$

Cho $y = 0$, ta được

$$f'(x) = -g(x)g'(0) \text{ và } g'(x) = f(x)g'(0).$$

Do đó $2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 0$. Suy ra $(f(x))^2 + (g(x))^2 = C$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vì f,g không là hàm hằng nên $C \neq 0$. Từ giả thiết, bằng cách đồng nhất, ta nhận được

$$(f(x+y))^2 + (g(x+y))^2 = [(f(x))^2 + (g(x))^2][(f(y))^2 + (g(y))^2].$$

Suy ra $C = C^2$ hay $C = 1$. Vậy $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 5. Ta có $Q(x) = [P'(x) + xP(x)][xP'(x) + P(x)]$.
Đặt $F(x) = P'(x) + xP(x)$ và $Q(x) = xP'(x) + P(x)$. Ta có

$$F(x) = e^{-x^2/2}[e^{x^2/2}P(x)]',\ P(x) = [xP(x)]' \text{ và } Q(x) = F(x).G(x).$$

Giả sử $P(x) = 0$ có đúng n nghiệm phân biệt a_i thỏa mãn

$$1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Áp dụng định lí Rolle cho hàm $h(x) = e^{x^2/2}P(x)$ ta suy ra $F(x)$ có $n-1$ nghiệm thực phân biệt b_i thỏa mãn

$$1 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < b_{n-1} < a_n.$$

Áp dụng định lí Rolle cho hàm $g(x) = xP(x)$ ta suy ra $F(x)$ có n nghiệm thực phân biệt c_i thỏa mãn

$$0 < c_1 < a_1 < c_2 < a_2 < \ldots < c_n < a_n.$$

Nếu với mọi i ta có $b_i \neq c_{i+1}$ thì các b_i và c_i là $2n-1$ nghiệm thực phân biệt của $Q(x) = 0$
Nếu tồn tại i nào đó để $b_i = c_{i+1} = r$ thì ta có

$$\begin{cases} P'(r) + rP(r) = 0 \\ rP'(r) + P(r) = 0 \end{cases}.$$

Suy ra

$$(r^2 - 1)P(r) = 0$$

Vì $r = b_i > 1$ nên $P(r) = 0$ hay r là nghiệm thực của $P(x) = 0$. Khi đó $a_i < r < a_{i+1}$. Điều này vô lí vì $P(x) = 0$ chỉ có đúng n nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1 là các a_i.
Vậy $Q(x) = 0$ có ít nhất $2n-1$ nghiệm thực phân biệt.

Câu 6. Lấy đạo hàm hai vế của $(f(x))^2 = \int_0^x [(f(t))^2 + (f'(t))^2]dt + 2012$, ta được

$$2f(x)f'(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$$

Suy ra $[f(x) - f'(x)]^2 = 0$ hay $f(x) - f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra

$f(x) = Ce^x$.

Vì $(f(0))^2 = 2012$ nên $C = f(0) = \pm\sqrt{2012}$. Vậy $f(x) = \pm\sqrt{2012}e^x$.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Sài Gòn

Câu 1: Cho dãy số $(x_n): x_n = \underbrace{\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a+\dots+\sqrt[3]{a}}}}_{n}$, với $a = 2011.2012.2013$

Tính $\lim_{n\to\infty}\left((2011^2+2012^2)^n(2012 - x_n)\right)$

Câu 2: Cho $f \in C^1_{\left[0,\pi/\sqrt{2012}\right]}$, f có đạo hàm cấp 2 trên $\left(0,\pi/\sqrt{2012}\right)$ và

$f(0) = -1,\ f\left(\frac{\pi}{\sqrt{2012}}\right) = 1$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in \mathbb{R}$ sao cho $f''(c) + 2012f(c) = 0$

Câu 3: Tìm GTLN của a với $a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\int_0^{n\ln(n+1)} \frac{e^{-(\frac{x}{n}+2012n)}}{1+e^{-\frac{x}{n}}}dx \le ne^{-an}, \forall n = 1,2,\dots.$$

Câu 4: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) \ge f(x)f(y) \ge 2012^{x+y}, \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Câu 5: Cho hai đa thức hệ số thực $P(x), Q(x)$ thỏa mãn

$P(1 + x + e^{2012Q(x)} - 2012Q(x)) = Q(1 + x + e^{2012P(x)} - 2012P(x))$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng nếu phương trình $P(x) = Q(x)$ có nghiệm thực thì $P(x) = Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Đáp án:

Câu 1: Nhận xét:

$x_{n+1} = \sqrt[3]{a + x_n}, x_1 = \sqrt[3]{a}, \forall n$, (x_n) là dãy tăng nghiêm ngặt,

$a = 2011.2012.2013 = 2012^3 - 2012$,

$x_n \geq x_1 = \sqrt[3]{2011.2012.2013} > 2011$ và

$x_n < \sqrt[3]{2012^3 - 2012 + ... + \sqrt[3]{2012^3 - 2012 + \sqrt[3]{2012^3}}} = 2012$ với mọi $n \in \infty$.

Ta tìm được $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2012$.

Ta có: $2012^3 - x_{n+1}^3 = 2012 - x_n$, với mọi $n \in \infty$.

Bằng quy nạp ta thấy rằng:

$$0 \leq 2012 - x_{n+1} = \frac{2012^3 - x_{n+1}^3}{2012^2 + 2012x_{n+1} + x_{n+1}^2}$$

$$= \frac{2012 - x_n}{2012^2 + 2012x_{n+1} + x_{n+1}^2} < \frac{2012 - x_n}{2012^2 + 2012.2011 + 2011^2}$$

$$\ldots \leq \frac{2012 - x_1}{(2012^2 + 2012.2011 + 2011^2)^n}$$

Như vậy:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left((2011^2 + 2012^2)^n (2012 - x_n)\right) = 0$.

Câu 2: Đặt $F(x) = f'(x)\sin(\sqrt{2012}x) - \sqrt{2012}f(x)\cos(\sqrt{2012}x)$ liên tục $\left[0, \frac{\pi}{\sqrt{2012}}\right]$ và khả vi $\left(0, \frac{\pi}{\sqrt{2012}}\right)$

Ta có:

$$F'(x) = \sin(\sqrt{2012}x)(f''(x) + 2012f(x))$$

$$F(0) = -\sqrt{2012}f(0) = \sqrt{2012}$$

$$F\left(\frac{\pi}{\sqrt{2012}}\right) = \sqrt{2012}f\left(\frac{\pi}{\sqrt{2012}}\right) = \sqrt{2012}$$

Theo định lý Lagrange $\exists c \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{2012}}\right) : F'(c) = 0$ hay

$\sin(\sqrt{2012}c)(f''(c) + 2012f(c)) = 0$

Suy ra: $f''(c) + 2012f(c) = 0$ (vì $\sin(\sqrt{2012}c) > 0, c \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{2012}}\right)$).

Câu 3: Đặt $I_n = \int_0^{n\ln(n+1)} \frac{e^{-\left(\frac{x}{n} + 2012n\right)}}{1 + e^{-\frac{x}{n}}} dx$

Ta có: $I_n = -ne^{-2012n} \int_0^{n\ln(n+1)} \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{n}}} d\left(e^{-\frac{x}{n}}\right)$

$$= -ne^{-2012n} \ln\left(1 + e^{-\frac{x}{n}}\right)\Big|_0^{n\ln(n+1)}$$

$$= ne^{-2012n} \ln\left(\frac{2}{1 + \frac{1}{n+1}}\right)$$

$I_n \le ne^{-an}$

Suy ra được: $a \le \underbrace{2012 - \frac{1}{n}\ln\left[\ln\left(\frac{2}{1 + \frac{1}{n+1}}\right)\right]}_{a_n} \ \forall n = 1, 2, \ldots$

Xét hàm số $f(x) = 2012 - \frac{1}{x}\ln\left[\ln\left(\frac{2}{1 + \frac{1}{x+1}}\right)\right] x > 0$. Dễ thấy hàm f giảm, nên

dãy (a_n) giảm . Do đó

$$\max a = \inf(a_n) = \lim_{n \to \infty} a_n = 2012$$

Câu 4: Giả sử tồn tại hàm số f thỏa yêu cầu bài toán.

+ $x = y = 0$, ta được: $f(0) \geq f^2(0) \geq 1$ suy ra $f(0) = 1$

+ $y = 0$, ta được: $f(x) \geq 2012^x, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

+ $x = -y$: $1 = f(0) \geq f(x)f(-x) \geq 1$ suy ra $f(x)f(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có : $f(x) = \dfrac{1}{f(-x)}, \forall x \in \mathbb{R}$

+ Từ (1) thay x bởi $-x$ ta được $f(x) = \dfrac{1}{f(-x)} \leq 2012^x, \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $f(x) = 2012^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa

Vậy hàm số cần tìm là: $f(x) = 2012^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 5:

Giả sử $a \in \mathbb{R}$, $P(a) = Q(a)$.

Đặt $b = 1 + a + e^{2012Q(a)} - 2012Q(a) = 1 + a + e^{2012P(a)} - 2012P(a)$

Theo giả thiết, suy ra: $P(b) = Q(b)$.

Nhận xét: $f(t) = e^{2012t} - 2012t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Vì vậy: $b > a$

Xét dãy số (x_n) với $x_0 = a, x_{n+1} = 1 + x_n + e^{2012x_n} - 2012x_n, n = 0, 1, \ldots, n, \ldots$

Dễ thấy (x_n) là dãy số tăng nghiêm ngặt, suy ra:

$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots, P(x_i) = Q(x_i), \forall i = 0, 1, 2 \ldots, n, \ldots$

Từ đó ta có: $P(x) = Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Hà Tĩnh

Câu 1. Cho f là hàm số bị chặn trên [0; 1] thỏa mãn: f(2011x) = 2012f(x), $\forall x \in [0; \frac{1}{2011}]$.

Chứng minh f liên tục phải tại 0.

Câu 2. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 > 0 \\ 2012u_n - 2011u_{n-1} = \dfrac{2013^{2012}}{u_{n-1}^{2011}} \end{cases}$$

Chứng minh $\{u_n\}$ là dãy hội tụ.

Câu 3. Cho hàm f liên tục trên [0; 1], khả vi trên (0; 1) thỏa mãn f(1) = 0. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{2f(c)}{c}[2012c-1]$.

Câu 4. Cho $f:[0;+\infty] \to$ thỏa mãn:

$$0 \le f(x) \le 2012\int_0^x f(t)dt;\ \forall x \in [0;+\infty].$$

Chứng minh rằng $f \equiv 0$.

Câu 5. Cho P(x) là đa thức hệ số thực có 4 nghiệm thỏa mãn a < b < c < d; Đa thức $Q(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ có 3 nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng phương trình:

$P'''(x) + mP''(x) + nP'(x) + pP(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (a;d)$.

Câu 6. Chọn một trong hai câu sau:

6a. Chứng minh rằng không tồn tại ánh xạ liên tục $f: \quad \to \quad$ sao cho:

$$\forall x \in \quad, (f \circ f)(x) + x^3 = 0.$$

6b. Cho $f: \ ^+ \to \ ^+$ thỏa mãn $f(xf(y)) = yf(x); \forall x \in \ ^+$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < +\infty$.

Chứng minh rằng $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

ĐÁP ÁN

Câu	Đáp Án	Thang Điểm
1		5,0 điểm
	Do f bị chặn trên [0; 1] nên tồn tại số M sao cho $\lvert f(x)\rvert < M, \forall x \in [0;1]$	1,25
	Từ giả thiết f(2011x) = 2012f(x) ta suy ra $f(2011^n x) = 2012^n f(x)$, $\forall x \in [0;\frac{1}{2011^n}]; \forall n \in$	1,25

	Do $\left\|f(x)\right\|=\frac{1}{2012^n}\left\|f(2011^n x)\right\|<\frac{M}{2012^n},\forall x\in[0;\frac{1}{2011^n}],\forall n\in$ •, nên $f(x)\to 0$ khi $x\to 0^+$.	1,25
	Mặt khác thay x = 0 vào f(2011x) = 2012f(x) ta được f(0) = 0 nên ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, hay f liên tục phải tại 0.	1,25
2		5,0 điểm
	Từ giả thiết suy ra $u_n=\frac{1}{2012}(2011u_{n-1}+\frac{2013^{2012}}{u_{n-1}^{2011}})>0,\forall n.$	1,0
	Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2011 số u_n và số $\frac{2013^{2012}}{u_{n-1}^{2011}}$ ta được $u_n\ge 2013,\forall n>1$. Suy ra $\{u_n\}$ là dãy bị chặn dưới.	2,0
	Mặt khác $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{1}{2012}(2011+\frac{2013^{2012}}{u_{n-1}^{2012}})\le 1;\forall n>2$ do đó $\{u_n\}$ giảm. Vậy $\{u_n\}$ là dãy hội tụ.	2,0
3		5,0 điểm
	Xét hàm số $g(x)=x^2f(x)e^{-4024x}$.	2,0
	Khi đó g(x) liên tục trên [0; 1], khả vi trong (0; 1) và g(0) = g(1) = 0, $g'(x)=xe^{-4024x}[2f(x)-4024xf(x)+xf'(x)]$.	1,5
	Sử dụng định lí Rolle ta có điều phải chứng minh.	1,5
4		5,0 điểm
	Xét hàm số $g(x)=e^{-2012x}\int\limits_0^x f(t)dt$.	2,0
	Có g(0) = 0 và	

	$g'(x) = e^{-2012x}[f(x) - 2012\int_0^x f(t)dt] \le 0, \forall x \in [0;+\infty)$. Do đó g(x) là hàm nghịch biến trên $[0;+\infty)$.	1,5
	Suy ra $0 \le g(x) \le g(0) = 0 \Rightarrow g(x) = 0, \forall x \in [0;+\infty)$.	1,5
5		5,0 điểm
	Gọi t, s, r là 3 nghiệm của Q(x), khi đó ta có $Q(x) = x^3 - (t+s+r)x^2 - (ts+sr+rt)x - tsr$. Phương trình: $P'''(x) + mP''(x) + nP'(x) + pP(x) = 0$ $\Leftrightarrow P'''(x) - (t+s+r)P''(x) + (ts+sr+rt)P'(x) - tsr = 0$ $\Leftrightarrow [P'''(x) - tP''(x)] - (s+r)[P''(x) - tP'(x)] + sr[P'(x) - tP(x)] = 0$.	1,0
	Xét $g(x) = e^{-tx}P(x)$. Có $g'(x) = e^{-tx}[P'(x) - tP(x)]$ và g(a) = g(b) = g(c) = g(d) =0. Theo định lí Rolle tồn tại $x_1 \in (a;b), x_2 \in (b;c), x_3 \in (c;d)$ sao cho $g'(x_1) = g'(x_2) = g'(x_3) = 0$ $\Leftrightarrow P'(x_1) - tP(x_1) = P'(x_2) - tP(x_2) = P'(x_3) - tP(x_3) = 0$.	2,0
	Xét hàm $h(x) = e^{-sx}[P'(x) - tP(x)]$. Có $h'(x) = e^{-sx}[P''(x) - tP'(x) - s(P'(x) - tP(x))]$ và $h(x_1) = h(x_2) = h(x_3) = 0$. Theo định lí Rolle tồn tại $y_1 \in (x_1;x_2), y_2 \in (x_2;x_3)$ sao cho $h'(y_1) = h'(y_2) = 0$ $\Leftrightarrow P''(y_1) - tP'(y_1) - s(P'(y_1) - tP(y_1)) = P''(y_2) - tP'(y_2) - s(P'(y_2) - tP(y_2)) = 0$.	1,0
	Xét hàm $\varphi(x) = e^{-rx}[P''(x) - tP'(x) - s(P'(x) - tP(x))]$. Có $\varphi(y_1) = \varphi(y_2) = 0$, và $\varphi'(x) = e^{-rx}[P'''(x) - tP''(x) - s(P''(x) - tP'(x)) - r(P''(x) - tP'(x) - s(P'(x) - tP(x)))]$	1,0

	$=e^{-rx}[P'''(x)-(t+s+r)P''(x)$ $+(ts+sr+rt)P'(x)-tsrP(x)]$. Theo định lí Rolle tồn tại $x_0\in(y_1;y_2)\subset(a;d)$ sao cho $\varphi'(x_0)=0$ $\Leftrightarrow P'''(x_0)-(t+s+r)P''(x_0)+(ts+sr+rt)P'(x_0)-tsrP(x_0)=0$ $\Leftrightarrow P'''(x_0)+mP''(x_0)+nP'(x_0)+pP(x_0)=0.$	
6		**5,0 điểm**
6a	Trước hết ta chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, giả sử f(x) = f(y) $\Rightarrow$ f(f(x))=f(f(y)) $\Rightarrow -x^3=-y^3\Rightarrow x=y\Rightarrow$ f là đơn ánh.	1,0
	Mặt khác do f liên tục nên f đơn điệu ngặt. Thật vậy, giả sử ngược lại, khi đó $\exists x_1,x_2,x_3:x_1<x_2<x_3$ mà $f(x_1)<f(x_2)>f(x_3)$ hoặc $f(x_1)>f(x_2)<f(x_3)$, không mất tính tổng quát ta giả sử $f(x_1)<f(x_2)>f(x_3)$. Đặt $r=\min\{f(x_2)-f(x_1);f(x_2)-f(x_3)\}>0;d\in(0;r)$. Do $f(x_2)-d\in(f(x_1);f(x_2))$ và f liên tục nên $\exists y_1\in(x_1;x_2)$ sao cho $f(y_1)=f(x_2)-d$. Mặt khác $f(x_2)-d\in(f(x_3);f(x_2))$ nên $\exists y_2\in(x_2;x_3)$ sao cho $f(y_2)=f(x_2)-d=f(y_1)$, mâu thuẩn với f là đơn ánh. Vậy f đơn điệu nghiêm ngặt.	2,0
	<u>TH1</u>. Nếu f giảm nghiêm ngặt, giả sử $x<y\Rightarrow f(x)>f(y)\Rightarrow f(f(x))<f(f(x))\Rightarrow f\circ f$ tăng ngặt, mâu thuẩn với $(f\circ f)(x)=-x^3,\forall x\in$.	1,0
	<u>TH2.</u> Nếu f tăng nghiêm ngặt, giả sử $x<y\Rightarrow f(x)<f(y)\Rightarrow f(f(x))<f(f(x))\Rightarrow f\circ f$ tăng ngặt, mâu thuẩn với $(f\circ f)(x)=-x^3,\forall x\in$. Vậy không tồn tại ánh xạ liên tục $f:\ \ \to$ sao cho: $\forall x\in\ ,(f\circ f)(x)+x^3=0.$	1,0
	Thay x = y =1 vào ta có f(f(1)) = f(1); Thay x= 1, y= f(1) vào ta lại có f(f(1)) = $[f(1)]^2$, do đó ta có f(1) = $[f(1)]^2$ suy ra f(1) = 1. Nên x = 1 là điểm bất động của f.	1,0

6b	Thay x = y vào biểu thức đã cho ta được f(xf(x)) = xf(x), do đó xf(x) là điểm bất động của f, $\forall x \in {}^{+}$	1,0
	Giả sử x_0 là điểm bất động của f. TH1: Nếu $x_0 > 1$. Theo chứng minh minh trên ta có $x_0^2 = x_0 f(x_0)$ là điểm bất động của f; $x_0^4 = x_0^2 f(x_0^2)$ là điểm bất động của f. Do đó $x_0^{2^m}, m \in {}^{*}$ là điểm bất động của f $\Rightarrow f(x_0^{2^m}) = x_0^{2^m} \to +\infty$, khi $m \to +\infty$, mâu thuẩn với giả thiết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < +\infty$. Vậy $x_0 \le 1$.	1,0
	TH2: Nếu $0 < x_0 < 1$. Do $1 = f(1) = f(\frac{1}{x_0} x_0) = f(\frac{1}{x_0} f(x_0)) = x_0 f(\frac{1}{x_0}) \Rightarrow f(\frac{1}{x_0}) = \frac{1}{x_0}$, nên $\frac{1}{x_0}$ cũng là điểm bất động của f, mà $\frac{1}{x_0} > 1$ theo TH1 ta lại co mâu thuẩn.	1,0
	Vậy $x_0 = 1$ là điểm bất động duy nhất của f. Suy ra $xf(x) = 1, \forall x \in {}^{+} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in {}^{+}$.	1,0

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH
Trường Đại học Công nghiệp TpHCM

Câu 1. Tìm tất cảc các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại $x = 0$ và thỏa mãn phương trình

$$f(x) + f(\frac{x}{2012}) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 2. Cho hàm số f khả vi tại 1 và $f'(1) = \frac{2}{2013}$. Tính

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[f(\frac{n+1}{n}) + f(\frac{n+2}{n}) + \ldots + f(\frac{n+2012}{n}) - 2012 f(1)\right]$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và $\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$, với mọi hàm g liên tục trên $[0,1]$ thỏa $g(0) = g(1) = 0$. Chứng minh rằng $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$.

Câu 4. Cho hàm f khả vi liên tục đến cấp 2 trên $[0,1]$. Chứng minh tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho

$$\int_0^1 f(x)dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(c).$$

Câu 5. Cho dãy $\{u_n\}_{n=0}^{+\infty}$ xác định bởi $u_0 = 2,\ u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 + 2012}{2u_{n-1} + 2011}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy trên hội tụ và tính giới hạn của nó.

Câu 6. Tính

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ln\int_0^x e^{t^2}dt.$$

Đáp án

Câu	Ý	Nội dung	Thang điểm
1(2đ)	1	Đặt $q = \frac{1}{2012}$, từ giả thiết, ta có $f(0) = 0$ và $$f(x) = -f(qx) + x = -[-f(q^2x) + qx] + x = f(q^2x) - qx + x.$$	0.5đ
	2	Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng $$f(x) = (-1)^n f(q^n x) + (-1)^{n-1}q^{n-1}x + \ldots - qx + x$$	0.5đ
	3	hay $$f(x) = (-1)^n f(q^n x) + x\frac{1-(-1)^n q^n}{1+q}. \qquad (1)$$	0.5đ
	4	Trong (1), cho $n \to \infty$, do $f(x)$ liên tục tại 0 nên $$f(x) = \frac{x}{1+q} = \frac{2012x}{2013}, \forall x \in \mathbb{R}.$$	0.5đ
2(1.5đ)	1	Do $$\lim_{n\to+\infty} n\left[f\left(\frac{n+1}{n}\right) + f\left(\frac{n+2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n+2012}{n}\right) - 2012f(1)\right]$$ $$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f(1+\frac{1}{n}) - f(1)}{\frac{1}{n}} + 2\frac{f(1+\frac{2}{n}) - f(1)}{\frac{2}{n}} + \ldots + 2012\frac{f(1+\frac{2012}{n}) - f(1)}{\frac{2012}{n}}\right]$$	0.5đ
	2	Mặt khác	0.5đ

	.	$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(1+\frac{k}{n})-f(1)}{\frac{k}{n}} = f'(1),\ \forall k=\overline{1,2012}.$$	
	3	Vậy $$\lim_{n\to+\infty} n\left[f(\frac{n+1}{n})+f(\frac{n+2}{n})+\dots+f(\frac{n+2012}{n})-2012f(1)\right]$$ $$=(1+2+\dots+2012)f'(1)=\frac{(2012+1).2012}{2}f'(1)=2012.$$	0.5đ
3(2đ)	1	Xét $g(x)=x(1-x)f(x)$, ta có g liên tục trên $[0,1]$ thỏa $g(0)=g(1)=0$.	0.5đ
	2	Do đó $$\int_0^1 x(1-x)f^2(x)dx = 0.$$	0.5đ
	3	Do hàm $x \mapsto x(1-x)f^2(x)$ liên tục và không âm trên $[0,1]$, ta có $$x(1-x)f^2(x)=0,\ \forall x\in[0,1],$$ hay $$f(x)=0,\ \forall x\in[\tfrac{1}{n},1-\tfrac{1}{n}],\ \forall n=1,2,\dots$$	0.5đ
	4	Do f liên tục bên phải tại $x=0$ và bên trái tại $x=1$ nên $f(0)=f(1)=0$, tức là $f(x)=0,\ \forall x\in[0,1]$.	0.5đ
4(1.5đ)	1	Ta có $$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x-1)'f(x)dx$$ $$=(x-1)f(x)\Big\vert_0^1-\int_0^1 (x-1)f'(x)dx.$$	0.5đ
	2	$$\int_0^1 f(x)dx = f(0)-\frac{(x-1)^2}{2}f'(x)\Big\vert_0^1+\int_0^1\frac{(x-1)^2}{2}f''(x)dx$$ $$=f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\int_0^1\frac{(x-1)^2}{2}f''(x)dx$$	0.5đ
	3	Áp dụng định lý giá trị trung bình của tích phân, tồn tại $c\in(0,1)$ sao cho $$\int_0^1 f(x)dx = f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+f''(c)\int_0^1\frac{(x-1)^2}{2}dx$$ $$=f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\frac{1}{6}f''(c).$$	0.5đ
5(1.5đ)	1	Từ định nghĩa của dãy u_n, bằng quy nạp, ta có $u_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Nếu $\lim_{n\to\infty}u_n=l$ thì $l\in\mathbb{R}_+$ và bằng cách chuyển qua giới hạn, ta thu được $$l=\frac{l^2+2012}{2l+2011}\Rightarrow l^2+2011l-2012=0$$ $$\Rightarrow l=1.$$	0.75đ

	2	Ta có $$\left|u_n - 1\right| = \left|\frac{u_{n-1}^2 + 2012}{2u_{n-1} + 2011} - 1\right| = \left|\frac{(u_{n-1} - 1)^2}{2u_{n-1} + 2011}\right|$$ $$= \frac{\left|u_{n-1} - 1\right|}{2u_{n-1} + 2011}.\left|u_{n-1} - 1\right| \le \frac{1}{2}\left|u_{n-1} - 1\right|, \forall n \in \mathbb{N}.$$	0.75
	3	Do đó $$\left|u_n - 1\right| \le \frac{1}{2^n}\left|u_0 - 1\right| = \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$ Vậy dãy đã cho hội tụ và có giới hạn bằng 1.	
6(1.5đ)	1	Ta có $$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \int_0^x e^{t^2} dt}{1 + x^2}.$$ Giới hạn trên có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$, áp dụng quy tắc L'Hospital, ta có $$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\ln \int_0^x e^{t^2} dt\right)'}{(1 + x^2)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{2x\int_0^x e^{t^2} dt}$$	0.7
	2	$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2xe^{x^2}}{2\int_0^x e^{t^2} dt + 2xe^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2(1 + 2x^2)e^{x^2}}{2e^{x^2} + 2(1 + 2x^2)e^{x^2}}$$ $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + 2x^2}{2 + 2x^2} = 1.$$	0.7

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Thủy Lợi

Câu 1. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n^2 - x_n + 1}, \quad \forall n \ge 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ và tìm giới hạn đó.

Câu 2. Cho hàm $f:(0;1)\to\mathbf{R}$ thỏa mãn: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$, hơn nữa tồn tại $0<\gamma<1$ sao cho

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(\gamma x)}{x}=0.$$

Chứng minh rằng: $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$.

Câu 3. Cho hàm f liên tục trong $[0;\pi]$, khả vi trong $(0;\pi)$ và thỏa mãn:

$$\begin{cases} f(0)=f(\pi) \\ f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2\neq 0, \qquad \forall x\in(0;\pi). \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho:

$$\tan\alpha=\frac{f(2\alpha)+2f'(2\alpha)}{f(2\alpha)-2f'(2\alpha)}.$$

Câu 4. Cho f là hàm liên tục trên $\mathbf{R}$ và thỏa mãn:

$$e^{-x}f(x)+f(-x)=\frac{\cos x}{1+e^x}, \qquad \forall x\in\mathbf{R}.$$

Hãy tính tích phân:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)f(x)dx.$$

Câu 5. Tìm các hàm f và g khả vi trên $(0,+\infty)$ sao cho:

$$\begin{cases} f'(x)=-\dfrac{g(x)}{x} \\ g'(x)=-\dfrac{f(x)}{x} \end{cases} \text{ với mọi } x\in(0;+\infty\forall).$$

Câu 6. Chọn một trong hai câu sau:

6a. Cho f và g là hai hàm khả vi trên $\mathbf{R}$ sao cho

$$\begin{cases} f(0)=g(2012)=4 \\ \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=e^{f(x)-g(x)}, \qquad \forall x\in\mathbf{R}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $f(2012)>4-\ln 2$.

6b. Cho đa thức $\mathrm{P}(x)=x^{2012}+a_{2011}x^{2011}+\cdots+a_1+a_0$ thỏa mãn: $\begin{cases} P(x)>0 \\ P'(x)>0 \end{cases}$ với mọi $x\in\mathbf{R}$.

Chứng minh rằng đa thức

$$Q(x)=P(x)+P'(x)+P''(x)+\cdots+P^{(2012)}(x)$$

cũng nhận giá trị dương với mọi $x\in\mathbf{R}$.

ĐÁP ÁN CÂU 1

Câu 1. Xét dãy số $\{y_n\}$ với $y_n = \frac{1}{x_n}$.

Khi đó $\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_{n+1} = y_n^2 - y_n + 1 = y_n(y_n - 1) + 1, \ \forall n \geq 1 \end{cases}$

Dễ thấy $\{y_n\}$ là dãy tăng.

Hơn nữa, giả sử $\lim_{n\to\infty} y_n = k < +\infty \to 2 \leq k < +\infty$. Khi đó ta có

$$k = k^2 - k + 1 \to k = 1 \text{ (vô lý)}$$

Do đó $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Ta lại có:

$$\frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_n - 1} - \frac{1}{y_{n+1} - 1}$$

Cho nên:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{y_1 - 1} - \frac{1}{y_{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{y_{n+1} - 1}$$

Vậy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Câu 2. Cố định $\varepsilon > 0$. Từ giả thiết sẽ tồn tại $\delta \in (0; 1)$ sao cho với mọi $x \in (0; \delta)$ ta có:

$|f(x) - f(\gamma x)| \leq \varepsilon x$.

Do đó với $x \in (0; \delta)$ và với mọi số nguyên dương n ta có

$$|f(x) - f(\gamma^n x)| \leq |f(x) - f(\gamma x)| + |f(\gamma x) - f(\gamma^2 x)| + \cdots + |f(\gamma^{n-1} x) - f(\gamma^n x)|$$
$$\leq \varepsilon(x + \gamma x + \gamma^2 x + \cdots + \gamma^{n-1} x) \leq \frac{\varepsilon x}{1 - \gamma}.$$

Suy ra: với $x \in (0; \delta)$ và với mọi số nguyên dương n ta có

$|f(x) - f(\gamma^n x)| \leq \frac{\varepsilon x}{1 - \gamma}$.

Cho qua giới hạn khi $n \to \infty$, ta nhận được, với mọi $x \in (0; \delta)$

$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon x}{1 - \gamma}$.

Vì $\varepsilon > 0$ tùy ý nên ta có $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Câu 3. Xét $(x) = f(x)\left[\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right]$, khi đó:

+ $g(x)$: liên tục trên $[0; \pi]$, khả vi trên $(0; \pi)$

+ $g(0) = g(\pi)$.

Áp dụng Định lý Rolle: sẽ tồn tại $c \in (0;\pi)$: $g'(c) = 0$.

Mà $g'(x) = \cos\frac{x}{2}\left[\frac{1}{2}f(x) + f'(x)\right] - \sin\frac{x}{2}\left[\frac{1}{2}f(x) - f'(x)\right]$

Do đó ta có: $\cos\frac{c}{2}[f(c) + 2f'(c)] = \sin\frac{c}{2}[f(c) - 2f'(c)]$

+ Nếu $f(c) - 2f'(c) = 0 \rightarrow f(c) + 2f'(c)$ và do đó $f(c) = f'(c) = 0$ (mâu thuẫn với giả thiết).

+ Do đó: $f(c) - 2f'(c) \neq 0$ và ta có:

$$\tan\frac{c}{2} = \frac{f(c) + 2f'(c)}{f(c) - 2f'(c)}$$

Đặt $\alpha = c/2$, ta nhận được ĐPCM.

Câu 4. Ta có :$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+e^x}{e^x} f(x)dx$.

Đặt $x = -t$ ta có

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} f(-x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+e^x)f(-x)dx$$

Từ đó

$$2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+e^x}{e^x} f(x)dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+e^x)f(-x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+e^x)[e^{-x}f(x) + f(-x)]dx$$

.

Theo giả thiết: $(1+e^x)[e^{-x}f(x) + f(-x)] = \cos x$.

Do đó : $2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2$, từ đó $I = 1$.

Câu 5. Từ giả thiết ta có:

$$[x(f(x) + g(x))]' = xf'(x) + xg'(x) + f(x) + g(x) = 0, \ \forall x > 0,$$

Do đó tồn tại số thực A sao cho $f(x) + g(x) = \frac{2A}{x}$, $\forall x > 0$ (1)

Tương tự ta lại có:

$$\left[\frac{f(x) - g(x)}{x}\right]' = \frac{xf'(x) - xg'(x) - f(x) + g(x)}{x^2} = 0, \quad \forall x > 0,$$

Suy ra tồn tại số thực B sao cho: $f(x) - g(x) = 2Bx$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{A}{x} + Bx \\ g(x) = \dfrac{A}{x} - Bx \end{cases}$$

Câu 6.

6a. Từ giả thiết ta có: $\left(e^{-f(x)}\right)' = \left(e^{-g(x)}\right)'$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Do đó hàm $h(x) = e^{-f(x)} - e^{-g(x)} = constant$. Suy ra $h(0) = h(2012)$, cùng với giả thiết ta có:

$e^{-4} - e^{-g(0)} = e^{-f(2012)} - e^{-4} \rightarrow e^{-f(2012)} = 2e^{-4} - e^{-g(0)} < 2e^{-4}$

Và do đó: $e^{-f(2012)} < 2e^{-4} = e^{-4+\ln 2}$, hay là $f(2012) > 4 - \ln 2$.

6b. Ta có $Q(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và $\lim_{x\to\pm\infty} Q(x) = +\infty$. Do đó nếu $Q(x)$ có điểm tới hạn thì $Q(x)$ sẽ đạt GTNN tại một trong các điểm tới hạn đó.

Ta có:

$Q'(x) = P'(x) + P''(x) + \cdots + P^{(2012)}(x) = Q(x) - P(x)$

là đa thức bậc lẻ nên phương trình $Q'(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm, tức là $Q(x)$ có điểm tới hạn. Gọi x_0 là điểm tới hạn bất kỳ của $Q(x)$ thì ta có: $Q'(x_0) = 0 = Q(x_0) - P(x_0)$.

Suy ra: $Q(x_0) = P(x_0) > 0$ (vì giả thiết $P(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.)

Từ đó $Q(x_0) > 0$ và như vậy $Q(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Đồng Nai

Câu 1. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$ với mọi $n \geq 1$.

(i) Xác định công thức tổng quát của dãy số (u_n).

(ii) Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_1u_2...u_n)$.

Câu 2. Cho 3 số thực a, b, c thỏa $2a - 3b + 2012c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thực trên $[-1, 0]$.

Câu 3a. Cho hàm số f liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$ và thỏa $f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $cf'(c) + 2012f(c) = 0$.

Câu 3b. Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp 2 trên $[-1,1]$ và thỏa $f(-1) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (-1,1)$ sao cho $3f'(c) + cf''(c) = 0$.

Câu 4. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n}\right)$.

Câu 5. Tính $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)dx$.

Câu 6. Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên và thỏa $f(x) = f(\sin x)$ với mọi $x \in$.

Hết

Đáp án môn Giải tích

Câu 1. Đặt $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Ta có $u_1 = \cos\alpha, u_2 = \sqrt{\frac{1+u_1}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}$.

Sử dụng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được $u_n = \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}$ với mọi $n \geq 1$.

Ta có: $u_1u_2...u_n = u_nu_{n-1}...u_1 = \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}}...\cos\alpha$. Nhân vào 2 vế của đẳng thức với $2^n\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}$, ta có: $2^n\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}u_1u_2...u_n = 2^{n-1}.2\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}}...\cos\alpha = \sin 2\alpha$.

Điều này dẫn đến $u_1u_2...u_n = \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}}...\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}$. Vậy

$$\lim_{n\to+\infty}(u_1u_2...u_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin 2\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{\frac{\alpha}{2^{n-1}}}} = \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Câu 2. Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ta có $f(-1) = a - b + c, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c, f(0) = c$.

$0 = 2a - 3b + 2012c = f(-1) + 4f\left(-\frac{1}{2}\right) + 2007f(0)$. Suy ra 3 số $f\left(-\frac{1}{2}\right), f(0), f(1)$ không thể cùng dương hết hoặc cùng âm hết. Vậy tồn tại $\alpha, \beta \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}, \alpha < \beta$ sao cho $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$. Do đó phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thực trên $[\alpha, \beta] \subset [-1, 0]$.

Câu 3a. Đặt $g(x) = x^{2012}f(x)$. $g'(x) = x^{2011}(2012f(x) + xf'(x))$ Ta có $g(0) = g(1) = 0$. Vậy theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $g'(c) = c^{2011}(2012f(c) + cf'(c)) = 0$. Vì $c > 0$ nên $2012f(c) + cf'(c) = 0$

Câu 3b. Đặt $g(x) = x^2f(x)$. $g'(x) = x(2f(x) + xf'(x))$. Ta có $g(-1) = g(0) = g(1) = 0$. Vậy theo định lý Rolle, tồn tại $a \in (-1,0)$ và $b \in (0,1)$ sao cho $g'(a) = g'(b) = 0$ hay $2f(a) + af'(a) = 2f(b) + bf'(b)$.

Đặt $u(x) = 2f(x) + xf'(x)$. $u'(x) = 3f'(x) + xf''(x)$. Ta có $u(a) = u(b)$. Vậy theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (a,b) \subset (-1,1)$ sao cho $u'(c) = 0$ hay $3f'(c) + cf''(c) = 0$.

Câu 4.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+...+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$$

__Câu 5.__ Đổi biến $y=x+1$. Ta có $I=\int_{-1}^{1}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)dy$. Đặt $f(y)=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$. Ta có $f(-y)=\ln\left(-y+\sqrt{1+y^2}\right)=\ln\left(\frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\right)=-\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=-f(y)$.

$I=\int_{-1}^{1}f(y)dy=\int_{-1}^{0}f(y)dy+\int_{0}^{1}f(y)dy=A+B$.

Đổi biến $y=-z$. Ta có $B=\int_{0}^{1}f(y)dy=\int_{0}^{-1}f(-z)(-dz)=-\int_{-1}^{0}f(z)dz=-A$.

Vậy $I=A+B=0$.

__Câu 6.__ Xét bất kỳ $x_0\in$ .Ta xây dựng dãy số (u_n) như sau: $u_1=x_0$ và $u_{n+1}=\sin u_n$ với mọi $n\ge 1$. Ta chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Trước hết, (u_n) là dãy bị chặn vì $u_n=\sin u_{n-1}\in[-1,1]$ với mọi $n\ge 2$.

Đặt $g(x)=\sin x-x$. Vì $g'(x)=\cos x-1\le 0,\forall x\in$ nên hàm số g giảm trên . Do đó $g(x)\ge g(0),\forall x\le 0$ và $g(x)\le g(0),\forall x\ge 0$ hay $\sin x\ge x,\forall x\le 0$ và $\sin x\le x,\forall x\ge 0$.

Nếu $u_2=\sin x_0\in[0,1]$ thì $u_3=\sin u_2\le u_2$ và $u_3\in[0,1]$. Sử dụng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $(u_n)_{n\ge 2}$ là dãy giảm. Tương tự, nếu $u_2\in[-1,0]$ thì $(u_n)_{n\ge 2}$ là dãy tăng.

Vậy (u_n) là dãy đơn điệu và bị chặn nên hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$. Vì $u_{n+1}=\sin u_n$ với mọi $n\ge 1$ nên $\alpha=\sin\alpha$ hay $\alpha=0$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Vì $f(x)=f(\sin x)$ với mọi $x\in$ nên $f(x_0)=f(u_n),\forall n$.Do f liên tục trên nên $f(x_0)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=f(\lim\limits_{n\to+\infty}u_n)=f(0)$. Vậy f là hàm hằng.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Cao đẳng SP Vĩnh Phúc

Câu 1: (5 điểm).

a) Chứng minh rằng hàm số: $f(x)=\begin{cases}x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| & ,x\ne 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$, không khả vi tại các điểm $x_n=\frac{2}{2n+1}$, $n\in\mathbf{Z}$. Nhưng khả vi tại 0 là điểm giới hạn của dãy $\{x_n\}$.

b) Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và khả vi trên khoảng $(a;b)$. Chứng minh rằng nếu $f^2(b)-f^2(a)=b^2-a^2$, thì phương trình $f'(x).f(x)=x$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Câu 2: (5 điểm). Xác định $x\in R$ nào đó sao cho đẳng thức sau

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2011}}{n^x-(n-1)^x}=\frac{1}{2012}$$ được thực hiện.

Câu 3: (5 điểm).

Tìm $f:R\to R$ thỏa mãn: $\begin{cases} f(-x)=f(x),\forall x\in R & (a)\\ f(x+1)=f(x)+1,\forall x\in R & (b)\\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{f(x)}{x^2},\forall x\neq 0 & (c)\end{cases}$

Câu 4: (5điểm). $\forall x\in R_+^*$, ta kí hiệu

$$I(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{\cos^2 t+x^2\sin^2 t}} \quad \text{và} \quad J(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}}dt$$

Chứng minh rằng: $I(x)-J(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos t}{\sin t}dt=\ln 2$.

Câu 5: (5 điểm). Cho f là hàm liên tục trên ¡ và thỏa mãn $f(x)+f(2x)=0$, "x Î ¡ . Chứng minh f là hàm hằng.

Câu 6: (5 điểm). Cho dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn

$$\ln(1+x_n^2)+nx_n=1, \text{ "} n \text{ Î ¥}^*$$

Tìm $\lim\limits_{n\text{®}+\text{¥}}\dfrac{n(1-nx_n)}{x_n}$

ĐÁP ÁN

Câu	Ý	Hướng dẫn giải	Điểm
1.	a)	$\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{2n+1}=0$	1,0

		Ta có: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2\left\|\cos\dfrac{\pi}{x}\right\|}{x}=f'(0)\big\|_{x=0}\Rightarrow f'(0)=0$ $\Rightarrow f(x)$ khả vi tại $x=0$	
		Mọi $x\neq\dfrac{2}{2n+1},n\in Z\Rightarrow f'(x)$ là tồn tại nên khả vi	0,5
		$x=\dfrac{2}{2n+1},n=0,2,4,...$ Với $\Rightarrow f_+'(x_n)=\lim\limits_{x\to x_n^+}\dfrac{x^2\cos\dfrac{\pi}{x}}{x-x_n}=\left(x^2\cos\dfrac{\pi}{x}\right)'\Big\|_{x=x_n}=\pi$ $f_-'(x_n)=\lim\limits_{x\to x_n^-}\dfrac{x^2\cos\dfrac{\pi}{x}}{x-x_n}=\left(-x^2\cos\dfrac{\pi}{x}\right)'\Big\|_{x=x_n}=-\pi$	0,5
		Tương tự với $x_n=\dfrac{2}{2n+1},n=1,3,5,...$ $\Rightarrow f_+'(x_n)=\pi;\quad f_-'(x_n)=-\pi$	0,5
		Vì $f(x)$ là hàm chẵn nên $f(x)$ không khả vi tại x_n.	0,5
	b)	Đặt $h(x)=f^2(x)-x^2,x\in[a;b]$ $\Rightarrow h(a)=f^2(a)-a^2$ $h(b)=f^2(b)-b^2$ Từ gt ta có $h(a)=h(b)$	1,0
		$h'(x)=2f(x).f'(x)-2x$. Theo định lý Rolle $\exists x_0\in(a;b):h'(x_0)=0$ $\Leftrightarrow f'(x_0).f(x_0)=x_0$ Chứng tỏ phương trình $f'(x).f(x)=x$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$.	1,0
2.		Có nghĩa với $x\neq 0$. Ta có	1,0

3.		$0 < n^x - (n-1)^x = (n-1)^x\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x - 1\right) <$ $< (n-1)^x\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right) - 1\right) = \frac{1}{(n-1)^{1-x}} \to 0, 0 < x < 1$	
		Với $x < 0$ thì mẫu số dần đến 0 Với $x = 1$ thì mẫu số dần đến 1 $\Rightarrow$ Dãy phân kì đến $+\infty$ hoặc $-\infty$ với $x \le 1, x \ne 0$.	1,0
		Với $x > 1$ đặt $k = [x] \Rightarrow k \ge 1$ và $1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \le 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^x < 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1}$, khi đó tồn tại 2 số α, β sao cho $\alpha < n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^x < \beta$ Do đó $\alpha n^{x-1} < n^x\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^x < \beta n^{x-1}$	1,0
		Ta được nếu $x-1 < 2011$ thì dãy số dần tới $+\infty$ nếu $x-1 > 2011$ thì dãy số dần đến 0	1,0
		Xét $x = 2012$ ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2011}}{n^{2012} - (n-1)^{2012}} = \frac{1}{2012}$ Vậy $x = 2012$ thỏa mãn bài toán	1,0
3.		Tính $f\left(\frac{x+1}{x}\right)$ theo $f(x)$ ta có: $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = f\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{f(x)}{x^2}, \forall x \ne 0.$ (1)	1,0

		$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}=\frac{f\left(1-\frac{1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\left(1+f\left(-\frac{1}{x+1}\right)\right)$ $=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\left(1+\left(-f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)\right)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\left(1-\frac{f(x+1)}{(x+1)^2}\right)$ $=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1+f(x)}{(x+1)^2}\right)\forall x\neq 0, x\neq 1\quad (2)$	1,0
		Lấy $(1)+(2)$ được $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x+1}{x}\Rightarrow f(x)=x$	1,0
		Từ $(a); x=0\Rightarrow f(0)=0$ thỏa mãn $f(x)=x$ $x=1\Rightarrow f(-1)=-f(1)$ Từ $(b); x=0\Rightarrow f(1)=1\Rightarrow f(-1)=-1$ thỏa mãn $f(x)=x$	1,0
		Vậy $f(x)=x, \forall x\in R$. Thử lại thấy đúng.	1,0
4.		$I(x)-J(x)-\ln 2=\int_0^{\pi/2}(1-\cos t)\left(\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}}-\frac{1}{\sin t}\right)dt$ Chọn $\varepsilon\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ cố định.	0,5
		$\left\lvert\int_0^{\varepsilon}(1-\cos t)\left(\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}}-\frac{1}{\sin t}\right)dt\right\rvert\leq$ $\leq 2\int_0^{\varepsilon}\frac{(1-\cos t)}{\sin t}dt=2\int_0^{\varepsilon}\tan\frac{t}{2}dt=\left(-4\ln\cos\frac{t}{2}\right)\Big\|_0^{\varepsilon}$ $=-4\ln\cos\frac{\varepsilon}{2}\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{}0.$	2,0

		$\left\lvert\int_{\varepsilon}^{\pi/2}(1-\cos t)\left(\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}}-\frac{1}{\sin t}\right)dt\right\rvert \le$ $\le\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\left(\frac{(1-\cos t)x^2\cos^2 t}{\sin t\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}\left(\sin t+\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}\right)}\right)dt$ $\le\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\frac{(1-\cos t)x^2}{\sin t.\sin^2\varepsilon}dt=\frac{x^2}{\sin^2\varepsilon}\cos\varepsilon\xrightarrow[x\to 0]{}0.$ (Do ε cố định)	2,0
		Kết luận $I(x)-J(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}\ln 2$	0,5
5.		Từ giả thiết suy ra $f(x)=-f(2x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Bằng quy nạp ta chứng minh được $f(x)=(-1)^n f(\frac{x}{2^n}),\ \forall n\in\mathbb{N}$	1,0
		Do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n f(\frac{x}{2^n}),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết ta cũng có: $2f(0)=0\to f(0)=0$	1,0
		Mặt khác có $\left\lvert(-1)^n f(\frac{x}{2^n})\right\rvert=\left\lvert f(\frac{x}{2^n})\right\rvert$. Do f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}\left\lvert f(\frac{x}{2^n})\right\rvert=\left\lvert\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{x}{2^n})\right\rvert=\left\lvert f(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{2^n})\right\rvert=\lvert f(0)\rvert=0$	2,0
		Do đó $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n f(\frac{x}{2^n})=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Hay f là hàm hằng.	1,0
6.		Với $\forall n\in\mathbb{N}^*: f_n(x)=\ln(1+x^2)+nx-1$	1,0
		$\Rightarrow f_n'(x)=\frac{2x}{1+x^2}+n=\frac{(x+1)^2}{1+x^2}+n-1\ge 0$	1,0
		$f_n'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}n=1\\x=-1\end{cases}\Rightarrow f_n(x)$ tăng	1,0

		Có $f_n(0) = -1 < 0; f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) > 0$ $\Rightarrow \exists x_n \in \left(0; \frac{1}{n}\right): f_n(x_n) = 0.$	1,0
		$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n(1 - nx_n)}{x_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n\ln(1 + x_n^2)}{x_n}$ $= \lim\limits_{n \to +\infty} \left[nx_n \ln(1 + x_n^2)^{\frac{1}{x_n^2}} \right] = 1$	1,0

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Dầu khí

Câu 1(5 điểm): Tính giới hạn

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x + \left[\frac{x}{\sin x} \right] \right)^{\frac{1}{x}},$$

trong đó $[x]$ kí hiệu phần nguyên của x.

Câu 2(5 điểm): Cho hàm f là hàm số liên tục trên $[a, +\infty)$ khả vi trên $(a, +\infty)$ sao cho $f(a) < 0$ và $f'(x) > k > 0$ với mọi $x > a$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in \left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ sao cho $f(c) = 0$.

Câu 3(5 điểm): Cho hàm f khả vi trên $[0,1]$ thỏa mãn $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng với mỗi $K_1, K_2 > 0$ tồn tại $x_1, x_2 \in (0,1), x_1 \neq x_2$ sao cho:

$$\frac{K_1}{f'(x_1)} + \frac{K_2}{f'(x_2)} = K_1 + K_2.$$

Câu 4(5 điểm): Cho hàm f khả vi trên $[-1,1]$ sao cho

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (-1,1)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Câu 5(5 điểm): Cho $P(x)$ là một đa thức bậc n với hệ số thực sao cho $P(x)$ có n nghiệm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Phú Yên

Câu I:

Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$ với $n = 1, 2, \dots$

Chứng minh dãy $\{u_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Câu II:

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $[0,1]$, $a \in (0,1)$. Và g là hàm số xác định bởi $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ nếu $x \in [0,1] \setminus \{a\}$, biết $g(a) = f'(a)$.

Chứng minh g khả vi tại a và tính $g'(a)$.

Câu III:

Chứng minh bất đẳng thức: $\ln(x^2 + x) > \dfrac{x - 1 + arctgx}{1 + x}$, $x > 1$

Câu IV:

Tính tích phân: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} dx$ với $n = 0, 1, 2, \dots..$

Câu V:

Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[0, 2012]$. Chứng minh tồn tại :

$c \in (0, 2012) \setminus \{1006\}$ sao cho $\displaystyle\int_0^{2012} |f(x)| dx \geq 2012\left(|f(1006)| - 1006|f'(c)|\right)$

Câu VI: Câu 5

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0, 2012]$ và thỏa

$f(x) + f(2012 - x) = 0$, $\forall x \in [0, 2012]$.

Chứng minh phương trình $f(x) - \displaystyle\int_0^{2012-x} f(u) du = \frac{xf(x)}{2012}$ có nghiệm trong khoảng $(0, 2012)$

ĐÁP ÁN

Câu I :

Vì $x\in[0,1]$ nên $x^n \ge x^{n+1} \Rightarrow \frac{1}{1+x^{n+1}} \ge \frac{1}{1+x^n} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}}dx \ge \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$, tức

$u_{n+1} \ge u_n$ (dãy không giảm).

Mà $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} \le \int_0^1 dx = 1$ (dãy bị chặn trên),

Suy ra dãy $\{u_n\}$ hội tụ.

Ta có $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$

Suy ra $\lim u_n = 1 - \lim \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$,

Nhưng $0 \le \lim \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx \le \lim \int_0^1 x^n dx = \lim \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = 0$

Từ đó ta có $\lim u_n = 1$

Câu II :

Khai triển Taylor hàm số $f(x)$ tại a ta được $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\theta)}{2}(x-a)^2$,

với θ ở giữa a và x.

Suy ra $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \frac{f''(\theta)}{2}(x-a)$

Vì $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ và $g(a) = f'(a)$

Nên $g(x) = g(a) + \frac{f''(\theta)}{2}(x-a)$

Từ đó $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{f''(\theta)}{2}$

Suy ra $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f''(\theta)}{2} = \frac{f''(a)}{2}$, (bởi vì $f''(x)$ liên tục và θ ở giữa a và x)

Do đó $g'(a) = \frac{f''(a)}{2}$

Câu III:

$\ln(x^2+x) > \dfrac{x-1+arctgx}{1+x} \Leftrightarrow \ln x + \ln(x+1) > \dfrac{x-1+arctgx}{1+x}$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\ln x > \dfrac{x-1}{1+x}$ với $x>1$

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm số $f(x)=\ln x$ trên $[1,x]$:

ta có $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(c)$ với $1<c<x$ hay $\dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{1}{c}$ mà $\dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x+1}$

Do đó suy ra $\ln x > \dfrac{x-1}{1+x}$ với $x>1$ (1)

Tiếp theo ta chứng minh bất đẳng thức $\ln(x+1) > \dfrac{arctgx}{1+x}$ với $x>0$

Áp dụng định lý Cauchy cho hàm số $F(x)=\ln(x+1)$ và $G(x)=arctgx$ trên $[0,x]$:

Ta có $\dfrac{F(x)-F(0)}{G(x)-G(0)} = \dfrac{F'(c)}{G'(c)}$ với $0<c<x$ hay $\dfrac{\ln(x+1)}{arctgx} = \dfrac{\frac{1}{c+1}}{\frac{1}{c^2+1}} = \dfrac{c^2+1}{c+1}$ mà

$\dfrac{c^2+1}{c+1} > \dfrac{1}{c+1} > \dfrac{1}{x+1}$

Do đó suy ra $\ln(x+1) > \dfrac{arctgx}{x+1}$ với $x>0$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được: $\ln(x^2+x) > \dfrac{x-1+arctgx}{1+x}$, $x>1$

<u>Câu IV :</u>

Tính $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx$

Khi $n=0$ ta có $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\pi} dx = \pi$

Khi $n=1$ ta có

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(1+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x.\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos x}{\sin\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x.\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx + \int_0^{\pi} \cos x dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x.\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$

Mà $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x.\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(1+\frac{1}{2})x + \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(1+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}I_1 + \frac{\pi}{2}$

Vậy $I_1 = \dfrac{1}{2}I_1 + \dfrac{\pi}{2}$ suy ra $I_1 = \pi$.

Bây giờ ta giả thiết $I_n = \pi$.

Khi đó

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1)x.\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos(n+1)x}{\sin\frac{x}{2}}dx =$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1)x.\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx + \int_0^{\pi}\cos(n+1)x.dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1)x.\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1+\frac{1}{2})x + \sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}I_{n+1} + \frac{1}{2}I_n$$

tức là $I_{n+1} = \frac{1}{2}I_{n+1} + \frac{1}{2}I_n \Rightarrow I_{n+1} = I_n = \pi$

Chứng tỏ $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx = \pi$ với $\forall n = 0,1,2,.....$

Câu V :

Với $x \in [0,2012] \setminus \{1006\}$, theo định lý Lagrange tồn tại c ở giữa x và 1006 sao cho $f(x) - f(1006) = f'(c)(x-1006)$ hay $f(1006) = f(x) + f'(c)(1006-x)$,

Suy ra $|f(1006)| \le |f(x)| + |f'(c)(1006-x)| \le |f(x)| + 1006|f'(c)|$

suy ra $\int_0^{2012} |f(1006)|dx \le \int_0^{2012} |f(x)|dx + \int_0^{2012} 1006|f'(c)|dx$

hay $2012.|f(1006)| \le \int_0^{2012} |f(x)|dx + 2012.1006.|f'(c)|$

Vậy $\int_0^{2012} |f(x)|dx \ge 2012(|f(1006)| - 1006|f'(c)|)$

Câu VI :

Vì $f(x) + f(2012-x) = 0$, $\forall x \in [0,2012]$, suy ra $f(t) = -f(2012-t)$, $\forall t \in [0,2012]$.

Đặt $t = 2012 - x$ ta có $\int_0^{2012} f(x)dx = \int_{2012}^0 -f(2012-t)dt = \int_{2012}^0 f(t)dt = \int_{2012}^0 f(x)dx$

Do đó $\int_0^{2012} f(x)dx = 0$.

Đặt $\varphi(x) = (2012-x)^{2012} \int_0^{2012-x} f(u)du$ (hàm này khả vi trên $[0,2012]$) và có $\varphi(0) = 0 = \varphi(2012)$.

Theo định lý Roole tồn tại $t \in (0,2012)$ để $\varphi'(t) = 0$.

Do đó $\varphi'(t) = -2012(2012-t)^{2011} \int_0^{2012-t} f(u)du - (2012-t)^{2012} f(2012-t) = 0$,

Suy ra $-2012 \int_0^{2012-t} f(u)du + (2012-t)f(t) = 0$

Từ đó ta có $f(t) - \int_0^{2012-t} f(u)du = \frac{tf(t)}{2012}$,

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Hải phòng

Câu 1: Cho c là một số thực, $f: \quad \to \quad$ khả vi đến cấp ba và thỏa mãn :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c, \ \lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0$$

Chứng minh: $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$

Câu 2: Với mỗi $n \in \quad$, cho $u_n = \dfrac{4n}{n^4+4}$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Tìm $\lim S_n$

Câu 3: Tính thời gian để một khối nước đá hình lập phương tan hết.

Người ra đề: **TS Mai Thế Duy - Khoa Toán Tin Trường ĐH Hải Phòng**

Đáp án:

Câu 1: Áp dụng khai triển Taylor, tồn tại $\xi_x, \eta_x \in (0,1)$ sao cho:

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) + \frac{1}{6} f'''(x+\xi_x)$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) - \frac{1}{6} f'''(x-\eta_x)$$

Từ khai triển trên ta được:

$$f''(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) - \frac{1}{6} f'''(x+\xi_x) + \frac{1}{6} f'''(x-\eta_x)$$

$$2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{6} f'''(x+\xi_x) - \frac{1}{6} f'''(x-\eta_x)$$

Từ $x+\xi_x, x-\eta_x \to \infty, n \to \infty$ lấy giới hạn hai vế của hai đẳng thức trên ta được:

$$\lim_{x\to\infty} f''(x) = c - 2c + c - \frac{1}{6}.0 + \frac{1}{6}.0 = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \frac{1}{2}(c - c - \frac{1}{6}.0 - \frac{1}{6}.0) = 0$$

Câu 2: Ta có:

$$u_n = \frac{1}{n^2-2n+2} - \frac{1}{n^2+2n+2} = \frac{1}{(n-1)^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

Đặt $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, thì $u_n = f(n-1) - f(n+1)$. Do đó với $n \geq 2$

$$S_n = f(0) - f(2) + f(1) - f(3) + ... + f(n-1) - f(n+1)$$
$$= f(0) + f(1) - f(n+1) - f(n)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{n^2+1}$$

Vậy $\lim S_n = \frac{3}{2}$

Câu 3:

Giả sử khối nước đá hình lập phương có cạnh là s thì thể tích của khối nước đá đó là :
$V = s^3$

Diện tích xung quanh của khối nước đá đó là $S_{xq} = 6s^2$.

Do khối nước đá tan theo bề mặt theo thời gian t. Công thức toán học diễn đạt điều này là :

$\frac{dV}{dt} = -k(6s^2)$. **Dấu trừ ở đây thể hiện thể tích giảm, và k là hằng số đại diện cho các điều kiện môi trường như độ ẩm, nhiệt độ....**

Giả sử sau một giờ đồng hồ khối nước đá đó tan hết $1/4$ thể tích ban đầu của nó. Ta tóm tắt bài toán như sau :

$V = s^3$ *và* $\frac{dV}{dt} = -k(6s^2)$

$V = V_0$ *khi* $t = 0$

$V = (3/4)V_0$ *khi* $t = 1$ *h*

Tìm t *khi* $V = 0$.

Áp dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp cho $V = s^3$ với biến thời gian t :

$$\frac{dV}{dt} = 3s^2\frac{ds}{dt}$$

Do đó ta thu được $3s^2\dfrac{ds}{dt}=-6ks^2$, do đó ta suy ra $\dfrac{ds}{dt}=-2k$, tức là cạnh của hình lập phương mỗi giờ giảm với vận tốc $2k$. Giả sử cạnh ban đầu của hình lập phương là s_0, sau một giờ cạnh của nó sẽ là $s_1=s_0-2k$. Giả sử thời gian tan của hình lập phương là *t*, thì từ $\dfrac{ds}{dt}=-2k$ ta suy ra $s_0=2kt$. Điều này suy ra rằng thời gian tan sẽ là $t_{\tan}=\dfrac{s_0}{2k}=\dfrac{s_0}{s_0-s_1}=\dfrac{1}{1-\dfrac{s_1}{s_0}}$. Nhưng ta thấy rằng

$$\frac{s_1}{s_0}=\frac{\left(\frac{3}{4}V_0\right)^{1/3}}{(V_0)^{1/3}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}\approx 0{,}91,\text{ vì vậy } t_{\tan}=\frac{1}{1-0{,}91}\approx 11\text{ h.}$$

Nói tóm lại, nếu khối nước đá tan 1/4 thể tích trong vòng 1 h thì để tan hết mất khoảng 11h .

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Cao đẳng SP Quảng Ninh

Câu 1. Dãy số thực (u_n), có $\begin{cases} u_1=2 \\ u_n=\dfrac{-9u_{n-1}-24}{5u_{n-1}+13} \end{cases}$ Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Câu 2. Dãy số thực (x_n) có $u_1 \ge 1$; $x_{n+1}=\sqrt{x_1+\ldots+x_n}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n}$

Câu 3. Dãy số thực (u_n) có $\begin{cases} u_0=3;\, u_1=4 \\ (n+1)(n+2)u_n=4(n+1)(n+3)u_{n-1}-4(n+2)(n+3)u_{n-2} \end{cases}$ $n \ge 2$

Tìm u_{2012}.

Câu 4. Tìm các hàm số thực f(x) liên tục thỏa mãn $\begin{cases} f(0)=2012 \\ f(2012x)-f(x)=x, \quad \forall x \end{cases}$

Câu 5.

Các hàm số f(x) và g(x) khác 0 và liên tục trên [a;b], khả vi trong (a;b) và f(a)g(b) = f(b)g(a). Chứng minh rằng phương trình f'(x)g(x) = f(x)g'(x) có nghiệm c∈ (a;b).

6. a) Tìm hàm số thực f(x) khả vi 2 lần trên R thỏa mãn $\begin{cases} f(0)=1; & f(-1)=f(1) \\ f''(x)=f(x), & \forall x \in R \end{cases}$

6. b) Tìm hàm số f(x) liên tục và có đạo hàm liên tục trong R sao cho:

$$f^2(x) = \int_0^x [f^2(t) + f'^2(t)]dt + 2012$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu	NỘI DUNG CHÍNH
1.	Chứng minh $u_n = \dfrac{-22.3^{n-1}+24}{11.3^{n-1}-10}$ bằng quy nạp (hoặc tìm được u_n) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-22.3^{n-1}+24}{11.3^{n-1}-10} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-22+\dfrac{24}{3^{n-1}}}{11-\dfrac{10}{3^{n-1}}} = -2$
2.	Có $x_{n+1}^2 - x_n^2 = x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} - x_n > 0 \Rightarrow$ dãy tăng. Nếu dãy bị chặn trên thì nó hội tụ chẳng hạn về a $\Rightarrow$ a = 0, vô lí. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = \dfrac{1}{2}$, vì $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{x_n^2 + x_n} - x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{x_n^2+x_n}+x_n} = \dfrac{1}{2}$
3.	$u_n = (n+3)(2-n).2^{n-1}$ (quy nạp, hoặc tìm được) $\Rightarrow u_{2012} = -2015.2010.2^{2011}$
4.	$f(x) - f(\dfrac{x}{2012}) = \dfrac{x}{2012}$;...; $f(\dfrac{x}{2012^{n-1}}) - f(\dfrac{x}{2012^n}) = \dfrac{x}{2012^n}$ $\Rightarrow f(x) - f(\dfrac{x}{2012^n}) = x(\dfrac{1}{2012} + \dfrac{1}{2012^2} + ... + \dfrac{1}{2012^n})$. Cho $n \to +\infty$ Có $f(x) - f(0) = \dfrac{\dfrac{x}{2012}}{1-\dfrac{1}{2012}} = \dfrac{x}{2011} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{2011} + 2012$ (Thử lại, kết luận)
5.	Xét hàm số $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trên [a;b], khả vi trong (a;b)

	và h(a) = h(b) $\Rightarrow \exists c \in (a:b)$ sao cho $\dfrac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g^2(c)} = 0 \Rightarrow$ ĐPCM	
6.a)	$f(x) - f''(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - f'(x) + f'(x) - f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x[f(x) - f'(x) + f'(x) - f''(x)] = 0$ $\Leftrightarrow (e^x[f(x) - f'(x)])' = 0 \Rightarrow e^x[f(x) - f'(x)] = C \Rightarrow f(x) - f'(x) = C.e^{-x}$ $\Leftrightarrow e^{-x}[f(x) - f'(x)] = C.e^{-2x} \Rightarrow [e^{-x}.f(x)]' = C.e^{-2x} \Rightarrow e^{-x}.f(x) = A.\ e^{-2x} + B$ $\Rightarrow f(x) = A.e^{-x} + B.e^x \Rightarrow f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (Thử lại, kết luận)	5,0
6.b)	Lấy đạo hàm hai vế: $2f'(x)f(x) = f^2(x) + f'^2(x)$ $\Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = C.e^x$. Cho x = 0 ta có $f(0) = \pm\ 503\sqrt{2}$ $\Rightarrow C = \pm\ 503\sqrt{2} \Rightarrow f(x) = \pm\ 503\sqrt{2}\,e^x$. (Thử lại, kết luận)	5,0

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN ĐẠI SỐ

Trường Cao đẳng Vĩnh Phúc

Câu 1. Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tính A^{2012}.

Câu 2. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 giao hoán với ma trận $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Câu 3. Hai người chơi trò chơi như sau: Lần lượt theo dòng ghi các số vào các dấu * của định thức $\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$

Nếu sau khi thay hết các dấu * mà giá trị định thức dương thì người I thắng, nếu giá trị định thức âm thì người II thắng, nếu giá trị định thức bằng 0 thì hòa. Hãy tìm chiến thuật để người I luôn luôn thắng, biết rằng người I luôn ghi trước.

Câu 4. Tồn tại hay không tồn tại đa thức $P_n(x)$ bậc $n (n \ge 1)$ với hệ số nguyên sao cho:

$$\left| P_n(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2012}, \forall x \in \left[\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right]$$

Câu 5. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là n số thực đôi một khác nhau. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1^{n-1}x_1 & + & a_1^{n-2}x_2 & + & \ldots & + & x_n & + & a_1^n & = & 0 \\ a_2^{n-1}x_1 & + & a_2^{n-2}x_2 & + & \ldots & + & x_n & + & a_2^n & = & 0 \\ & & . & & . & . & . & & . & & \\ a_n^{n-1}x_1 & + & a_n^{n-2}x_2 & + & \ldots & + & x_n & + & a_n^n & = & 0 \end{cases}$$

Câu 6. Tính định thức của ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} x_1^{2012}+y_1^{2012} & x_1^{2012}+y_2^{2012} & \ldots & x_1^{2012}+y_{2014}^{2012} \\ x_2^{2012}+y_1^{2012} & x_2^{2012}+y_2^{2012} & \ldots & x_2^{2012}+y_{2014}^{2012} \\ . & . & \ldots & . \\ x_{2014}^{2012}+y_1^{2012} & x_{2014}^{2012}+y_2^{2012} & \ldots & x_{2014}^{2012}+y_{2014}^{2012} \end{pmatrix}$$

Đáp án

Câu 1. *(5 điểm)*

Đa thức đặc trưng của ma trận A là: $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -5-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 18\lambda$ Đa thức đặc trưng này có nghiệm là $\lambda = \{0, 3, -6\}$ Theo định lý Hamilton- Cayley thì $A^3 + 3A^2 - 18A = 0$	2 điểm
Thực hiện phép chia đa thức x^{2012} cho đa thức $x^3 + 3x - 18x$ ta được: $x^{2012} = (x^2 + 3x^2 - 18x)h(x) + ax^2 + bx + c$ Thay x lần lượt bằng 0, 3, -6 vào phương trình trên ta được hệ: $\begin{cases} 0 = c \\ 3^{2012} = a.3^2 + b.3 \\ (-6)^{2012} = a.(-6)^2 + b.(-6) \end{cases}$ Giải hệ trên ta được nghiệm $\begin{cases} a = 4.6^{2010} + 3^{2009} \\ b = 2(3^{2010} - 6^{2010}) \\ c = 0 \end{cases}$	2 điểm
Thay x bởi A ta được: $A^{2012} = (A^3 + 3A^2 - 18A)h(A) + (4.6^{2010} + 3^{2009})A^2 + 2(3^{2010} - 6^{2010})A$ Từ đó ta được $A^{2012} = (4.6^{2010} + 3^{2009})A^2 + 2(3^{2010} - 6^{2010})A$	1 điểm

Câu 2. *(5 điểm)*

Đặt $B=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$. Đa thức đặc trưng của ma trận B là: $$P_B(\lambda)=\det(B-\lambda I)=(\lambda-2)^2-1=\lambda^2-4\lambda+3$$ Theo định lý Hamilton- Cayley thì $B^2-4B+3=0\Rightarrow B^2=4B-3$ Ta chứng minh rằng mọi ma trận vuông X cấp hai giao hoán với ma trận B đều có dạng: $X=(B-2I)X_0+X_0(B-2I)$ (trong đó X_0 là ma trận vuông cấp 2 bất kỳ). Thật vậy:	1 điểm
+) Điều kiện đủ. Giả sử $X=(B-2I)X_0+X_0(B-2I)$. Ta sẽ CMR $BX=XB$ Ta có: $BX = B(B-2I)X_0+BX_0(B-2I)$ $= B^2X_0-2BX_0+BX_0B-2BX_0$ $= (4B-3)X_0-4BX_0+BX_0B$ $XB = (B-2I)X_0B+X_0(B-2I)B$ $= BX_0B-2X_0B+X_0B^2-2X_0B$ $= BX_0B-2X_0B+X_0(4B-3)$ Suy ra $BX=XB=BX_0B-3X_0$	2 điểm
+) Điều kiện đủ. Giả sử $BX=XB$ ta sẽ chỉ ra $\exists X_0: X=(B-2I)X_0+X_0(B-2I)$. Chọn $X_0=\frac{1}{2}(2I-B)X$, ta có: $(B-2I)X_0+X_0(B-2I)=\frac{1}{2}(B-2I)(2I-B)X+\frac{1}{2}(2I-B)X(B-2I)$ $=-\frac{1}{2}(B-2I)^2X-\frac{1}{2}X(B-2I)^2$ $=X$ Vậy tất cả các ma trận cần tìm có dạng: $X=(B-2I)X_0+X_0(B-2I)$ Trong đó X_0 là ma trận vuông cấp 2 bất kỳ.	2 điểm

Câu 3. *(5 điểm)*

Sau khi điền các số, ta có định thức: $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ Chiến thuật để người I luôn luôn thắng: Người I viết $a_{11}=1$, người II viết a_{12}, người I viết $a_{13}=0$, người II viết a_{21}, người I viết	4 điểm

$a_{22}=1+a_{12}a_{21}$, người II viết a_{23}, người I viết $a_{31}=0$, người II viết a_{32}, cuối cùng người I viết $a_{33}=1+a_{23}a_{32}$	
Khi đó $D=\begin{vmatrix}1 & a_{12} & 0\\ a_{21} & 1+a_{12}a_{21} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & 1+a_{23}a_{32}\end{vmatrix}=(1+a_{12}a_{21})(1+a_{23}a_{32})-a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}-a_{12}a_{21}a_{23}a_{32}$ $=1>0$. Như vậy với cách chơi như trên thì người I luôn luôn thắng.	1 điểm

Câu 4. *(5 điểm)*

Xét đa thức $f_n(x)=\frac{1}{2}\left[(2x-1)^n+1\right], \forall n\in N^*$. Tất cả các hệ số của nó đều nguyên, vì tất cả các hệ số của đa thức $(2x-1)^n+1$ đều là các số chẵn.	2 điểm
Khi $x\in\left[\frac{1}{10},\frac{9}{10}\right]$ nhị thức $2x-1$ thỏa mãn $-0,8\le 2x-1\le 0,8$. Bởi vậy: $$\left\|f_n(x)-\frac{1}{2}\right\|=\|2x-1\|^n\le\frac{1}{2}(0,8)^n$$ Ta tìm $n\in N^*$ để $\frac{1}{2}(0,8)^n<\frac{1}{2012}\Rightarrow n\ge 31$ Vậy tồn tại đa thức $P_n(x)$ bậc $n(n\ge 1)$ với hệ số nguyên thỏa mãn điều kiện đề bài.	3 điểm

Câu 5. *(5 điểm)*

Xét đa thức $f(u)=u^n+x_1u^{n-1}+...+x_{n-1}u+x_n$. Từ hệ trên ta có $f(a_1)=f(a_2)=...=f(a_n)=0$	1 điểm
Xét $g(u)=(u-a_1)(u-a_2)...(u-a_n)=u^n+A_1u^{n-1}+...+A_{n-1}u+A_n$ Trong đó $g(u)$ có n nghiệm $a_1,a_2,...,a_n$ và $\deg g=n$ có hệ số bậc cao nhất bằng 1 nên theo định lý Viet ta có: $$\begin{cases}A_1=(-1)^1(a_1+a_2+...+a_n)\\ A_2=(-1)^2(a_1a_2+a_1a_3+...+a_{n-1}a_n)\\ ....\\ A_n=(-1)^n a_1a_2...a_n\end{cases}$$	2 điểm
Xét đa thức $h(u)=f(u)-g(u)=(x_1-A_1)u^{n-1}+(x_2-A_2)u^{n-2}+...+(x_n-A_n)$ Ta có đa thức $h(u)$ là đa thức có $\deg h=n-1$ mà lại có n nghiệm nên $h(u)\equiv 0$. Do đó ta có: $$x_1=A_1, x_2=A_2,...,x_n=A_n$$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là:	2 điểm

	$\begin{cases} x_1 = (-1)^1(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ x_2 = (-1)^2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n) \\ \ldots\ldots \\ x_n = (-1)^n a_1a_2\ldots a_n \end{cases}$	

Câu 6. (*5 điểm*)

Đặt $f_i(x) = x^{2012} + y_i^{2012}, 1 \le i \le 2014$. Xét không gian véctơ $R_{2012}[x]$ gồm các đa thức với hệ số thực và có bậc không quá 2012. Ta có $\dim R_{2012}[x] = 2013$.	1 điểm
Vì các $f_i(x) \in R_{2012}[x]$ mà hệ $\{f_i(x)\}_{i=1}^{2014}$ có 2014 phần tử nên hệ $\{f_i(x)\}_{i=1}^{2014}$ là phụ thuộc tuyến tính, tức là $\forall x, \exists f_j(x), 1 \le j \le 2014$ biểu thị tuyến tính qua hệ còn lại. Không mất tính tổng quát giả sử đó là $f_1(x)$.	2 điểm
Suy ra $f_1(x_j) = x_j^{2012} + y_1^{2012}$ biểu thị tuyến tính qua hệ $\{f_i(x_j) = x_j^{2012} + y_i^{2012}\}_{i=2}^{2014}, \forall j \in \overline{1,2012}$ Vậy cột 1 của ma trận đề bài cho biểu thị tuyến tính qua các cột còn lại. Theo tính chất của định thức thì định thức đó bằng 0. Vậy $\begin{vmatrix} x_1^{2012} + y_1^{2012} & x_1^{2012} + y_2^{2012} & \ldots & x_1^{2012} + y_{2014}^{2012} \\ x_2^{2012} + y_1^{2012} & x_2^{2012} + y_2^{2012} & \ldots & x_2^{2012} + y_{2014}^{2012} \\ . & . & \ldots & . \\ x_{2014}^{2012} + y_1^{2012} & x_{2014}^{2012} + y_2^{2012} & \ldots & x_{2014}^{2012} + y_{2014}^{2012} \end{vmatrix} = 0$	2 điểm

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN ĐẠI SỐ

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Câu 1. (5 điểm) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 16 & 4 & 10 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ và đa thức

$f(x) = 2012x^{2012} - 2011x^{2011} + \ldots + 2x^2 - x$. Tính $f(A)$.

Lời giải:

Ta có $A^3=A^2$ (có thể nhận ra điều này nhờ đa thức đặc trưng và định lý Hamilton - Cayley). Do đó, $A^k = A^2$,"k Î ¥,k ³ 2. Ta có

$$f(A) = 2012A^{2012} - 2011A^{2011} + ... + 2A^2 - A$$

$$= (2012 - 2011 + 2010 - ... + 2)A^2 - A = 1007.A^2 - A$$

Vậy $f(A) = \begin{bmatrix} 14092 & 2012 & 11074 \\ 28180 & 4024 & 22144 \\ 14092 & 2012 & 11074 \end{bmatrix}$

Bài 2. **(5 điểm)** Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^2 = 1 A$, 1 ¹ 0. Chứng minh rằng $tr(A) = 1 .rank(A)$.

Lời giải.

Vì $A^2 = 1 A$, 1 ¹ 0 nên A chéo hóa được với các giá trị riêng là 0, 1 . Từ đó, suy ra điều phải chứng minh.

Câu 3. **(5 điểm)** Ma trận vuông A gọi là lũy đẳng nếu $A^2 = A$. Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là các ma trận lũy đẳng vuông cấp n sao cho $A_1 + A_2 + ... + A_n = I_n$. Chứng minh rằng : $A_iA_j = 0, \ \forall i \neq j$.

Lời giải.

Ta sử dụng các bổ đề sau :

Bổ đề 1. Nếu A là ma trận lũy đẳng thì A chéo hóa được và có các trị riêng là 0 và 1. Hơn nữa, tr(A)=rank(A).

Bổ đề 2. Cho f, g là các phép biến đổi tuyến tính trên không gian vectơ ″. Khi đó:

a) $\dim(\operatorname{Im}(f+g)) \le \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \le \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g)$

b) Nếu $\dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \le \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g)$ thì $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{\theta\}$ hay $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$. Do đó, nếu $\dim(\operatorname{Im}(f+g)) = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g)$ thì $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Trở lại bài toán: Gọi $f_1, f_2, ..., f_n$ là các phép biến đổi tuyến tính của ″ có ma trận tương ứng là là $A_1, A_2, ..., A_n$ đối với cơ sở chính tắc. Khi đó, ta có:

$f_i^2 = f_i$, $\forall i = \overline{1,n}$ và $f_1 + f_2 + ... + f_n = Id$ với Id là ánh xạ đồng nhất.

Ta có $A_1 + A_2 + ... + A_n = I_n \Rightarrow rank(A_1 + A_2 + ... + A_n) = n$. (1)

Mặt khác,

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = I_n \Rightarrow Tr(A_1 + A_2 + ... + A_n) = n \Rightarrow Tr(A_1) + Tr(A_2) + ... + Tr(A_n) = n$$

Vì $A_1, A_2, ..., A_n$ là các ma trận lũy đẳng nên $tr(A_i) = rank(A_i), \forall i = \overline{1,n}$. Do đó

$$Tr(A_1) + Tr(A_2) + ... + Tr(A_n) = n \Rightarrow rank(A_1) + rank(A_2) + ... + rank(A_n) = n$$
(2)

Từ (1) và (2), ta có:

$$rank(A_1)+rank(A_2)+...+rank(A_n)=rank(A_1+A_2+...+A_n)=n.$$

Từ đó suy ra:

$$\dim(\operatorname{Im} f_1)+\dim(\operatorname{Im} f_2)+...+\dim(\operatorname{Im} f_n)=\dim\operatorname{Im}(f_1+f_2+...+f_n)=n$$

Do đó, ta có: $\begin{cases} {}^n=\operatorname{Im} f_1\oplus\operatorname{Im} f_2\oplus...\oplus\operatorname{Im} f_n \\ \operatorname{Im}(f_{i_1}+f_{i_2}+...+f_{i_k})=\operatorname{Im} f_{i_1}\oplus\operatorname{Im} f_{i_2}\oplus...\oplus\operatorname{Im} f_{i_k}\end{cases}$

Vì $f_i^2=f_i$, $\forall i=\overline{1,n}$ và $f_1+f_2+...+f_n=Id$ nên với mỗi $i=\overline{1,n}$, ta có

$f_i\left(\sum_{j\neq i} f_j\right)=0$, nghĩa là $f_i\left(\operatorname{Im}\sum_{j\neq i} f_j\right)=0$

$\Rightarrow f_i\left(\bigoplus_{j\neq i}\operatorname{Im} f_j\right)=0\Rightarrow f_i\left(\operatorname{Im} f_j\right)=0,\forall j\neq i\Rightarrow f_i\circ f_j=0,\forall j\neq i$

Từ đó suy ra $A_iA_j=0,\quad \forall i\neq j$.

Câu 4. **(5 điểm)** Cho ma trận $A=(a_{ij})\in Mat(n,\ )$ sao cho $a_{ii}>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$ với mọi $i,j=1,2,...,n$. Chứng minh rằng $\det A>0$.

Lời giải.

G/s detA=0. Khi đó, tồn tại ma trận cột $x=[x_1\quad x_2\quad ...\quad x_n]^T\neq 0$ sao cho Ax=0.

G/s $|x_k|=max\{|x_i|, i=\overline{1,n}\}$. Vì $x\neq 0$ nên $|x_k|>0$.

Mặt khác, vì Ax=0 nên ta có $\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j=0\Rightarrow a_{kk}.x_k=-\sum_{j=1,j\neq k}^{n}a_{kj}x_j$

$\Rightarrow|a_{kk}.x_k|=\left|\sum_{j=1,j\neq k}^{n}a_{kj}x_j\right|\leq\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{kj}||x_j|\leq|x_k|.\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{kj}|<|x_k|.a_{kk}$ (Vô lí).

Vậy $\det A\neq 0$.

Từ đó, suy ra với λ là một trị riêng của A, nếu λ là số thực thì $\lambda>0$. Do đó, đa thức đặc trưng của A có dạng :

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(-1)^n\prod_{i=1}^{k}(\lambda^2+a_i\lambda+b_i)\prod_{j=1}^{n-2k}(\lambda-\lambda_j)$$

trong đó $\Delta_i<0,\forall i=\overline{1,k}$ và $\lambda_j\in\ ,\forall j=\overline{1,n-2k}$.

Do đó, $b_i>0,\lambda_j>0,\forall i=\overline{1,k},j=\overline{1,n-2k}$. Suy ra $\det(A)=\left(\prod_{i=1}^{k}b_i\right)\left(\prod_{j=1}^{n-2k}\lambda_j\right)>0$

Câu 5. **(5 điểm)** Cho $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ là các số phân biệt và ma trận $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ xác định bởi $a_{ij}=\dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_j}$ với $\forall i,j=\overline{1,n}$. Tính $\det A$.

Lời giải.

Ta chứng minh $\det A = \dfrac{\prod_{i>j}(\lambda_i-\lambda_j)^2}{\prod_{i,j}(\lambda_i+\lambda_j)}$ (*) bằng quy nạp.

Dễ thấy, (*) đúng với n=1 và n=2.

Lấy các cột 1, 2,…, (n-1) trừ đi cột n, rồi rút nhân tử $\lambda_n-\lambda_j$ từ cột j với $j=\overline{1,n-1}$ và nhân tử $\dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_n}$ từ hàng i với $i=\overline{1,n}$. Sau đó, lấy các hàng 1, 2,…, n-1 trừ đi hàng n , rồi rút nhân tử $\lambda_n-\lambda_i$ từ hàng với $i=\overline{1,n-1}$ và nhân tử $\dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_n}$ từ cột j với $j=\overline{1,n-1}$. Tiếp theo ta khai triển theo cột n, ta được

$$\det A = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(\lambda_n-\lambda_j)^2}{(\lambda_n+\lambda_n)\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_n+\lambda_i)^2}A_1$$

với $A_1=[a^{(1)}{}_{\text{ij}}]$ xác định bởi $a^{(1)}{}_{\text{ij}}=\dfrac{1}{\lambda_i+\lambda_j},\forall i,j=\overline{1,n-1}$.

Rõ ràng ma trận $A_1=[a^{(1)}{}_{\text{ij}}]$ có cấu trúc như ma trận A, với cấp nhỏ hơn 1. Theo nguyên lý quy nạp ta có (*).

Câu 6. **(5 điểm)** Cho đa thức $f(x)\in\ [x]$ có ít nhất 2 nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức $P(x)=f(x)-2.2012f'(x)+2012^2f''(x)$ cũng có ít nhất 2 nghiệm thực.

Lời giải

Bổ đề **.** Cho đa thức $g(x)\in\ [x]$ có ít nhất 2 nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức $G(x)=g(x)-2012g'(x)$ cũng có ít nhất 2 nghiệm thực.

Thật vậy, giả sử x_1, x_2 $(x_1\le x_2)$ là nghiệm của $f(x)$. Xét hàm số $h(x)=-e^{-\frac{1}{2012}x}g(x)$.

Ta có $h'(x)=\dfrac{1}{2012}e^{\frac{-1}{2012}x}(g(x)-2012g'(x))$. Theo định lí Rolle thì $h'(x)$ có ít nhất một nghiệm thực trong (x_1,x_2) nếu $x_1<x_2$ và có nghiệm x_1 nếu $x_1=x_2$. Suy ra đa thức $G(x)=g(x)-2012g'(x)$ có ít nhất một nghiệm thực.

Vì $\deg G(x) = \deg g(x) = n$ nên nếu *n* lẻ thì $g(x)$ có ít nhất 3 nghiệm thực và vì vậy theo lập luận trên thì $G(x)$ sẽ có ít nhất 2 nghiệm thực. Nếu *n* chẵn thì do $G(x)$ có nghiệm thực nên nó phải có ít nhất 2 nghiệm thực.

Trở lại bài toán, trước hết ta áp dụng bổ đề với $g(x) = f(x)$ ta được $F(x) = f(x) - 2012f'(x)$ có ít nhất 2 nghiệm thực. Tiếp theo ta áp dụng bổ đề với $g(x) = F(x)$, ta được

$$F(x) - 2012F'(x) = [f(x) - 2012f'(x)] - 2012[f(x) - 2012f'(x)]' = P(x)$$

có ít nhất 2 nghiệm thực (đpcm)

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN ĐẠI SỐ

Trường Cao đẳng CĐ Bình Thuận

Câu 1. (2 điểm)

Cho A là ma trận vuông cấp n, biết rằng $A^{-1} = 4A$. Tính $\det(A^{2013} - A)$.

Câu 2.(2 điểm)

Cho *A, B, C* là các ma trận vuông thực, cấp hai. Chứng minh rằng :

$$(AB - BA)^{2012}.C = C.(AB - BA)^{2012}.$$

Câu 3. (2 điểm)

Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = \dfrac{1}{2012} \\ x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = \dfrac{1 + x_1}{2012^2 - 1} \\ \ldots \\ x_{n-1} + x_n = \dfrac{1 + x_1 + \ldots + x_{n-2}}{2012^{n-1} - 1} \\ x_n = \dfrac{1 + x_1 + \ldots + x_{n-1}}{2012^n - 1} \end{cases}$$

Câu 4.(2 điểm)

Cho ma trận :

$$A = \begin{bmatrix} m+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & n+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & q+1 \end{bmatrix}.$$

Trong đó m, n, p, q là các nghiệm của phương trình $x^4 - x + 1 = 0$.
Tính det(A).

Câu 5.(2 điểm)
Cho ma trận vuông A thoả mãn : $A^{2012} = 0$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ≥ 1, đều có rank(A) = rank($A + A^2 + \ldots + A^n$).

ĐÁP ÁN & BIỂU ĐIỂM

Nội dung	Điểm
Câu 1 (2 điểm)	
$A^{-1} = 4A \leftrightarrow 4A^2 = E \leftrightarrow A^2 = \frac{1}{4}E$. Tổng quát: $A^{2n} = \frac{1}{4^n}E$; Với n là số nguyên dương, và E là ma trận đơn vị tương ứng.	0.5
Từ đó ta có: $\det(A) = \frac{1}{2}$ và $\det(A^{2n}) = \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2^{2n}}$.	0.5
$\det(A^{2013} - A) = \det(A).\det(A^{2012} - E)$ $= \det(A).\det(A^{1006}).\det(A^{1006} - A^{-1006})$ $= \det(A).\det(A^{1006}).\det(A^{1006} - 4^{1006}.A^{1006})$ $= \det(A).\det(A^{1006}).\det(A^{1006})(1 - 4^{1006})$	0.5
$= \frac{1}{2}.\frac{1}{4^{1006}}.(1 - 4^{1006})$ $= \frac{1 - 2^{2012}}{2^{2013}}$	0.5
Câu 2 (2 điểm) Giả sử : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.	

Khi đó: $AB=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+gh\end{pmatrix}$ và $BA=\begin{pmatrix} ae+fc & eb+fd \\ ag+hc & gb+hd\end{pmatrix}$	
$D=AB-BA=\begin{pmatrix} bg-fc & af+bh-eb-fd \\ ce+dg-ga-hc & fc-bg\end{pmatrix}$	1
Vậy D có dạng $D=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x\end{pmatrix}$ với $x, y, z \in R$.	0.5 0.5
Suy ra $D^2=\begin{pmatrix} x^2+yz & 0 \\ 0 & x^2+yz\end{pmatrix}=(x^2+yz).E$ (E là ma trận đơn vị) Và $D^{2012}=(x^2+yz)^{1006}.E$ Do đó : $D^{2012}.C=(x^2+yz)^{1006}.E.C=C.(x^2+yz)^{1006}.E=C.D^{2012}$.	
Câu 3 (2 điểm) Với $i\ge 2; i=1,2,...,n$; cộng vào hai vế của phương trình thứ i với biểu thức $x_1+x_2+...+x_{i-1}$, ta được : $x_1+x_2+...+x_n=\dfrac{1+x_1+x_2+...+x_{i-1}}{2012^i-1}+x_1+x_2+...+x_{i-1}$ $=\dfrac{1}{2012^i-1}+(x_1+x_2+...+x_{i-1})\left(1+\dfrac{1}{2012^i-1}\right)$ Do đó : $\dfrac{1}{2011}=\dfrac{1}{2012^i-1}+(x_1+x_2+...+x_{i-1})\left(1+\dfrac{1}{2012^i-1}\right)$	1
$x_1+x_2+...+x_{i-1}=\left(\dfrac{1}{2011}-\dfrac{1}{2012^i-1}\right).\dfrac{2012^i-1}{2012^i}$ $=\dfrac{2012^i-1}{2012^i}.\dfrac{2012^i-2012}{2011(2012^i-1)}$ $=\dfrac{2012^{i-1}-1}{2011.2012^{i-1}}$.	0.5
Từ hai phương trình đầu của hệ ta có : $x_1=\dfrac{1}{2011}-\dfrac{1+x_1}{2012^2-1}\leftrightarrow x_1\left(1+\dfrac{1}{2012^2-1}\right)=\dfrac{1}{2011}-\dfrac{1}{2012^2-1}$	

$$\leftrightarrow x_1 = \frac{2012^2 - 2012}{2011(2012^2 - 1)} \cdot \frac{2012^2 - 1}{2012^2} = \frac{1}{2012}.$$

Với $i = 2, 3, ..., n$; ta có :

$$x_i = (x_1 + x_2 + ... + x_i) - (x_1 + x_2 + ... + x_{i-1})$$
$$= \frac{2012^i - 1}{2011.2012^i} - \frac{2012^{i-1} - 1}{2011.2012^{i-1}}$$
$$= \frac{2012^i - 1 - 2012(2012^{i-1} - 1)}{2011.2012^i}$$
$$= \frac{1}{2012^i}$$

Kết luận : nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2012} \\ x_2 = \dfrac{1}{2012^2} \\ ... \\ x_n = \dfrac{1}{2012^n} \end{cases}$

0.

Câu 4 (2 điểm)

Tính det(A) :

0.5

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & y-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & z-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$$

$$= yzt + xyt + xyz + xyt + xyzt$$

Theo công thức Viette, ta có : $yzt + xyt + xyz + xyt = 1$ và $xyzt = 1$.

Vậy $\det(A) = 2$.

Câu 5 (2điểm)

Xét các phương trình :

$$Ax = 0 \qquad (1)$$

$(A + A^2 + ... + A^n)x = 0$ (2), với x là ma trận cột.

Dễ thấy rằng mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của (2).

Ta chứng minh mọi nghiệm của (2) đều là nghiệm của (1) như sau :

Giả sử x_0 là nghiệm của (2) :

$$(A + A^2 + ... + A^n)x_0 = 0$$

Suy ra $Ax_0 = -A^2x_0 - ... - A^nx_0 = A^2(-E - A - ... - A^{n-2})x_0$ (*)

Đặt $B = -E - A - ... - A^{n-2}$. Ta có:

$$AB = A(-E - A - ... - A^{n-2}) = (-A - A^2 - ... - A^{n-1})$$
$$= (-E - A - ... - A^{n-2})A = BA$$

Do đó: (*) tương đương với:

$$Ax_0 = A^2Bx_0 = AABx_0 = ABAx_0 = AB(Ax_0) = AB.A^2Bx_0 =$$
$$= ABABAx_0 = A^2B^2Ax_0 = ... = A^kB^k Ax_0. \ \forall k = 1, 2, ...$$

Khi $k \geq 2012$ thì $A^k = 0$, suy ra $Ax_0 = 0$.

(1) và (2) có chung tập nghiệm hay có cùng không gian nghiệm, vậy:

$$\text{Rank}(A + A^2 + ... + A^n) = \text{rank}(A).$$

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN ĐẠI SỐ

Trường Đại học Hà Tĩnh

Câu 1. Cho ma trận không suy biến hệ số thực $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ và ma trận B

xác định như sau : $B = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$.

Chứng minh rằng hạng của các ma trận $A^{-1}B$ và BA^{-1} bằng nhau.

Câu 2. Cho A và B là các ma trận vuông cấp n hệ số thực. Biết rằng tồn tại $n+1$ số thực $t_1, t_2, ..., t_{n+1}$ sao cho $(A + t_iB)^n = 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n+1$. Chứng minh rằng $A^n = B^n$.

Câu 3. Tính định thức sau : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n+1 \\ 3 & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \\ 5 & 3 & 1 & \dots & 2n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n+1 & 2n-1 & 2n-3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

Câu 4. Cho đa thức $P(x)=x^2-1$. Có bao nhiêu số thực khác nhau thỏa mãn phương trình $\underbrace{P\left(P\left(\dots\left(P(x)\right)\right)\right)}_{2012}=0$.

Câu 5. Tìm đa thức hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận $x_0^2+x_0+1$ làm nghiệm trong đó x_0 là nghiệm của đa thức $P(x)=x^3+7x-7$.

Câu 6. Trên tập hợp các số phức; gọi $1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ là $n+1$ giá trị căn bậc $n+1$ khác nhau của 1. Tính giá trị biểu thức $S=\frac{1}{1-\omega_1}+\frac{1}{1-\omega_2}+\dots+\frac{1}{1-\omega_n}$.

Đáp án

Câu 1 (5 điểm). Cho ma trận không suy biến hệ số thực $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ và

ma trận B xác định như sau : $B=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$.

Chứng minh rằng hạng của các ma trận $A^{-1}B$ và BA^{-1} bằng nhau.

Lời giải. Đặt $C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ thì $B=AC$. Do đó $A^{-1}B=A^{-1}AC=C$ và $BA^{-1}=ACA^{-1}$. Vậy $rank\left(A^{-1}B\right)=rank\left(BA^{-1}\right)=rank(C)$.

Câu 2 (5 điểm). Cho A và B là các ma trận vuông cấp n hệ số thực. Biết rằng tồn tại $n+1$ số thực $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ sao cho $(A+t_iB)^n=0$ với mọi $i=1,2,\dots,n+1$. Chứng minh rằng $A^n=B^n$.

Lời giải. Ta có $(A+tB)^n=A^n+P_1t+P_2t^2+\dots+P_{n-1}t^{n-1}+B^nt^n$, với $P_1,P_2,\dots,P_{n-1}$ là các ma trận vuông cấp n hệ số thực không phụ thuộc t. Cho tương ứng với các ma trận các số thực $a,b,p_1,p_2,\cdots,p_{n-1}$ sao cho đa thức $P(t)=a+p_1t+p_2t^2+...+p_{n-1}t^{n-1}+bt^n$ nhận các số thực $t_1,t_2,...,t_{n+1}$ làm nghiệm. Khi đó $a=b=p_1=p_2=...=p_{n-1}=0$. Vậy $A^n=B^n=P_1=P_2=...=P_{n-1}=0$.

Câu 3 (5 điểm). Tính định thức sau : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & ... & 2n+1 \\ 3 & 1 & 3 & ... & 2n-1 \\ 5 & 3 & 1 & ... & 2n-3 \\ ... & ... & .... & ... & ... \\ 2n+1 & 2n-1 & 2n-3 & .... & 1 \end{vmatrix}$.

Lời giải. Cộng cột đầu vào cột cuối ta có:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & ... & 2n+1 \\ 3 & 1 & 3 & ... & 2n-1 \\ 5 & 3 & 1 & ... & 2n-3 \\ ... & ... & .... & ... & ... \\ 2n+1 & 2n-1 & 2n-3 & .... & 1 \end{vmatrix}=(2n+2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & ... & 1 \\ 3 & 1 & 3 & ... & 1 \\ 5 & 3 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & .... & ... & ... \\ 2n+1 & 2n-1 & 2n-3 & .... & 1 \end{vmatrix}.$$

Trừ dòng 2 cho dòng1, dòng 3 cho dòng 2, … , dòng $n+1$ cho dòng n ta có:

$$D=(2n+2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & ... & 1 \\ 2 & -2 & -2 & ... & 0 \\ 2 & 2 & -2 & ... & 0 \\ ... & ... & .... & ... & ... \\ 2 & 2 & 2 & .... & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n+2}(2n+2)\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 & ... & -2 \\ 2 & 2 & -2 & ... & -2 \\ 2 & 2 & 2 & ... & -2 \\ ... & ... & .... & ... & ... \\ 2 & 2 & 2 & .... & 2 \end{vmatrix}.$$

Cộng dòng cuối vào các dòng khác ta có:

$$D=(-1)^{n+2}(2n+2)\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 4 & 4 & 0 & ... & 0 \\ 4 & 4 & 4 & ... & 0 \\ ... & ... & .... & ... & ... \\ 2 & 2 & 2 & .... & 2 \end{vmatrix}=(-1)^n(2n+2)4^{n-1}.2=(-4)^n(n+1).$$

Câu 4 (5 điểm). Cho đa thức $P(x)=x^2-1$. Có bao nhiêu số thực khác nhau thỏa mãn phương trình $\underbrace{P(P(...(P(x))))}_{2012}=0$.

Lời giải. Đặt $P_n(x)=\underbrace{P(P(...(P(x))))}_{n}$. Nhận xét rằng $P_1(x)\ge -1$ với mọi giá trị thực của x, do đó $P_{n+1}(x)=P_1(P_n(x))\ge -1$ với mọi x. Suy ra phương trình $P_n(x)=a$ với $a<-1$ không có nghiệm thực. Ta chứng minh với $a>0$, phương trình $P_n(x)=a$ luôn luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

Thật vậy, với $n=1$ ta có $P_1(x)=x^2-1=a \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{a+1}$ đúng với $n=1$. Giả sử đúng với n, ta chứng minh đúng với $n+1$. Xét phương trình $P_{n+1}(x)=a$ với $a>0$. Ta có $P(P_n(x))=a \Leftrightarrow P_n(x)=\pm\sqrt{a+1}$. Vì $\sqrt{a+1}>1$, nên phương trình $P_n(x)=-\sqrt{a+1}$ vô nghiệm và theo giả thiết quy nạp phương trình $P_n(x)=\sqrt{a+1}$ có hai nghiệm thực phân biệt. Do đó phương trình $P_{n+1}(x)=a$ với $a>0$ có hai nghiệm thực phân biệt, đúng với $n+1$. Ta có điều phải chứng minh.

Ta chứng minh phương trình $P_n(x)=0$ có $n+1$ nghiệm thực phân biệt. Thật vậy, với $n=1$, ta có $P(x)=x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Với $n=2$, ta có

$P_2(x)=(x^2-1)^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ hoặc $x=0$, tức là phương trình có 3 nghiệm. Giả sử khẳng định đúng với các giá trị $\leq n$. Ta chứng minh đúng với $n+1$.

Xét phương trình

$P_{n+1}(x)=P_n^2(x)-1=\left(P_{n-1}^2(x)-1\right)^2-1=P_{n-1}^2(x)\left(P_{n-1}^2(x)-2\right)=0 \Leftrightarrow P_{n-1}(x)=0$ hoặc $P_{n-1}(x)=\pm\sqrt{2}$. Phương trình $P_{n-1}(x)=0$ có n nghiệm thực phân biệt, phương trình $P_{n-1}(x)=\sqrt{2}$ có 2 nghiệm thực phân biệt và phương trình $P_{n-1}(x)=-\sqrt{2}$ vô nghiệm. Vậy phương trình $P_{n+1}(x)=0$ có $n+2$ nghiệm thực phân biệt, đúng với $n+1$. Ta có điều phải chứng minh. Do đó phương trình $P_{2012}(x)=0$ có 2013 nghiệm thực phân biệt.

Câu 5 (5 điểm). Tìm đa thức hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận $x_0^2+x_0+1$ làm nghiệm trong đó x_0 là nghiệm của đa thức $P(x)=x^3+7x-7$.

Lời giải. Ta có $u=x_0^2+x_0+1 \Rightarrow u^2=\left(x_0^2+x_0+1\right)^2=x_0^4+2x_0^3+3x_0^2+2x_0+1$

$$=(x_0+2)\left(x_0^3+7x_0-7\right)-4x_0^2-5x_0+15=-4x_0^2-5x_0+15 \text{ và}$$

$$u^3=\left(x_0^2+x_0+1\right)^3=x_0^6+3x_0^5+6x_0^4+7x_0^3+6x_0^2+3x_0+1$$

$$=\left(x_0^3+3x_0^2-x_0-7\right)\left(x_0^3+7x_0-7\right)+34x_0^2+45x_0-48$$

$$=34x_0^2+45x_0-48.$$

Ta có hệ: $\begin{cases} u=x_0^2+x_0+1 \\ u^2=-4x_0^2-5x_0+15 \\ u^3=34x_0^2+45x_0-48. \end{cases}$

Từ hai phương trình đầu của hệ ta có $x_0=-u^2-4u+19$ và $x_0^2=u^2+5u-20$. Thay vào phương trình cuối của hệ ta có:

$$u^3=34\left(u^2+5u-20\right)+45\left(-u^2-4u+19\right)-48=-11u^2-10u+127$$

$\Leftrightarrow u^3+11u^2+10u-127=0$. Vậy $u=x_0^2+x_0+1$ là nghiệm của đa thức hệ số nguyên $Q(x)=x^3+11x^2+10x-127$.

Ta chứng minh $Q(x)$ là đa thức bất khả quy. Thật vậy, nếu $Q(x)=R(x)H(x)$ với $R(x)$ và $H(x)$ là đa thức hệ số nguyên có bậc lớn hơn 0 và nhỏ hơn 3, thì sẽ có một đa thức bậc nhất. Do đó $Q(x)$ có nghiệm hữu tỷ. Tuy nhiên dễ thấy $Q(x)$ không có nghiệm hữu tỷ, suy ra đa thức $Q(x)$ bất khả quy. Vậy $Q(x)$ là đa thức bậc nhỏ nhất nhận $x_0^2+x_0+1$ làm nghiệm.

<u>**Câu 6 (5 điểm).**</u> Trên tập hợp các số phức; gọi $1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ là $n+1$ giá trị căn bậc $n+1$ khác nhau của 1. Tính giá trị biểu thức $S=\dfrac{1}{1-\omega_1}+\dfrac{1}{1-\omega_2}+\dots+\dfrac{1}{1-\omega_n}$.

Lời giải.

Ta có $x^{n+1}-1=(x-1)(x-\omega_1)(x-\omega_2)\dots(x-\omega_n)=(x-1)\left(x^n+x^{n-1}+\dots+x+1\right)$.

Suy ra $f(x)=(x-\omega_1)(x-\omega_2)\dots(x-\omega_n)=x^n+x^{n-1}+\dots+x+1$. Ta có

$$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\dots+2x+1=\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{n}(x-\omega_j)}{x-\omega_i},\ \text{suy ra}\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-\omega_i}.$$

Vậy $S=\dfrac{1}{1-\omega_1}+\dfrac{1}{1-\omega_2}+\dots+\dfrac{1}{1-\omega_n}=\dfrac{f'(1)}{f(1)}=\dfrac{1+2+\dots+n}{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2(n+1)}=\dfrac{n}{2}$.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN ĐẠI SỐ

Trường Đại học An Giang

Câu 1. Kí hiệu *Map*(,) là không gian véc tơ của các hàm số trên . Giả sử $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ là các hàm số có đạo hàm cấp $n-1$. Ta kí hiệu ma trận $W(x)$ là

$$W(x)=\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

Đặt $S=\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$. Chứng minh rằng nếu tồn tại ít nhất $x_0 \in$ sao cho $W(x_0)$ khả nghịch thì S độc lập tuyến tính trên *Map*(,).

Câu 2.

(a) Cho A và X là các ma trận cấp n trên . Chứng minh rằng nếu $AX=I_n$ thì $XA=I_n$.

(b) Cho A, B, C và D là các ma trận cấp n trên . Giả sử AB^T và CD^T là các ma trận đối xứng. Chứng minh rằng nếu $AD^T-BC^T=I_n$ thì $A^TD-C^TB=I_n$.

Câu 3. Cho hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} \dfrac{1}{p}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{1}{p}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \quad \vdots \\ \dfrac{1}{p}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$

trong đó a_{ij} là các số nguyên và p là số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 2. Hãy giải hệ phương trình trên.

Câu 4. Cho $(u_n), (v_n), (w_n)$ là các dãy số thực xác định bởi $u_0 = 1, v_0 = 2, w_0 = 3$ và

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 3v_n \\ w_{n+1} = -2u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

Chứng minh rằng u_n, v_n, w_n đều chia hết cho 2^n.

Câu 5. Cho A, B, C là các ma trận sao cho ABC xác định. Chứng minh rằng

$$rank(AB) + rank(BC) \le rank(B) + rank(ABC)$$

Câu 6. Hãy trình bày cách tính đa thức ma trận $f(A)$, trong đó $A \in M_3(\ )$ và $f(x) \in \ [x]$. Từ đó suy ra cách tínhma trận luỹ thừa A^n.

ĐÁP ÁN

Câu 1. Giả sử $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0$. Khi $x = x_0 \in \ $, ta có

$$\alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0) + \cdots + \alpha_n f_n(x_0) = 0$$
$$\alpha_1 f_1'(x_0) + \alpha_2 f_2'(x_0) + \cdots + \alpha_n f_n'(x_0) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_1 f_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 f_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Ta có hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $W(x_0)\alpha = 0$. Do $W(x_0)$ khả nghịch nên $\alpha = 0$ suy ra $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Vậy S độc lập tuyến tính.

Câu 2.

(a) Ta có $1 = \det I = \det(AX) = \det A \cdot \det X$. Do đó A khả nghịch. Khi đó

$$XA = I(XA) = (A^{-1}A)(XA) = A^{-1}(AX)A = A^{-1}IA = A^{-1}A = I$$

(b) Đặt $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ và $X = \begin{bmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{bmatrix}$. AB^T và CD^T là các ma trận đối xứng nên $MX = I$. Theo a) $XM = I$ suy ra $A^T D - C^T B = I_n$.

Câu 3. Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases}(pa_{11}-1)x_1+pa_{12}x_2+\cdots+pa_{1n}x_n=0\\ pa_{21}x_1+(pa_{22}-1)x_2+\cdots+pa_{2n}x_n=0\\ \quad\vdots\\ pa_{n1}x_1+pa_{n2}x_2+\cdots+(pa_{nn}-1)x_n=0\end{cases}$$

Đặt $A=\begin{bmatrix}pa_{11}-1 & pa_{12} & \cdots & pa_{1n}\\ pa_{21} & pa_{22}-1 & \cdots & pa_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ pa_{n1} & pa_{n2} & \cdots & pa_{nn}-1\end{bmatrix}$.

Lấy modulo theo p ta được $\overline{A}=\begin{bmatrix}\overline{-1} & \overline{0} & \cdots & \overline{0}\\ \overline{0} & \overline{-1} & \cdots & \overline{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{0} & \overline{0} & \cdots & \overline{-1}\end{bmatrix}$.

Ta có $\det\overline{A}=\left(\overline{-1}\right)^n\neq\overline{0}$. Từ đó suy ra $\det A\neq 0$. Vậy hệ có nghiệm tầm thường.

Câu 4.

- Ta có $\begin{bmatrix}u_{n+1}\\ v_{n+1}\\ w_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_n\\ v_n\\ w_n\end{bmatrix}$. Đặt $U_{n+1}=\begin{bmatrix}u_{n+1}\\ v_{n+1}\\ w_{n+1}\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}, U_n=\begin{bmatrix}u_n\\ v_n\\ w_n\end{bmatrix}$.

Ta có $U_{n+1}=AU_n=A^2U_{n-1}=A^2U_{n-2}=\cdots=A^nU_1=A^{n+1}U_0$. Do đó $U_n=A^nU_0$.

- Chéo hoá ma trận A
  - Đa thức đặc trưng $f_A(t)=-(t-1)(t-2)(t-3)$.
  - Các giá trị riêng của A là $1,2,3$.
  - Không gian riêng $E_A(1)=\langle(1,1,1)\rangle$, $E_A(2)=\langle(1,2,3)\rangle$, $E_A(3)=\langle(0,1,1)\rangle$.
  - Ma trận làm chéo hoá A là $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$ và $P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$

    Dạng chéo của A là $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ và $A=PDP^{-1}$.

- Tính luỹ thừa ma trận A^n

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2^n & 0 \\ 1 & 2\cdot 2^n & 3^n \\ 1 & 3\cdot 2^n & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1-2^n & -1+2^n \\ 1-3^n & 1-2\cdot 2^n+2\cdot 3^n & -1+2\cdot 2^n-3^n \\ 1-3^n & 1-3\cdot 2^n+2\cdot 3^n & -1+3\cdot 2^n-3^n \end{bmatrix}$$

- Khi đó $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-2^n & -1+2^n \\ 1-3^n & 1-2\cdot 2^n+2\cdot 3^n & -1+2\cdot 2^n-3^n \\ 1-3^n & 1-3\cdot 2^n+2\cdot 3^n & -1+3\cdot 2^n-3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n \\ 2\cdot 2^n \\ 3\cdot 2^n \end{bmatrix}$.
- Vậy $u_n = 2^n, v_n = 2\cdot 2^n, w_n = 3\cdot 2^n$ đều chia hết cho 2^n.

Câu 5. Đặt $X = \mathrm{Im}(BC) \cap \mathrm{Ker}A$ và $Y = \mathrm{Im}\, B \cap \mathrm{Ker}A$. Ta có

$$\dim X = \dim\left(\mathrm{Im}(BC) \cap \mathrm{Ker}A\right) = rank(BC) - rank(ABC)$$

$$\dim Y = \dim\left(\mathrm{Im}\, B \cap \mathrm{Ker}A\right) = rank(B) - rank(AB)$$

Chú ý rằng $\mathrm{Im}(BC) \subset \mathrm{Im}(B)$. Vậy $X \subset Y$ và do đó $\dim X \le \dim Y$. Từ đó suy ra

$$rank(AB) + rank(BC) \le rank(B) + rank(ABC)$$

Câu 6. Đa thức đặc trưng $f_A(x) = -x^3 + tr(A)x^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})x + \det A$. Theo Định lý Cayley-Hamilton, A là nghiệm của $f_A(x)$, nghĩa là $f_A(A) = 0$. Với mọi $f(x) \in [x]$, ta có $f(x) = f_A(x)q(x) + r(x)$, trong đó $r(x) = 0$ hoặc $r(x) = ax^2 + bx + c$. Do đó

$$f(A) = f_A(A)q(A) + r(A) = 0q(A) + r(A) = aA^2 + bA + cI.$$

Ta xác định các số a, b, c. Giả sử α, β, γ là các nghiệm của $f_A(x)$. Ta xét các trường hợp sau

- α, β, γ phân biệt. Khi đó a, b, c là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = f(\alpha) \\ a\beta^2 + b\beta + c = f(\beta) \\ a\gamma^2 + b\gamma + c = f(\gamma) \end{cases}$$

- $\alpha = \beta, \gamma$ phân biệt. Khi đó a, b, c là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = f(\alpha) \\ 2a\alpha + b = f'(\alpha) \\ a\gamma^2 + b\gamma + c = f(\gamma) \end{cases}$$

- $\alpha = \beta = \gamma$. Khi đó a, b, c là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = f(\alpha) \\ 2a\alpha + b = f'(\alpha) \\ 2a = f''(\alpha) \end{cases}$$

Lấy $f(x) = x^n$, ta tính được $A^n = aA^2 + bA + cI$, với a, b, c được xác định như trên.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN ĐẠI SỐ

Trường Đại học Giao thông vận tải TpHCM

Câu 1. (6 điểm) Cho a_0 và d là 2 số thực cố định, đặt $a_j = a_0 + jd$ với $j = 0, \ldots, n$. Tính $\det(A)$ biết A là ma trận cấp $n+1$ cho bởi:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ . & . & . & \ddots & . & . \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Câu 2. (6 điểm) Cho A là một ma trận cỡ $m \times n$ có hạng là r. Chứng minh rằng tồn tại các ma trận không suy biến P, Q sao cho $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Câu 3. (6 điểm) Cho A là một ma trận vuông cấp 2012 thỏa mãn điều kiện $A^2 = 0$ và tồn tại ma trận B sao cho $AB + BA = I$. Chứng minh rằng $rank(A) = 1006$.

Câu 4. (6 điểm) Cho $A \in M_n(K)$. Chứng minh $r(A) + r(A+I) = n$ thì A chỉ có các trị riêng là 0 hoặc -1.

Câu 5. (6 điểm) Cho A là một ma trận vuông cấp 2 trên . Với mọi số nguyên dương n, kí hiệu $x_n = \det(A^n + I)$. Chứng minh rằng nếu $x_1 = x_2 = 1$ thì x_n hoặc là 1 hoặc là 4.

Câu 6. (6 điểm) Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ bậc n với các hệ số thực, không có nghiệm thực, thì đa thức

$$Q(x) = P(x) + 2012P'(x) + 2012^2 P''(x) + \ldots + 2012^n P^{(n)}(x)$$

cũng không có nghiệm thực.

ĐÁP ÁN

Câu 1. Cộng cột 1 vào cột cuối cùng ta được

$2013 \geq 2 \cdot \text{rank } A$

$\text{rank } A \leq \frac{2013}{2} =$

$\text{rank } A \leq 1006$

$= \text{rank } I \leq \text{rank}(AB + BA)$

$$\det(A)=(a_0+a_n)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1\\ a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & 1\\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-3} & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 & 1\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nhân dòng thứ $n-1$ với -1 rồi cộng vào dòng cuối cùng, nhân dòng thứ $n-2$ với -1 rồi cộng vào dòng thứ $n-1$,..., nhân dòng thứ 1 với -1 rồi cộng vào dòng thứ 2 ta được:

$$\det(A)=(a_0+a_n)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1\\ d & -d & -d & \cdots & -d & 0\\ d & d & -d & \cdots & -d & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ d & d & d & \cdots & -d & 0\\ d & d & d & \cdots & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n(a_0+a_n)\begin{vmatrix} d & -d & -d & \cdots & -d & -d\\ d & d & -d & \cdots & -d & -d\\ d & d & d & \cdots & -d & -d\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ d & d & d & \cdots & d & -d\\ d & d & d & \cdots & d & d \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

Cộng dòng cuối cùng vào tất cả các dòng còn lại ta được:

$$\det(A)=(-1)^n(a_0+a_n)\begin{vmatrix} 2d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2d & 2d & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2d & 2d & 2d & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 2d & 2d & 2d & \cdots & 2d & 0\\ d & d & d & \cdots & d & d \end{vmatrix}=(-1)^n(2a_0+nd)2^{n-1}d^n.$$

Câu 2. Do A là ma trận cỡ $m\times n$ có hạng là r nên theo định lý phân tích về hạng, A có sự phân tích $A=BC$ với B có cỡ $m\times r$ và C có cỡ $r\times n$, B và C cùng có hạng là r.

Do đó, tồn tại các ma trận P và Q sao cho $PB=\begin{bmatrix} I_r\\ 0\end{bmatrix}$ và $CQ=[I_r \quad 0]$. Vậy

$PAQ=PBCQ=\begin{bmatrix} I_r\\ 0\end{bmatrix}[I_r \quad 0]=\begin{bmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Câu 3. Sử dụng tính chất $\operatorname{rank}(X)+\operatorname{rank}(Y)-n\le \operatorname{rank}(XY)$ ta có $\operatorname{rank}(A^2)+n\ge 2.\operatorname{rank}(A)$, do đó $\operatorname{rank}(A)\le 1006$. Mặt khác,

$2012=\text{rank}(I)=\text{rank}(AB+BA)\le \text{rank}(AB)+\text{rank}(BA)\le 2\min\{\text{rank}(A),\text{rank}(B)\}\le 2.\text{rank}(A)\le 2012$

Như vậy ta phải có $\text{rank}(A)=\dfrac{2012}{2}=1006$.

Câu 4. Ta có $n=r(A)+r(A+I)=r\begin{pmatrix}A & O\\ O & A+I\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A & A\\ O & A+I\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A & A\\ -A & I\end{pmatrix}$

$$=r\begin{pmatrix}A+A^2 & A\\ O & I\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A+A^2 & O\\ O & I\end{pmatrix}=r(I)+r(A+A^2)=n+r(A+A^2).$$

Do đó ta phải có $r(A+A^2)=0\Leftrightarrow A+A^2=0$. Vậy A chỉ có thể có các trị riêng là 0 hoặc -1.

Câu 5. Gọi $P(X)=\det(A-XI)$ là đa thức đặc trưng của ma trận A. Ta biết rằng $P(X)=X^2-aX+b$ với $a=\text{trace}(A)$ (tổng các phần tử trên đường chéo của A) và $b=\det(A)$. Hơn nữa, A thỏa mãn đa thức đặc trưng của nó, nghĩa là $A^2-aA+bI=O$. Theo giả thiết, ta có $x_1=\det(A+I)=P(-1)=1$, nghĩa là $a+b=0$. Để sử dụng $x_2=1$, để ý rằng $A^2+I=(A+iI)(A-iI)$, với $i^2=-1$. Khi đó ta có

$$1=x_2=P(-i)P(i)=(-1+ai+b)(-1-ai+b)=(b-1)^2+a^2.$$

Hệ quả là $a=-b$ và $a^2+b^2-2b=0$. Ta nhận được hoặc $b=0$ hoặc $b=1$ và $a=0$ hoặc $a=-1$. Trường hợp $a=b=0$ dẫn đến $A^2=0$ và $A^n=0$ với mọi $n\ge 2$, và do đó $x_n=1$ với mọi n. Giả sử rằng $a=-1,b=1$. Khi đó $P(X)=X^2+X+1$, dẫn đến $A^2+A+I=O$ và $A^3=I$ $(0=(A-I)(A^2+A+I=A^3-I)$. Theo quy nạp, $A^{3k}=I$ và $x_{3k}=\det(2I)=2$. Tương tự, $A^{3k+1}=A^{3k}A=A, x_{3k+1}=x_1=1$ và $A^{3k+2}=A^{3k}A^2=A^2, x_{3k+2}=x_2=1$. Điều này dẫn đến $x_n\in\{1,4\}$ với mọi n.

Câu 6. Ta có

$$Q'(x)=P'(x)+2012P''(x)+2012^2P^{(3)}(x)+...+2012^{n-1}P^{(n)}(x)\ (\text{vì } P^{(n+1)}(x)=0).$$

Do đó $Q(x)-2012Q'(x)=P(x)$.

Vì $P(x)$ không có nghiệm thực nên n chẵn.

- Nếu $n=0$ thì $Q(x)=P(x)$ nên không có nghiệm thực.
- Nếu $n\ge 2$, giả sử $Q(x)$ có nghiệm, do $\deg Q(x)=\deg P(x)=n$ chẵn nên $Q(x)$ có ít nhất hai nghiệm thực, dẫn đến phương trình $f(x)=e^{-\frac{x}{2012}}Q(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm. Theo định lí Roll suy ra $f'(x)=-\dfrac{1}{2012}e^{-\frac{x}{2012}}\left(Q(x)-2012Q'(x)\right)$ có ít nhất một nghiệm thực. Do đó $P(x)=Q(x)-2012Q'(x)$ phải có ít nhất một nghiệm thực, trái với giả thiết.

Vậy $Q(x)$ không có nghiệm thực.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN ĐẠI SỐ
Trường Đại học Vinh

Câu 1: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Tính tổng tất cả các phần tử của ma trận A^{2012}.

b) Tìm số thực k sao cho ma trận $A^{2012}+k.E$ suy biến, với E là ma trận đơn vị cấp 3.

Câu 2: Tìm ma trận $A=(a_{ij})$ vuông cấp 2012×2012, phần tử thực có các tính chất: $a_{ii}=2012$ và $a_{ij}\in\{-1;\ 1\}$, $i\neq j,\ \ i,j=1,2,...,2012$ sao cho ma trận A suy biến.

Câu 3: Cho ma trận A vuông cấp 2012×2012, phần tử thực thỏa mãn $A^{C}=-A$, trong đó A^{C} kí hiệu là ma trận chuyển vị của ma trận A. Chứng minh rằng ma trận $A+2012E$ khả nghịch.

Câu 4: a) Tìm đa thức $f(x)$ với hệ số thực, có bậc bé nhất sao cho khi chia $f(x)$ cho $(x-1)^2$ còn dư $2x$ và khi chia $f(x)$ cho $(x-2)^3$ còn dư $3x$.

b) Đa thức $P(x)$ hệ số thực, có ít nhất 4 nghiệm thực (kể cả nghiệm bội). Chứng minh rằng đa thức $Q(x)=8P(x)-3P'(x)-2012P''(x)$ cũng có ít nhất 4 nghiệm thực.

Câu 5: Tồn tại hay không ma trận $A=(a_{ij})$ cấp 2011×2012 có các phần tử đều thực, nhận giá trị trên đoạn $[0,\ 1]$ và thỏa mãn

$$\frac{1}{\sqrt[2012]{mn}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1,\ \forall m,n\in\quad,\ 1\le m\le 2011,\ 1\le n\le 2012.$$

Câu 6: Cho ma trận $A=(a_{ij})$ vuông cấp $n\times n$, phần tử thực thỏa mãn $A^2=A$. $b_i,\ \ i=1,2,...,n$ là các số thực cho trước. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(1+a_{11})x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+(1+a_{22})x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+(1+a_{nn})x_n=b_n.\end{cases}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1: a) Ta có $A=B+2E$ với $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -4 & 2\\ 3 & -6 & 3\end{bmatrix}$. Dễ dàng kiểm tra được $B^2=0$, do đó $B^n=0$, với mọi $n\geq 2$. Do B và E giao hoán được với nhau nên ta có hằng đẳng thức $A^{2012}=(B+2E)^{2012}=\sum_{k=0}^{2012}C_{2012}^k B^k(2E)^{2012-k}=2012.2^{2011}.B+2012.E$

$$=\begin{bmatrix}2012(2^{2011}+1) & -2012.2^{2012} & 2012.2^{2011}\\ 2012.2^{2012} & 2012(-2^{2013}+1) & 2012.2^{2012}\\ 3.2012.2^{2011} & -6.2012.2^{2011} & 2012(3.2^{2011}+1)\end{bmatrix}$$. Dễ thấy rằng tổng các phần tử ở mỗi hàng của ma trận A^{2012} đều bằng 2012 nên tổng tất cả các phần tử của ma trận A^{2012} bằng $3.2012=6036$.

b) Theo kết quả câu (a) và do $\det(B)=0$ nên ta chọn $k=-2012$ thì ma trận $A^{2012}-2012.E=2012.2^{2011}.B$ suy biến.

Câu 2: Giả sử tìm được ma trận A suy biến thỏa mãn yêu cầu bài toán. Theo tính chất đồng dư, ta có $\det(A)\equiv\det(B)$ (mod 2), trong đó $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & \ldots 1\\ 1 & 0 & \ldots 1\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & 1 & \ldots 0\end{bmatrix}_{2012\times 2012}$. Ta lại có

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2011 & 2010 & \dots 2010 \\ 2010 & 2011 & \dots 2010 \\ \dots & \dots & \dots \\ 2010 & 2010 & \dots 2011 \end{bmatrix}_{2012\times 2012}$$, nên $\det(B^2) \equiv \det(E) = 1 \pmod 2$. Mặt khác $(\det B)^2 = \det(B^2)$ nên $\det(B)$ là số nguyên lẻ, kéo theo $\det(A)$ cũng là số nguyên lẻ. Do đó $\det(A) \neq 0$, tức là A khả nghịch (mâu thuẫn). Vậy, không tồn tại ma trận A thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Gọi $X = (x_i)_{2012\times 1} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2012}]^C$ là vectơ cột sao cho $(A + 2012.E)X = 0$ (1). Bài toán hoàn toàn được chứng minh nếu ta chứng minh được $X = 0$.

Từ (1), lấy chuyển vị 2 vế ta được $X^C(A^C + 2012.E) = 0$

$\Rightarrow X^C(-A + 2012.E) = 0 \Rightarrow -X^CA + 2012.X^C = 0$ (vì $A^C = -A$)

$\Rightarrow -X^CAX + 2012.X^CX = 0$ (2).

Từ (1) suy ra $AX + 2012.X = 0 \Leftrightarrow AX = -2012.X$ (3).

Kết hợp (2) và (3) suy ra

$-X^C(-2012.X) + 2012.X^CX = 0 \Leftrightarrow X^CX + X^CX = 0 \Leftrightarrow X^CX = 0$

$$\Leftrightarrow [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{2012}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{2012} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2012}^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{2012} = 0$$

Điều này có nghĩa là ma trận $A + 2012E$ khả nghịch.

Câu 4: a) Từ giả thiết suy ra $\deg(f) \geq 3$. Ta có đẳng thức sau

$$(x-2)^3 = (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 3(x-1) - 1 = (x-1)^2(x-4) + 3x - 4 \ (*).$$

Trường hợp 1: $\deg(f) = 3$.

Từ giả thiết $f(x)$ chia cho $(x-2)^3$ còn dư $3x$ nên $f(x)$ có dạng $f(x)=A(x-2)^3+3x$, A là hằng số. Áp dụng đẳng thức (*) ta có $f(x)=A(x-4)(x-1)^2+A(3x-4)+3x=A(x-4)(x-1)^2+3(A+1)x-4A.$

Từ giả thiết $f(x)$ chia cho $(x-1)^2$ còn dư $2x$, kết hợp với đẳng thức trên suy ra

$$\begin{cases}3(A+1)=2\\-4A=0\end{cases}$$: không tồn tại số thực A.

Vậy không tồn tại đa thức bậc 3 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

<u>Trường hợp 2</u>: $\deg(f)=4$.

Từ giả thiết $f(x)$ chia cho $(x-2)^3$ còn dư $3x$ nên $f(x)$ có dạng

$f(x)=(x-2)^3(ax+b)+3x$, a,b là các hằng số. Áp dụng đẳng thức (*) ta có

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)^2(x-4)(ax+b)+(3x-4)(ax+b)+3x\\&=(x-1)^2\left[(x-4)(ax+b)+3a\right]+(2a+3b+3)x-(3a+4b).\end{aligned}$$

Từ giả thiết $f(x)$ chia cho $(x-1)^2$ còn dư $2x$, kết hợp với đẳng thức trên suy ra

$$\begin{cases}2a+3b+3=2\\3a+4b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+3b=-1\\3a+4b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=-3.\end{cases}$$

Từ đó, đa thức $f(x)$ cần tìm là

$$f(x)=(x-2)^3(4x-3)+3x=4x^4-27x^3+66x^2-65x+24.$$

b) Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:

<u>Bổ đề:</u> Cho $Q(x)$ hệ số thực, có ít nhất 4 nghiệm thực (kể cả nghiệm bội). Khi đó, với mọi số thực a,b $(a\neq 0)$ thì đa thức $f(x)=a.Q(x)+b.Q'(x)$ cũng có ít nhất 4 nghiệm thực.

<u>Chứng minh bổ đề:</u> Ta chỉ cần xét cho $b\neq 0$, vì nếu $b=0$ thì bài toán hiển nhiên đúng.

Xét hàm số $g(x)=b.Q(x).e^{\frac{a}{b}x}$. Ta có $g'(x)=\left(a.Q(x)+b.Q'(x)\right).e^{\frac{a}{b}x}$. Ta có các khả năng sau xảy ra:

Khả năng 1: Đa thức $Q(x)$ có bậc lẻ.

Đa thức $Q(x)$ hệ số thực, có ít nhất 4 nghiệm thực (kể cả nghiệm bội) $\Rightarrow Q(x)$ có ít nhất 5 nghiệm thực $\Rightarrow g(x)$ có ít nhất 5 nghiệm thực. Theo Định lý Rolle tổng quát suy ra $g'(x)$ có ít nhất 4 nghiệm thực. Nghĩa là $f(x)$ có ít nhất 4 nghiệm thực.

Khả năng 2: Đa thức $Q(x)$ có bậc chẵn.

Đa thức $Q(x)$ hệ số thực, có ít nhất 4 nghiệm thực (kể cả nghiệm bội) $\Rightarrow g(x)$ có ít nhất 4 nghiệm thực. Theo Định lý Rolle tổng quát suy ra $g'(x)$ có ít nhất 3 nghiệm thực. Suy ra $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm thực. Do trong trường hợp này, đa thức $f(x)$ có bậc chẵn nên $f(x)$ có ít nhất 4 nghiệm thực.

Bổ đề được chứng minh hoàn toàn.

Chú ý là bổ đề trên vẫn còn đúng nếu ta thay 4 bởi số *m* bất kì.

Trở lại bài toán:

Đặt $g(x)=\left(\alpha.P(x)-2012.P'(x)\right).e^{\frac{8}{\alpha}x}$ (1) và $R(x)=\alpha.P(x)-2012.P'(x)$ (số thực α ta sẽ chỉ ra sau). Ta có

$$g'(x)=\left(8P(x)+\left(\alpha-\frac{16096}{\alpha}\right)P'(x)-2012P''(x)\right).e^{\frac{8}{\alpha}x}.$$

Ở trên, ta sẽ chọn số thực α sao cho $\alpha-\dfrac{16096}{\alpha}=-3$ (số thực α là tồn tại vì $\alpha-\dfrac{16096}{\alpha}=-3 \Leftrightarrow \alpha^2+3\alpha-16096=0$ có nghiệm). Từ đó $g'(x)=Q(x).e^{\frac{8}{\alpha}x}$ (2).

Đặt $h(x)=-2012.P(x).e^{-\frac{\alpha}{2012}x}$. Khi đó

$$h'(x)=\left(\alpha.P(x)-2012.P'(x)\right).e^{-\frac{\alpha}{2012}x}=R(x).e^{-\frac{\alpha}{2012}x}.$$

Áp dụng liên tiếp bổ đề trên, ta có: đa thức $P(x)$ hệ số thực, có ít nhất 4 nghiệm thực (kể cả nghiệm bội) $\Rightarrow$ đa thức $R(x)$ có ít nhất 4 nghiệm thực $\Rightarrow$ đa thức $Q(x)$ có ít nhất 4 nghiệm thực.

Câu 5: Ta sẽ chứng tỏ tồn tại ma trận A thỏa mãn yêu cầu bài toán. Từ giả thiết, ta cần chứng tỏ tồn tại (a_{ij}) thỏa mãn:

$$\begin{cases} S_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=(mn)^{\frac{1}{2012}}, \text{ với mọi } 1\le m\le 2011, 1\le n\le 2012,\\ a_{ij}\in[0,1]. \end{cases}$$

Thật vậy, từ định nghĩa tổng S_{mn} suy ra các phần tử của ma trận A được xác định như sau: $a_{mn}=S_{mn}-S_{m-1,n}-S_{m,n-1}+S_{m-1,n-1}$, với mọi $1\le m\le 2011, 1\le n\le 2012$ (quy ước: $S_{0,n}=S_{m,0}=0$). Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} a_{mn}&=(mn)^{\frac{1}{2012}}-(m-1)^{\frac{1}{2012}}n^{\frac{1}{2012}}-m^{\frac{1}{2012}}(n-1)^{\frac{1}{2012}}+(m-1)^{\frac{1}{2012}}(n-1)^{\frac{1}{2012}}\\ &=\left(m^{\frac{1}{2012}}-(m-1)^{\frac{1}{2012}}\right)\left(n^{\frac{1}{2012}}-(n-1)^{\frac{1}{2012}}\right). \end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh $a_{ij} \in [0, 1]$ với mọi *i, j*. Điều này là đúng nếu ta chứng minh được $0 \le m^{\frac{1}{2012}} - (m-1)^{\frac{1}{2012}} \le 1$. Bất đẳng thức thứ nhất là hiển nhiên, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức thứ hai. Thậy vậy, xét hàm số $f(x) = x^{\frac{1}{2012}} - (x-1)^{\frac{1}{2012}}$ trên $[1, +\infty)$. Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2012}x^{\frac{1}{2012}-1} - \frac{1}{2012}(x-1)^{\frac{1}{2012}-1} = \frac{1}{2012}\left(\frac{1}{x^{\frac{2011}{2012}}} - \frac{1}{(x-1)^{\frac{2011}{2012}}}\right) \le 0, \forall x \ge 1$$

. Từ đó suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[1, +\infty)$, nên $f(x) \le f(1) = 1$.

<u>**Câu 6:**</u> Đặt $B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^C$ và $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^C$. Hệ đã cho tương đương với $MX = B$, trong đó $M = A + E$, với E là ma trận đơn vị cấp *n*. Ta có

$$M^2 = (A+E)^2 = A^2 + 2A + E = 3A + E = 3(M-E) + E = 3M - 2E$$

$$\Rightarrow E = M\left(\frac{3}{2}E - \frac{1}{2}M\right) = M\left(\frac{3}{2}E - \frac{1}{2}(A+E)\right) = M\left(E - \frac{1}{2}A\right).$$

Vậy ma trận M khả nghịch và $M^{-1} = E - \frac{1}{2}A$. Hệ tương đương với

$X = M^{-1}B = \left(E - \frac{1}{2}A\right)B = B - \frac{1}{2}AB$. Ta có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - \frac{1}{2}(b_1a_{11} + b_2a_{12} + \dots + b_na_{1n}) \\ x_2 = b_2 - \frac{1}{2}(b_1a_{21} + b_2a_{22} + \dots + b_na_{2n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_n - \frac{1}{2}(b_1a_{n1} + b_2a_{n2} + \dots + b_na_{nn}). \end{cases}$$

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN ĐẠI SỐ

Trường Đại học Hồng Đức, Thanh Hóa

Câu 1 CMR nếu ma trận A=(a_{ij}) vuông cấp n trên trường số thực thỏa mãn

$a_{ii} > \sum_{i\neq j=1}^{n} |a_{ij}|, \forall i = 1,2,...,n.$ thì det(A)>0.

Câu 2 Giả sử A=$(a_{ij})\in$ M(n,**R**) có $|a_{ij}| \leq 1$ với mọi i, j = 1, 2,…, n. Chứng minh rằng max|det(A)| là số nguyên chia hết cho 2^{n-1}.
Câu 3 Giả sử A∈M(n,R). CMR nếu tr(AX) = 0 với mọi X∈M(n,R) thì A = 0.
Câu 4 Giả sử A,B là các ma trận vuông, thực cấp n sao cho A lũy linh và AB=BA, $B\neq 0$. Chứng minh rank(AB)<rank(B).
Câu 5 Cho f:M(n,**R**)→**R** là ánh xạ tuyến tính từ kgvt các ma trận thực cấp n vào kgvt các số thực **R**. Chứng minh rằng tồn tại ma trận C∈ M(n,**R**) sao cho f(A) = tr(AC).
Câu 6 (5 điểm). Giả sử đa thức $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + 1$ với các hệ số không âm có n nghiệm thực. Chứng minh rằng $f(2)\geq 3^n$.

ĐÁP ÁN

Câu 1. Quy nạp theo n.
Với n=2 ta có det(A)= $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > |a_{12}||a_{21}| - a_{12}a_{21} > 0$. bài toán đúng với n=2.
Giả sử bài toán đúng đến n-1, n≥3, ta chứng minh bài toán cũng đúng với n.

Ta có det(A) = $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Nhân dòng đầu với $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, sau đó cộng vào dòng thứ i ta

được det(A) = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$. Đặt B = $\begin{vmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$

Ta có $b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j} = \frac{a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, \forall i, j = 2,...,n.$

Và $b_{ii} = a_{ii} - \frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}} = \frac{a_{11}a_{ii} - a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}$. Vì $a_{kk} > \sum_{k\neq j=1}^{n} |a_{kj}|, \forall k = 2,...,n.$nên $a_{ii} > |a_{i1}|, a_{11} > |a_{1i}|$ suy ra

$$b_{ii} = \frac{a_{ii}a_{11} - a_{i1}a_{1i}}{a_{11}} > \frac{|a_{i1}||a_{1i}| - a_{i1}a_{1i}}{a_{11}} \geq \frac{a_{i1}a_{1i} - a_{i1}a_{1i}}{a_{11}} = 0.$$

Ta chứng minh B cũng thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Với i=2,3,…,n ta có $\sum_{j=2}^{n}\frac{|a_{i1}a_{1j}|}{a_{11}}=\frac{|a_{i1}|}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}|<\frac{|a_{i1}|}{a_{11}}a_{11}=|a_{i1}|$. Mặt khác

$$\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}+\sum_{i\neq j=2}^{n}|b_{ij}|=\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}+\sum_{i\neq j=2}^{n}\left|a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\right|\leq$$

$$\left|\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}\right|+\sum_{i\neq j=2}^{n}|a_{ij}|+\sum_{i\neq j=2}^{n}\left|\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\right|=$$

$$\sum_{i\neq j=2}^{n}|a_{ij}|+\sum_{j=2}^{n}\left|\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\right|<\sum_{i\neq j=2}^{n}|a_{ij}|+|a_{i1}|=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<a_{ii}$$

$$a_{ii}-\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}>\sum_{i\neq j=2}^{n}|b_{ij}|\Leftrightarrow b_{ii}>\sum_{i\neq j=2}^{n}|b_{ij}|$$

Theo giả thiết quy nạp thì det(B)>0. Khi đó det(A)= a_{11} det(B)>0 và ta được đpcm.

Câu 2. Ta chứng minh det(A) đạt giá trị lớn nhât khi $a_{ij} = \pm 1$.

+ Giả sử det(A)$\geq$0. Xét phần tử a_{ik} của A, với $-1< a_{ik}<1$.

Nếu $A_{ik}>0$ thì det(A) tăng khi ta thay $a_{ik} = 1$.

Nếu $A_{ik}<0$ thì det(A) tăng khi thay $a_{ik} = -1$.

Nếu $A_{ik} = 0$ thì det(A) không đổi khi thay a_{ik} bằng 1 hoặc -1.

Tương tự cho trường hợp det(A)<0, ta có det(A) tăng về trị tuyệt đối khi ta thay $a_{ik} = 1$ nếu $A_{ik} <0$ và thay $a_{ik} = -1$ nếu $A_{ik}>0$. Vậy det(A) đạt giá trị lớn nhất khi $a_{ij} = \pm 1$.

Vì giá trị tuyệt đối của det(A) không thay đổi khi ta đổi dấu các dòng và các cột của A, nên ta có thể giả thiết dòng đầu và cột đầu của A toàn 1..

Nhân dòng đầu với -1,sau đó cộng vào các dòng còn lại ta được

det(A) = det(B), với B=$(b_{ij})\in$ M(n-1,R) có b_{ij} = 0 hoặc -2. Khi đó

det(B) = 2^{n-1}det(C), với C=$(c_{ij})\in$ M(n-1,R) có c_{ij} = 0 hoặc -1. Hiển nhiên det(C) là số nguyên và ta được đpcm.

Câu 3. Giả sử $A\neq 0$, khi đó tồn tại phần tử a_{ij} của A sao cho $a_{ij}\neq 0$.
Chọn ma trận X= (x_{km}) với x_{km} = 1 nếu (k,m) = (i,j) và x_{km} = 0 nếu (k,m) $\neq$ (i,j). Khi đó nếu đặt AX = B = (b_{ij}) thì ta có

$b_{ll}=\sum_{s=1}^{n}a_{ls}x_{sl}$, với mọi l = 1,2,…,n. Nhận thấy b_{ll} = 0 nếu $l\neq i$ và $b_{ll} = a_{ij}$ nếu l=i. Suy ra

tr(AX) = $a_{ij}\neq 0$, mâu thuẫn với giả thiết. Vậy A = 0.

Câu 4. Ta có Im(AB)$\subset$Im(B).

Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp $A^kB = BA^k, \forall k \in N^*$.

Giả sử Im(AB)=Im(B).

Chứng minh bằng quy nạp $\mathrm{Im}(BA^k) =$ Im(B).

Công thức đúng với k=1.

Giả sử công thức đúng với k, ta chứng minh công thức cũng đúng với k+1.

Với E là ma trận cột ta có

$\mathrm{Im}(BA^{k+1}) = (BA^{k+1})E = (A^{k+1})E = A(A^kB)E =$

$= A(B(E)) = (AB)(E) = (BA)(E) = \mathrm{Im}(BA) = \mathrm{Im}(B)$

Vì A là lũy linh nên tồn tại k nguyên dương để $A^k = 0$. Suy ra Im(B)=0 hay B=0, mâu thuẫn với gt. Vậy rank(AB)<rank(B).

Câu 5. Với E_{ij} là cơ sở chính tắc của kgvt M(n,**R**), giả sử $c_{ij} = f(E_{ji})$, với mọi i, j =1,2,…,n. Đặt $C = (c_{ij}) \in M(n,\mathbf{R})$. Ta có $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$. Khi đó

$f(A) = f(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}f(E_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_{ji} = \mathrm{tr}(AC)$.

Câu 6. Vì các hệ số của f(x) không âm và f(0) = 1 nên cả n nghiệm của f(x) đều âm. Giả sử $-x_i$, i=1,2,…,n là các nghiệm của f(x) (x_i<0, với mọi i=1,2,…,n). Khi đó ta có f(x) = $\prod_{i=1}^{n}(x+x_i)$ và f(2) = $\prod_{i=1}^{n}(2+x_i)$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có $2+x_i = 1+1+x_i$ $\geq 3\sqrt[3]{x_i}$ với mọi i=1,2,…,n.

Khi đó $f(2) \geq 3^n \sqrt[3]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$. Theo định lý Viet ta có $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Vậy $f(2) \geq 3^n$, đpcm.

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN ĐẠI SỐ
Học Viện PKKQ

Câu I:

Tồn tại hay không đa thức dạng:

$ax^{2012} - ax^{2011} + b_1x^{2010} + b_2x^{2009} + \ldots + b_{2009}x^2 - 2012^2cx + c \;\; (a,\; b_1,\ldots,b_{2009},\; c\in$)

có đúng 2012 nghiệm thực dương phân biệt?

Đáp án:

Giả sử tồn tại đa thức với hệ số thực dạng

$$P(x) = ax^{2012} - ax^{2011} + b_1x^{2010} + b_2x^{2009} + \ldots + b_{2009}x^2 - 2012^2cx + c$$

có đúng 2012 nghiệm thực dương phân biệt $x_1,\; x_2,\ldots,\; x_{2012}$.

Từ đó suy ra $\deg P(x) \geq 2012 \Rightarrow a \neq 0$.

Áp dụng định lí Viét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{2012} = -\dfrac{-a}{a} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2\ldots x_{2011} + \ldots + x_2x_3\ldots x_{2012} = 2011^2\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2\ldots x_{2012} = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Từ hệ thức cuối suy ra $c \neq 0$. Chia vế với vế của hai hệ thức cuối, ta được:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{2012}} = 2012^2$$

Từ hệ thức $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2012} = 1$, và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2012^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{2012}} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_{2012})\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{2012}}\right)$$

$$\geq \left(2012\sqrt[2012]{x_1x_2\ldots x_{2012}}\right)\left(2012\sqrt[2012]{\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_{2012}}}\right) = 2012^2$$

Từ đó suy ra $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2012}$ (Mâu thuẫn, vì $x_1, x_2, \ldots, x_{2012}$ đôi một khác nhau).

Vậy không tồn tại đa thức theo yêu cầu bài toán.

<u>Câu II:</u>

Cho $P_n(x)$, $n \in$ ¥ là một dãy đa thức với hệ số thực và được xác định bởi:

$$P_0(x) = 1;\ P_1(x) = x;\ P_{n+2}(x) = x.P_{n+1}(x) - P_n(x),\ \forall n \in \text{¥}$$

Chứng minh rằng $P_{2012}^2(x) - P_{2011}(x)P_{2013}(x) = 1$

Đáp án:

Ta chứng minh $P_{n+1}^2 - P_nP_{n+2} = P_{n+2}^2 - P_{n+1}P_{n+3}\ \forall\ n \in$ ¥

(1)

Thật vậy, ta có:

(1) $\Leftrightarrow P_{n+1}(P_{n+1} + P_{n+3}) = P_{n+2}(P_{n+2} + P_n)$

(2)

Mặt khác từ giả thiết ta có:

$$P_{n+2}(x) = x.P_{n+1}(x) - P_n(x)$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} P_{n+2} + P_n = x.P_{n+1} \\ P_{n+3} + P_{n1} = x.P_{n+2} \end{cases}$$

Từ các kết quả (2) và (3) ta có:

(2) $\Leftrightarrow P_{n+1}.x.P_{n+2} = P_{n+2}.x.P_{n+1}$ (hiển nhiên đúng)

Vậy ta có:

$$P_{n+1}^2 - P_nP_{n+2} = P_{n+2}^2 - P_{n+1}P_{n+3}\ \forall\ n \in ¥$$

$\Rightarrow P_{n+1}^2 - P_nP_{n+2} = P_1^2 - P_0P_2 = x^2 - 1.\left(x^2 - 1\right) = 1\ \forall\ n \in ¥$.

Vậy $P_{2012}^2(x) - P_{2011}(x)P_{2013}(x) = 1$. W

ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN: MÔN GIẢI TÍCH

Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng

Câu 1.

1. Cho

$$S_n = \frac{1^{2011} + 2^{2011} + ... + n^{2011}}{n^{2012}}$$

Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

2.Chứng minh rằng: $\int\limits_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ khi $x \to \infty$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = 2x(1-x), x \in \Re$. Định nghĩa

$$f(n) = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{n}$$

Tìm

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Câu 3. Cho $F : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm số được định nghĩa bởi

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{lnt} dt$$

Chứng minh rằng F là song ánh và tìm miền giá trị của F.

Câu 4. Cho f là hàm số liên tục trên [0,1], sao cho với mỗi $x \in [0, 1]$ta có

$$\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}$$

. Chứng minh rằng $\int\limits_0^1 f^2(t)dt \geq \frac{1}{3}$.

Câu 5. Giả sử $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$ với x, h bất kỳ ta có đồng nhất thức

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'(x + \frac{h}{2}).$$

Chứng minh rằng:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

trong đó a,b,c là các hằng số.

Câu 6. Cho hàm số liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$ sao cho $f(0)=0, f(1)=1$
Chứng minh rằng tồn tại các điểm $x_1, x_2, ..., x_2012, 0 < x_1 < x_2 < ... < x_2012 < 1$ sao cho

$$\frac{1}{2}[f'(x_1)+f'(x_2)+...+f'(x_2012)] = 1$$

Đáp án

Câu 1. Ta có

$$S_n = \frac{1^{2011}+2^{2011}+...+n^{2011}}{n^{2012}}$$

$$S_n = \frac{1}{n}\frac{1^{2011}+2^{2011}+...+n^{2011}}{n^{2011}}$$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{2011}$$

Đây là tổng tích phân của hàm số $f(x)=x^{2011}$ trên đoạn $[0,1]$ khi chia nó thành n phần bằng nhau. Vì vậy,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 x^{2011}dx = \frac{x^{2012}}{2012}\Big|_0^1 = \frac{1}{2012}$$

2. Ta chỉ ra rằng:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = 1$$

. Theo quy tắc L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt+2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{\to+\infty}\left(\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}+1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}+1 = 1$$

Câu 2. Ta có $f(x)=2x(1-x)=\frac{1}{2}-2(x-\frac{1}{2})^2$. Theo chứng minh bằng quy nạp ta được

$$f_n(x) = \frac{1}{2} - 2^{2^n-1}(x-\frac{1}{2})^{2^n}.$$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = [\frac{1}{2}x - \frac{2^{2^n-1}}{2^n+1}(x-\frac{1}{2})^{2^n+1}]_{x=0}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2^n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$$

Câu 3. Đặt $M = \max\limits_{0\le x\le 1} |f'(x)|$
Từ bất đẳng thức $-M \le f'(x) \le M, x \in [0,1]$ ta suy ra:

$$-Mf(x) \le f'(x)f(x) \le Mf(x)$$

Lấy tích phân ta được:

$$-M\int_0^x f(t)dt \le \frac{1}{2}f^2(x) - \frac{1}{2}f^2(0) \le M\int_0^x f(t)dt, x \in [0,1]$$

$$-Mf(x)\int_0^x f(t)dt \le \frac{1}{2}f^3(x) - \frac{1}{2}f^2(0)f(x) \le Mf(x)\int_0^x f(t)dt, x \in [0,1]$$

Lấy tích phân trên $[0,1]$ ta được:

$$-M(\int_0^1 f(t)dt)^2 \le \int_0^1 f^3(x)dx - f^2(0)\int_0^1 f(x)dx \le M(\int_0^1 f(t)dt)^2$$

$$\Leftrightarrow |\int_0^1 f^2(x)dx - f^2(0)\int_0^1 f(x)dx| \le M(\int_0^1 f(x)dx)^2$$

Câu 4. Xét

$$\lim_{c\to a}\frac{\int\limits_a^x f(t)dt - xf(a) + af(a)}{(x-a)^2}$$

$$\lim_{c\to a}\frac{f(c)(x-a) - f(a)(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$\lim_{c\to a}\frac{f(c)-f(a)}{(x-a)}$$

$$\lim_{c\to a}\frac{f(c)-f(a)}{(x-a)} = f'(a)\lim_{c\to a}\frac{(c-a)}{(x-a)}(1)$$

Mặt khác, áp dụng quy tắc L'Hospital cho

$$\lim_{c\to a}\frac{\int\limits_a^x f(t)dt - xf(a) + af(a))}{(x-a)^2}$$

ta được $\frac{f'(a)}{2}$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5. Ta có:

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'(x+\frac{h}{2})(1)$$

Lấy đạo hàm theo h hai vế ta được

$$f'(x+h) \equiv \frac{h}{2}f''(x+\frac{h}{2}) + f'(x+\frac{h}{2})$$

thay vào $x = -\frac{h}{2}$, ta được:

$$f'(\frac{h}{2}) \equiv f''(0) + f'(0)(2)$$

Thay vào (1) $x = 0$ ta được:

$$f(h) - f(0) \equiv hf'(\frac{h}{2})(3)$$

Từ (2)(3) ta suy ra

$$f(h) \equiv h^2\frac{f''(0)}{2} + hf'(0) + f(0)$$

Ký hiệu $h = x, a = \frac{f''(0)}{2}, b = f'(0), c = f(0)$ ta được hàm

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Câu 6. Theo định lý Lagrange, với mỗi $i \in \{1, 2, ..., 2012\}$, tồn tại $x_i \in (\frac{i-1}{2012}, \frac{i}{2012})$ sao cho

$$f(\frac{i}{2012}) - f(\frac{i-1}{2012}) = f'(x_i)\frac{1}{2012}.$$

Do vậy,

$$\frac{1}{2012}\sum_{i=1}^{2012} f'(x_i) = f(1) - f(0) = 1$$

Đề và đáp án: Môn Giải tích

Trường Đại học Bạc Liêu

Câu 1. Cho hai dãy $(u_n)_n$ và $(w_n)_n$ sau

$$\begin{cases} |w_0| < 1; w_0 \neq 0 \\ w_0 = \dfrac{2011}{2012} u_0 \\ w_{n+1} = w_n^2 \forall n \\ u_{n+1}^3 = 7u_n w_n^2 - 6w_{n+1}^3 \forall n \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$.

Giải. Do $w_{n+1} = w_n^2$ nên $w_n = w_0^{2^n}$. Do $|w_0| < 1$ nên $\lim w_n = 0$. Từ $u_{n+1}^3 = 7u_n w_n^2 - 6w_{n+1}^3 \forall n$ ta có $t_{n+1}^3 = 7t_n - 6$ với $t_n = \dfrac{u_n}{w_n}$; $t_0 = \dfrac{2012}{2011}$. Xét hàm số

$$f(x) = \sqrt[3]{7x - 6}$$

$f'(x) > 0 \ \forall x \neq \dfrac{6}{7}$ nên f là hàm tăng. Do f là hàm tăng nên sự đơn điệu của dãy $(t_n)_n$ phụ thuộc vào hiệu $t_1 - t_0$.

Bảng xét dấu $f(x) - x$

x		-3		1		2	
f(x)-x	+	0	-	0	+	0	-

Do $t_0 \in (1; 2)$ nên $t_1 - t_0 > 0$, suy ra $(t_n)_n$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi 2 vì $f([1;2]) \subset [1;2]$. Suy ra $(t_n)_n$ hội tụ về điểm bất động của f trong $[t_0; 2]$. Suy ra $\lim t_n = 2$, $\lim u_n = \lim \dfrac{u_n}{w_n} . \lim w_n = 0$.

Câu 2. Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$\begin{cases} f(x) = f\left(\dfrac{2 + \sqrt{2x^2 + 4|x| + 4}}{|x|}\right) \ \forall x \neq 0 \\ f(0) = 2012 \end{cases}$$

Giải. Rõ ràng f là hàm chẵn nên ta xét f trong $(0; +\infty)$. Lấy tùy ý $x_0 \in (0; +\infty)$. Xét dãy $x_0; x_1; ...; x_n; ...$ định bởi

$$x_{n+1} = \frac{2 + \sqrt{2x_n^2 + 4x_n + 4}}{x_n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Bằng qui nạp: $x_n > \sqrt{2} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $x_{n+1} < 5$, suy ra dãy $\{x_n\}$ bị chặn. Xét hàm số

$$h(x) = \frac{2}{x} + \sqrt{2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}; \ \sqrt{2} < x < 5.$$

Dãy số x_n viết lại

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = h(x_n); \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$h'(x) < 0$ nên $h_0 h$ là hàm tăng. Suy ra hai dãy con x_{2n} và x_{2n+1} đơn điệu và bị chặn nê
hội tụ.

Đặt $\lim x_{2n} = a$; $\lim x_{2n+1} = b$. Ta có

$$\begin{cases} b = \dfrac{2}{a} + \sqrt{2 + \dfrac{4}{a} + \dfrac{4}{a^2}} \\ a = \dfrac{2}{b} + \sqrt{2 + \dfrac{4}{b} + \dfrac{4}{b^2}} \end{cases}$$

Suy ra $a = b$, $\Rightarrow a^2 = 2 + \sqrt{2 + 4a + 4a^2} \Rightarrow a = 1 + \sqrt{3}$. Vậy $\lim x_n = 1 + \sqrt{3}$. Vì f liên tụ
nên $\lim f(x_n) = f(1 + \sqrt{3})$. Mà

$$f(x_{n+1}) = f\left(\frac{2 + \sqrt{2x_n^2 + 4x_n + 4}}{x_n}\right) = f(x_n)\ \forall n.$$

Suy ra $f(x_0) = f(1 + \sqrt{3})$. Vậy $f(x) = f(1 + \sqrt{3})\ \forall x > 0$. Suy ra f là hàm hằng trong
$(0; +\infty)$ và vì nó là hàm chẵn nên nó cũng là hàm hằng $\forall x \neq 0$.

Vì f liên tục , f là hàm hằng, $f(0) = 2012$ nên hàm số cần tìm là

$$f(x) = 2012\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. Cho $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$, $\forall x \in (0; +\infty)$.

a) Chứng minh $F \in C^1(0; +\infty)$ và $F(x) + F(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

b) Từ đó suy ra $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t} dt = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + F(x)$.

Giải. a) Dễ thấy $F \in C^1(0; +\infty)$. Đặt

$$G(x) = F(x) + F(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

$$G'(x) = F'(x) - \frac{1}{x^2}F'(\frac{1}{x}) - \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{1}{x}\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{\ln x}{x} = 0$$

Suy ra G là ánh xạ hằng trên $(0; +\infty)$. Hơn nữa, $F(1) = 0 \Rightarrow G(1) = F(1) + F(1) - 0 = 0$.
Vậy $G(x) = 0, \forall x \in (0; +\infty)$. Suy ra điều phải chứng minh.

b)

$$\int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t} dt = \int_1^x \frac{\ln x + \ln(1 + \frac{t}{x})}{t} dt$$

$$= \ln x \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^x \frac{\ln(1 + \frac{t}{x})}{t} dt = (\ln x)^2 + \int_{1/x}^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du \ (\text{đặt } t = \frac{u}{x})$$

$$= (\ln x)^2 - F(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + F(x).$$

Câu 4. Cho $f : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục và tồn tại $k \in \mathbb{R}$ thỏa $0 \leq f(x) \leq k\int\limits_0^x f(t)dt,\ \forall x \in [0;+$

Chứng minh rằng $f = 0$.

Giải. Đặt $g(x) = e^{-kx}\int\limits_0^x f(t)dt$. Do $f \geq 0$ suy ra $g \geq 0$. Ta có $g'(x) = e^{-kx}\left(f(x) - k\int\limits_0^x f(t)dt\right.$

0 nên g giảm. Ngoài ra, $g(0) = 0$ nên $g \leq 0$. Vậy $g = 0$, suy ra $\int\limits_0^x f(t)dt = 0,\ \forall x \in [0;+\infty)$

Do f liên tục, $f \geq 0$ nên $f = 0$.