

Người làm: Đinh Thị Hằng

Zalo: Hang Dinh - số đt zalo: 0977643544

Email: hangdt@phuongdongtre.com.vn

CD13: PHẦN HÌNH HỌC

Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau

A. Trắc nghiệm (nếu có)

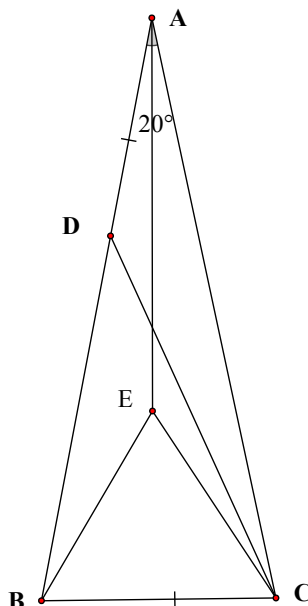
Câu 1. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018) Trùng quá nhiều

Cho tam giác ABC cân tại A , $\angle A = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Số đo của $\angle BDC$ là:

- A. 50° . B. 70° . C. 30° . D. 80° .

Lời giải

Chọn C



Xét $\triangle ABC$ cân tại A , có $\angle A = 20^\circ$
 $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$

Vẽ điểm E nằm trong $\triangle ABC$ sao cho $\triangle BEC$ là tam giác đều.
 $\Rightarrow \angle ECB = 60^\circ \Rightarrow \angle ACE = \angle ACB - \angle ECB = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle CEA$ có:

AC là cạnh chung

$\angle DAC = \angle ECA = 20^\circ$

$EC = AD (=BC)$

$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle CEA$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \angle ADC = \angle AEC \quad (\text{cạnh góc tương ứng})$$

Xét $\triangle AEB$ và $\triangle AEC$ có

$$AB = AC$$

AE chung

$$EB = EC$$

$$\triangle AEB = \triangle AEC \quad (\text{c.c.c})$$

$$\Rightarrow \angle AEB = \angle AEC; \angle BAE = \angle EAC = 10^\circ \quad (\text{cạnh góc tương ứng})$$

$$\text{Có } \angle BEC = 60^\circ$$

$$\angle AEC = 180^\circ - (\angle EAC + \angle ECA) = 180^\circ - (10^\circ + 20^\circ) = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AEC = \angle ADC = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BDC = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

Vậy đáp án C đúng.

Câu 2. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018)

Cho góc $\angle xOy = 50^\circ$, điểm A nằm trên Oy . Qua A vẽ tia Am . Để Am song song với Ox thì số đo của góc $\angle Am$ là:

A. 50° .

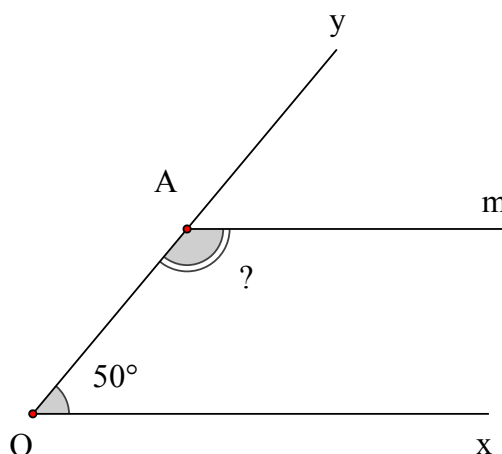
B. 130° .

C. 50° và 130° .

D. 80° .

Lời giải

Chọn B



Ta có: $Am \parallel Ox$ (gt)

$$\Rightarrow \angle Am + \angle xOy = 180^\circ \quad (\text{hai góc trong cùng phía})$$

$$\Rightarrow \angle Am + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle Am = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

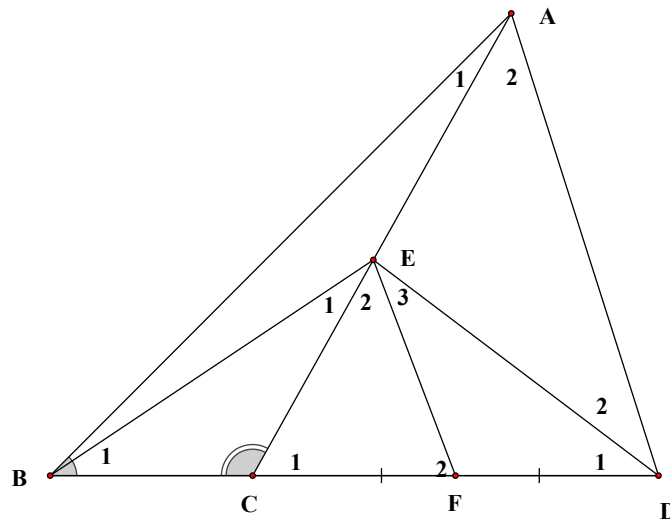
Vậy đáp án B đúng.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Nam Sách 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 120^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính $\angle ADB$?

Lời giải



Trên CA lấy điểm E sao cho $\angle EBA = 15^\circ \Rightarrow \angle B_1 = 30^\circ$

Ta có: $\angle E_1 = \angle A_1 + \angle EBA = 30^\circ$, do đó $\triangle CBE$ cân tại C
 $\Rightarrow CB = CE$

Gọi F là trung điểm $CD \Rightarrow CB = CE = CF = FD$

$\triangle CEF$ cân tại C , lại có: $\angle E_1 = 180^\circ - \angle BCA = 60^\circ$ nên là tam giác đều

Như vậy $CB = CE = CF = FD = EF$.

Suy ra $\angle D_1 = \angle E_3$ mà $\angle D_1 + \angle E_3 = \angle F_2 = 60^\circ$ ($\triangle CEF$ đều)
 $\Rightarrow \angle D_1 = 30^\circ$

Xét $\triangle CDE$ ta có: $\angle EED = 180^\circ - (\angle E_1 + \angle D_1) = 90^\circ$ (1)

Ta có: $\angle D_1 = \angle B_1 \Rightarrow EB = ED$

$\angle A_1 = \angle EBA \Rightarrow EA = EB$,

$\Rightarrow ED = EA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle EDA$ vuông cân tại $E \Rightarrow \angle D_2 = 45^\circ$

Vậy $\angle ADB = \angle D_1 + \angle D_2 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

Dạng 2. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

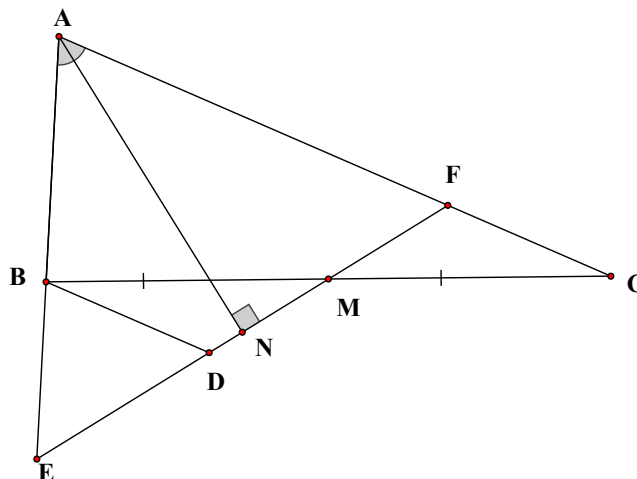
Câu 1. (HSG 7 huyện Nam Sách 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC . Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của $\angle BAC$ tại N , cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F . Chứng minh:

a) $BE = CF$.

b) $AE = \frac{AB + AC}{2}$.

Lời giải



a) Chứng minh: $BE = CF$.

Qua B kẻ đường thẳng song song với AC , cắt EF tại D .

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MCF$ có:

$$\angle DBM = \angle FCM \text{ (so le trong); } MB = MC \text{ (gt), } \angle BMD = \angle CMF \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\text{Do đó: } \triangle MBD = \triangle MCF \text{ (c.g.c), } \Rightarrow BD = CF \quad (1)$$

Mặt khác $\triangle AEF$ có AN vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên $\triangle AEF$ cân tại A

$$\Rightarrow \angle E = \angle F \text{ mà } \angle BDE = \angle F \text{ (đồng vị) nên } \angle BDE = \angle E$$

$$\text{Do đó } \triangle BDE \text{ cân tại } B, \text{ suy ra } BD = BE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BE = CF$ (đpcm).

$$AE = \frac{AB + AC}{2}$$

b) Chứng minh:

Ta có: $\triangle AEF$ cân tại A (cmt). $\Rightarrow AE = AF$

$$2AE = AE + AF = (AB + BE) + (AC - CF) = (AB + BD) + (AC - CF) \quad (\text{Vi } BE = BD)$$

$$\Rightarrow 2AE = (AB + AC) + (BD - CF) = AB + AC \quad (\text{Vi } BD = CF)$$

$$AE = \frac{AB + AC}{2}$$

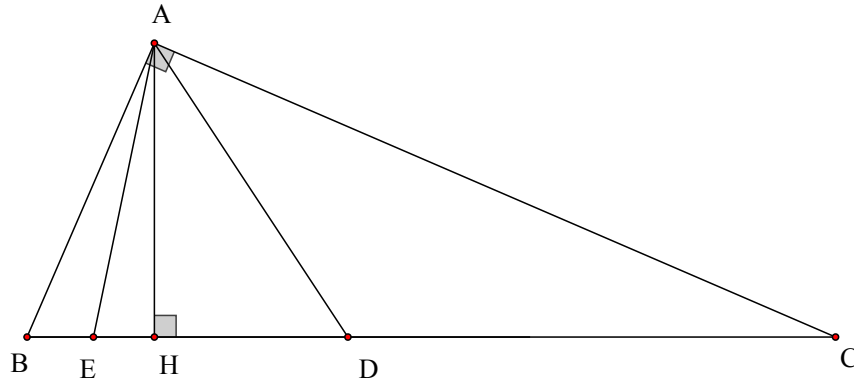
Vậy

Câu 2. (HSG 7 đề giao lưu học sinh giỏi, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có $\angle A = 90^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Tia phân giác của $\angle HAC$ cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của $\angle HAB$ cắt cạnh BC ở E .

Chứng minh rằng: $AB + AC = BC + DE$.

Lời giải



Ta có: $\triangle ABC$ vuông tại A (gt).

$$\Rightarrow \angle BAD + \angle DAC = 90^\circ$$

$\triangle AHD$ vuông tại H (gt).

$$\Rightarrow \angle BDA + \angle HAD = 90^\circ$$

Mà $\angle DAC = \angle HAD$ (Vì AD là tia phân giác của $\angle HAC$)

$$\Rightarrow \angle BAD = \angle BDA$$

$\Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác cân tại D .

$$\Rightarrow AB = BD \quad (1)$$

Ta có: $\triangle ABC$ vuông tại A (gt).

$$\Rightarrow \angle AEC + \angle EAB = 90^\circ$$

$\triangle AEH$ vuông tại H (gt).

$$\Rightarrow \angle EHA + \angle HAE = 90^\circ$$

Mà: $\angle EAB = \angle HAE$ (Vì AE là tia phân giác của $\angle HAB$)

$$\Rightarrow \angle AEC = \angle EHA$$

$\Rightarrow \triangle ACE$ cân tại C .

$$\Rightarrow AC = CE \quad (2)$$

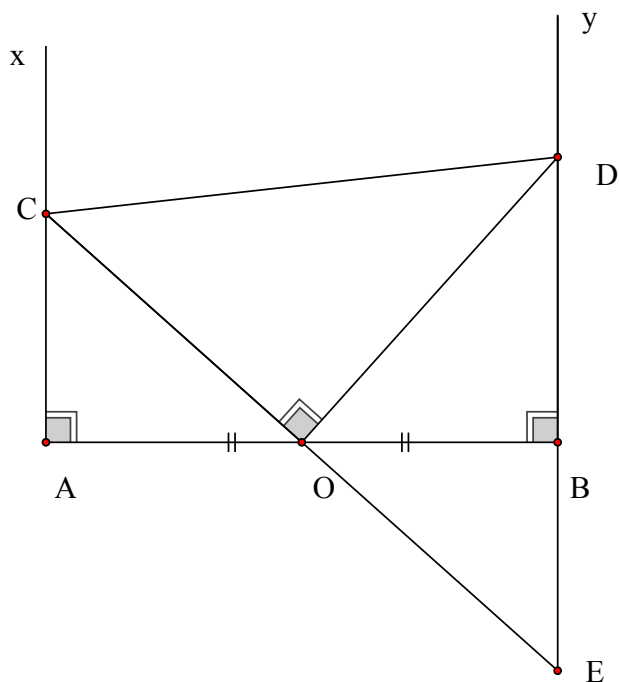
Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB + AC = BD + EC = BE + ED + DC + ED = BC + DE$

Vậy $AB + AC = BC + DE$ (đpcm).

Câu 3. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018)

Cho đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax, By lần lượt vuông góc với AB tại A và B . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia Ax lấy điểm C và trên tia By lấy điểm D sao cho góc $\angle COD = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AC + BD = CD$.

Lời giải



Gọi E là giao điểm của CO và BD

Xét $\triangle AOC$ và $\triangle BOE$ có:

$$\angle OAC = \angle OBE = 90^\circ; OA = OB(gt); \angle AOC = \angle BOE \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle AOC = \triangle BOE \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AC = BE \\ CO = EO \end{cases}$$

Xét $\triangle COD$ và $\triangle EOD$ có:

$$OC = OE (cmt), \angle COD = \angle EOD = 90^\circ, OD \text{ là cạnh chung}$$

$$\Rightarrow \triangle COD = \triangle EOD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow CD = ED$$

$$\text{Mà } ED = EB + BD = AC + BD$$

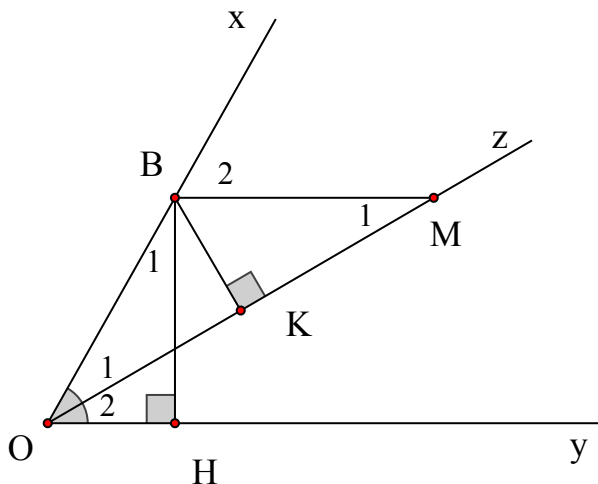
$$\Rightarrow CD = AC + BD$$

$$\text{Vậy } CD = AC + BD.$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh Vĩnh Phúc 2016 - 2017)

Cho $\angle xOy$ bằng 60° . Tia Oz là phân giác của $\angle xOy$. Từ điểm B bất kỳ trên tia Ox kẻ BH, BK lần lượt vuông góc với Oy, Oz tại H và K . Qua B kẻ đường song song với Oy cắt Oz tại M . Chứng minh rằng: $BH = MK$.

Bài giải



Ta có: $\angle_1 = \angle_2 = \frac{\angle xOy}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ (Vì Oz là phân giác của $\angle xOy$)

$\angle_2 = \angle M_1$ (hai góc so le trong do $BM \parallel Oy$)

$\Rightarrow \angle_1 = \angle M_1 = 30^\circ$

Xét $\triangle BOM$ có $\angle_1 = \angle M_1 = 30^\circ$

$\Rightarrow \triangle BOM$ cân tại B

BK là đường cao của tam giác cân BMO nên K là trung điểm của OM

$\Rightarrow KM = KO$ (1)

Xét $\triangle OBH$ vuông tại H có $\angle BOH = \angle xOy = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle B_1 = 90^\circ - \angle BOH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Xét $\triangle BKO$ và $\triangle OHB$ có:

$\angle KOB = \angle HOB (=90^\circ)$

OB là cạnh chung

$\angle B_1 = \angle_1 (=30^\circ)$

$\Rightarrow \triangle BKO = \triangle OHB$ (ch - gn)

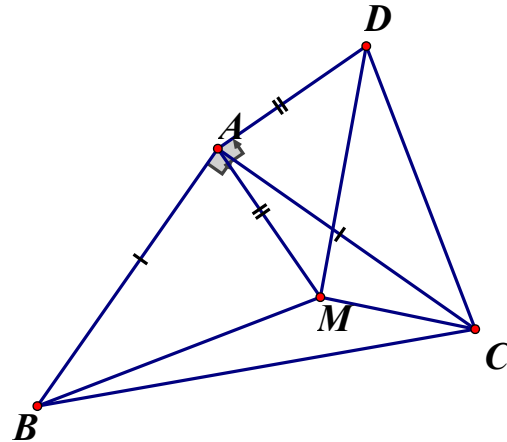
$\Rightarrow BH = OK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH = MK$ (đpcm).

Câu 5. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh Vĩnh Phúc 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Điểm M nằm bên trong tam giác sao cho $MA = 2\text{cm}$, $MB = 3\text{cm}$, $\angle AMC = 135^\circ$. Tính MC .

Lời giải



Dựng tam giác ADM vuông cân tại A , (D, B khác phía đối với AM)

+ Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACD$ có:

$$AD = AM \quad (\triangle ADM \text{ vuông cân tại } A)$$

$$\angle MAB = \angle CAD \quad (\text{cùng phụ với } \angle CAM)$$

$$AB = AC \quad (\text{gt})$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACD \quad (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow CD = BM = 3\text{cm} \quad (\text{hai cạnh tương ứng})$$

+ $\triangle ADM$ vuông cân tại A

$$\text{nên } MD^2 = AD^2 + AM^2 = 8 \quad \text{và } \angle AMD = 45^\circ$$

$$\text{mà } \angle AMC = 135^\circ \quad \text{nên } \angle CMD = 90^\circ \Rightarrow \triangle CMD \text{ vuông tại } M$$

$$\Rightarrow MC^2 = CD^2 - MD^2 = 9 - 8 = 1 \Rightarrow MC = 1$$

Dạng 3. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng

Dạng 4. Bất đẳng thức trong tam giác

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , hai đường trung tuyến BM , CN cắt nhau tại G . Biết $\angle BGC > \angle GCB$. Khi đó độ dài hai đoạn thẳng BM và CN là:

A. $BM \leq CN$

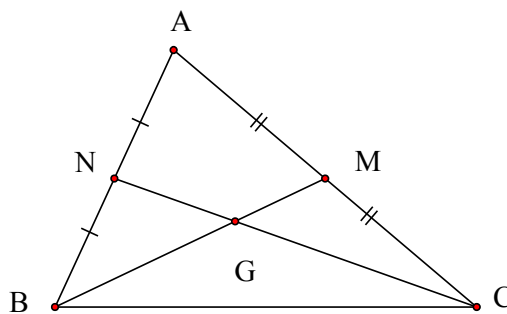
B. $BM > CN$

C. $BM < CN$

D. $BM = CN$

Lời giải

Chọn C



Xét $\triangle GBC$ có $\angle GBC > \angle GCB$ nên $GC > GB$ (cạnh đối diện với góc lớn hơn thì lớn hơn).

Do G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên $CG = \frac{2}{3}CN, BG = \frac{2}{3}BM$.

Khi đó $\frac{2}{3}CN > \frac{2}{3}BM$.

Do đó $CN > BM$.

Vậy $CN > BM$.

Đáp án đúng là C.

Câu 2. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại B , $AB = 6$, $\angle A = 30^\circ$. Phân giác góc C cắt AB tại D . Khi đó độ dài đoạn thẳng BD và AD lần lượt là:

A. 2;4

B. 3;3

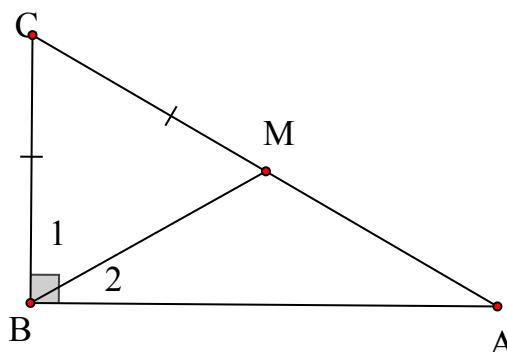
C. 4;2

D. 1;5

Lời giải

Chọn A

* Chứng minh nhận xét: Nếu một tam giác vuông có một góc nhọn bằng 30° thì cạnh góc vuông đối diện với nó bằng nửa cạnh huyền.



Xét $\triangle ABC$, ta có: $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$

Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = BC$

Ta có: $\triangle BCM$ cân tại C .

Mà $\angle C + \angle A = 90^\circ$ (tính chất tam giác vuông)

Suy ra: $\angle C = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Suy ra: $\triangle BCM$ đều

Suy ra: $BC = CM = BM$ và $\angle B_1 = 60^\circ$

Ta có: $\angle B_1 + \angle B_2 = \angle ABC = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle B_2 = 90^\circ - \angle B_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Trong $\triangle BAM$, ta có: $\angle B_2 = \angle A = 30^\circ$

Suy ra: $\triangle BAM$ cân tại M (vì có 2 góc kề cạnh AB bằng nhau)

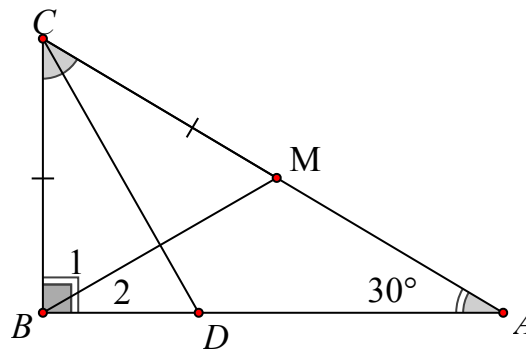
Hay $AM = MB$

Suy ra: $BC = CM = AM$ mà $CM + MA = AC$

$$\Rightarrow BC = \frac{1}{2} AC$$

Vậy: Nếu một tam giác vuông có một góc nhọn bằng 30° thì cạnh góc vuông đối diện với nó bằng nửa cạnh huyền.

Áp dụng vào bài tập



Ta có: $\angle BCD = \angle DCA = \frac{\angle BCD}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ (Vì CD là tia phân giác của $\angle BCD$)

Xét $\triangle DAC$ có: $\angle A = \angle DCA = 30^\circ$

$\Rightarrow \triangle DAC$ cân tại D

$$\Rightarrow DC = DA$$

Xét $\triangle BDC$ vuông tại B , có $\angle BCD = 30^\circ$

$$\Rightarrow BD = \frac{1}{2} DC$$

$$\Rightarrow BD + DA = \frac{DC}{2} + DC = \frac{3DC}{2} = AB$$

$$\Rightarrow 3DC = 2AB \Rightarrow DC = \frac{2AB}{3} = \frac{2.6}{3} = 4$$

$$\Rightarrow DC = DA = 4$$

$$\Rightarrow BD = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Vậy chọn đáp án A.

B. Tự luận

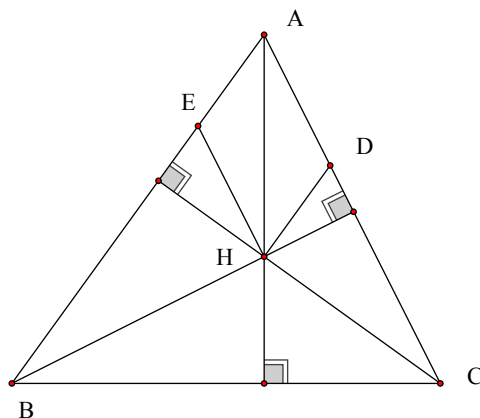
Câu 1. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018)

Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H .

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Chứng minh rằng:

Lời giải



Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại $D \Rightarrow CH \perp HD$

Đường thẳng song song với AC cắt AB tại $E \Rightarrow BH \perp HE$

Ta có $\triangle AHD = \triangle HAE$ (g.c.g)

$$\Rightarrow AD = HE, AE = HD$$

Trong $\triangle AHD$ có $HA < HD + AD$ nên $HA < AE + AD$ (1)

Từ $BH \perp HE \Rightarrow \triangle HBE$ vuông cân nên $HB < BE$ (2)

Tương tự, ta có: $HC < DC$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có: $HA + HB + HC < AB + AC$ (4)

Tương tự: $HA + HB + HC < AB + BC$ (5) và $HA + HB + HC < AB + BC$ (6)

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

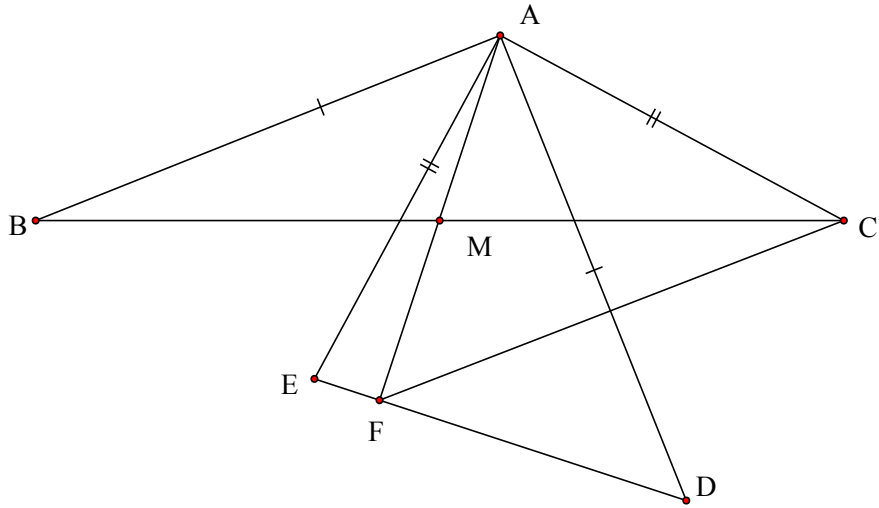
Từ (4), (5) và (6) suy ra

Dạng 5. Chứng minh song song, vuông góc.

Câu 1. (HSG 7 huyện Phù Cát, tỉnh Bình Định 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có $\angle A$ tù. Kẻ $AD \perp AB$ và $AD = AB$ (tia AD nằm giữa hai tia AB và AC). Kẻ $AE \perp AC$ và $AE = AC$ (tia AE nằm giữa hai tia AB và AC). Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng: $AM \perp DE$.

Lời giải



Trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho $MF = MA$

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle FMC$ có:

$$MF = MA$$

$BMA = PMC$ (đối đỉnh)

$MB = MC$ (Vì M là trung điểm của BC).

$$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta FMC \quad (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow AB = AD = CF \quad (1) \quad \square_{ABM} = \square_{FCM} \quad (2)$$

Từ $(2) \Rightarrow CF \parallel AB$

$$\Rightarrow \angle FCA + \angle BAC = 180^\circ \quad (3)$$

Có $AD \perp AB \Rightarrow \angle BAE + \angle EAD = \angle BAD = 90^\circ$,

$$AE \perp AC \Rightarrow \angle CAD + \angle EAD = \angle AE = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAE + \angle EAD + \angle CAD + \angle EAD = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAC + \angle EAD = 180^\circ \quad (4)$$

Từ (3), (4) $\Rightarrow \overline{PCA} = \overline{EAD}$

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle CFA$ có:

$$AE = AC \quad (\text{gt})$$

$$FCA = EAD \quad (\text{cmt})$$

$$AD = CF \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \Delta ADE = \Delta CFA \quad (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow \angle AED = \angle CAF \text{ (góc tương ứng)}$$

Mà $\angle AEF + \angle FAE = \angle AED = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle AED + \angle FAE = 90^\circ \text{ hay } \angle AEK + \angle KAE = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AKE \text{ vuông tại } K \Rightarrow AM \perp DE.$$

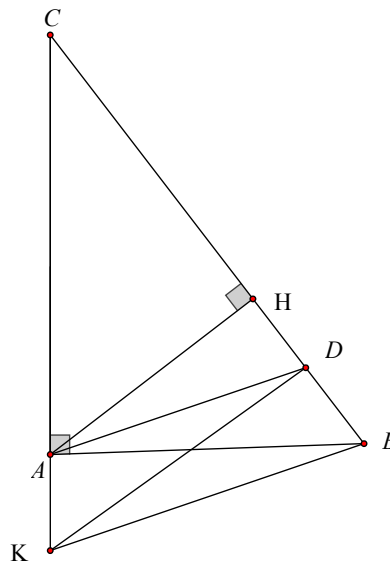
Câu 7. (HSG 7 huyện Phù Cát, tỉnh Bình Định 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$ và đường cao AH . Tia phân giác của $\angle BAH$ cắt BH tại D . Trên tia CA lấy điểm K sao cho $CK = BC$.

a) Chứng minh: $KB \parallel AD$.

b) Chứng minh: $KD \perp BC$

Lời giải



a) Chứng minh: $KB \parallel AD$.

Xét tam giác ABC vuông ở A có

$$\angle BAC = 90^\circ \Rightarrow \angle BAD + \angle CAD = 90^\circ,$$

Có $AH \perp BC$ (gt) $\Rightarrow \triangle AHD$ vuông ở H

$$\Rightarrow \angle HAD + \angle ADH = 90^\circ \text{ mà } \angle BAD = \angle HAD \text{ (vì } AD \text{ là phân giác của } \angle BAH)$$

$$\text{Nên } \angle CAD = \angle ADH, \Rightarrow \triangle ACD \text{ cân ở } C \Rightarrow \angle CAD = \frac{180^\circ - \angle C}{2}$$

$$CK = BC \text{ (gt), } \Rightarrow \triangle CBK \text{ cân ở } C \Rightarrow \angle KCB = \frac{180^\circ - \angle C}{2}$$

$$\text{Do đó } \angle CAD = \angle KCB, \Rightarrow KB \parallel AD \text{ (đpcm).}$$

b) Chứng minh: $KD \perp BC$

$$\text{Ta có: } \triangle ACD \text{ cân ở } C \text{ (cmt). } \Rightarrow AC = CD$$

$$\triangle CBK \text{ cân ở } C \text{ (cmt), } \Rightarrow CK = BC$$

$$\Rightarrow DB = KA$$

$$+ \triangle CBK \text{ cân ở } C \Rightarrow \angle BKC = \angle KCB$$

Xét $\triangle BKD$ và $\triangle KBA$ có:

$$DB = KA$$

$$\angle BKC = \angle KBA$$

KB là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle BKD = \triangle KBA \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle BDK = \angle KAB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow KD \perp BC \text{ (đpcm)}.$$

Dạng 6. Hình khối trong thực tiễn

Dạng 7. Bài toán chứng minh tổng hợp

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018)

Cho tam giác DEF có $\angle E = \angle F$. Tia phân giác của góc D cắt EF tại I . Ta có:

A. $\triangle DIE = \triangle DIF$

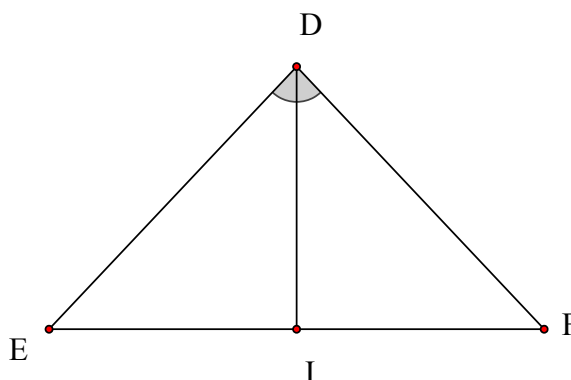
B. $DE = DF, \angle EDE = \angle FDF$

C. $IE = IF, \angle DIE = \angle DIF = 90^\circ$

D. Cả A, B, C đều đúng.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\triangle DEF$ có $\angle E = \angle F \Rightarrow \triangle DEF$ cân tại D .

$$\Rightarrow \angle DEF = \angle DFE$$

$$\Rightarrow DE = DF$$

$\angle EDI = \angle FDI$ (Vì DI là tia phân giác của góc $\angle EDF$) $\Rightarrow$ Đáp án B đúng.

Xét $\triangle DIE$ và $\triangle DIF$ có:

$$DE = DF \text{ (cmt)}$$

$$\angle EDI = \angle FDI \text{ (Vì } DI \text{ là tia phân giác của góc } \angle EDF)$$

DI là cạnh chung.

$\Rightarrow \triangle DIE = \triangle DIF$ (c.g.c) $\Rightarrow$ Đáp án A đúng.

$\Rightarrow IE = IF$ (2 cạnh tương ứng).

$\Rightarrow \angle DIE = \angle DIF$ (2 cạnh tương ứng).

Mà $\angle DIE + \angle DIF = 180^\circ$; $\Rightarrow \angle DIE = \angle DIF = 90^\circ \Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Vậy đáp án D đúng.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Trục Ninh, tỉnh Nam Định, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = AC$. Trên đường vuông góc với AB tại B lấy điểm E sao cho $BE = AD$ (E và C nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB).

1) Tam giác CDE là tam giác gì.

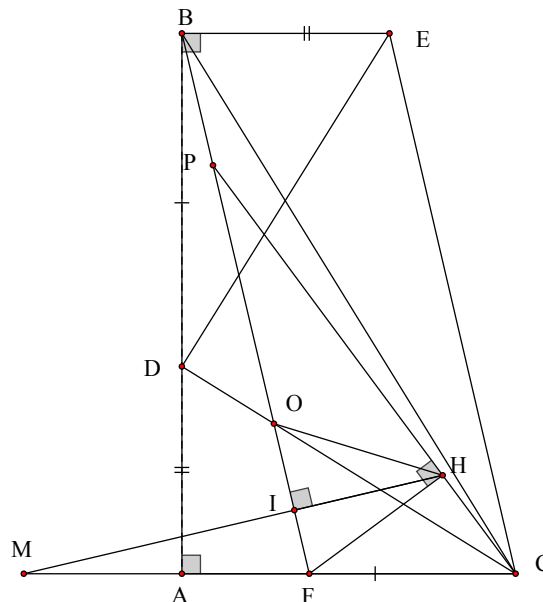
2) Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $CF = AD$. Gọi giao điểm của BF và CD là O . Chứng minh $\angle EOF = 45^\circ$.

3) Trên BF lấy điểm P sao cho $\angle PCO = \angle CP$. Kẻ $FH \perp CP$ ($H \in CP$). Chứng minh:

a) HO là tia phân giác của $\angle FHP$.

b) Chứng minh: $OH + OC > HF + CF$.

Lời giải



1) Tam giác CDE là tam giác gì.

Xét $\triangle DBE$ và $\triangle CAD$ có:

$$BE = AD$$

$$\angle DBE = \angle DAC = 90^\circ$$

$$BD = AC.$$

$$\Rightarrow \triangle DBE = \triangle CAD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DE = DC \text{ (1)}; \angle BDE = \angle ACD; \angle DEB = \angle CDA$$

Mặt khác: $\triangle DBE$ vuông tại B có $\angle BDE + \angle DEB = 90^\circ$

Do đó: $\angle BDE + \angle CDA = 90^\circ \Rightarrow \angle CDE = 90^\circ \Rightarrow \triangle CDE$ vuông tại D (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CDE$ vuông cân tại D .

2) Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $CF = AD$. Gọi giao điểm của BF và CD là O .

Chứng minh: $\angle EOF = 45^\circ$.

Ta có: $\triangle CDE$ vuông cân tại $D \Rightarrow \angle DEC = \angle DCE = 45^\circ$

Có $BE \perp AB, AC \perp AB$

$\Rightarrow BE \parallel AC \Rightarrow \angle EBC = \angle FCB$ (so le trong).

Xét $\triangle BEC$ và $\triangle CFB$ có

$$\angle EBC = \angle FCB$$

$$BE = CF \text{ (cùng bằng } AD)$$

BC là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle BEC = \triangle CFB$$

$$\Rightarrow \angle BCE = \angle CBF \Rightarrow BF \parallel CE$$

Khi đó $\angle BCE = \angle OFC$ (vì hai góc so le trong) mà $\angle DCE = 45^\circ \Rightarrow \angle OFC = 45^\circ$

Vậy $\angle EOF = 45^\circ$.

3) Trên BF lấy điểm P sao cho $PCO = \angle BCP$. Kẻ $FH \perp CP$ ($H \in CP$). Chứng minh:

a) HO là tia phân giác của $\angle FHP$.

Ta có: $\angle AFH$ là góc ngoài tại đỉnh F của $\triangle HFC$ nên:

$$\angle AFH = \angle FHC = 90^\circ + 2\angle BCF = 2(45^\circ + \angle BCF)$$

Mà $\angle AFO$ là góc ngoài tại đỉnh F của $\triangle OFC$

$$\Rightarrow \angle AFO = \angle OFC + \angle PCO = 45^\circ + \angle PCO$$

Do đó $\angle AFO = \frac{1}{2} \angle AFH$, hay FO là tia phân giác của $\angle AFH$

$\triangle CFH$ có đường phân giác của góc C và đường phân giác của góc ngoài tại F cắt nhau tại O , nên đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh H của $\triangle CHF$ cũng phải đi qua O .

$\Rightarrow HO$ là tia phân giác của $\angle FHP$.

b) Chứng minh: $OH + OC > HF + CF$.

Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với OF tại I cắt AC tại M .

Xét $\triangle FIM$ và $\triangle FIH$ có:

$$\angle MIF = \angle HIF = 90^\circ$$

FI là cạnh chung

$$\angle IFM = \angle IFH \text{ (Vì } FO \text{ là tia phân giác của } \angle AFH \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle FIM = \triangle FIH \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow MI = HI, FM = FH$$

Do đó: $OM = OH$ (quan hệ đường xiên – hình chiếu)

Từ đó suy ra: $OH + OC > HF + CF$.

Câu 2. (HSG 7 đề thi khảo sát HSG 2017 - 2018)

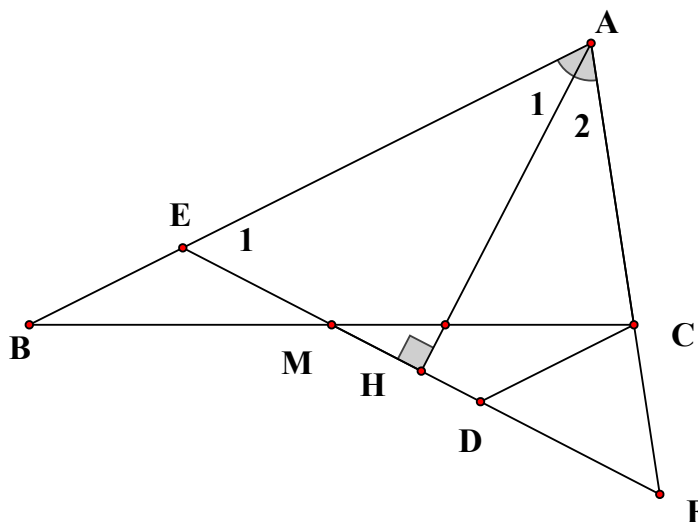
Cho tam giác ABC ($AB > AC$), M là trung điểm của BC . Đường thẳng vuông góc với tia phân giác AH ($H \in EF$) của $\angle A$ tại M cắt cạnh AB, AC lần lượt tại E và F . Chứng minh:

a) $EH = HF$.

b) $2\angle BME = \angle C - \angle B$.

c) $BE = CF$.

Bài giải



a) Chứng minh: $EH = HF$.

Xét $\triangle AEH$ và $\triangle AFH$

$$\angle A_1 = \angle A_2 \text{ (Vì } AH \text{ là tia phân giác của góc } \angle BAC \text{)}$$

AH là cạnh chung

$$\angle AHE = \angle AHF (=90^\circ)$$

$$\triangle AEH = \triangle AFH \quad (\text{g.c.g})$$

$$\Rightarrow EH = HF \quad (\text{đpcm}).$$

b) Chứng minh: $2\angle BME = \angle ACB - \angle B$.

$$\text{Từ } \triangle AEH = \triangle AFH, \Rightarrow \angle E_1 = \angle F$$

Xét $\triangle CMF$ có $\angle ACB$ là góc ngoài suy ra $\angle CMF = \angle ACB - \angle F$

$\triangle BME$ có $\angle E_1$ là góc ngoài suy ra $\angle BME = \angle E_1 - \angle B$

$$\angle CMF + \angle BME = (\angle ACB - \angle F) + (\angle E_1 - \angle B)$$

Vậy hay $2\angle BME = \angle ACB - \angle B$ (đpcm).

c) Chứng minh: $BE = CF$.

Ta có: $\triangle AHE = \triangle AHF$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow AE = AF \Rightarrow \angle E_1 = \angle F$$

Từ C vẽ $CD \parallel AB$ ($D \in EF$)

Xét $\triangle BME$ và $\triangle CMD$ có:

$$\angle BME = \angle CMD \quad (\text{hai góc đối đỉnh})$$

$$BM = MC \quad (M \text{ là trung điểm của } BC)$$

$$\angle EBM = \angle DCM \quad (\text{so le trong})$$

$$\Rightarrow \triangle BME = \triangle CMD \quad (\text{g.c.g})$$

$$\Rightarrow BE = CD \quad (1)$$

Và có $\angle E_1 = \angle EDF$ (cặp góc đồng vị)

$$\text{Do đó: } \angle EDF = \angle F \Rightarrow \triangle CDF \text{ cân} \Rightarrow CF = CD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $BE = CF$ (đpcm).

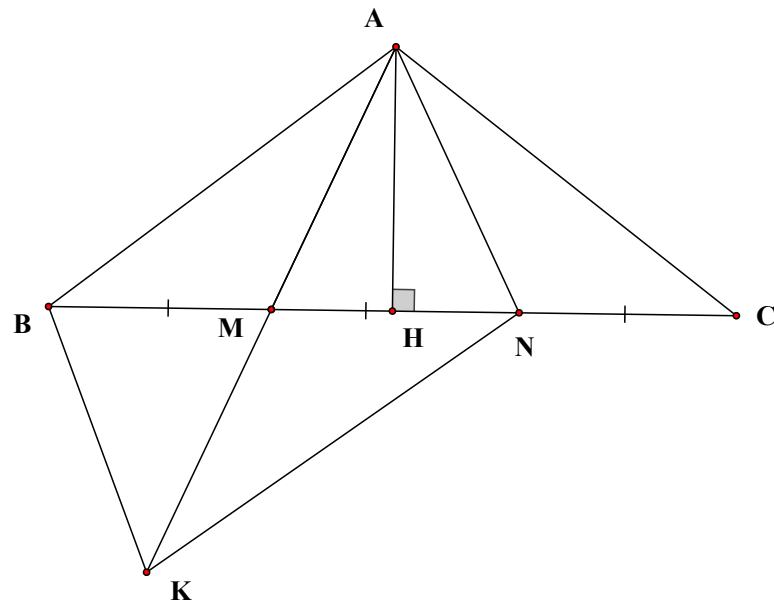
Câu 3. (HSG 7 huyện Sơn Dương, trường Hồng Thái 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC .

a) Chứng minh: $AM = AN$ và $AH \perp BC$.

b) Chứng minh: $\angle MAN > \angle BAM = \angle CAN$.

Lời giải



a) Chứng minh: $AM = AN$ và $AH \perp BC$.

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$ có:

$$BM = NC \quad (\text{gt})$$

$$\angle ABM = \angle ACN \quad (\text{Vì } \triangle ABC \text{ cân tại đỉnh } A)$$

$$AB = AC \quad (\text{Vì } \triangle ABC \text{ cân tại đỉnh } A)$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACN (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow AM = AN \quad (\text{Hai cạnh tương ứng})$$

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACH$ có:

$$BH = CH \quad (H \text{ là trung điểm của } BC)$$

$$\angle ABH = \angle ACH \quad (\text{Vì } \triangle ABC \text{ cân tại đỉnh } A)$$

$$AB = AC \quad (\text{Vì } \triangle ABC \text{ cân tại đỉnh } A)$$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACH (\text{c.c.c})$$

$$\Rightarrow \angle AHB = \angle AHC \quad (\text{Hai cạnh tương ứng})$$

$$\text{Mà } \angle AHB + \angle AHC = 180^\circ \quad (\text{Hai góc kề bù})$$

$$\angle AHB = \angle AHC = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AH \perp BC$$

b) Chứng minh: $\angle MAN > \angle BAM = \angle CAN$.

Trên tia AM lấy điểm K sao cho $AM = MK$,

Xét $\triangle AMN$ và $\triangle BMK$ có:

$$BM = MN \quad (\text{gt})$$

$$\widehat{BMK} = \widehat{AMN} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$AM = MK \text{ (theo cách gọi)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMN = \triangle BMK \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{BKM} \text{ và } AN = BK \text{ (1)}$$

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle ANC$ có:

$$AB = AC$$

$$\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$$

$$BM = NC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle ANC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AN = AM \text{ (2)}; \widehat{BAM} = \widehat{CAN}$$

$$\text{Từ (1) và (2): } \Rightarrow AN = AM = BK$$

$$\text{Do } BA > AM \text{ nên } BA > BK$$

$$\Rightarrow \widehat{BKA} > \widehat{BKA} \Rightarrow \widehat{MAN} > \widehat{BAM} = \widehat{CAN}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Trực Ninh, tỉnh Nam Định 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = AC$. Trên đường vuông góc với AB tại B lấy điểm E sao cho $BE = AD$ (E và C nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB)

1) Tam giác CDE là tam giác gì.

2) Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $CF = AD$. Gọi giao điểm của BF và CD là O . Chứng minh $\widehat{EOF} = 45^\circ$.

3) Trên BF lấy điểm P sao cho $\widehat{PCO} = \widehat{BCP}$. Kẻ $FH \perp CP$ ($H \in CP$). Chứng minh: HO là tia phân giác của $\widehat{FHP}$.

Lời giải

$$\Rightarrow \angle BCE = \angle BCF \text{ (góc tương ứng)} \Rightarrow BF \parallel CE$$

Khi đó $\angle BCE = \angle OFC$ (vì hai góc so le trong) mà $\angle BCE = 45^\circ \Rightarrow \angle OFC = 45^\circ$

Vậy $\angle OFC = 45^\circ$.

3) Trên BF lấy điểm P sao cho $\angle PCO = \angle BCP$. Kẻ $FH \perp CP (H \in CP)$. Chứng minh: HO là tia phân giác của $\angle FHP$.

Ta có: $\angle AFH$ là góc ngoài tại đỉnh F của $\triangle HFC$ nên:

$$\angle AFH = \angle FHC = 90^\circ + 2\angle BCF = 2(45^\circ + \angle BCF)$$

Mà $\angle AFO$ là góc ngoài tại đỉnh F của $\triangle OFC$

$$\Rightarrow \angle AFO = \angle OFC + \angle FCO = 45^\circ + \angle FCO$$

Do đó $\angle AFO = \frac{1}{2} \angle AFH$, hay FO là tia phân giác của $\angle AFH$.

$\triangle CFH$ có đường phân giác của góc C và đường phân giác của góc ngoài tại F cắt nhau tại O , nên đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh H của $\triangle CHF$ cũng phải đi qua O .

$\Rightarrow HO$ là tia phân giác của $\angle FHP$.

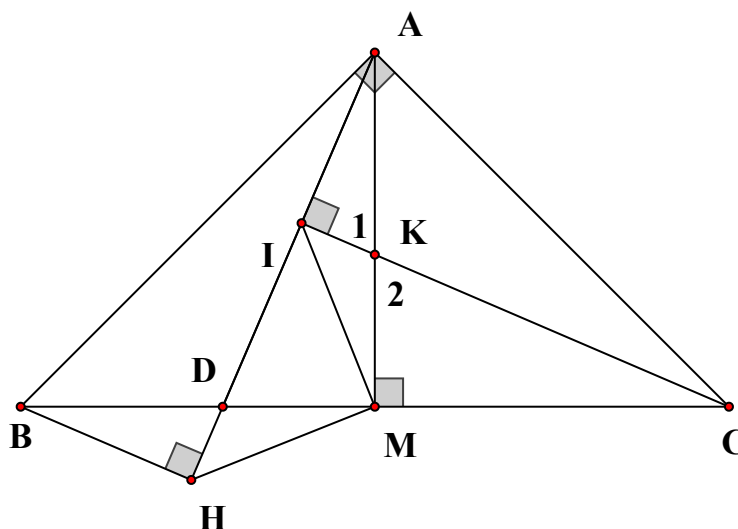
Câu 5. (HSG 7 đề giao lưu học sinh giỏi, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC , D là điểm thuộc đoạn $BM (D \neq B, M)$. Kẻ các đường thẳng BH, CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I . Chứng minh rằng:

a) $\angle BAM = \angle ACM$ và $BH = AI$.

b) Tam giác MHI vuông cân.

Lời giải



a) Chứng minh rằng: $\widehat{BAM} = \widehat{ACM}$ và $BH = AI$.

Ta có: $\triangle ABC$ vuông cân tại A.

$$\Rightarrow AB = AC; \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^\circ$$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

$$AB = AC$$

AM là cạnh chung

$$BM = MC \text{ (Vì M là trung điểm của } BC)$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACM \text{ (c.c.c)}$$

$\triangle ABC$ vuông cân tại A.

Có M là trung điểm của BC . $\Rightarrow AM$ là đường trung tuyến của $\triangle ABC$.

$\Rightarrow AM$ cũng là đường phân giác của $\widehat{BAC}$.

$$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM} = 45^\circ$$

Mà $\widehat{ACM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{ACM}$ (đpcm)

+ Chứng minh: $BH = AI$

Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{ACI}$ (cùng phụ $\widehat{BAC}$)

Xét $\triangle AIC$ và $\triangle BHA$ có:

$$\widehat{BAH} = \widehat{ACI} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{BHA} = \widehat{AIC} (=90^\circ)$$

$$AB = AC \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle AIC = \triangle BHA \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow BH = AI \text{ (đpcm)}.$$

b) Chứng minh rằng: $\triangle MHI$ vuông cân.

$\triangle ABC$ vuông cân tại A.

Có M là trung điểm của BC . $\Rightarrow AM$ là đường trung tuyến của $\triangle ABC$.

$\Rightarrow AM$ cũng là đường cao của $\triangle ABC$.

$$\Rightarrow AM \perp BC$$

Có $\widehat{BAM} = \widehat{CAM} = 45^\circ$. Và $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{ACB} (=45^\circ)$$

$\Rightarrow \triangle AMC$ cân tại M .

$$\Rightarrow AM = MC$$

Ta có: $\triangle AIC = \triangle BHA$ (chứng minh trên)

$$AH = IC$$

Gọi K là giao điểm của CI và AM .

$$\angle HAM + \angle K_1 = 90^\circ$$

$$\angle KCM + \angle K_2 = 90^\circ. \text{ Mà } \angle K_1 = \angle K_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \angle HAM = \angle KCM$$

Xét $\triangle HAM$ và $\triangle ICM$ có:

$$AH = IC$$

$$\angle HAM = \angle KCM$$

$$AM = MC$$

$$\Rightarrow \triangle HAM = \triangle ICM \text{ (c.g.c.)} \Rightarrow HM = MI \quad (*)$$

$$\Rightarrow \angle HMA = \angle KCM \Rightarrow \angle HMB = \angle HMA \text{ (do } \angle AMB = \angle AMC = 90^\circ)$$

Ta có: $\angle AMB = \angle BMI + \angle HMA = 90^\circ$

$$\angle HMB = \angle HMA$$

$$\Rightarrow \angle BMI + \angle HMB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle HMI = 90^\circ \quad (**)$$

Từ $(*)$ và $(**)$ $\Rightarrow \triangle MHI$ vuông cân (đpcm).

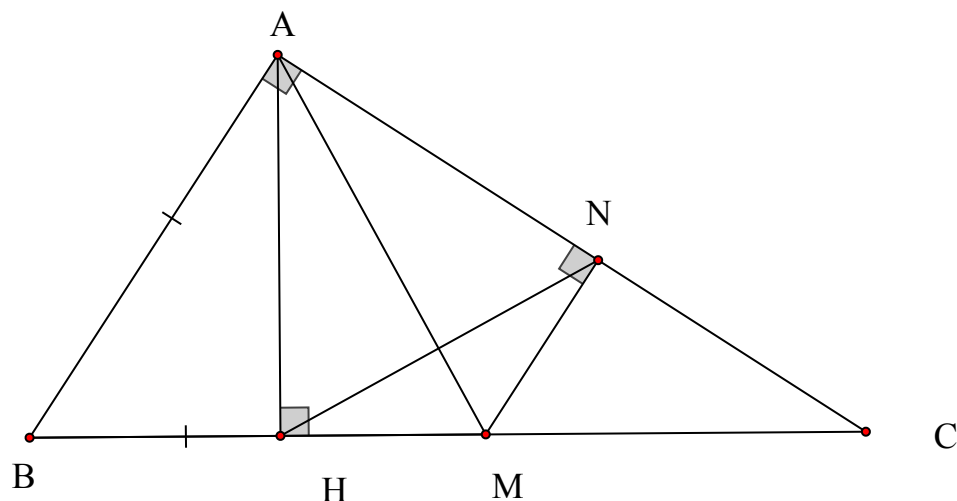
Câu 6. (HSG 7 huyện Cẩm Khê, tỉnh Phú Thọ 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = BA$. Từ M kẻ MN vuông góc với AC ($N \in AC$). Chứng minh rằng:

a) Tam giác ANH cân.

b) $BC + AH > AB + AC$.

Lời giải



a) Chứng minh: Tam giác ANH cân.

Ta có: $BM = BA$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ABM$ cân tại B nên $\angle BAM = \angle BMA$

mà $\angle BAM + \angle MAN = 90^\circ$; $\angle BMA + \angle HAM = 90^\circ$.

$\Rightarrow \angle HAM = \angle MAN$

Xét $\triangle HAM$ và $\triangle NAM$ có:

$\angle AHM = \angle ANM = 90^\circ$

AM chung

$\angle HAM = \angle MAN$

$\Rightarrow \triangle HAM = \triangle NAM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AH = AN \Rightarrow \triangle ANH$ cân.

Vậy $\triangle ANH$ cân tại A.

b) Chứng minh: $BC + AH > AB + AC$

Ta có: $BC - AB = BC - AM = MC$; $AC - AH = AC - AN = NC$

Tam giác MNC vuông tại N nên $MC > NC$.

Suy ra: $BC - AB > AC - AH \Rightarrow BC + AH > AB + AC$ (đpcm).

Câu 7. (HSG 7 trường Đáp Cầu, Bắc Ninh 2016 - 2017)

Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC , CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

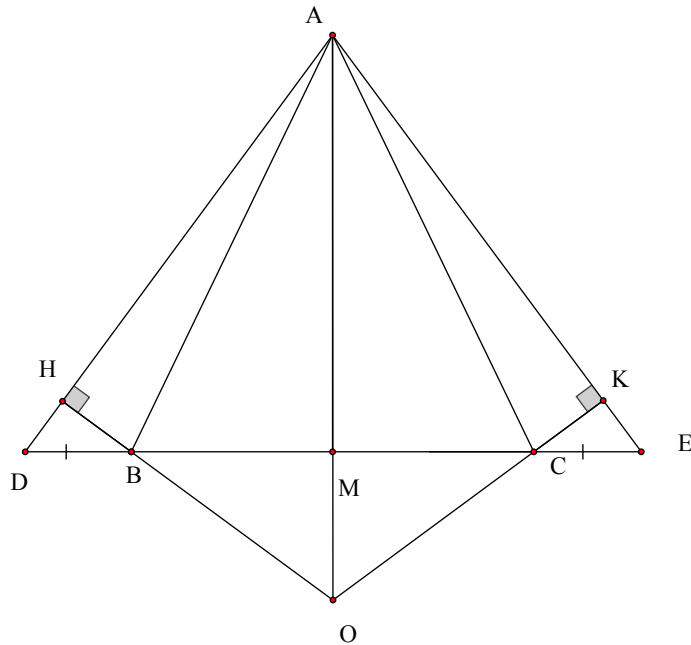
a) Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân.

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của $\angle DAE$.

c) Từ B và C vẽ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD, AE . Chứng minh: $BH = CK$.

d) Chứng minh: 3 đường thẳng AM, BH, CK gặp nhau tại một điểm.

Lời giải



a) Chứng minh: tam giác ADE là tam giác cân.

Ta có: $\triangle ABC$ cân nên $\angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \angle ABD = \angle ACE$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có: $AB = AC$ (gt), $\angle ABD = \angle ACE$ (cmt), $DB = CE$ (gt)
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c)

$\Rightarrow AD = AE$

$\Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A .

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của $\angle DAE$.

Xét $\triangle AMD$ và $\triangle AME$ có:

$MD = ME$ (Vì $DB = CE$; $MB = MC$)

AM chung;

$AD = AE$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle AMD = \triangle AME$ (c.c.c)

$\Rightarrow \angle MAD = \angle MAE$

Vậy AM là tia phân giác của $\angle DAE$.

c) Từ B và C vẽ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD, AE . Chứng minh $BH = CK$.

Vì $\triangle ADE$ cân tại A (cm câu a) nên $\angle ADE = \angle AED$

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle CKE$ có:

$\angle BHD = \angle CKE = 90^\circ$

$$\widehat{BDH} = \widehat{CEK} \quad (\text{Vì } \widehat{ADE} = \widehat{AED})$$

$$DB = CE \quad (\text{gt})$$

$$\Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE \quad (\text{cạnh huyền – góc nhọn})$$

$$\Rightarrow BH = CK$$

d) Chứng minh 3 đường thẳng AM, BH, CK gặp nhau tại 1 điểm.

Gọi giao điểm của BH và CK là O .

Xét $\triangle AHO$ và $\triangle AKO$ có:

$$\widehat{AHO} = \widehat{AKO} = 90^\circ$$

OA cạnh chung;

$$AH = AK \quad (AD = AE, DH = KE \text{ (do } \triangle BHD = \triangle CKE))$$

$$\Rightarrow \triangle AHO = \triangle AKO \quad (\text{cạnh huyền – cạnh góc vuông}).$$

Câu 7. (Đề thi Olympic 7 trường THCS Nguyễn Trữc 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ nhọn, AD vuông góc với BC tại D . Xác định I, J sao cho AB là trung trực của DI, AC là trung trực của DJ ; IJ cắt AB, AC lần lượt tại L và K . Chứng minh rằng:

a) $\triangle AIJ$ cân

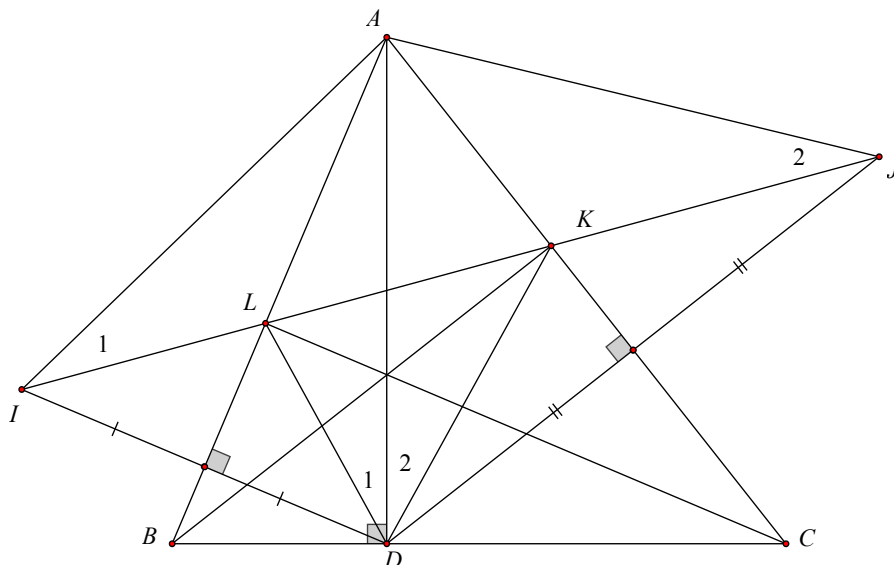
b) DA là tia phân giác của $\widehat{DK}$.

c) $BK \perp AC$; $CL \perp AB$.

d) Trục tâm của $\triangle ABC$ chính là giao của 3 đường phân giác $\triangle DLK$.

e) Nếu D là một điểm tùy ý trên cạnh BC . Chứng minh rằng $\widehat{IAJ}$ có số đo không đổi và tìm vị trí điểm D trên cạnh BC để IJ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



a) Chứng minh rằng: $\triangle AIJ$ cân

Ta có: AB là trung trực của DI (gt)

$$\Rightarrow AI = AD$$

AC là trung trực của DJ (gt)

$$\Rightarrow AD = AJ$$

$$\Rightarrow AI = AJ$$

$\Rightarrow \triangle AIJ$ cân tại A (đpcm).

b) Chứng minh rằng: DA là tia phân giác của $\angle EDK$.

Xét $\triangle ALI$ và $\triangle ALD$ có:

$$AI = AD$$

AL là cạnh chung

$IL = LD$ (Vì L nằm trên đường trung trực AB của ID)

$$\Rightarrow \triangle ALI = \triangle ALD \text{ (c. c. c)}$$

$$\Rightarrow \angle I_1 = \angle D_1$$

Tương tự ta cũng có: $\triangle AKD = \triangle AKJ$ (c. c. c)

$$\Rightarrow \angle D_2 = \angle J_2$$

Mà $\triangle AIJ$ cân (cmt)

$$\Rightarrow \angle I_1 = \angle J_2 \Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2 \Rightarrow DA \text{ là tia phân giác của } \angle EDK \text{ (đpcm).}$$

c) Chứng minh rằng: $BK \perp AC; CL \perp AB$.

+ Xét $\angle DKL$ có LA, KA là hai đường phân giác ngoài cắt nhau tại $A \Rightarrow DA$ là đường phân giác trong.

+ Vì $BD \perp DA$ tại $D \Rightarrow BD$ là phân giác ngoài của $\angle DKL$.

+ Vì LB và DB là phân giác ngoài của $\angle DKL$ cắt nhau tại B nên KB là phân giác trong của $\angle DKL$.

+ Vì KB và KC là hai đường phân giác trong và ngoài của $\angle DKL$ nên $KB \perp AC$.

Tương tự:

+ Xét $\angle DKL$ có KA, LA là hai đường phân giác ngoài cắt nhau tại $A \Rightarrow DA$ là đường phân giác trong.

+ Vì $CD \perp DA$ tại $D \Rightarrow CD$ là phân giác ngoài của $\angle DKL$.

+ Vì KC và CD là phân giác ngoài của $\angle DKL$ cắt nhau tại C nên LC là phân giác trong của $\angle DKL$.

+ Vì LC và LB là hai đường phân giác trong và ngoài của $\angle DKL$ nên $CL \perp AB$.

d) Trọng tâm của $\triangle ABC$ chính là giao của 3 đường phân giác $\triangle DLK$.

Xét $\angle ABC$ có:

$KB \perp AC$, $CL \perp AB$ (chứng minh câu c)

Mà KB , LC là hai đường phân giác trong của $\triangle DLK$.

Vậy trực tâm của $\triangle ABC$ chính là giao của 3 đường phân giác trong $\triangle DLK$.

e) Nếu D là một điểm tùy ý trên cạnh BC . Chứng minh rằng $\angle AJ$ có số đo không đổi và tìm vị trí điểm D trên cạnh BC để IJ có độ dài nhỏ nhất.

Ta có: $\triangle AIJ$ cân tại A có $\angle AJ$ không đổi

nên cạnh đáy IJ nhỏ nhất nếu cạnh bên AI nhỏ nhất.

Ta có: $AI = AD \geq AH$ (AH là đường vuông góc kẻ từ A đến BC)

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $D \equiv H$.

Vậy khi D là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC thì IJ nhỏ nhất.

Câu 7. (HSG 7 huyện Tư Nghĩa, tỉnh Quảng Ngãi 2017 - 2018)

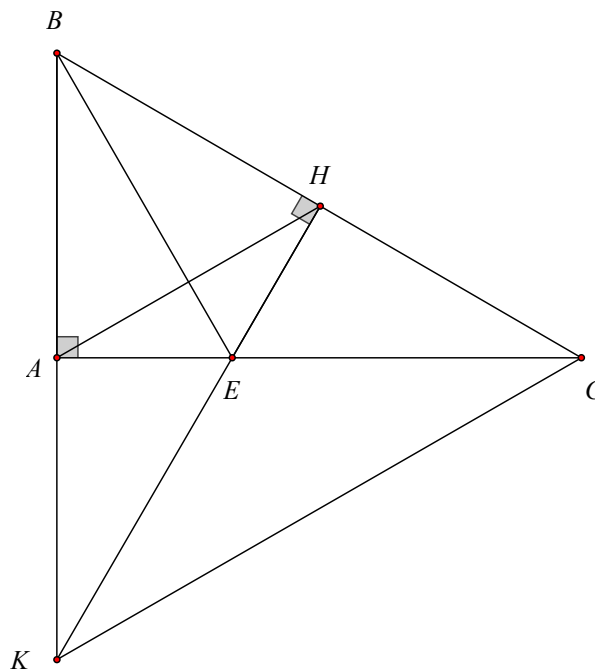
Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường phân giác BE . Kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$), gọi K là giao điểm của AB và EH . Chứng minh rằng:

a) $\triangle ABE = \triangle HBE$.

b) BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH .

c) $BE \perp CK$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng: $\triangle ABE = \triangle HBE$.

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle HBE$ có:

BE là cạnh chung

$$\angle BAC = \angle BHE (=90^\circ)$$

$$\angle ABE = \angle EBH \text{ (Vì } BE \text{ là đường phân giác của } \angle ABC \text{)}.$$

$$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle HBE \text{ (Cạnh huyền – góc nhọn)}.$$

b) Chứng minh rằng: BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH .

Ta có: $\triangle ABE = \triangle HBE$ (cmt)

$$\Rightarrow BA = BH, EA = EH$$

$\Rightarrow B, E$ nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AH .

$\Rightarrow BE$ là đường trung trực của đoạn thẳng AH .

c) Chứng minh rằng: $BE \perp CK$.

Xét $\triangle BCK$ có:

$$CA \perp BK, KH \perp BC \text{ (gt)}$$

Mà KH cắt CA tại E .

$\Rightarrow E$ là trực tâm $\triangle BKC$, do đó BE là đường cao thứ ba nên $BE \perp CK$.

Câu 8. (HSG 7 trường THCS Thạch Bình 2017 - 2018)

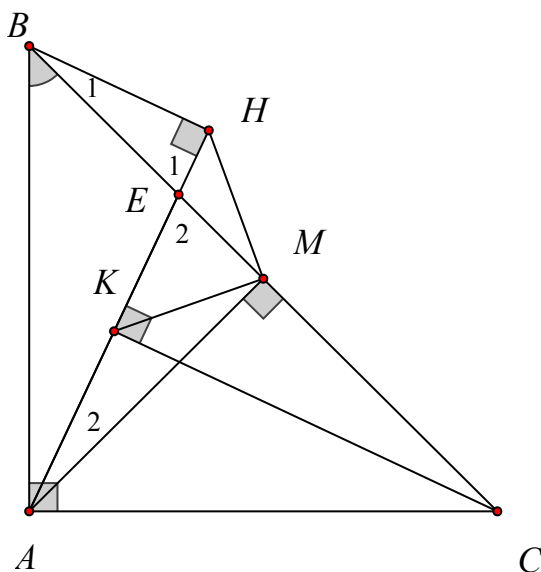
Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A, trung tuyến AM . Lấy $E \in BC$, kẻ $BH \perp AE$, $CK \perp AE$ ($H, K \in AE$)

a) Chứng minh: $\triangle ACK = \triangle BAH$.

b) Chứng minh: $\triangle AMK = \triangle BMH$.

c) Chứng minh: $\triangle MHK$ cân.

Lời giải



a) Chứng minh: $\triangle ACK = \triangle BAH$.

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAK$ có:

$$\Rightarrow \angle AHB = \angle KCA (=90^\circ)$$

$$AB = AC \quad (\text{gt})$$

$$\angle BAH = \angle ACK \quad (\text{cùng phụ với } \angle KAC)$$

$$\Rightarrow \triangle ACK = \triangle BAH \quad (\text{g.c.g}) \quad (\text{đpcm}).$$

b) Chứng minh: $\triangle AMK = \triangle BMH$.

Ta có: $\triangle BHE$ vuông tại H .

$$\Rightarrow \angle B_1 + \angle E_1 = 90^\circ$$

$\triangle AEM$ vuông tại M (Vì $\triangle ABC$ vuông cân, AM là đường trung tuyến đồng thời là đường cao).

$$\Rightarrow \angle A_2 + \angle E_2 = 90^\circ$$

$$\text{Mà: } \angle E_1 = \angle E_2 \quad (\text{đối đỉnh}). \Rightarrow \angle B_1 = \angle A_2.$$

Xét $\triangle AMK$ và $\triangle BMH$ có:

$$BH = AK \quad (\text{Vì } \triangle ACK = \triangle BAH \text{ (cmt)})$$

$$\angle B_1 = \angle A_2$$

$$BM = AM \left(= \frac{1}{2} BC \right)$$

$$\Rightarrow \triangle AMK = \triangle BMH \quad (\text{c.g.c}).$$

c) Chứng minh: $\triangle MHK$ cân.

$$\text{Ta có: } \triangle AMK = \triangle BMH \quad (\text{cmt}) \Rightarrow MK = MH$$

Xét $\triangle MHK$ có: $MK = MH \Rightarrow \triangle MHK$ cân tại M .

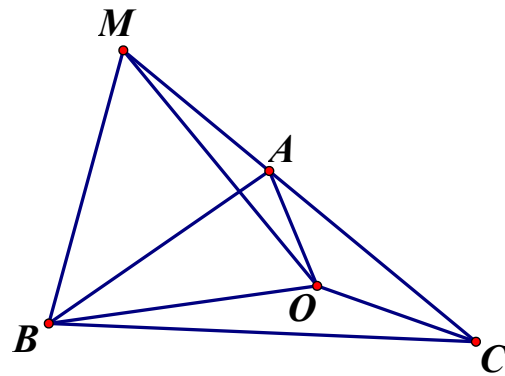
Câu 9. (Olympic 7, trường THCS Sương Bình 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A , có $\angle A = 108^\circ$. Gọi O là một điểm nằm trên tia phân giác của $\angle C$ sao cho $\angle BO = 12^\circ$, vẽ tam giác đều BOM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BO). Chứng minh rằng:

a) Ba điểm C, A, M thẳng hàng.

b) Tam giác AOB cân.

Lời giải



a) Chứng minh rằng: Ba điểm C, A, M thẳng hàng.

Ta có: $\triangle ABC$ cân tại A , $\angle A = 108^\circ$

$$\Rightarrow \angle B = \angle C = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \angle OCA = \angle OCB = \frac{\angle ACB}{2} = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ \quad (\text{Vì } CO \text{ là tia phân giác của } \angle ACB).$$

Xét $\triangle BOC$ có $\angle BOC = 180^\circ - (12^\circ + 18^\circ) = 150^\circ$

Xét $\triangle BOM$ là tam giác đều

$$\Rightarrow \angle BOM = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle MOC = 360^\circ - (150^\circ + 60^\circ) = 150^\circ$$

Xét $\triangle BOC$ và $\triangle MOC$ có:

$$MO = OB$$

$$\angle BOM = \angle MOC (= 60^\circ)$$

OC là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle BOC = \triangle MOC \quad (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow \angle OCM = \angle OCB = 18^\circ$$

Mà $\angle OCA = 18^\circ$ nên hai tia CM, CA trùng nhau, do đó 3 điểm C, O, M thẳng hàng.

b) Chứng minh: Tam giác AOB cân.

$\triangle CBM$ có $CM = CB \Rightarrow \triangle CBM$ cân tại C ; $\angle C = 36^\circ$

$$\Rightarrow \angle CBM = \angle CMB = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

Mà $\angle BAM = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$

$$\Rightarrow \angle BAM = \angle BMA = 72^\circ$$

$\Rightarrow \triangle BAM$ cân tại B

$$\Rightarrow BA = BM \quad (\text{tính chất tam giác cân})$$

$$OM = BM = BO \text{ (} \triangle BOM \text{ đều)}$$

$$\Rightarrow \triangle AOB \text{ cân tại } B.$$

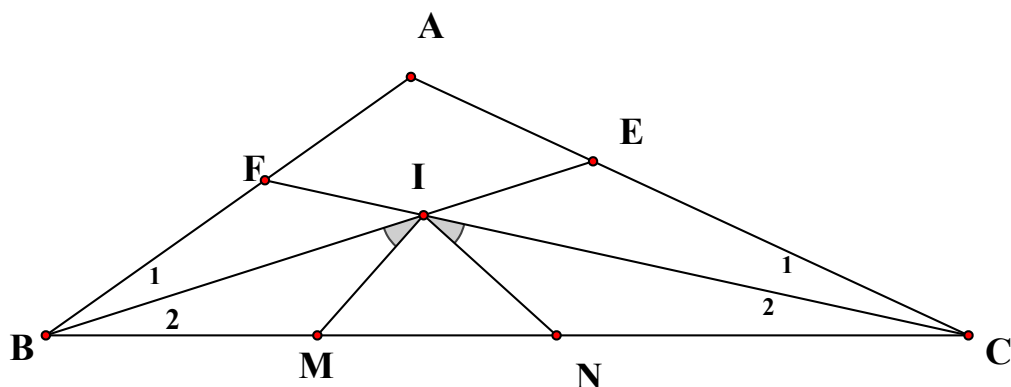
Câu 10. (HSG 7 huyện Trà Lý, tỉnh Thái Bình, 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 120^\circ$. Các tia phân giác BE, CF của $\angle ABC$ và $\angle ACB$ cắt nhau tại I (E, F lần lượt thuộc các cạnh AC, AB). Trên cạnh BC lấy hai điểm M, N sao cho $\angle BIM = \angle CIN = 30^\circ$.

a) Tính số đo của $\angle MIN$.

b) Chứng minh $CE + BF < BC$.

Lời giải



a) Tính số đo của $\angle MIN$.

Xét $\triangle ABC$ có: $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A = 60^\circ$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BIC = 150^\circ \text{ mà } \angle BIM = \angle CIN = 30^\circ \Rightarrow \angle MIN = 90^\circ$$

b) Chứng minh $CE + BF < BC$.

Ta có: $\angle BIC = 150^\circ \Rightarrow \angle FIB = \angle ICI = 30^\circ$

Xét $\triangle BFI$ và $\triangle BMI$ có:

$$\angle B_1 = \angle B_2 \text{ (} BI \text{ là tia phân giác } \angle ABC \text{)}$$

BI là cạnh chung

$$\angle FIB = \angle BIM = 30^\circ$$

Suy ra $\triangle BFI = \triangle BMI \text{ (g.c.g)} \Rightarrow BF = BM$

Xét $\triangle CNI$ và $\triangle CEI$ có:

$$\angle C_1 = \angle C_2 \text{ (} CI \text{ là tia phân giác } \angle ACB \text{)}$$

CI là cạnh chung

$$\angle ECI = \angle NCI = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CNI = \triangle CEI \text{ (g.c.g)} \Rightarrow CN = CE$$

$$\text{Do đó } CE + BF = BM + CN < BM + MN + NC = BC$$

$$\text{Vậy } CE + BF < BC$$

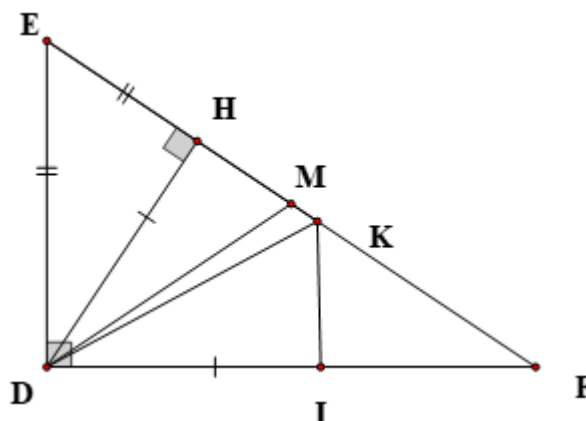
Câu 11. (HSG 7 huyện Trà Lý, tỉnh Thái Bình, 2017 - 2018)

Cho $\triangle DEF$ vuông tại D và $DF > DE$, kẻ DH vuông góc với EF (H thuộc cạnh EF).
Gọi M là trung điểm của EF .

a) Chứng minh: $\angle MDH = \angle E - \angle F$

b) Chứng minh: $EF - DE > DF - DH$

Lời giải



a) Chứng minh: $\angle MDH = \angle E - \angle F$

Vì M là trung điểm của EF suy ra $MD = ME = MF \Rightarrow \triangle MDE$ cân tại M .

$\Rightarrow \angle E = \angle MDE$, mà $\angle HDE = \angle F$ (cùng phụ với $\angle E$).

Ta có: $\angle MDH = \angle MDE - \angle HDE$

Vậy $\angle MDH = \angle E - \angle F$

b) Chứng minh: $EF - DE > DF - DH$

Trên cạnh EF lấy K sao cho $EK = ED$, trên cạnh DF lấy I sao cho $DI = DH$.

Ta có: $EF - DE = EF - EK = KF$; $DF - DH = DF - DI = IF$

$\Rightarrow EK = ED \Rightarrow \triangle DEK$ cân $\Rightarrow \angle EDK = \angle EKD$

$$\angle EDK + \angle KDI = \angle EKD + \angle HDK = 90^\circ \Rightarrow \angle KDI = \angle HDK$$

Xét $\triangle DHK$ và $\triangle DIK$ có:

DK là cạnh chung

$$\angle KDI = \angle HDK$$

$$DI = DH$$

$$\Rightarrow \Delta DHK = \Delta DIK \quad (\text{c.g.c}), \Rightarrow \angle KID = \angle DHK = 90^\circ$$

Trong ΔKIF vuông tại $I \Rightarrow KF > FI$ (đpcm).

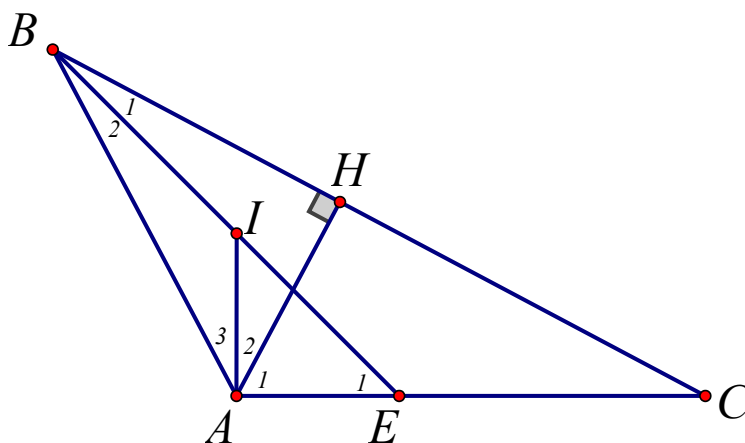
Câu 12. (HSG 7 trường Nghĩa Điền, Tư Nghĩa 2017 - 2018)

Cho ΔABC , $\angle A > 90^\circ$, đường cao AH , $\angle BAH = 2\angle C$. Tia phân giác của $\angle B$ cắt AC ở E , tia phân giác của $\angle BAH$ cắt BE ở I .

a) So sánh: AB với EB .

b) Chứng minh: ΔAIE là tam giác vuông cân.

Lời giải



a) So sánh: AB với EB .

ΔABE , $\angle A > 90^\circ \Rightarrow AB < EB$ (quan hệ góc – cạnh đối diện)

b) Chứng minh: ΔAIE là tam giác vuông cân.

Có $\angle A_1 + \angle C = 90^\circ$

$$\angle A_2 = \angle A_3 = \frac{1}{2} \angle BAH \quad (AI \text{ là phân giác})$$

$$\angle C = \frac{1}{2} \angle BAH \quad (\text{gt})$$

Do đó $\angle A_2 = \angle A_3 = \angle C$

$$\Rightarrow \angle A_1 + \angle A_2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AI \perp AC$$

$$\Rightarrow \angle E_1 + \angle AIE = 90^\circ$$

Mà $\angle E_1 = \angle B_1 + \angle C$ (góc ngoài của ΔBEC)

$$\angle AIE = \angle A_3 + \angle B_2 \quad (\text{góc ngoài của } \Delta ABI)$$

$$\Rightarrow \angle E_1 + \angle I_1 = \angle B_1 + \angle C + \angle A_3 + \angle B_2$$

$$\Rightarrow \angle E_1 + \angle I_1 = 2\angle B_1 + 2\angle C = \angle ABC + \angle BAH = 90^\circ \quad \left(\begin{array}{l} \angle B_2 = \angle B_1 = \frac{1}{2}\angle ABC \\ \angle A_2 = \angle A_3 = \angle C \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \angle B_1 + \angle C = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle E_1 = 45^\circ$$

Do đó $\triangle AIE$ vuông cân tại A .

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vn teach.com>