

CHUYÊN ĐỀ 04. KỸ THUẬT MIỀN GIỚI TRÒ

A. GIỚI THIỆU

Phương pháp này khá cơ bản và thường được sử dụng trong các bài toán tìm cực trị với các bất đẳng thức có dạng: $a \leq f(x) \leq b$ với $x \in D$.

Nguyên tắc chung là đưa về tìm điều kiện để phương trình $m = f(x)$ có nghiệm trên D .

Trong trường hợp có nhiều biến ta cần đưa về phương trình với một biến hoặc đưa về hệ phương trình nếu có.

B. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

1) Tìm miền giá trị bằng cách xét điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai

Một phương trình bậc hai có dạng: $Ax^2 + Bx + C = 0$ với $A \neq 0$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta = B^2 - 4AC \geq 0$.

Vì vậy cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một biểu thức $m = f(x, y, z)$.

Ta biến đổi tương đương m để đưa về một phương trình bậc của x hoặc y hoặc của z .

Khi đó sử dụng điều kiện có nghiệm ta tìm được Max và Min của m .

Ví dụ 1. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x + y - 2}{z + 2}$.

Lời giải

Trong biểu thức của P có z khác so với x và y do vậy ta tìm cách rút $x + y$ theo z và đưa về phương trình bậc hai đối với z . Việc tìm Max và Min của P ta chặn bằng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai đối với z .

Ta có $(z + 2)P = x + y - 2 \Leftrightarrow (z + 2)P + 2 = x + y$.

Chú ý

$$\begin{cases} x - y = 3 - z \\ x^2 + y^2 = 5 - z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 - z \\ \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(x - y)^2 = 5 - z^2 \end{cases} \Leftrightarrow (x + y)^2 = -3z^2 + 6z + 1.$$

Vì vậy

$$(z + 2)P + 2 = -3z^2 + 6z + 1$$

$$\Leftrightarrow (z + 2)^2 P^2 + 4(z + 2)P + 3z^2 - 6z + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (P^2 + 3)z^2 + (4P^2 + 4P - 6)z + 4P^2 + 8P + 3 = 0 \quad (1)$$

Ta có (1) là phương trình bậc hai đối với z điều kiện có nghiệm là

$$\Delta' = (2P^2 + 2P - 3)^2 - (P^2 + 3)(4P^2 + 8P + 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 23P^2 + 36P \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{36}{23} \leq P \leq 0$$

+ Với $x = 2, y = 0, z = 1$ ta có P bằng 0 vậy giá trị lớn nhất của P bằng 0.

+ Với $x = \frac{20}{31}, y = -\frac{66}{31}, z = \frac{7}{31}$ thì P bằng $-\frac{36}{23}$ vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{36}{23}$.

Bài tập tương tự

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+y-1}{z+2}$.

Đáp số: $\frac{3-2\sqrt{3}}{3} \leq P \leq \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

2) Kỹ thuật sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình lượng giác

Phương trình dạng: $A \sin x + B \cos x = C$

có nghiệm khi và chỉ khi $A^2 + B^2 \geq C^2$.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có $\frac{2}{11} \leq \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4} \leq 2$.

Lời giải

Đặt $y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$ $\Rightarrow y(2 \cos x - \sin x + 4) = \cos x + 2 \sin x + 3$.

$\Rightarrow (2y - 1) \cos x - (y + 2) \sin x = 3 - 4y$ (1).

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\sqrt{(2y - 1)^2 + (y + 2)^2} \geq |3 - 4y|$
 $\Rightarrow 11y^2 - 24y + 4 \leq 0 \Rightarrow \frac{2}{11} \leq y \leq 2$.

Bài toán được chứng minh.

3) Kỹ thuật điều kiện có nghiệm của phương trình - hệ phương trình

Thay vì tìm trực tiếp Max và Min của biểu thức ta đưa về tìm điều kiện có nghiệm của hệ phương trình.

Ví dụ 1. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

Chứng minh rằng $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Đặt $m = x^2 + y^2$. Ta cần tìm Max và Min của m .

Thay vì đi chứng minh trực tiếp ta tìm điều kiện để hệ phương trình sau có

nghiệm $\begin{cases} m = x^2 + y^2 \\ (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} m = x^2 + y^2 \\ x^4 + y^4 + x^2 - 3y^2 + 2x^2y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = x^2 + y^2 \\ (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 4x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = x^2 + y^2 \\ m^2 - 3m + 1 + 4x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = -\frac{m^2 - 3m + 1}{4} \\ y^2 = \frac{m^2 + m + 1}{4} \end{cases}$$

Điều kiện để hệ phương trình có nghiệm là

$$\begin{cases} -\frac{m^2 - 3m + 1}{4} \geq 0 \\ \frac{m^2 + m + 1}{4} \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Vì vậy $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Bài tập tương tự

Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x, y^3 - 1; 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 18xy - 16$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2^{x+y}}{\sqrt{x^2 + x + y^2 + y + 5 + x + y}}$$

Đáp số: $P_{\min} = 16(\sqrt{17} - 4); P_{\max} = 64(\sqrt{37} - 6)$.

Ví dụ 2. Cho x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện

$$x + y - 2 = \sqrt{2x + 1} + \sqrt{2y + 1}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x - y)^2$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{2x + 1} \\ v = \sqrt{2y + 1} \end{cases}, (u, v \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u^2 - 1}{2} \\ y = \frac{v^2 - 1}{2} \end{cases}$$

Điều kiện bài toán trở thành $\frac{u^2 + v^2 - 2}{2} - 2 = u + v \Leftrightarrow u^2 + v^2 - 6 = 2(u + v)$

$$\Leftrightarrow (u + v)^2 - 2(u + v) - 2uv - 6 = 0.$$

$$P = \frac{u^2 - 1}{2} - \frac{v^2 - 1}{2} = \frac{(u^2 - v^2)^2}{4}$$

$$\text{Khi đó} \quad = \frac{(u - v)^2(u + v)^2}{4} = \frac{((u + v)^2 - 4uv)(u + v)^2}{4}$$

$$\text{Vậy ta có hệ phương trình} \quad \begin{cases} (u + v)^2 - 2(u + v) - 2uv - 6 = 0 \quad (1) \\ P = \frac{((u + v)^2 - 4uv)(u + v)^2}{4} \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) ta có } 2uv = (u + v)^2 - 2(u + v) - 6 \leq \frac{1}{2}(u + v)^2$$

$$P = (u+v)^2 - 4(u+v) - 12 \in [0; 6] - 2 \in [u+v \in 6].$$

$$\text{Chú ý } u+v = \sqrt{2(x+y)+2} + 2\sqrt{(2x+1)(2y+1)} \leq \sqrt{2(x+y)+2} + \sqrt{6}.$$

$$\text{Vì vậy ta có } t = u+v \in \left[\frac{\sqrt{6}}{2}; 6\right].$$

$$P = \frac{((u+v)^2 - 2((u+v)^2 - 2(u+v) - 6))(u+v)^2}{4}$$

Khi đó

$$= \frac{(-(u+v)^2 + 4(u+v) + 12)(u+v)^2}{4} = \frac{t^2(-t^2 + 4t + 12)}{4}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2(-t^2 + 4t + 12)}{4} \text{ liên tục trên đoạn } \left[\frac{\sqrt{6}}{2}; 6\right] \text{ ta có}$$

$$f'(t) = t(-t^2 + 3t + 6); f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{3 + \sqrt{33}}{2}.$$

$$\text{Ta có } f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 9 + 6\sqrt{6}; f\left(\frac{3 + \sqrt{33}}{2}\right) = \frac{3(69 + 11\sqrt{33})}{8}; f(6) = 0.$$

$$\text{Vì vậy } P_{\max} = f_{\max} = \frac{3(69 + 11\sqrt{33})}{8}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} u+v = \frac{3+\sqrt{33}}{2} \\ x+y-2 = \frac{3+\sqrt{33}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{7+\sqrt{33}}{2} \\ \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \frac{3+\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14+2\sqrt{33}-\sqrt{414+66\sqrt{33}}}{8}, y = \frac{14+2\sqrt{33}+\sqrt{414+66\sqrt{33}}}{8} \\ x = \frac{14+2\sqrt{33}+\sqrt{414+66\sqrt{33}}}{8}, y = \frac{14+2\sqrt{33}-\sqrt{414+66\sqrt{33}}}{8} \end{cases}$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } P \text{ bằng } \frac{3(69+11\sqrt{33})}{8}.$$

Ví dụ 3. (TSDH Khối A 2006) Cho x, y là 2 số thực và $x^3 \neq 0, y^3 \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $xy(x+y) = x^2 + y^2 - xy$.

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}.$$

Lời giải

$$\text{Nhận thấy } x, y \text{ đối xứng nên đặt: } \begin{cases} x+y=u \\ x.y=v \end{cases}.$$

$$\text{Giả thiết bài toán trở thành: } u.v = u^2 - 3v \Leftrightarrow v = \frac{u^2}{u+3} \text{ (do } u^3 \neq -3)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3 + y^3}{(xy)^3} = \frac{u(u^2 - 3v)}{v^3} = \frac{u^2}{v^2} = \frac{u^2 + 3v^2}{v^2}$$

$$\text{Vì } u^2 \geq 4v \Rightarrow u^2 \geq \frac{4u^2}{u+3} \Leftrightarrow \frac{4}{u+3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{u-1}{u+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{u^3-1}{u^2+3} \geq 0.$$

Chú ý để tìm Max của A ta chỉ cần xét với $\frac{u+3}{u} > 0$ nên ta chỉ cần chứng minh Max của A bằng 16 vậy : $\frac{u+3}{u} \leq 4$ với $u^3 \geq 1$ hoặc $u \leq -3$.

Xét hàm số $f(u) = \frac{u+3}{u}$ & $f'(u) = -\frac{3}{u^2} < 0$ suy ra $f(u)$

Trên mỗi khoảng $(-\infty; -3)$ và $[1; +\infty)$ do đó $f(u) \leq f(1)$; " $u^3 \geq 1$.

Còn $0 < f(-3) < f(u) < 1$, " $u > -3$.

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 16.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có $-\frac{1}{2} \leq \frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} \leq 2$.

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số thực x và y ta có

$$\frac{\cos 3x + y \sin 3x + 1}{\cos 3x + 2} \leq \frac{3y^2 + 2 + 2\sqrt{3y^2 + 1}}{9}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi số thực x,y thỏa mãn điều kiện

$$x^2 - y^2 + \frac{5}{4} = 3 \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2}.$$

Chứng minh rằng $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

Bài 4. Cho x,y là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + xy + y^2 \leq 3$.

Chứng minh rằng $-4\sqrt{3} - 3 \leq x^2 - xy - 3y^2 \leq 4\sqrt{3} - 3$.

Bài 5. Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x - y + 3}{z + 2}$.

Bài 6. Cho x,y là hai số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện $\sqrt{2x+3} + \sqrt{y+3} = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x+2} + \sqrt{y+9}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

Bài 1. Đặt $y = \frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3}$ & $(2 - y)\sin x + (2y + 1)\cos x = 3y - 1$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $(2 - y)^2 + (2y + 1)^2 \geq (3y - 1)^2$

$$\Leftrightarrow 4y^2 - 6y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq 2.$$

Bài toán được chứng minh.

Bài 2. Đặt $m = \frac{\cos 3x + y \sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}$ & $(m - 1)\cos 3x - y \sin 3x = 1 - 2m$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $(m - 1)^2 + y^2 \geq (1 - 2m)^2$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 2m - y^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{3y^2 + 1}}{3} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{3y^2 + 1}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } |m| \leq \frac{1+\sqrt{3y^2+1}}{3} \text{ và } m^2 \leq \frac{1+\sqrt{3y^2+1}}{3} \Rightarrow \frac{3y^2+2+2\sqrt{3y^2+1}}{9}.$$

Bài toán được chứng minh.

Bài 3. Tìm được:

$$\begin{cases} x^2 = -\frac{m^2-5m+5}{4} \\ y^2 = \frac{m^2-m+5}{4} \end{cases}.$$

Điều kiện để hệ phương trình có nghiệm là:

$$\begin{cases} -\frac{m^2-5m+5}{4} \geq 0 \\ \frac{m^2-m+5}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2-5m+5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Bài toán được chứng minh.

Bài 4. Nếu $y=0$ bất đẳng thức luôn đúng.

Xét với $y \neq 0$ đặt $m = \frac{x^2 - xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{t^2 - t - 3}{t^2 + t + 1}$.

Suy ra $m(t^2 + t + 1) = t^2 - t - 3 \Leftrightarrow (m-1)t^2 + (m+1)t + m+3 = 0$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $D = (m+1)^2 - 4(m-1)(m+3) \geq 0$

$\Leftrightarrow 3m^2 - 6m - 13 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3-4\sqrt{3}}{3} \leq m \leq \frac{-3+4\sqrt{3}}{3}$.

Chú ý do $0 < x^2 + xy + y^2 \leq 3 \Rightarrow -4\sqrt{3} - 3 \leq x^2 - xy - 3y^2 \leq 4\sqrt{3} - 3$.

Bài toán được chứng minh.

Bài 5. Chú ý $z^3 - 2$ vì ngược lại ta có $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ vô nghiệm.

Khi đó $(z+2)P = x - y + 3 \Leftrightarrow (z+2)P - 3 = x - y$.

Từ hệ điều kiện ta có

$$\begin{cases} x+y=3-z \\ x^2+y^2=5-z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3-z \\ \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2 = 5-z^2 \end{cases} \Rightarrow (x-y)^2 = -3z^2 + 6z + 1.$$

$$((z+2)P - 3)^2 = -3z^2 + 6z + 1$$

Khi đó $\Leftrightarrow (z+2)^2 P^2 - 6(z+2)P + 3z^2 - 6z + 8 = 0$.

$\Leftrightarrow (P^2 + 3)z^2 + (4P^2 - 6P - 6)z + 4P^2 - 12P + 8 = 0$

Điều kiện phương trình có nghiệm là

$$(2P^2 - 3P - 3)^2 - (P^2 + 3)(4P^2 - 12P + 8) \geq 0$$

$\Leftrightarrow 23P^2 - 54P + 15 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{27-8\sqrt{6}}{23} \leq P \leq \frac{27+8\sqrt{6}}{23}$.

Vì vậy $P_{\min} = \frac{27-8\sqrt{6}}{23}; P_{\max} = \frac{27+8\sqrt{6}}{23}$.

Bài 6. Thực hiện tương tự bài tập mẫu: $P_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{22}; P_{\min} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

CHUỖ ÑỀÀ 05. KỸ THUẬT NGUYÊN LÝ DIRCHLE

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z + 1 = 4xyz$.

Chứng minh rằng $xy + yz + zx \geq x + y + z$.

Lời giải

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 trong 3 số $(x-1), (y-1), (z-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy \geq x+y-1$.

$$\Rightarrow xy + yz + zx \geq x + y - 1 + yz + zx.$$

Vậy ta cần chứng minh $x + y - 1 + yz + zx \geq x + y + z \Leftrightarrow z(x + y - 1) \geq 1$.

$$\text{Theo giả thiết ta có } z = \frac{x + y + 1}{4xy - 1}.$$

Vậy ta chứng minh

$$\frac{x + y + 1}{4xy - 1} \cdot (x + y - 1) \geq 1 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 1 \geq 4xy - 1 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài tập tương tự

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + abc = 4$.

Chứng minh rằng $a + b + c \geq ab + bc + ca$.

Bài 2. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng $(1 - a + a^2)(1 - b + b^2)(1 - c + c^2) \geq 1$.

Lời giải

Trong ba số $1 - a, 1 - b$ và $1 - c$ luôn tồn tại hai số cùng dấu không mất tính tổng quát giả sử hai số đó là $1 - b$ và $1 - c$ suy ra $(1 - b)(1 - c) \geq 0$.

$$\begin{aligned}(1 - b + b^2)(1 - c + c^2) &= (b^2 - b)(c^2 - c) + b^2 + c^2 - b - c + 1 \\ &= bc(b - 1)(c - 1) + b^2 + c^2 - b - c + 1\end{aligned}$$

$$\text{Khi đó} \quad \geq b^2 + c^2 - b - c + 1 \geq \frac{1}{2}(b + c)^2 - (b + c) + 1.$$

$$= \frac{1}{2}(3 - a)^2 - (3 - a) + 1 = \frac{a^2 - 4a + 5}{2}$$

Vì vậy bất đẳng thức được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$(1 - a + a^2) \cdot \frac{a^2 - 4a + 5}{2} \geq 1 \Leftrightarrow (a - 1)^2(a^2 - 3a + 3) \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Ngoài ra bài toán có thể giải bằng kỹ thuật dồn biến xem chương 4.

Bài 3. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx - 2xyz$.

Lời giải

Trong 3 số $(2x-1), (2y-1), (2z-1)$ luôn tồn tại hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(2x-1)(2y-1) \geq 0 \Rightarrow 2(x+y) - 4xy \geq 1 \Rightarrow z(x+y) - 2xyz \leq \frac{z}{2}$.

Chú ý $1 - z^2 = 2xyz + x^2 + y^2 \geq 2xy + 2xyz = 2xy(z+1) \Rightarrow xy \leq \frac{1-z}{2}$.

Vì vậy $P \leq \frac{1-z}{2} + \frac{z}{2} = \frac{1}{2}$.

Với $x=y=z=\frac{1}{2}$ thì P bằng $\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{2}$.

Bài tập tương tự

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$.

Chứng minh rằng $ab + bc + ca - abc \leq 2$.

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực dương có tích bằng 1.

Chứng minh rằng $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)} \geq 1$.

Lời giải

Trong ba số $(x-1), (y-1), (z-1)$ luôn có hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy + 1 \geq x + y \Rightarrow 2(xy+1) \geq (x+1)(y+1)$.

Sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$.

Chứng minh xem chương 3.

Suy ra $\forall T \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(1+xy)(1+z)} = \frac{z}{1+z} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{z}{(1+z)^2} = 1$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực không âm chứng minh

$$abc + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left((a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \right) \geq a+b+c.$$

Lời giải

Luôn tồn tại hai trong ba số $(a-1), (b-1), (c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab \geq a+b-1$.

Khi đó ta chỉ cần chứng minh

$$c(a+b-1)+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right)^{\frac{3}{2}} a+b+c$$

$$\geq (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geq \sqrt{2}(a+b-2)(c-1)$$

Sử dụng bất đẳng thức C-S và bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned} (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 &\geq \frac{(a+b-2)^2}{2}+(c-1)^2 \geq 2\sqrt{\frac{(a+b-2)^2}{2} \cdot (c-1)^2} \\ &= \sqrt{2}(a+b-2)(c-1) \end{aligned}$$

Bài 6. Cho a, b, c là các số thực không âm chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca).$$

Lời giải

Bài toán đã được trình bày trong chủ đề Kỹ thuật sử dụng tam thức bậc hai. Dưới đây là lời giải tiếp cận theo nguyên lý Dirichlet.

Luôn tồn tại 2 trong 3 số $(a-1), (b-1), (c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát ta giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0 \geq 2c(a-1)(b-1) \geq 0 \geq 2abc \geq 2(ac+bc-c)$.

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+1+2(ac+bc-c) \geq 2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(c-1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán tương tự

Cho a, b, c là các số thực không âm chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2 \geq 2(ab+bc+ca).$$

Bài 7. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

Chứng minh rằng $abc \leq ab+bc+ca \leq abc+2$.

Lời giải

Bất đẳng thức vế trái đơn giản bởi trong 3 số có ít nhất một số không vượt quá 1 giả sử là c khi đó $ab+bc+ca-abc=ab(1-c)+c(a+b) \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại $a=2, b=c=0$.

Ta chứng minh bất đẳng thức vế phải:

Trong ba số $(a-1), (b-1), (c-1)$ luôn có hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0 \geq ab^3 \geq a+b-1 \geq abc^3 \geq c(a+b-1)$.

Vậy ta chứng minh $c(a+b-1)+2 \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow ab \leq 2-c$.

Chú ý $4=(a^2+b^2)+c^2+abc \geq 2ab+c^2+abc \geq ab \leq 2-c$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 8. Cho a, b, c là các số thực dương có tích bằng 1.

Chứng minh rằng $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1} \geq 1$.

Lời giải

Theo nguyên lý Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1), (b-1), (c-1)$ cùng dấu,

không mất tính tổng quát ta giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0 \geq 1+ab=\frac{c+1}{c} \geq a+b$.

Chú ý. $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{1+ab} = \frac{c}{c+1}$.

Gọi P là biểu thức vế trái ta có $P = \frac{c}{c+1} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{\frac{c+1}{c} + c+1} = 1$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

A. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a^2+8} + \frac{1}{4b^2+8} + \frac{1}{9c^2+8} = \frac{1}{3}.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a+2b+3c$.

B. HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

Bài 1. Để đơn giản đặt $x=a, y=2b, z=3c$ ta có $\frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{y^2+8} + \frac{1}{z^2+8} = \frac{1}{3}$.

Ta cần Max và Min của $P = x+y+z$.

Theo giả thiết kết hợp sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+8} &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{y^2+8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z^2+8} \\ &= \frac{y^2+2}{6(y^2+8)} + \frac{z^2+2}{6(z^2+8)} \geq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{y^2+2}{y^2+8} \cdot \frac{z^2+2}{z^2+8}} \end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{y^2+8} \geq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+8} \cdot \frac{z^2+2}{z^2+8}}, \quad \frac{1}{z^2+8} \geq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{y^2+2}{y^2+8} \cdot \frac{x^2+2}{x^2+8}}.$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) \geq 27 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } (x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) \geq 3(x+y+z)^2 \quad (2).$$

Thật vậy bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$x^2y^2z^2 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 8 \geq 6(xy + yz + zx).$$

Trong ba số $(x^2-1), (y^2-1), (z^2-1)$ luôn có hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử

$$(x^2-1)(y^2-1) \geq 0 \Rightarrow x^2y^2 \geq x^2+y^2-1 \Rightarrow x^2y^2z^2 \geq z^2(x^2+y^2-1).$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$z^2(x^2+y^2-1) + x^2+y^2+z^2 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 8 \geq 6(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + 3(yz-1)^2 + 2(xy-1)^2 + 3(xz-1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng suy ra điều phải chứng minh.

Kết hợp (1) và (2) ta có

$$(x+y+z)^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x+y+z \leq 3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -3 đạt tại $a=-1, b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{3}$.

Giá trị lớn nhất của P bằng 3 đạt tại $a=1, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{3}$.

CHUỖ ÑỀÀ 06. KỖ THUAẬT SỒ DUỖNG TAM THỒC BẮC HAI

Các tính chất về nghiệm và dấu của tam thức bậc hai có một ứng dụng hết sức sâu rộng trong giải toán. Dưới đây tôi trình bày một ứng dụng của tam thức bậc hai trong chứng minh bất đẳng thức. Bất đẳng thức tiếp cận bằng phương pháp này có thể nói là rất tự nhiên.

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Định lý 1. Nếu $a > 0$ thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = -\frac{b}{2a}$ và giá trị nhỏ nhất

$$f(x_0) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Định lý 2. Nếu $a < 0$ thì $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 = -\frac{b}{2a}$ và giá trị lớn nhất

$$f(x_0) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Định lý 3. Nếu $D = b^2 - 4ac \leq 0$ thì $f(x)$ luôn có nghiệm.

Định lý 4. Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ D = b^2 - 4ac \leq 0 \end{cases}$ thì $f(x) \geq 0$ với mọi x .

Định lý 5. Nếu $\begin{cases} a < 0 \\ D = b^2 - 4ac \leq 0 \end{cases}$ thì $f(x) \leq 0$ với mọi x .

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Chứng minh rằng với x, y, z là các số thực có tổng bằng 1 ta có

$$(3x + 4y + 5z)^2 \geq 44(xy + yz + zx).$$

Lời giải

Thay $z = 1 - x - y$ bất đẳng thức trở thành:

$$(3x + 4y + 5 - 5x - 5y)^2 \geq 44xy + 44(x + y)(1 - x - y)$$

$$\Leftrightarrow 48x^2 + 16x(3y - 4) + 45y^2 - 54y + 25 \geq 0$$

Vế trái là tam thức bậc hai của x với hệ số của x^2 dương và có

$$\Delta'_x = 64(3y - 4)^2 - 48(45y^2 - 54y + 25) = -176(3y - 1)^2 \leq 0.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{6}.$$

Cách 2: Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$9x^2 + 16y^2 + 25z^2 \geq 20xy + 4yz + 14zx.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}(4x^2 + 9y^2) &\geq 2 \cdot \frac{5}{3} \sqrt{4x^2 \cdot 9y^2} \geq 20xy \\ \frac{7}{12}(4x^2 + 36z^2) &\geq 2 \cdot \frac{7}{12} \sqrt{4x^2 \cdot 36z^2} \geq 14xz \\ y^2 + 4z^2 &\geq 2\sqrt{y^2 \cdot 4z^2} \geq 4yz \end{aligned}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. Như vậy không cần giả thiết bài toán ba số có tổng bằng 1 (Xem thêm chủ đề kỹ thuật tham số hoá - Chương 2).

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số thực a và b ta luôn có

$$3(1 - a + a^2)(1 - b + b^2) \geq 2(1 - ab + a^2b^2).$$

Lời giải

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$(a^2 - 3a + 3)b^2 - (3a^2 - 5a + 3)b + 3a^2 - 3a + 1 \geq 0.$$

Vế trái là tam thức bậc hai của b có $a^2 - 3a + 3 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$ và;

$$\Delta_b = (3a^2 - 5a + 3)^2 - 4(a^2 - 3a + 3)(3a^2 - 3a + 1) = -(a^2 - 3a + 1)^2 \leq 0, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Do đó vế trái luôn không âm. Bài toán được chứng minh.

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a^2 - 3a + 1 = 0 \\ b = \frac{3a^2 - 5a + 3}{2(a^2 - 3a + 3)} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Bài tập tương tự

Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, d ta có

$$3(a^2 - ab + b^2)(c^2 - cd + d^2) \geq 2(c^2a^2 - abcd + b^2d^2).$$

Ta cùng xét một số bài toán cùng dạng sau đây

Bài 2.1. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$3(1 - a + a^2)(1 - b + b^2)(1 - c + c^2) \geq 1 + abc + a^2b^2c^2.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } 2(1 - a + a^2)(1 - b + b^2) = 1 + a^2b^2 + (a - b)^2 + (1 - a)^2(1 - b)^2.$$

$$\text{Suy ra } 2(1 - a + a^2)(1 - b + b^2) \geq 1 + a^2b^2.$$

Do ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$3(1 + a^2b^2)(1 - c + c^2) \geq 2(1 + abc + a^2b^2c^2).$$

$$\Leftrightarrow (3 + a^2b^2)c^2 - (3 + 2ab + 3a^2b^2)c + 1 + 3a^2b^2 \geq 0.$$

Coi vế trái là tam thức bậc hai của c có hệ số của c^2 dương và

$$\Delta = (3 + 2ab + 3a^2b^2)^2 - 4(3 + a^2b^2)(1 + 3a^2b^2) = -3(1 - ab)^4 \leq 0.$$

Do đó vế trái luôn không âm.

Bài toán được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 2.2. Cho x và y là hai số thực không cùng dương ta luôn có

$$\frac{4}{3}(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) \geq x^2y^2 - xy + 1.$$

Lời giải

<http://vnteach.com> - Website tài liệu đề thi file word

Theo giả thiết trong hai số luôn có một số không dương không mất tính tổng quát ta giả sử $y \neq 0$ khi đó viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$(y-2)^2 x^2 - (4y^2 - 7y + 4)x + (1-2y)^2 \geq 0.$$

Coi vế trái là tam thức bậc hai của x ta có

$$\Delta = (4y^2 - 7y + 4)^2 - 4(y-2)^2(1-2y)^2 = y(24y^2 - 51y + 24) \geq 0, "y \neq 0.$$

Bài toán được chứng minh đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}, y = 0$ hoặc

$$x = 0, y = \frac{1}{2}.$$

Mở rộng bài toán cho 3 biến ta có kết quả

Cho x, y, z là các số thực không cùng dương ta luôn có

$$\frac{16}{9}(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1) \geq 1 - xyz + x^2 y^2 z^2.$$

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 2$.

Chứng minh rằng: $1 + 2abc \geq ab + bc + ac$.

Lời giải

Giả sử $c = \max\{a, b, c\} \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Khi đó đặt $S = a + b, P = ab$ theo giả thiết bài toán ta có

$$S^2 - 2P + c^2 = 2 \Rightarrow P = \frac{S^2 + c^2 - 2}{2}.$$

Ta cần chứng minh $1 + 2c \cdot \frac{S^2 + c^2 - 2}{2} \geq \frac{S^2 + c^2 - 2}{2} + cS$
 $\Leftrightarrow (2c-1)S^2 - 2cS + 2c^3 - c^2 - 4c + 4 \geq 0$

Vế trái là tam thức bậc hai với hệ số dương do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\Delta'_S = c^2 - (2c-1)(2c^3 - c^2 - 4c + 4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(c-1)^2(c^2 + c - 1) \leq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $c \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ hoặc các hoán vị.

Bài tập tương tự

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$(a+1)(b+1)(c+1) = 1 + 4abc.$$

Chứng minh rằng: $a + b + c \leq 1 + abc$.

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện

$$a + b + c = 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a(b-c)^4 + b(c-a)^4 + c(a-b)^4$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$ khi đó

$$\begin{aligned}
 P &= a(b-c)^4 + b(c-a)^4 + c(a-b)^4 \leq a(b+c)^4 + ba^4 + ca^4 \\
 &= a(b+c)^4 + a^4(b+c) = a(b+c)(b+c)^3 + a^3(b+c) \\
 &= a(b+c)(a+b+c)^3 - 3a(b+c)(a+b+c)^2 \\
 &= a(b+c)(1-3a(b+c)) = -3a(b+c)^2 + a(b+c) \\
 &= -3a(b+c) - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \leq \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{12}$ đạt tại $a = \frac{3+\sqrt{6}}{6}, b = \frac{3-\sqrt{6}}{6}, c = 0$ hoặc các hoán vị.

Chú ý. Ta có bất đẳng thức mạnh hơn như sau

$$a(b+c)^4 + b(c+a)^4 + c(a+b)^4 \leq \frac{1}{12}(a+b+c)^4.$$

Bài 5. Cho các số thực thay đổi x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{16}{25}xy = 3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3}{5}(x^2 + y^2) + \frac{5}{6}z^2 + xy - \sqrt{10(xy + yz + zx)}.$$

Lời giải

Nhận xét. Trước hết ta chưa quan tâm đến điều kiện của x, y, z mà để ý đến tính chất đối xứng của x và y trong điều kiện cũng như biểu thức của P nên ta

sử dụng đánh giá: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\begin{aligned}
 P &\geq \frac{3}{10}(x+y)^2 + \frac{5}{6}z^2 + xy - \sqrt{10(xy + yz + zx)} \\
 &\geq 2\sqrt{\frac{3}{10}(x+y)^2} \cdot \frac{5}{6}z + xy - \sqrt{10(xy + yz + zx)} \\
 &= |(x+y)z| + xy - \sqrt{10(xy + yz + zx)} \geq xy + yz + zx - \sqrt{10(xy + yz + zx)}
 \end{aligned}$$

Một đánh giá dễ nhận ra là đưa về tam thức bậc 2:

$$xy + yz + zx - \sqrt{10(xy + yz + zx)} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{xy + yz + zx}{5}} - \frac{5}{2} \geq -\frac{5}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} xy + yz + zx = \frac{5}{2} \\ x = y \\ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{16}{25}xy = 3 \\ z(x+y) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{\sqrt{34}}, y = -\frac{5}{\sqrt{34}}, z = -3\sqrt{\frac{2}{17}} \\ x = \frac{5}{\sqrt{34}}, y = \frac{5}{\sqrt{34}}, z = 3\sqrt{\frac{2}{17}} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{5}{2}$ đạt tại $x = -\frac{5}{\sqrt{34}}, y = -\frac{5}{\sqrt{34}}, z = -3\sqrt{\frac{2}{17}}$ hoặc

$$x = \frac{5}{\sqrt{34}}, y = \frac{5}{\sqrt{34}}, z = 3\sqrt{\frac{2}{17}}.$$

Bài 6. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy + yz + 2xz$.

Lời giải

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của P

Xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản:

$$(x+y+z)^2 \geq 0 \Rightarrow xy + yz + xz \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } P = (xy + yz + xz) + xz \geq \frac{3}{2} + xz \geq \frac{3}{2} - \frac{x^2 + z^2}{2} \geq \frac{3}{2} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ xz = -\frac{x^2+z^2}{2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{3}{2}}, y=0, z=\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x = \sqrt{\frac{3}{2}}, y=0, z=-\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{3}{2}$ đạt tại $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}, y=0, z=\sqrt{\frac{3}{2}}$ hoặc

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}}, y=0, z=-\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Cách 2: Viết lại biểu thức P dưới dạng

$$P+3 = (x+z)^2 + y(x+z) + y^2 \Rightarrow (x+z)^2 + y(x+z) + y^2 - P - 3 = 0 \quad (1).$$

Coi (1) là phương trình bậc 2 với ẩn là $(x+z)$ ta có điều kiện có nghiệm của

$$\text{phương trình là } D_{(x+z)} = y^2 - 4(y^2 - P - 3) \geq 0 \Rightarrow P \geq -3 + \frac{3y^2}{4} \geq -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} y=0 \\ x+z = -\frac{y}{2} = 0 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{3}{2}}, y=0, z=\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x = \sqrt{\frac{3}{2}}, y=0, z=-\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Ta có kết quả tương tự cách trên.

Tìm giá trị lớn nhất của P

Ta tìm số thực $k > 0$ nhỏ nhất sao cho $P = xy + yz + 2xz \leq k(x^2 + y^2 + z^2)$ đúng với mọi x, y, z và $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Khi đó giá trị lớn nhất của P bằng $3k$.

Viết lại bất đẳng thức trên dưới dạng: $ky^2 - y(x+z) + kx^2 + kz^2 - 2xz \leq 0$.

Đây là một tam thức bậc hai với hệ số của y^2 dương nên ta chỉ cần tìm k sao cho $D_y \leq 0$.

Tức

$$(x+z)^2 - 4k(kx^2 + kz^2 - 2xz) \leq 0 \Rightarrow (1-4k^2)(x^2+z^2) + 2xz(1+4k) \leq 0, \forall x, z.$$

Đây là một bất đẳng thức đối xứng với x và z nên ta chọn $x = z = 1$.

$$\text{Suy ra } 1-4k^2+1+4k \leq 0 \Rightarrow 2k^2-2k-1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} k \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ k \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy $k = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ và $P \leq \frac{3(1+\sqrt{3})}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = z = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{4}}, y = \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}$.

Nhận xét. Ngoài lời giải bằng tam thức bậc hai như trên ta có thể sử dụng kỹ thuật tham số hóa hoặc sử dụng C-S.

Bài 7. Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ chứng minh

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a, b, c\}$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$(3a-2b)c^2 - (2a^2-ab-3b^2)c + 3a^2b-2ab^2 \geq 0.$$

Vì $3a-2b > 0$ ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & (2a^2-ab-3b^2)^2 - 4(3a-2b)(3a^2b-2ab^2) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (a-b)(a-9b)(4a^2+b^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $a-b \geq 0; a-9b \leq 3-9 \cdot \frac{1}{3} = 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=3, b=\frac{1}{3}, c=1$.

Nhận xét. Bằng cách tương tự ta chứng minh được

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{8}{5}.$$

Ngoài ra có thể đưa về xét tính đơn điệu của hàm số (Xem chương 3).

Bài tập tương tự

(TSDH Khối A 2011) Cho các số $x, y, z \in [1; 4]$ thỏa mãn điều kiện

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$.

HD: Chứng minh $P_{\min} = \frac{34}{33}$.

Bài 8. Cho a, b, c là các số thực không âm.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab+bc+ca)$.

Lời giải

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng: $a^2 + 2(bc-b-c)a + (b-c)^2 + 1 \geq 0$.

Coi vế trái bất đẳng thức trên là tam thức bậc hai của a ta được:

$$\Delta'_a = (bc-b-c)^2 - (b-c)^2 - 1 = bc(b-2)(c-2) - 1.$$

TH1: Nếu $bc-b-c \leq 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

TH2: Nếu $bc-b-c \geq 0 \Rightarrow (b-1)(c-1) \geq 1$ ta xét hai khả năng sau:

Khả năng 1. Nếu $(b-2)(c-2) \neq 0$ và $D'_a \neq -1$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Khả năng 2. Nếu $(b-2)(c-2) = 0$ vì $(b-1)(c-1) \neq 1$ nên $b, c \neq 2$ khi đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$D'_a = b(2-b).c(2-c) - 1 \leq \frac{b^2+2-b^2}{2} \cdot \frac{c^2+2-c^2}{2} - 1 = 0$$

ta có điều phải chứng minh.

Chú ý. Xem thêm lời giải bằng Nguyên lý Dirichlet trong chủ đề tương ứng.

Bài tập tương tự

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1 \geq 0$.

Chứng minh rằng $|a-b| + |b-c| + |c-a| \geq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2abc} - 1$.

Bài 9. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xy + yz + zx$.

Chứng minh rằng $\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $z(x+y-1) = x+y-xy$.

+ Nếu $x+y=1$ và $xy=1$ vô nghiệm.

+ Vậy $x+y \neq 1$ và $z = \frac{x+y-xy}{x+y-1}$.

Vậy ta cần chứng minh $\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{\frac{x+y-xy}{x+y-1}}{\frac{x^2+y^2-2xy}{(x+y-1)^2} + 1} \geq \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2y}{y^2+1} + \frac{2(x+y-xy)(x+y-1)}{(x+y-xy)^2 + (x+y-1)^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{(y+1)^2}{y^2+1} - \frac{(xy-1)^2}{(x+y-xy)^2 + (x+y-1)^2} \geq 0$$

Chú ý theo bất đẳng thức C-S ta có

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{(y+1)^2}{y^2+1} &= \frac{(x+1)^2(1-y)^2}{(x^2+1)(1-y)^2} + \frac{(y+1)^2(1-x)^2}{(y^2+1)(1-x)^2} \\ &\geq \frac{((x+1)(1-y) + (y+1)(1-x))^2}{(x^2+1)(1-y)^2 + (y^2+1)(1-x)^2} = \frac{4(xy-1)^2}{(x^2+1)(1-y)^2 + (y^2+1)(1-x)^2} \end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$4(x+y-xy)^2 + 4(x+y-1)^2 \geq (x^2+1)(1-y)^2 + (y^2+1)(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - 3y + 3)x^2 - (3y^2 - 8y + 3)x + 3y^2 - 3y + 1 = 0$$

Vế trái bất đẳng thức là tam thức bậc hai của x với hệ số của x^2 dương và có

$$D_x = (3y^2 - 8y + 3)^2 - 4(y^2 - 3y + 3)(3y^2 - 3y + 1) = -3(y^2 - 1)^2 \leq 0.$$

Điều đó chứng tỏ bất đẳng thức đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = -1, z = 1$ hoặc các hoán vị.

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2$ và $a^3+b^3+c^3-3abc=2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a, b, c\}, c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow P = a - c$.

$$2 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$\text{Ta có: } \Rightarrow 2 = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2$$

$$\text{Suy ra: } P^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 = 2.$$

$$\Rightarrow P^2 + (a-c)^2 + (c-b)^2 + (b-c)^2 = 2$$

$$\Rightarrow P^2 + (a-c)^2 + 2(b-c)^2 - 2(a-c)(b-c) = 2.$$

$$\Rightarrow P^2 - P(b-c) + (b-c)^2 - 1 = 0$$

Coi đẳng thức trên là phương trình bậc 2 với ẩn là $b-c$. Để phương trình

này có nghiệm ta phải có $\Delta_{b-c} = P^2 - 4(P^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow P^2 \leq \frac{4}{3} \Rightarrow P \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a-c = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ (b-c)^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}(b-c) + \frac{1}{3} = 0 \\ a+b+c=0 \\ a^3+b^3+c^3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2+\sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{2-\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$ đạt tại $a = \frac{2+\sqrt{3}}{3}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{2-\sqrt{3}}{3}$ hoặc

các hoán vị.

Cách 2: Không mất tính tổng quát giả sử

$$a = \max\{a, b, c\}, c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow P = a - c.$$

Ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 1 \Rightarrow (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = 1.$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca = 1$$

$$P^2 = (a-c)^2 = (a+c)^2 - 4ac = (2-b)^2 - 4ac = 4 - b(a+c)$$

$$\text{Suy ra: } = (2-b)^2 - 4 + 4b(2-b) = -3b^2 + 4b = -3\left(b - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} \leq \frac{4}{3}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ a-c = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ a+b+c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2+\sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{2-\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Cách 3: Không mất tính tổng quát giả sử $c = \min\{a, b, c\}$.

Đặt $a = x+c, b = y+c, (x, y \geq 0)$.

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 1$ suy ra

$$\hat{U} \quad (x+c)^2 + (y+c)^2 + c^2 - c(x+c) - c(y+c) - (x+c)(y+c) = 1.$$

$$\hat{U} \quad x^2 - xy + y^2 = 1 \quad \begin{cases} x - \frac{y}{2} + \frac{3y^2}{4} = 1 \\ y - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Suy ra $P = \max\{x, y\} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh một tam giác và x, y, z là các số thực thay đổi thỏa mãn $ax + by + cz = 0$. Chứng minh $xy + yz + zx \leq 0$.

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của x .

Bài 3. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + xy + y^2 - 6(x + y) + 11 = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y + 2x$.

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 9xy + 10yz + 11zx$.

Bài 5. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^2y = 1$. Chứng minh rằng

$$x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 \geq 2.$$

Bài 6. Cho n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ thuộc đoạn $[0; 1]$ chứng minh

$$(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Bài 7. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho với mọi số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ ta có

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})x_n.$$

Bài 8. Chứng minh với mọi số thực x, y, z và a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác ta có $a(x - y)(x - z) + b(y - z)(y - x) + c(z - x)(z - y) \geq 0$.

Bài 9. (Vasile-Cirtoaje) Chứng minh với mọi số thực a, b, c ta có

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 3 chứng minh

$$a + ab + 2abc \leq \frac{9}{2}.$$

Bài 11. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (1 + a)(1 + b)(1 + c).$$

Bài 12. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \geq 5(a + b + c).$$

Bài 13. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

Bài 14. Cho tam giác có ba góc A,B,C chứng minh với mọi số thực x ta có

$$1 + \frac{1}{2}x^2 \geq \cos A + x(\cos B + \cos C).$$

Bài 15. Chứng minh rằng với mọi số thực x và y ta có

$$x^2(1 + \sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y > 0.$$

Bài 16. Chứng minh rằng với mọi số thực x và y ta luôn có

$$(x+y)^2 - xy + 1 \geq \sqrt{3}(x+y).$$

Bài 17. Chứng minh rằng với mọi số thực x,y,z và ba góc A,B,C của một tam giác ta có $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy \cos C + 2yz \cos A + 2zx \cos B$.

Bài 18. Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$xyz + x + y + z = 4.$$

Chứng minh rằng $x + y + z \geq xy + yz + zx$.

Bài 19. Cho $\begin{cases} 0 < a \leq b \leq c \\ x, y, z > 0 \end{cases}$ chứng minh

$$a^2(xa + yb + zc) \geq \frac{ax}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{a} \geq \frac{(a+c)^2}{4ac}(x+y+z)^2.$$

Bài 20. Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c + d = 3 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $ac + bd + cd \leq \frac{9 + 6\sqrt{2}}{4}$.

Bài 22. Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn $b > c > d$. Chứng minh

$$(a+b+c+d)^2 > 8(ac+bd).$$

Bài 23. Cho a,b,c,d,p,q là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 0.$$

Chứng minh $(p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \leq (pq - ac - bd)^2$.

Bài 24. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác và p,q,r là ba số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện $p+q+r=0$. Chứng minh $a^2q + b^2r + c^2p \leq 0$.

Bài 25. Chứng minh rằng với mọi số thực a,b ta có $(a^2+2)(b^2+2) \geq 3(ab+a+b)$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

Bài 1. Từ giả thiết ta có: $z = -\frac{ax+by}{c}$. Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh

dưới dạng: $xy - \frac{ax+by}{c}(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow ax^2 - y(a+b-c)x + by^2 \geq 0$.

Coi vế trái bất đẳng thức trên là tam thức bậc hai của x ta được:

$$\begin{aligned} D_x &= y^2(a+b-c)^2 - 4aby^2 = y^2(a+b-c)^2 - 4ab \\ &= y^2(a-b)^2 + c^2 - 2c(a+b) = y^2(a-b)^2 + c^2 - 2c(a+b) = 2c^2(c-a-b) \leq 0 \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2. Thay $z = -\frac{ax+by}{c}$ vào phương trình thứ hai ta được

$$x^2 + 2y^2 + 3(1-x-y)^2 - 4 = 0$$

$$\hat{U} \quad 5y^2 + 6(x-1)y + 4x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$\triangleright D'_y = 9(x-1)^2 - 5(4x^2 - 6x - 1)^3 \geq 0$$

$$\hat{U} \quad 11x^2 - 12x - 14 \leq 0 \hat{U} \quad \frac{6 - \sqrt{190}}{11} \leq x \leq \frac{6 + \sqrt{190}}{11}$$

$$\text{Khi } x = \frac{6 + \sqrt{190}}{11} \triangleright y = \frac{15 - 3\sqrt{190}}{55}, z = \frac{10 - 2\sqrt{190}}{55}.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } x \text{ bằng } \frac{6 + \sqrt{190}}{11}.$$

Bài 3. Rút $y = P - 2x$ thay vào điều kiện bài toán ta được:

$$x^2 + x(P - 2x) + (P - 2x)^2 - 6(x + P - 2x) + 11 = 0$$

$$\hat{U} \quad 3x^2 - (3P - 6)x + P^2 - 6P + 5 = 0$$

$$\triangleright D_x = (3P - 6)^2 - 12(P^2 - 6P + 5) \geq 0$$

$$\hat{U} \quad P^2 - 12P + 8 \leq 0 \hat{U} \quad 6 - 2\sqrt{7} \leq P \leq 6 + 2\sqrt{7}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 6 - 2\sqrt{7}; P_{\max} = 6 + 2\sqrt{7}.$$

Bài 4. Thay $z = 1 - x - y$ vào biểu thức của P và rút gọn ta được

$$11x^2 + (12y - 11)x + 10y^2 - 10y + P = 0$$

$$\triangleright D_x = (12y - 11)^2 - 44(10y^2 - 10y + P) \geq 0$$

$$\triangleright P \leq -\frac{74y^2}{11} - \frac{22}{37}y - \frac{121}{196} - \frac{74y}{11} - \frac{11}{37} + \frac{195}{148} \leq \frac{195}{148}$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{195}{148} \hat{U} (x; y; z) = \left(\frac{25}{674}; \frac{11}{37}; \frac{27}{74}\right).$$

Bài 5. Gọi P là biểu thức vế trái ta có $y = \frac{1}{x^2}$ suy ra

$$P = x^2 + \sqrt{x^4 + \frac{1}{x^2}} \hat{U} P - x^2 = \sqrt{x^4 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\triangleright P^2 - 2Px + x^4 = x^4 + \frac{1}{x^2} \hat{U} 2Px^4 - P^2x^2 + 1 = 0$$

$$\triangleright D_{x^2} = P^4 - 8P^3 \geq 0 \hat{U} P(P^3 - 8) \geq 0 \triangleright P \geq 2$$

$$\text{Khi } x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = 2 \text{ thì } P \text{ bằng } 2 \text{ vậy Min của } P \text{ bằng } 2.$$

Bài 6. Xét tam thức bậc hai

$$f(x) = x^2 - (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Ta có

$$f(0) = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0; f(1) = a_1(a_1 - 1) + a_2(a_2 - 1) + \dots + a_n(a_n - 1) \leq 0.$$

Suy ra $f(0) \cdot f(1) \leq 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [0; 1]$ sao cho $f(x_0) = 0$ tức $f(x)$ có nghiệm.

$$\text{Vì vậy } D \geq 0 \hat{U} (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Bài 7. Bất đẳng thức đúng với mọi số thực nên đúng với $\begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \\ x_n = 2 \end{cases}$.

$$\text{Khi đó bất đẳng thức trở thành } (n-1) + 2^2 \geq 2(n-1) \hat{U} n \leq 5 \triangleright 1 \leq n \leq 5.$$

<http://vnnteach.com> - Website tài liệu đề thi file word

Ta chứng minh với $n=1,2,3,4,5$ là các giá trị cần tìm.

Xét tam thức bậc hai $f(x_n) = x_n^2 - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})x_n + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2$.

Ta có $D_{x_n} = (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2)$.

Do $n \leq 5$ và theo bất đẳng thức C-S ta có

$$\begin{aligned} 4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2)^3 & (n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2) \\ &^3 (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})^2 \\ & \geq D_{x_n} \geq 0 \geq f(x_n)^3 \geq 0 \end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ bất đẳng thức luôn đúng với $n=1,2,3,4,5$ là tất cả các giá trị cần tìm.

Bài 8. Vế trái viết lại thành tam thức bậc hai của x ta được

$$ax^2 - (ay + az + by - bz + cz - cy)x + (ayz + by^2 - byz + cz^2 - cyz).$$

$$\begin{aligned} D &= (ay + az + by - bz + cz - cy)^2 - 4a(ayz + by^2 - byz + cz^2 - cyz) \\ \text{Ta có} \quad &= (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)(y - z)^2 \end{aligned}$$

Chú ý $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca) \Rightarrow D \leq 0 \Rightarrow W$.

Bài 9. Đặt $b = a + x; c = a + y$ bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$(x^2 - xy + y^2)a^2 - (x^3 - 5x^2y + 4xy^2 + y^3)a + x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 + y^4 \geq 0.$$

Vế trái là tam thức bậc hai của a có hệ số của a^2 không âm.

Chú ý $x^2 - xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow$ bất đẳng thức luôn đúng.

Với $x^2 - xy + y^2 > 0$ khi đó

$$\begin{aligned} D_a &= (x^3 - 5x^2y + 4xy^2 + y^3)^2 - 4(x^2 - xy + y^2)(x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 + y^4) \\ &= -3(x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ bất đẳng thức luôn đúng (đpcm).

Bài 10. Thay $b = 3 - a - c$ và đưa về chứng minh

$$f(a) = (2c + 1)a^2 + (2c^2 - 5c - 4)a + \frac{9}{2} \geq 0.$$

Chú ý $D_a = (2c^2 - 5c - 4)^2 - 18(2c + 1) = (2c - 1)^2(c(c - 4) - 2) \leq 0, c \in [0; 3]$.

Điều đó chứng tỏ bất đẳng thức luôn đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{3}{2}, b = 1, c = \frac{1}{2}$.

Bài 11. Bất đẳng thức tương đương với:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc.$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a(bc - b - c - 1) + b^2 + c^2 - bc - b - c + 2 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a(bc - b - c - 1) + (b - c)^2 + bc - b - c + 2 \geq 0.$$

Coi vế trái bất đẳng thức trên là tam thức bậc hai của a ta được:

$$\begin{aligned} D_a &= (bc - b - c - 1)^2 - 4((b - c)^2 + bc - b - c + 2) \\ &= b^2c^2 - 2b^2c - 2bc^2 - 3b^2 - 3c^2 + 4bc + 6b + 6c - 7 \\ &= b^2(c^2 - 2c - 3) - 2(c^2 - 2c - 3)b - 3c^2 + 6c - 7 \end{aligned}$$

Lại coi đây là tam thức bậc hai của b ta được:

$$\begin{aligned} D'_b &= (c^2 - 2c - 3)^2 - (c^2 - 2c - 3)(-3c^2 + 6c - 7) \\ &= (c^2 - 2c - 3)(c^2 - 2c - 3 + 3c^2 - 6c + 7) \\ &= 4(c^2 - 2c - 3)(c - 1)^2 = 4(c - 1)^2(c + 1)(c - 3) \end{aligned}$$

TH1: Nếu $bc - b - c - 1 \leq 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

TH2: Nếu $bc - b - c - 1 \geq 0$ (b - 1)(c - 1) ≥ 2 ta xét hai khả năng

Khả năng 1. Nếu $c \geq 3$ $c^2 - 2c - 3 \geq 0, D'_b \geq 0 \Rightarrow D_a \geq 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Khả năng 2. Nếu $c \geq 3$ $b - 1 \leq \frac{2}{c-1} \leq 1$ $b \leq 2$ lúc này ta lại coi D_a là tam thức bậc hai của c và thực hiện tương tự trên ta có ngay $D'_c \geq 0 \Rightarrow D_a \geq 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Bài 12. Viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$2a^2 + a(bc - 5) + 2b^2 + 2c^2 - 5b - 5c + 8 \geq 0.$$

Coi vế trái của bất đẳng thức là tam thức bậc hai của a ta được:

$$\begin{aligned} D_a &= (bc - 5)^2 - 8(2b^2 + 2c^2 - 5b - 5c + 8) \\ &= b^2c^2 - 16b^2 - 16c^2 - 10bc + 40b + 40c - 39 \\ &= b^2(c^2 - 16) - 10b(c - 4) - 16c^2 + 40c - 39 \end{aligned}$$

Ta có: $2b^2 + 2c^2 - 5b - 5c + 8 > 0, b, c$ (xét tam thức bậc hai với b hoặc c).

TH1: Nếu $bc \geq 5$ ta có ngay điều phải chứng minh.

TH2: Nếu $bc \leq 5$ lại coi D_a là tam thức bậc hai của b ta được:

$$\begin{aligned} D'_b &= 25(c - 4)^2 - (c^2 - 16)(-16c^2 + 40c - 39) \\ &= 8(2c^4 - 5c^3 - 24c^2 + 55c - 28) = 8(c - 1)^2(c - 4)(2c + 7) \end{aligned}$$

Khả năng 1. Nếu $c \geq 4$ $c^2 - 16 \geq 0, D'_b \geq 0 \Rightarrow D_a \geq 0$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Khả năng 2. Nếu $c \geq 4$ $b \leq \frac{5}{c} \leq \frac{5}{4} < 4$ lúc này coi D_a là tam thức bậc hai của c và thực hiện tương tự trên ta có $D'_c \geq 0 \Rightarrow D_a \geq 0$ ta có điều phải chứng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 13. Ta cần chứng minh: $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) - 9(ab + bc + ca) \geq 0$.

$$\begin{aligned} & \geq 4(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a^2b^2 + 1) + 2(b^2c^2 + 1) + \\ & \quad 2(c^2a^2 + 1) + a^2b^2c^2 + 1 - 9(ab + bc + ca) \geq 0. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$2(a^2b^2 + 1) + 2(b^2c^2 + 1) + 2(c^2a^2 + 1) + a^2b^2c^2 + 2 \geq 4ab + 4bc + 4ca + 2abc + 1.$$

Ta cần đi chứng minh.

$$4(a^2 + b^2 + c^2) + 4ab + 4bc + 4ca + 2abc + 1 - 9(ab + bc + ca) \geq 0.$$

Ú $3(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + (a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 - 2(ab + bc + ca)) \geq 0$ (luôn đúng) do

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0 \text{ và } a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 - 2(ab + bc + ca) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài tập tương tự

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh

$$abc + 3(a^2 + b^2 + c^2) + 11 \geq 7(a + b + c).$$

Bài 14. Viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$x^2 - 2x(\cos B + \cos C) + 2(1 - \cos A) \geq 0.$$

$$\text{Ta có } D'_x = (\cos B + \cos C)^2 - 2(1 - \cos A) = 4\sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B+C}{2} - 2 \geq 0.$$

Do đó bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 15. Chú ý

$$D'_x = (\sin y + \cos y)^2 - (1 + \sin^2 y)(1 + \cos^2 y) = -(1 - \sin y \cos y)^2 < 0.$$

Bài 16. Chú ý $D'_x = -(\sqrt{3}y - 1)^2 \leq 0$ đpcm.

Bài 17. Chú ý $D'_x = -(y \sin C - z \cos B)^2 \leq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{\sin A} = \frac{y}{\sin B} = \frac{z}{\sin C}$.

Bài 18. Không mất tính tổng quát giả sử $z = \min\{x, y, z\} \geq 1$ khi đó

$$x = \frac{4 - yz}{y + z + yz}.$$

$$\text{Ta cần chứng minh } \frac{4 - yz}{y + z + yz} + y + z \geq (y + z) \cdot \frac{4 - yz}{y + z + yz} + yz$$

$$\Leftrightarrow (1 + z - z^2)y^2 + (z^2 + z - 4)y + (z - 2)^2 \geq 0$$

$$D_y = (z^2 + z - 4)^2 - 4(1 + z - z^2)(z - 2)^2 = z(z - 1)^2(5z - 8) \geq 0$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hoặc $x = y = 2, z = 0$ hoặc các hoán vị. (xem thêm kỹ thuật phản chứng).

Bài 19. Đặt $f(x) = x^2 - (a+c)x + ac = 0$ có 2 nghiệm a, c

$$\text{Mà: } a \leq b \leq c \Rightarrow f(b) \leq 0 \Leftrightarrow b^2 - (a+c)b + ac \leq 0$$

$$\Leftrightarrow b + \frac{ac}{b} \leq a + c \Leftrightarrow yb + ac \leq (a+c)y$$

$$\Rightarrow xa + ac \leq (yb + ac) + (zc + ac) \leq (a+c)x + (a+c)y + (a+c)z$$

$$\Rightarrow xa + yb + zc + ac \leq (a+c)(x+y+z)$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\Rightarrow 2\sqrt{(xa + yb + zc)ac} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq (a+c)(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow 4(xa + yb + zc)ac + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq (a+c)^2(x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow (xa + yb + zc)ac + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq \frac{(a+c)^2}{4ac}(x+y+z)^2 \text{ (đpcm)}$$

Bài 20. Thay $d = 3 - c$ vào biểu thức vế trái được tam thức bậc hai của c

$$f(c) = ac + b(3 - c) + c(3 - c) = -c^2 - c(b - a - 3) + 3b$$

$$\leq f\left(\frac{3+a-b}{2}\right) = \frac{12b+(a-b+3)^2}{4}.$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{12b+(a-b+3)^2}{4} \leq \frac{9+6\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow 6(a+b) - 2ab \leq 6\sqrt{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow 6(a+b) - \frac{1}{6}(a+b)^2 - \frac{1}{6} \leq 6\sqrt{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow (a+b-\sqrt{2})(a+b+6\sqrt{2}) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $|a+b| \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} = \sqrt{2}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}, c=d=\frac{3}{2}.$$

Bài 21. (TSDH Khối A 2011) Cho các số $x, y, z \in [1; 4]$ thỏa mãn điều kiện

$$x^3 \leq y, y^3 \leq z. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

Bài 21. Ta chứng minh

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \geq \frac{34}{33} \\ \Leftrightarrow (31x-3y)z^2 + (96y^2-35x^2-5xy)z + 31x^2y-3xy^2 \geq 0$$

Vế trái là tam thức bậc hai của z với hệ số của z^2 dương nên ta chỉ cần chứng minh

$$(96y^2-35x^2-5xy)^2 - 4(31x-3y)(31x^2y-3xy^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-y)(x-4y)(1125x^2+2631xy+2304y^2) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $x-y \geq 0; x-4y \leq 0$.

Nhận xét. Với cách làm này ta chỉ cần giả thiết bài toán là $x^3 \leq y$.

Bài 22. Viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$a^2 + 2(b+d-3c)a + (b+c+d)^2 - 8bd > 0.$$

Vế trái là tam thức bậc hai của a đạt giá trị nhỏ nhất tại $3c-b-d$ giá trị nhỏ nhất này bằng

$$P_{\min} = (3c-b-d)^2 - 2(3c-b-d)^2 + (b+c+d)^2 - 8bd \\ = (b+c+d)^2 - (3c-b-d)^2 - 8bd \\ = 8(b+d-c)c - 8bd = -8(c^2 - (b+d)c + bd) = -8(c-b)(c-d) > 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 23. Vì $p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = (p^2 - a^2 - b^2) + (q^2 - c^2 - d^2) > 0$ nên tồn tại ít nhất một trong hai số $p^2 - a^2 - b^2, q^2 - c^2 - d^2$ dương. Không mất tính tổng quát ta giả sử $p^2 - a^2 - b^2 > 0$.

$$\text{Xét tam thức bậc hai } f(x) = (p^2 - a^2 - b^2)x^2 - 2(pq - ac - bd)x + (q^2 - c^2 - d^2).$$

Ta có: $p^2.f(q) = -(aq - pc)^2 - (bq - pd)^2 \leq 0$ nên $f(x)$ luôn có nghiệm.

$$\text{Suy ra } D_x' \geq 0 \Leftrightarrow (pq - ac - bd)^2 \geq (p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2).$$

Ta có điều phải chứng minh.

Tổng quát với n số thực thỏa mãn điều kiện $a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 > 0$ ta có

$$(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \leq (a_1b_1 - a_2b_2 - \dots - a_nb_n)^2.$$

Bài 24. Thay $r = -p - q$ vào bất đẳng thức cần đưa về chứng minh:

$$a^2q(-p - q) + b^2(-p - q)p + c^2pq \leq 0 \Leftrightarrow -a^2q^2 + p(c^2 - b^2 - a^2)q - p^2b^2 \leq 0.$$

Coi vế trái bất đẳng thức trên là tam thức bậc hai của q ta được:

$$\begin{aligned} D_q &= p^2(c^2 - b^2 - a^2)^2 - 4p^2a^2b^2 = p^2(c^2 - b^2 - a^2 - 2ab)(c^2 - b^2 - a^2 + 2ab) \\ &= p^2(c^2 - (a+b)^2)(c^2 - (a-b)^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Do $c > |a - b|, c < a + b$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 25. Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} a^2b^2 + 2(a^2 + b^2) + 4 - 3ab - 3(a+b)^3 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow a^2(b^2 + 2) - 3a(b+1) + 2b^2 - 3b + 4 &\leq 0. \end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\begin{aligned} D_a &= 9(b+1)^2 - 4(b^2 + 2)(2b^2 - 3b + 4) \\ &= -(b-1)^2(8b^2 + 4b + 23) \leq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

CHUYÊN ĐỀ 07. KỸ THUẬT HÀM GIỚI HẠN BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Dưới đây chỉ trình bày một số bài toán bất đẳng thức tích phân mà phương pháp giải chỉ thông qua các bất đẳng thức đại số rồi lấy tổng tích phân sẽ dẫn đến kết quả của bài toán.

Bất đẳng thức tích phân là bài toán khá hay để tìm hiểu thêm bạn đọc tìm đọc các Chuyên đề khác về bất đẳng thức tích phân trên Diễn đàn học tập trực tuyến Mathlinks.vn

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Bài toán: Cho $f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; là các hàm khả tích trên $[a, b]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ với mọi $x \in [a, b]$ ta có

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx.$$

Các bất đẳng thức phụ hay được sử dụng

$$\triangleright \sin x < x \text{ và } x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, "x > 0.$$

$$\triangleright \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \text{ và } 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}, "x > 0.$$

$$\triangleright \frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x.$$

Yêu cầu. Các bất đẳng thức đại số như Cô si, Cauchy - Schwarz,... cần nắm vững.

Như vậy dạng bất đẳng thức cơ bản của tích phân chính là quy bài toán về đánh giá bất đẳng thức trong dấu tích phân.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. [IMC 2011] Chứng minh rằng $\int_a^b (x^2 + 1)e^{x^2} dx \leq e^{a^2} - e^{b^2}$ với mọi số thực $a < b$.

Lời giải

Với mọi số thực x ta luôn có $x^2 + 1 \geq 2x$ suy ra

$$\int_a^b (x^2 + 1)e^{x^2} dx \geq \int_a^b 2xe^{x^2} dx = e^{a^2} - e^{b^2}.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 2. Chứng minh rằng $\int_0^1 \frac{x \sin x}{1 + x \sin x} dx < 1 - \ln 2$.

Lời giải

Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng: $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x \sin x} > \ln 2$.

Với mọi $x > 0$ ta có $\sin x < x$ ta có $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x \sin x} > \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4} > \ln 2$.

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)$ được xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0; 1] \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}, & x = 0 \end{cases}$.

Chúng minh rằng $\frac{17}{18} < \int_0^1 f(x) dx < \frac{1703}{1800}$.

Lời giải

Rõ ràng với giả thiết hàm số $f(x)$ đã cho thì $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$.

Tiếp đến sử dụng bất đẳng thức phụ $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, " $x > 0$ ", ta

được $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$.

Chuyển qua tích phân hai vế của bất đẳng thức trên ta được

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) dx < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) dx \Rightarrow \frac{17}{18} < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1703}{1800}$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 4. Chứng minh rằng $\frac{1}{2(n+1)} < \int_0^{\frac{p}{4}} \tan^n x dx < \frac{1}{2(n-1)}$ với mọi số nguyên dương $n \geq 2$.

Lời giải

Đặt $a_n = \int_0^{\frac{p}{4}} \tan^n x dx$ với mọi $0 \leq x \leq \frac{p}{4}$ $\Rightarrow 0 \leq \tan x \leq 1 \Rightarrow \tan^n x \leq \tan^{n-1} x$

$\Rightarrow a_n \leq a_{n-1}$ tức dãy $\{a_n\}$ giảm.

Suy ra $a_{n+2} + a_n < 2a_{n+1} < a_n + a_{n-2}$.

Mặt khác ta lại có $a_{n+2} + a_n = \int_0^{\frac{p}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx = \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \Big|_0^{\frac{p}{4}} = \frac{1}{n+1}$

Và $a_{n-2} + a_n = \int_0^{\frac{p}{4}} \tan^{n-2} x (1 + \tan^2 x) dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x \Big|_0^{\frac{p}{4}} = \frac{1}{n-1}$.

Từ đó suy ra $\frac{1}{2(n+1)} < a_n < \frac{1}{2(n-1)}$.

Vậy $\frac{1}{2(n+1)} < \int_0^{\frac{p}{4}} \tan^n x dx < \frac{1}{2(n-1)}$, " $n \geq 2$ ".

Từ chứng minh trên suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\frac{p}{4}} \tan^n x dx = \frac{1}{2}$.

Bài 5. [VMC 1994] Xét tích phân $I_n = \int_0^4 x^n \sqrt{4-x} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính I_n .

b) Chứng minh rằng $I_n < 2^{2n+3} (2n)^{-\frac{1}{2}}$.

Lời giải

Ta có

$$I_n = \int_0^4 x^n \sqrt{4-x} dx = 2^{2n+4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \sin^2 t dt = 2^{2n+4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+3} t dt \quad \text{với}$$

$$x = 4\cos^2 t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Xét tích phân } J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt, m > 1.$$

Tích phân từng phần ta được:

$$\begin{aligned} J_m &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} t d(\sin t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (m-1) \sin^2 t \cos^{m-2} t dt \\ &= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}. \text{ Ta có } J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1 \text{ suy ra}$$

$$\begin{aligned} I_n &= 2^{2n+4} (J_{2n+1} - J_{2n+3}) = 2^{2n+4} \left(\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \\ &= 2^{2n+4} \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} - 2^{2n+4} \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)\cdots 3}. \end{aligned}$$

$$\text{Chúng minh } I_n < 2^{2n+3} (2n)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Đặt } x = 4t \text{ khi đó } I_n = 2^{2n+3} \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt \text{ ta chứng minh } t^n \sqrt{1-t} < \frac{1}{\sqrt{2ne}} \text{ hay}$$

$$t^{2n} (1-t) < \frac{1}{2ne}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta được:

$$t^{2n} (1-t) = (2n)^{2n} \left(\frac{t}{2n} \right)^{2n} (1-t) \leq (2n)^{2n} \frac{\frac{t}{2n} + \frac{t}{2n} + \cdots + \frac{t}{2n} + 1 - t}{2n+1} = \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}}.$$

Như vậy ta chứng minh

$$\frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} < \frac{1}{2ne} \Leftrightarrow e < \frac{(2n+1)^{2n+1}}{(2n)^{2n}} \Leftrightarrow 1 < (2n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right).$$

$$\text{Dễ dàng chứng minh được } \ln(1+x) > \frac{x}{x+1}, "x > 0.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

$$\text{Bài 6. Chứng minh rằng } \int_p^{2p} \frac{|\sin nx|}{x} dx > \frac{1}{p(1+n)} + \frac{1}{2+n} + \cdots + \frac{1}{2n\theta}.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = nx \text{ khi đó } I_n = \int_p^{2p} \frac{|\sin nx|}{x} dx = \int_{np}^{2np} \frac{|\sin t|}{t} dt = \frac{1}{n} \int_{k=n}^{2n} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

$$> \frac{1}{(k+1)^p} \int_{kp}^{(k+1)p} |\sin t| dt = \frac{1}{(k+1)^p} \int_0^p |\sin t| dt.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 7. Chứng minh rằng $\frac{6n^2 + 2n + 1}{6n^2} < \int_0^1 \sqrt[n]{1+x} dx < \frac{2n+1}{2n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh

$$1 + \frac{x}{n} - \frac{n(n-1)}{2n^2} x^2 \leq \sqrt[n]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{n} \text{ với mọi } x \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$$

Khi đó lấy tích phân hai vế của trên $[0,1]$ ta có điều phải chứng minh.

$$\text{Thật vậy ta có } \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n} - \frac{n(n-1)}{2n^2} x^2\right) dx \leq \int_0^1 \sqrt[n]{1+x} dx \leq \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right) dx = 1 + \frac{1}{2n} = \frac{2n+1}{2n} \text{ và}$$

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n} - \frac{n(n-1)}{2n^2} x^2\right) dx = \left[x + \frac{x^2}{2n} - \frac{n(n-1)}{6n^2} x^3\right]_0^1 = \frac{6n^2 + 3n - (n-1)}{6n^2} = \frac{6n^2 + 2n + 1}{6n^2}.$$

Việc chứng minh bất đẳng thức chỉ việc khảo sát hàm số.

Bình luận: Vì sao lời giải nghĩ đến việc chứng minh bất đẳng thức ?

Đây là một kinh nghiệm khi giải toán, đó là dựa vào khai triển Taylor của hàm số $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$ tại $x=0$ ta được

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{n(n-1)}{2n^2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3} x^3 + \dots$$

Cũng tương tự với $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ và $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ và khai triển

Taylor cho hàm e^x và ta có các bất đẳng thức sau đây.

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \text{ và } 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \text{ với mọi } x > 0.$$

Lúc này chỉ việc lấy tích phân hai vế trên $[a,b], (0 < a < b)$ ta có các bất đẳng thức hết sức thú vị.

Bài 8. Chứng minh rằng $\int_0^{\sqrt{2p}} \sin x^2 dx > 0$.

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh: $\sin x^3 \geq x - \frac{x^3}{6}, \forall x \geq 0$

Thật vậy xét hàm số $f(x) = \sin x^3 - x + \frac{x^3}{6}$ ta có

$$f'(x) = \cos x^3 - 1 + \frac{x^2}{2} \geq f''(x) = -\sin x^3 + x \geq f'''(x) = 1 - \cos x^3 \geq 0.$$

$$\text{Suy ra } f''(x) \geq f''(0) = 0 \Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0.$$

$$\text{Tức là } \sin x^3 \geq x - \frac{x^3}{6}, \forall x \geq 0.$$

Suy ra

$$\int_0^{\sqrt{2p}} \sin x^2 dx^3 = \int_0^{\sqrt{2p}} x^2 \sin x^2 dx = \frac{x^3}{3} \sin x^2 - \frac{x^6}{6} \cos x^2 = \frac{x^3}{3} \sin x^2 - \frac{x^7}{42} \cos x^2 = \frac{2p\sqrt{2p}}{3} - \frac{4p^3\sqrt{2p}}{21} = \frac{2p\sqrt{2p}}{3} \left(1 - \frac{2p^2}{7} \right) > 0.$$

Bài 9. Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương ta luôn có

$$\int_0^1 \frac{x^n + 1}{x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1} dx \geq \frac{2}{n+1}.$$

Lời giải

Với mọi $k \in [0, n]$ và $x \in [0, 1]$ ta có $(1 - x^n)(1 - x^{n-k}) \geq 0 \Rightarrow x^k + x^{n-k} \leq x^n + 1$.

Cho $k = 0, 1, 2, \dots, n$ và cộng theo vế của $n+1$ bất đẳng thức trên theo vế, suy ra

$$2(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) \leq (n+1)(x^n + 1) \Rightarrow \frac{x^n + 1}{x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1} \geq \frac{2}{n+1}.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 \frac{x^n + 1}{x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1} dx \geq \int_0^1 \frac{2}{n+1} dx = \frac{2}{n+1}.$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Bài 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $I_n = \int_0^{\frac{3p}{8}} \frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} dx$.

Lời giải

Với mọi $x \in \left(\frac{p}{4}, \frac{3p}{4} \right)$ ta có $\cos x > 0, \sin x > 0$ khi đó ta có

$$\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} = \frac{2^n (\sin^{2(n+1)} x + \cos^{2(n+1)} x)}{\sin^n 2x} \geq 2^n (\sin^{2(n+1)} x + \cos^{2(n+1)} x).$$

Mặt khác hàm $f(n) = a^{n+1}$ là hàm lồi nên ta có

$$f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x) = \sin^{2(n+1)} x + \cos^{2(n+1)} x \geq 2f\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}.$$

Suy ra

$$2^n (\sin^{2(n+1)} x + \cos^{2(n+1)} x) \geq 1 \Rightarrow I_n = \int_0^{\frac{3p}{8}} \frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x} dx \geq \int_0^{\frac{3p}{8}} 1 dx = \frac{p}{8}.$$

Bài 11. Với mọi số thực $a_i, i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} \geq 0.$$

Lời giải

$$\text{Xét đa thức } f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \text{ ta có } f^2(x) = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j x^{i+j} = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} a_i a_j x^{i+j}.$$

Đến đây lấy tích phân hai vế trên $[0, 1]$ ta có điều phải chứng minh.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng

$$a) 2\sqrt{3} < \int_{-2}^0 \sqrt{x^3 - \frac{3x^2}{2} - 6x + 5} dx < \sqrt{34}.$$

$$d) \int_0^p e^{\sin^2 x} dx > \frac{3p}{2}.$$

$$b) \frac{p}{6} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \leq \frac{p\sqrt{2}}{8}.$$

$$e) \frac{1}{2\cos 1} \int_1^{\frac{p}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\ln p - \ln 2}{p-2}.$$

$$c) \frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leq \frac{p}{6}, n \in \mathbb{N}^*.$$

$$f) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^x \sin x}{x^2+1} dx \leq \frac{p}{12e}.$$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ ta luôn có

$$e^x - 1 < \int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^t} dt < \sqrt{(e^x - 1)e^x} - \frac{1}{2}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng $\frac{5}{6} < \int_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Bài 4. Chứng minh rằng $\int_1^e \frac{(\ln x)^{2013}}{x^2} dx > \frac{1}{2014 \cdot 2015 \cdot 2016}.$

Bài 5. Chứng minh rằng $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{(\cos x)^{\sin x}}{(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}} dx < 1.$

Bài 6. Cho $0 < a \leq b$ chứng minh rằng

$$a) \int_a^b \frac{x^2 + x + 1}{(x+2)^5} dx \leq \frac{1}{54} \ln \frac{2b+1}{2a+1}.$$

$$b) \int_a^b \frac{x^4 + x^2 + 1}{(x^2 + 3x + 2)^5} dx \leq \frac{1}{2916} \ln \frac{(2b-1)(2a+1)}{(2a-1)(2b+1)}.$$

Bài 7. Chứng minh rằng $1 + \frac{e-2}{n} \leq \int_0^1 e^{x^n} dx \leq 1 + \frac{e-1}{n}$ với $n \in \mathbb{N}^*.$

Bài 8. Chứng minh rằng $\int_0^1 \sqrt{1+x^2 \ln^2(x+1)} dx \geq \sqrt{\frac{17}{16}}.$

Bài 9. Với mọi số nguyên dương n . Chứng minh rằng $\int_0^{\frac{p}{4}} \tan^n x dx > \frac{p}{2np+4}.$

Bài 10. Chứng minh rằng $\frac{p}{2} < \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} dx < \frac{p}{2\sqrt{1-k^2}}$ với mọi $k \in (0,1).$

Bài 11. Chứng minh rằng $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sin nx \cos^4 x}{\sin x} dx < \frac{n^2 p^2}{8}$ với $n \geq 1.$

Bài 12. Với mọi số nguyên dương $n \geq 2.$

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{n+2}{n+1} < \int_0^1 e^{x^n} dx < \frac{e+n}{n+1}.$$