



Chương

Bài 2.

HÀM SỐ LIÊN TỤC

A

Lý thuyết

1. Hàm số liên tục tại một điểm



Định nghĩa:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.
Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm x_0 .

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

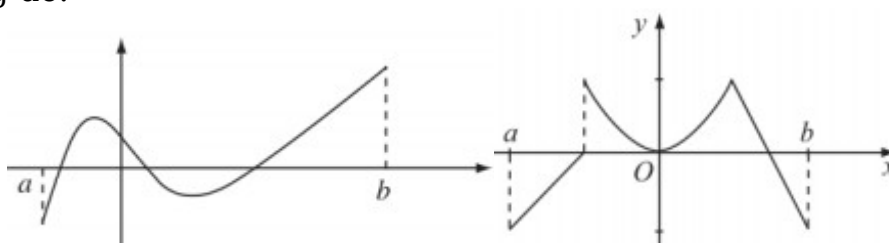


Định nghĩa:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Chú ý

- Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như $(a; b]; [a; b); (-\infty; b]; [a; +\infty)$ được định nghĩa một cách tương tự.
- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó.





3. Một số định lý



Định lý 1.

- » Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- » Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác thì liên tục trên tập xác định của nó.



Định lý 2.

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại x_0 .
Khi đó:

- » Các hàm số $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x), y = f(x) \cdot g(x)$ cũng liên tục tại x_0 .
- $f(x)$



Định lý 3.

- » Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

*** Lưu ý:**

Định lý này thường được áp dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng.

Có thể phát biểu Định lý 3 dưới một dạng khác như sau:

- » Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a; b)$.



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại 1 điểm



Phương

*** Bài toán:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau

- **Bước 1.** Tính $f(x_0)$.
- **Bước 2.** Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- **Bước 3.** So sánh và rút ra kết luận.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 .
Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 .



Ví dụ 1.1.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \frac{2}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$

Lời giải

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = 1 = f(2)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.



Ví dụ 1.2.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x > 0 \\ x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm

Lời giải

Ta có $f(0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

Ta có $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = 0$.



Ví dụ 1.3.

Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases} \text{ tại } x = 1$$

Lời giải

Ta có $f(1) = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2}{x + 1} = -\frac{1}{2}$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$.



Ví dụ 1.4.

Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -2 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 1.$$

Lời giải

Ta có: $f(1) = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 5)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 5}{x + 1} = -2 = f(1)$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.



Ví dụ 1.5.

Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 2$$

Lời giải

Ta có: $f(2) = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - (2x - 3)}{(2 - x)(1 + \sqrt{2x - 3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(2 - x)}{(2 - x)(1 + \sqrt{2x - 3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{1 + \sqrt{2x - 3}} = 1 = f(2) \end{aligned}$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.



▮ Dạng 2. Tìm tham số để hàm số liên tục - gián đoạn tại 1 điểm



Phương

- **Bước 1.** Tính $f(x_0)$.
- **Bước 2.** Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.
- **Bước 3.** So sánh và rút ra kết luận.
 - » Hàm số $f(x)$ **liên tục** tại điểm x_0
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
 - » Hàm số $f(x)$ **gián đoạn** tại điểm x_0



Ví dụ 2.1.

Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - m & \text{khi } x \neq 2 \\ x + m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm

👉 Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - m) = 8 - m$$

Ta có

$$\text{Và } f(2) = 2 + m$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x_0 = 2 \Leftrightarrow 8 - m = m + 2 \Leftrightarrow m = 3$$



Ví dụ 2.2.

Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ m^2 + 5m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm

👉 Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = -4$$

Ta có

$$\text{Và } f(-1) = m^2 + 5m$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x_0 = -1 \Leftrightarrow m^2 + 5m = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}$$



Ví dụ 2.3.

Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+5} - 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ m^2 + 5m & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ gián đoạn tại điểm



Lời giải

Ta có
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{4x+5} - 3}{x^2 - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x - 4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{4x+5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{(x+1)(\sqrt{4x+5} + 3)} = \frac{1}{3}$$

Mặt khác
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 2m + 3$$

Để hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow 2m + 3 \neq \frac{1}{3} \Leftrightarrow m \neq \frac{-4}{3}$



Ví dụ 2.4.

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{khi } x > 1 \\ x^2 + 3, & \text{khi } x < 1 \\ k^2, & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Cho hàm số $f(x)$ như trên. Tìm k để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Lời giải

Ta có: $f(1) = k^2$

Mặt khác
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3) = 4; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1)^2 = 4 \quad \text{suy ra} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4.$$

Vậy để hàm số liên tục tại $x = 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 4 = k^2 \Leftrightarrow k = \pm 2$.



Ví dụ 2.5.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Cho hàm số $f(x)$ như trên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số liên tục tại $x = 1$.

Lời giải

Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3m$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3m \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3m \Leftrightarrow 3 = 3m \Leftrightarrow m = 1.$$



Ví dụ 2.6.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - \sqrt{8-4x}}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ 14ax & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

Cho hàm số $f(x)$ như trên. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Lời giải

Ta có: $f(1) = 14a$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 14ax = 14a$$



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - \sqrt{8-4x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^6 - (8-4x)}{(x-1)(2x^3 + \sqrt{8-4x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 8)}{(x-1)(2x^3 + \sqrt{8-4x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 8}{2x^3 + \sqrt{8-4x}} = 7\end{aligned}$$

$f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 14a = 7 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$



Ví dụ 2.7.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{3x + a} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{3x + a} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{3x + a}$

Nếu $a = -3$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{3(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2}{3} = 1 > 0$ và $f(1) = 0$

Nên hàm số không liên tục tại $x = 1$.

Nếu $a \neq -3$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{3x + a} = 0$, nhưng $f(1) = 3 + a \neq 0$

Nên hàm số không liên tục tại $x = 1$.

Vậy không có giá trị nào của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Ví dụ 2.8.

Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \frac{x^3 - 3x + 1}{x+2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Lời giải

Ta có: $f(0) = m + \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{1+x} - 1) + (1 - \sqrt[3]{1+x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt[3]{1+x}}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

»



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt[3]{1+x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \sqrt[3]{1+x}) \left[1 + \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2 \right]}{x \left[1 + \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2 \right]} \\ &\gg \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1+x)}{x \left[1 + \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2 \right]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2} = -\frac{1}{3} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(m + \frac{x^3 - 3x + 1}{x + 2} \right) = m + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$



▮ Dạng 3. Chứng minh phương trình có nghiệm



Phương

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có **ít nhất một nghiệm** trên D .

Ta chứng minh hàm số $y=f(x)$:

» Liên tục trên D và

» Có hai số sao cho $f(a).f(b)<0$.

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có **k nghiệm** trên D .

Ta chứng minh hàm số $y=f(x)$:

» Liên tục trên D và

» Có hai số $a_1, a_2, \dots, a_k$ sao cho $f(a_i).f(a_{i+1})<0$ ($i=1, 2, \dots, k$).



Ví dụ 3.1.

Chứng minh rằng phương trình $2x^4 - 2x^3 - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc

🔗 Lời giải

Đặt $f(x)=2x^4 - 2x^3 - 3$.

Vì $f(x)$ là hàm đa thức xác định trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[-1;0]$.

Ta có: $f(0)=-3; f(-1)=1 \Rightarrow f(0).f(-1)<0$

$\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$.



Ví dụ 3.2.

Chứng minh rằng phương trình $6x^3 + 2x^2 - 31x + 10 = 0$ có đúng ba nghiệm phân

🔗 Lời giải

Đặt $f(x)=6x^3 + 2x^2 - 31x + 10$.

TXĐ: $D=\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$.

$\begin{cases} f(-3)=-32 \\ f(0)=10 \end{cases} \Rightarrow f(-3).f(0)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(-3;0)$.

$\begin{cases} f(0)=10 \\ f(1)=-12 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(0;1)$.

$\begin{cases} f(1)=-12 \\ f(2)=8 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2)<0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(1;2)$.



Mặt khác vì $f(x)$ là một đa thức bậc ba nên $f(x)=0$ chỉ có tối đa ba nghiệm.
Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.



Ví dụ 3.3.

Chứng minh rằng phương trình $x - 1 + \sin x = 0$ có nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x - 1 + \sin x$ liên tục trên $\left[0; \frac{p}{2}\right]$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = -1 \\ f\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p}{2} \Rightarrow f\left(\frac{p}{2}\right) \cdot f(0) = (-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm } x_0 \in \left(0; \frac{p}{2}\right).$$

Vậy phương trình $x - 1 + \sin x = 0$ có nghiệm.



Ví dụ 3.4.

Chứng minh rằng phương trình $x^3 + (m+3)x^2 + (1-m)x - 1 = 0$ luôn có nghiệm

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + (m+3)x^2 + (1-m)x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Nên cũng liên tục trên các đoạn $[0; 1]$

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 4 > 0,$$

Vậy trên khoảng $(0; 1)$ phương trình có ít nhất nghiệm.



Ví dụ 3.5.

Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 2x^2 + x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{m}{x+3} = 0$ luôn có nghiệm

Lời giải

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{m}{x+3} = 0 \Leftrightarrow mx + (x-2)(x+3)(x^3 + x + 1) = 0 \quad (*)$$

Đặt $f(x) = mx + (x-2)(x+3)(x^3 + x + 1)$.

$$\text{Nhận xét } f \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ và } \begin{cases} f(-3) = 18m \\ f(0) = -12m \end{cases}$$

Trường hợp 1: Nếu $m=0$, phương trình luôn có 1 nghiệm $x=2$

Trường hợp 2: Nếu $m \neq 0 \Rightarrow (*)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-3; 0)$ hoặc $(0; 2)$

Suy ra: $\forall m \in \mathbb{R}$, luôn có ít nhất một nghiệm thuộc D .

Vậy $\forall m \in \mathbb{R}$, phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.



Ví dụ 3.6.

Chúng minh rằng phương trình $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

Lời giải

Điều kiện: $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$f(x) = \sin x - \cos x - m \sin x \cos x$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và

Xét hàm số

$$f\left(0\right) = -1 < 0.$$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_0 \neq k\frac{\pi}{2}$.
Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.



Ví dụ 3.7.

Chúng minh rằng phương trình $a \cos 2x + b \sin x + \cos x = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a, b

Lời giải

Đặt $f(x) = a \cos 2x + b \sin x + \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(0) = a + 1; f(\pi) = a - 1; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a + b; f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a - b$$

Vì $f(0) + f(\pi) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ nên trong bốn số phải có hai số mà tích của chúng bé hơn hoặc bằng không.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a, b .



Ví dụ 3.8.

Chúng minh rằng phương trình $a \cos 3x + b \cos 2x + c \cos x + \sin x = 0$ luôn có nghiệm trên $[0; 2\pi]$

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = a \cos 3x + b \cos 2x + c \cos x + \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Nên cũng liên tục trên các đoạn $[0; 2\pi]$

$$f(0) = a + b + c, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b + 1, f(\pi) = -a + b - c, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -b - 1$$



Suy ra $f\left(0\right)+\left(\frac{p}{2}\right)+f\left(p\right)+\left(\frac{3p}{2}\right)=0$ nên suy ra nếu không có giá trị nào trong bốn giá trị bằng 0 thì ít nhất có một giá trị âm và dương.
Từ đó suy ra điều phải chứng minh.



Luyện tập

A. Câu hỏi - Trả lời trắc nghiệm

» **Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{C}^m$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a; b]$ là

- A. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$. B. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
C. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$. D. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

Theo định nghĩa hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Chọn: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

» **Câu 2.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a; b]$. Tìm mệnh đề đúng.

- A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.
B. Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.
C. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.
D. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên $(a; b)$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Vì $f(a)f(b) > 0$ nên $f(a)$ và $f(b)$ cùng dương hoặc cùng âm.

Mà $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a; b]$

Nên đồ thị hàm $f(x)$ nằm trên hoặc nằm dưới trục hoành trên $[a; b]$

Hay phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

$$y = \begin{cases} \frac{1-x^3}{1-x}, & \text{khi } x < 1 \\ 1, & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

» **Câu 3.** Cho hàm số . Hãy chọn kết luận đúng

- A. y liên tục phải tại $x = 1$. B. y liên tục tại $x = 1$.
C. y liên tục trái tại $x = 1$. D. y liên tục trên $\mathbb{R}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A



Ta có: $y(1)=1$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^3}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x+x^2) = 4$

Nhận thấy: $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = y(1)$. Suy ra y liên tục phải tại $x=1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

- » **Câu 4.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Chọn mệnh đề đúng?
- A.** Hàm số liên tục tại $x=2$. **B.** Hàm số gián đoạn tại $x=2$.
C. $f(4)=2$. **D.** $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=2$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+2}+2) = 4$$

$$f(2) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x=2$.

- » **Câu 5.** Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x^3-x}$. Kết luận nào sau đây đúng?
- A.** Hàm số liên tục tại $x=-1$. **B.** Hàm số liên tục tại $x=0$.
C. Hàm số liên tục tại $x=1$. **D.** Hàm số liên tục tại $x=\frac{1}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Tại $x=\frac{1}{2}$, ta có: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x^3-1} = 0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Vậy hàm số liên tục tại $x=\frac{1}{2}$.

- » **Câu 6.** Hàm số nào sau đây liên tục tại $x=1$:

A. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$ **B.** $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-1}$ **C.** $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$ **D.** $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

👉 **Lời giải**

Chọn C

A) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x=1$.

B) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-1}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x=1$.



C) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x} = 3 = f(1)$ suy ra $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

D) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x = 1$.

» Câu 7. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$.

A. $y = (x+1)(x^2 + 2)$ B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$ C. $y = \frac{x}{x-1}$ D. $y = \frac{x+1}{x^2+1}$

👉 **Lời giải**

Chọn B

Ta có $y = \frac{2x-1}{x+1}$ không xác định tại $x_0 = -1$ nên gián đoạn tại $x_0 = -1$.

» Câu 8. Hàm số nào sau đây gián đoạn tại $x = 2$?

A. $y = \frac{3x-4}{x-2}$ B. $y = \sin x$ C. $y = x^4 - 2x^2 + 1$ D. $y = \tan x$

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có: $y = \frac{3x-4}{x-2}$ có tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, do đó gián đoạn tại $x = 2$.

» Câu 9. Cho bốn hàm số $f_1(x) = 2x^3 - 3x + 1$, $f_2(x) = \frac{3x+1}{x-2}$, $f_3(x) = \cos x + 3$ và $f_4(x) = \log_3 x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số liên tục trên tập $\mathbb{R}$?

A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

👉 **Lời giải**

Chọn D

* Ta có hai hàm số $f_2(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ và $f_4(x) = \log_3 x$ có tập xác định không phải là tập $\mathbb{R}$ nên không thỏa yêu cầu.

* Cả hai hàm số $f_1(x) = 2x^3 - 3x + 1$ và $f_3(x) = \cos x + 3$ đều có tập xác định là $\mathbb{R}$ đồng thời liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

» Câu 10. Cho hàm số $f(x)$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$. B. $f(\sqrt{2}) < 0$.
C. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$. D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Ta có $f(0) = 1$ và

Vì $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$. Do đó $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

$\forall x \neq 0$ $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \geq 0$ nên $f(\sqrt{2}) > 0$. Vậy A, B, C sai.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ m & \text{khi } x = -2 \end{cases}$$

» Câu 11. Tìm m để hàm số

A. $m = -4$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = 0$.

» Lời giải

Chọn A

Hàm số liên tục tại $x = -2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} m = m \Leftrightarrow m = -4$

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2m + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

» Câu 12. Cho hàm số

tại điểm $x_0 = 1$ là:

A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.

» Lời giải

Chọn C

Ta có $f(1) = 2m + 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ thì $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} y = 2m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

» Câu 13. Cho hàm số

Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

A. $a = 0$. B. $a = -\frac{1}{2}$. C. $a = \frac{1}{2}$. D. $a = 1$.

» Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$$

» Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ đã cho liên tục tại $x=3$ khi $m=?$

- A. -1. B. 1. C. 4. D. -4.

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$f(3) = m$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (-\sqrt{x+1}-2) = -4$$

Để hàm số liên tục tại $x=3$ thì $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$
Suy ra, $m = -4$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2 + m - 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

» Câu 15. Có bao nhiêu số tự nhiên m để hàm số liên tục tại điểm $x=1$?

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1$$

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=1$ cần: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 1 = -1 \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \text{ (TM)} \\ m=-1 \text{ (L)} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x > 2 \\ m^2x - 4m + 6 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

» Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ đã cho liên tục tại $x=2$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đã cho liên tục tại $x=2$?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1

👉 **Lời giải**

Chọn D

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1)(\sqrt{x+2}+2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (m^2x - 4m + 6) = 2m^2 - 4m + 6$$

$$f(2) = 2m^2 - 4m + 6$$

Để hàm số liên tục tại $x=2$ thì

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 6 = 4 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$



Vậy có một giá trị của m thỏa mãn hàm số đã cho liên tục tại $x=2$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a - \frac{5}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

» **Câu 17.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

- A. $a = -\frac{3}{4}$. B. $a = \frac{4}{3}$. C. $a = -\frac{4}{3}$. D. $a = \frac{3}{4}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+4-4}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{1}{4} \quad f(0) = 2a - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = 2a - \frac{5}{4} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$.

Vậy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

» **Câu 18.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$ khi a bằng

- A. 1. B. 0. C. 2. D. -1.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Ta có $f(2) = a, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1$. Do đó $a=1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x > 4 \\ mx+1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$$

» **Câu 19.** Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=4$.

- A. $m = \frac{7}{4}$. B. $m=8$. C. $m = -\frac{7}{4}$. D. $m=-8$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) = 4m+1; \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x+4) = 8$.

Hàm số liên tục tại điểm $x=4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 4m+1=8 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}$.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - m}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ n & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

» **Câu 20.** Cho hàm số $f(x)$ để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ thì giá trị của biểu thức $(m+n)$ tương ứng bằng:

A. $\frac{3}{4}$.

B. 1.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{9}{4}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Ta có: $f(1) = n$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-m^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+m)}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow n = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-m^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+m)} \quad (1).$$

Hàm số liên tục tại $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ tồn tại khi } 1 \text{ là nghiệm của phương trình: } 1+3-m^2=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-2 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow n = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \Rightarrow n = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \Rightarrow n = \frac{1}{4}.$$

+ Khi $m=2$ thì

$$(1) \Rightarrow n = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}-2}$$

+ Khi $m=-2$ thì suy ra không tồn tại n .

$$\text{Vậy } m+n = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ mx+2 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$$

» **Câu 21.** Cho hàm số $f(x)$ bằng: $f(3) = 3m+2$ và $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[-(\sqrt{x+1}+2) \right] = -4$. Hàm số liên tục tại điểm $x=3$ khi m

A. -2.

B. 4.

C. -4.

D. 2.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbf{R}$.

$$\text{Ta có } f(3) = 3m+2 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[-(\sqrt{x+1}+2) \right] = -4.$$

$$\text{Hàm số đã cho liên tục tại điểm } x=3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 3m+2 = -4 \Leftrightarrow m = -2.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ mx-4 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

» **Câu 22.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại $x=2$

A. $m=3$.

B. $m=2$.

C. $m=-2$.

D. Không tồn tại m .

👉 **Lời giải**



Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (mx - 4) = 2m - 4$

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2m - 4 = 2 \Leftrightarrow m = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{khi } x > -1 \\ mx - 2m^2 & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$$

» Câu 23. Tìm m để hàm số

A. $m \in \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}$. B. $m \in \{1\}$. C. $m \in \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. D. $m \in \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

* $f(-1) = -m - 2m^2$

* $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (mx - 2m^2) = -m - 2m^2$

* $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x + 1)(x - 2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x - 2) = -3$.

Hàm số liên tục tại $x = -1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$

$$\Leftrightarrow -m - 2m^2 = -3 \Leftrightarrow 2m^2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$m \in \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}.$$

Vậy các giá trị của m là

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} & \text{khi } x < 2 \\ mx + m + 1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

» Câu 24. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số

điểm $x = 2$.

A. $m = \frac{1}{6}$. B. $m = -\frac{1}{6}$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn B

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{x} = \frac{1}{2}$.

$f(2) = 3m + 1$

Để hàm số liên tục tại điểm $x = 2 \Leftrightarrow 3m + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ax^2+1} - bx - 2}{4x^3 - 3x + 1} & \text{khi } x \neq \frac{1}{2}, (a, b, c \in \mathbb{R}) \\ \frac{c}{2} & \text{khi } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

» Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ như trên. Biết hàm số liên tục tại $x = \frac{1}{2}$. Tính $S = abc$.

- A. $S = -36$. B. $S = 18$. C. $S = 36$. D. $S = -18$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có

$$\frac{\sqrt{ax^2+1} - bx - 2}{4x^3 - 3x + 1} = \frac{(\sqrt{ax^2+1})^2 - (bx+2)^2}{(2x-1)^2(x+1)(\sqrt{ax^2+1} + bx+2)} = \frac{(a-b^2)x^2 - 4bx - 3}{(2x-1)^2(x+1)(\sqrt{ax^2+1} + bx+2)}$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} (a-b^2)x^2 - 4bx - 3 = m(2x-1)^2 \\ \sqrt{\frac{a}{4}+1} + \frac{b}{2} + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ b = -3 \\ a = -3 \end{cases}$$

Để hàm số liên tục tại $x = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{ax^2+1} - bx - 2}{4x^3 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-12x^2 + 12x - 3}{(2x-1)^2(x+1)(\sqrt{-3x^2+1} - 3x+2)}$$

Khi đó

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-3}{(x+1)(\sqrt{-3x^2+1} - 3x+2)} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = -4$$

Vậy $S = abc = -3(-3)(-4) = -36$

» Câu 26. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

- A. $a = 1$. B. $a = 0$. C. $a = 2$. D. $a = -1$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$f(1) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

$f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

» Câu 27. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

- A. $m = 3$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 0$.

👉 **Lời giải**



Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3.$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m = 3.$$

Hàm số liên tục tại $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3x + 1}{2(x - 1)} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

» **Câu 28.** Để hàm số liên tục tại $x = 1$ thì giá trị m bằng

A. 0,5.

B. 1,5.

C. 1.

D. 2.

👉 **Lời giải**

Chọn A

$$f(1) = m.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x - 1)}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Để hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x = 1 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} & \text{khi } (x > 1) \\ m^2 + m + \frac{1}{4} & \text{khi } (x \leq 1) \end{cases}$$

» **Câu 29.** Cho hàm số . Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m \in [0; 1]$.

B. $m \in [0; -1]$.

C. $m \in [1]$.

D. $m \in [0]$.

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4}; \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = m^2 + m + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Để hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x = 1 \text{ thì } m^2 + m + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \end{cases}.$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x > 1. \end{cases}$$

» **Câu 30.** Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$:

A. $a = -2$.

B. $a = 1$.

C. $a = 2$.

D. $a = -1$.

👉 **Lời giải**

Chọn B

• Khi $x < 1$ thì $f(x) = 2x + a$ là hàm đa thức nên liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

• Khi $x > 1$ thì $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên khoảng $(1; +\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

• Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x = 1$, ta có:



$$+ f(1) = 2 + a$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + a) = 2 + a$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2) = 3$$

• Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{I}$ $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \\ \Leftrightarrow 2a + 1 = 3 \Leftrightarrow a = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} & \text{khi } x > -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$$

» Câu 31. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x = -1$.

A. $m = 2$.

B. $m = 0$.

C. $m = -4$.

D. $m = 4$.

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x + 1)(x + 3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x + 3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (mx + 2) = -m + 2$$

$$f(-1) = -m + 2$$

Để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = -1$ thì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1)$
 $\Leftrightarrow 2 = -m + 2 \Leftrightarrow m = 0$

» Câu 32. Cho hàm số $y = \begin{cases} -x^2 + x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ 5x + 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{I}$.

C. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2), (2; +\infty)$.

D. Hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$.

👉 **Lời giải**

Chọn B

+ Với $x > 2$, ta có $f(x) = -x^2 + x + 3$ là hàm đa thức

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.

+ Với $x < 2$, ta có $f(x) = 5x + 2$ là hàm đa thức

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$.

+ Tại $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + x + 3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (5x + 2) = 12$$



$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow$ hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$.
 $\Rightarrow$ Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + a - 1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

» Câu 33. Cho hàm số . Tìm tất cả giá trị thực của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $a=1$. B. $a=3$. C. $a=4$. D. $a=2$.

» Lời giải

Chọn D

Hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$ với bất kỳ a .

Với $x=0$ Ta có $f(0)=a-1$;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + a - 1) = a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(\sqrt{1+2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+2x} + 1} = 1$$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow a-1=1 \Leftrightarrow a=2$.

$$y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 6Px - 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

» Câu 34. Tìm P để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $P=\frac{5}{6}$. B. $P=\frac{1}{2}$. C. $P=\frac{1}{6}$. D. $P=\frac{1}{3}$.

» Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow y=f(x)$ liên tục tại $x=1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 3) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (6Px - 3) = 6P - 3$$

$$f(1) = 6P - 3$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 6P - 3 = -2 \Leftrightarrow P = \frac{1}{6}.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x > 4 \\ mx + 1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$$

» Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $m=8$ hoặc $m=-\frac{7}{4}$. B. $m=\frac{7}{4}$.
 C. $m=-\frac{7}{4}$. D. $m=-8$ hoặc $m=\frac{7}{4}$.



Lời giải

Chọn C

*) Với $x > 4$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ là hàm phân thức nên liên tục trên TXĐ của nó
 $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $(4; +\infty)$.

*) Với $x < 4$ thì $f(x) = mx + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 4)$.

Do vậy hàm số $f(x)$ đã liên tục trên các khoảng $(4; +\infty)$, $(-\infty; 4)$.

Suy ra: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 4$.

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = f(4) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (mx + 1) = 4m + 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} (x + 4) = 4m + 1$$

$$\Leftrightarrow 4m + 1 = 8 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}.$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x < -5 \\ x + 17 & \text{khi } -5 \leq x \leq 10 \\ ax + b + 10 & \text{khi } x > 10 \end{cases}$$

» **Câu 36.** Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $a + b$ bằng
A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Với $x < -5$ ta có $f(x) = x^2 + ax + b$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; -5)$.

Với $-5 < x < 10$ ta có $f(x) = x + 17$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-5; 10)$.

Với $x > 10$ ta có $f(x) = ax + b + 10$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(10; +\infty)$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = -5$ và $x = 10$.
 Ta có:

$$f(-5) = 12; f(10) = 17$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} (x^2 + ax + b) = -5a + b + 25$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} (x + 17) = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} (x + 17) = 27$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} (ax + b + 10) = 10a + b + 10$$

Hàm số liên tục tại $x = -5$ và $x = 10$ khi

$$\begin{cases} 5a + b + 25 = 12 \\ 10a + b + 10 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + b = -13 \\ 10a + b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

» **Câu 37.** Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$

- A.** $2x^2 - 3x + 4 = 0$. **B.** $(x - 1)^5 - x^7 - 2 = 0$.
C. $3x^4 - 4x^2 + 5 = 0$. **D.** $3x^{2017} - 8x + 4 = 0$.



Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = 3x^{2017} - 8x + 4$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và $f(0) \cdot f(1) = 4 \cdot (-1) = -4 < 0 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$.

Vậy phương trình $3x^{2017} - 8x + 4 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

» **Câu 38.** Phương trình $3x^5 + 5x^3 + 10 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; -1)$ B. $(-10; -2)$ C. $(0; 1)$ D. $(-1; 0)$

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 10$

$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $[-2; -1]$ (1)

Ta có:
$$\begin{cases} f(-2) = -126 \\ f(-1) = 2 \end{cases}$$

Suy ra $f(-2) \cdot f(-1) = -126 \cdot 2 = -252 < 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-2; -1)$.

» **Câu 39.** Cho phương trình $2x^3 - 8x - 1 = 0$ (1). Khẳng định nào **sai**?

- A. Phương trình không có nghiệm lớn hơn 3.
B. Phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.
C. Phương trình có 2 nghiệm lớn hơn 2.
D. Phương trình có nghiệm trong khoảng $(-5; -1)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x) = 2x^3 - 8x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(-5) = -211$, $f(-1) = 5 > 0$, $f(2) = -1 < 0$, $f(3) = 29 > 0$

Nên phương trình có ít nhất 3 nghiệm trên $(-5; -1), (-1; 2), (2; 3)$.

Mà phương trình bậc ba có tối đa 3 nghiệm

Nên phương trình có đúng 3 nghiệm trên $\mathbb{R}$.

» **Câu 40.** Cho số thực a, b, c thỏa mãn
$$\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$$
. Số giao điểm của đồ thị hàm số

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Khi đó
$$\begin{cases} f(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0 \\ f(-2) = -8 + 4a - 2b + c > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.



$\begin{cases} f(2) < 0 \\ f(-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(-2; 2)$.

$\begin{cases} f(2) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(2; +\infty)$.

$\begin{cases} f(-2) > 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(-\infty; -2)$.

Mà hàm số $f(x)$ là hàm bậc ba nên đồ thị của nó cắt trục Ox tối đa tại 3 điểm.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại đúng 3 điểm.

B. Câu hỏi - Trả lời đúng/sai

» Câu 41. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ và $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
(b)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
(c)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$		
(d)	Hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		

Lời giải

(a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có: $f(1) = -\frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$,

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$.

Vậy $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$

Nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.



Ta có: $g(1) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$ nên $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

» **Chọn SAI.**

(d) Hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 42.** Cho hàm số
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{5x+11}}{2x^2 - 5x - 18} & \text{khi } x > -2 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x \leq -2 \end{cases} \text{ và } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ 2x + a & \text{khi } x = -2 \end{cases}, \text{ khi đó:}$$

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{5}{26}$		
(b)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$		
(c)	Để hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$ thì $a = 1$		
(d)	Khi $a = -1$ thì hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$		

» **Lời giải**

(a) Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{5}{26}$

Ta có: $f(x_0) = f(-2) = 0 = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1 - \sqrt{5x+11}}{2x^2 - 5x - 18} = \frac{5}{26} \neq \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$

$\Rightarrow$ Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

Vậy hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$.

» **Chọn SAI.**

(c) Để hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$ thì $a = 1$

Ta có: $g(x_0) = g(-2) = -4 + a$.



$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -5$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -2$ thì $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = g(-2)$
 $\Rightarrow -4 + a = -5 \Leftrightarrow a = -1$.

» **Chọn SAI.**

(d) Khi $a = -1$ thì hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} & \text{khi } x > 2 \\ x^2 + ax + 3b & \text{khi } x < 2 \\ 2a + b - 6 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

» **Câu 43.** Cho hàm số liên tục tại $x = 2$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$a > 0$		
(b)	$b > 0$		
(c)	$a > b$		
(d)	$I = a + b = \frac{19}{32}$		

» **Lời giải**

(a) $a > 0$

Để hàm $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ cần có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{(x+2)(x-2)(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{(x+2)(x+\sqrt{x+2})} = \frac{3}{16}$$

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax + 3b) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax + 3b) = 2a + 3b + 4$$

$$f(2) = 2a + b - 6$$

$$\begin{cases} 2a + b - 6 = \frac{3}{16} \\ 2a + 3b + 4 = \frac{3}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{179}{32} \\ b = -5 \end{cases}$$

Suy ra ta được hệ phương trình:

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $b > 0$

» **Chọn SAI.**

(c) $a > b$

$$\begin{cases} a = \frac{179}{32} \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow a > b$$

» **Chọn ĐÚNG.**



(d) $I = a + b = \frac{19}{32}$

$\Rightarrow a + b = \frac{19}{32}$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \\ a + \frac{1 - x}{2 + x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

» **Câu 44.** Cho hàm số

. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Khi $a=3$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{11}{2}$		
(b)	$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$		
(c)	Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì $a = -\frac{1}{2}$		
(d)	Biết a là giá trị để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$, thì bất phương trình $-x^2 + ax + \frac{7}{4} > 0$ có 1 nghiệm nguyên		

» **Lời giải**

(a) Khi $a=3$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{11}{2}$

Với $a=3$ thì $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(3 + \frac{1-x}{2+x} \right) = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$.

» **Chọn SAI.**

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$

Tại $x_0 = 2$, ta có:

○ $f(2) = a - \frac{1}{4}$

○ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(2x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-3) = -1$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì $a = -\frac{1}{2}$

○ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(a + \frac{1-x}{2+x} \right) = a - \frac{1}{4}$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow a - \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$.



» **Chọn SAI.**

(d) Biết a là giá trị để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$, thì bất phương trình

$$-x^2 + ax + \frac{7}{4} > 0 \quad \text{có 1 nghiệm nguyên}$$

Với $a = -\frac{3}{4}$, xét bất phương trình $-x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{4} > 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{4} < x < 1$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên.

» **Chọn SAI.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2a - 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

» **Câu 45.** Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f(1) = 2a - 1$		
(b)	$a > 0$		
(c)	$b > 0$		
(d)	$a - b = 6$		

» **Lời giải**

(a) $f(1) = 2a - 1$

Ta có $f(1) = 2a - 1$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $a > 0$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì phải tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ và

Để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ thì $(x^2 + ax + b) \equiv (x - 1)Q(x) \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow b = -a - 1$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + a + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + a + 1) = a + 2$.

Do đó để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2a - 1 = a + 2 \Leftrightarrow a = 3$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $b > 0$

Suy ra $b = -4$.

» **Chọn SAI.**

(d) $a - b = 6$.

Vậy $a - b = 7$.



» Chọn SAI.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x < -5 \\ x + 17 & \text{khi } -5 \leq x \leq 10 \\ ax + b + 10 & \text{khi } x > 10 \end{cases}$$

» Câu 46. Cho hàm số

liên tục trên $\mathbf{R}$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$f(-5) = 12; f(10) = 17$		
(b)	$a > 0$		
(c)	$a > 0$		
(d)	$a + b = 2$		

🔑 **Lời giải**

Với $x < -5$ ta có $f(x) = x^2 + ax + b$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; -5)$.

Với $-5 < x < 10$ ta có $f(x) = x + 17$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-5; 10)$.

Với $x > 10$ ta có $f(x) = ax + b + 10$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(10; +\infty)$.

(a) $f(-5) = 12; f(10) = 17$.

Ta có:

$$f(-5) = 12; f(10) = 17$$

» Chọn ĐÚNG.

(b) $a > 0$

Để hàm số liên tục trên $\mathbf{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = -5$ và $x = 10$.

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} (x^2 + ax + b) = -5a + b + 25$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} (x + 17) = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} (x + 17) = 27$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} (ax + b + 10) = 10a + b + 10$$

Hàm số liên tục tại $x = -5$ và $x = 10$ khi

$$\begin{cases} 5a + b + 25 = 12 \\ 10a + b + 10 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + b = -13 \\ 10a + b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

» Chọn ĐÚNG.

(c) $b > 0$

» Chọn SAI.

(d) $a + b = 2$

$$\Rightarrow a + b = -1$$

» Chọn SAI.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} & \text{khi } x > -2 \\ mx + n & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$$

» **Câu 47.** Biết rằng hàm số thực tục ý. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -2$		
(b)	Khi $m=1$ thì $n=2$		
(c)	Khi $m=2$ thì $n=5$		
(d)	Khi $m=3$ thì $n=7$		

🔗 **Lời giải**

(a) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -2$

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x + 3) = -1$.

» **Chọn SAI.**

(b) Khi $m=1$ thì $n=2$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (mx + n) = -2m + n$$

$$f(-2) = -2m + n$$

Để hàm số liên tục tại $x = -2$ thì

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2) \Leftrightarrow -2m + n = 1 \Leftrightarrow m = \frac{n-1}{2}$$

Vậy $m=1$ thì $1 = \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow n=3$

» **Chọn SAI.**

(c) Khi $m=2$ thì $n=5$

Với $m=2$ thì $2 = \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow n=5$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Khi $m=3$ thì $n=7$

Với $m=3$ thì $3 = \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow n=7$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+6}{3x^2-27} & \text{khi } x \neq \pm 3 \\ -\frac{1}{9} & \text{khi } x = \pm 3 \end{cases}$$

» **Câu 48.** Cho hàm số . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
--	---------	------	-----



(a)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc khoảng $(-3;3)$.		
(b)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -3$.		
(c)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 3$.		
(d)	Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.		

Lời giải

(a) Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc khoảng $(-3;3)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+6}{3x^2-27}$, vì $\lim_{x \rightarrow 3} (2x+6) = 12 \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow 3} (3x^2-27) = 0$

Nên hàm số không có giới hạn tại $x = 3$.

Nên hàm số không liên tục tại $x = 3$.

» **Chọn SAI.**

(b) Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+6}{3x^2-27} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)}{3(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2}{3(x-3)} = -\frac{1}{9}$$

Vì $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3) = -\frac{1}{9}$ nên hàm số liên tục tại $x = -3$.

» **Chọn SAI.**

(c) Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 3$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do hàm số không liên tục tại $x = 3$.

Nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

» **Chọn SAI.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

» **Câu 49.** Cho hàm số

Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc đoạn $[0;1]$.		
(b)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 0$.		
(c)	Hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.		
(d)	Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 1$.		

Lời giải

(a) Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc đoạn $[0;1]$.



TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 = f(0)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x=0$.

» **Chọn SAI.**

(b) Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=0$.

» **Chọn SAI.**

(c) Hàm số liên tục tại mọi điểm điểm thuộc $\mathbb{R}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=1$.

Tại $x=1$ ta có: $f(1)=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 = f(1); \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1 = f(1); \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

Vậy hàm số liên tục tại $x=1$.

» **Chọn SAI.**

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Câu hỏi - Trả lời ngắn

» **Câu 50.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số liên tục tại điểm $x_0=1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2 x & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0**

Ta có: $f(1)=m^2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)} = \frac{1}{4}.$$

Hàm số liên tục tại $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ a - \frac{1}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

» **Câu 51.** Tìm giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

Ta có: $f(1) = a - \frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(a - \frac{1}{2} \right) = a - \frac{1}{2};$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x + 2}{2x^2 - x - 6} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{4m-1}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

» **Câu 52.** Cho hàm số $f(x)$ trên liên tục tại $x_0 = 2$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số

🔑 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,5**

Ta có: $f(x_0) = f(2) = \frac{8m-1}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{2x^2 - x - 6} = 1$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Rightarrow \frac{8m-1}{3} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

» **Câu 53.** Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x = 1$

🔑 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0**

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3$$

Hàm số liên tục $\Leftrightarrow 3 = 3 + m \Leftrightarrow m = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

» **Câu 54.** Tìm giá trị của m để hàm số liên tục trên tập xác định của chúng.

🔑 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3**

Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq 2$.

Do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ (1)

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 2+1=3; f(2) = m$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 3 = m \Leftrightarrow m = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

» **Câu 55.** Tìm giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại $x = 1$

🔑 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0**

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết thì ta có $3 + m = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



Suy ra $3 + m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3 \Leftrightarrow m = 0$.

----- Hết -----

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>