1. Cho các số thực không âm  thỏa mãn *c* là số nhỏ nhất và . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**Hướng dẵn giải**

Ta có .

Tương tự ta cũng có .

Do đó .

Vậy .

Đặt  với . Xét hàm số  trên khoảng .

Ta có .

.

Lập bảng biến thiên ta có  tại  tức là .

1. Cho các số thực dương  thỏa mãn . Chứng minh:



**Hướng dẫn giải**

Đặt .

Vì  nên .

Khi đó: 

 

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi  . Tức là: .

1. Cho  là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn: . Chứng minh



**Hướng dẫn giải**

Đặt.

Vì , áp dụng BĐT Côsi ta có



Dấu bằng xảy ra khi .

1. Cho . Chứng minh 

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



(Do bất đẳng thức Bunhiacopsky: ).

Làm tương tự và cộng lại, ta có

****

Ta chỉ cần chứng minh



Hay



Chia cả hai vế cho, ta có (\*) tương đương



Ta có: theo bất đẳng thức Bunhiacopski:



Hay (\*) đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi ba số bằng nhau.

1. Cho các số dương . Chứng minh rằng:



**Hướng dẫn giải**

Ta có , tương tự với các biểu thức ta có thể viết lại BĐT là:

 



Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có



Để chứng mình (\*) ta chỉ cần chứng minh



Do tính thuần nhất của (\*\*) nên ta giả sử  và đặt  thì ta có 

(\*\*) tương đương với:  bất đẳng thức này đúng do , từ đó suy ra (\*\*), (\*) đúng nên bài toán được chứng minh.

1. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn  chứng minh rằng:

**Hướng dẫn giải**

Do vai trò  như nhau giả sử thì từ giả thiết  và

. Ta chứng minh:

BĐT đúng vì .

Áp dụng BĐT ta có:



 .đặt t= thì từ  ta có

 ta cần chứng minh :  vì .

Suy ra .

Dấu  xảy ra .

1. Cho .Chứng minh rằng:



Hướng dẫn giải

Bất đẳng thức 

w.l.o.g. 

Áp dụng bđt côsi-svacxơ ta được:



Đặt.

Áp dụng bđt AM-GM ta được: từ đó có đpcm.

Dấu bằng xẩy ra khi .

1. Cho các số thực không âm  và  thỏa mãn  Chứng minh rằng



**Hướng dẫn giải**

Để giải bài toán ta cần bổ đề sau:

**Bổ đề.** Với các số thực không âm  và  ta có



*Chứng minh.* Đây chính là bất đẳng thức Schur.

Trở lại bài toán. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

 hay (1)

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:





bởi vậy nên (1) sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra



Áp dụng bổ đề cho  ta có vế trái của (2) lớn hơn hoặc bằng



Bài toán được giải.

1. Giả sử với hai số dương  thì phương trình  có các nghiệm đều lớn hơn 1. Xác định giá trị của  để biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó (là số nguyên dương cho trước).

**Hướng dẫn giải**

Gọi là các nghiệm của phương trình đã cho.

Theo định lý Vi-et ta có 

Theo bất đẳng thức AM - GM ta được:

hay 

Theo bất đẳng thức.

thì  hay 

Suy ra , do (\*)

Do đó ta có .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  Khi đó phương trình có ba nghiệm trùng nhau và đều bằng  Vậy giá trị nhỏ nhất của là  khi 

1. Cho các số thực không âm  thoả mãn . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức .

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh:  (1). Thật vậy

,

đúng với mọi . Đẳng thức xảy ra khi  hoặc .

Tương tự ta có:  (2);

  (3).

Cộng (1), (2), (3) ta được

.

Suy ra:  đạt tại  và các hoán vị.

Ta chứng minh:  (4). Thật vậy

,

đúng với mọi . Đẳng thức xảy ra tại .

Tương tự:  (5);

  (6).

Cộng (4), (5), (6) ta được

.

Suy ra:  đạt tại .