

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm).

Câu 1: Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{1.51} + \frac{1}{2.52} + \frac{1}{3.53} + \dots + \frac{1}{10.60}\right)x = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \frac{1}{3.13} + \dots + \frac{1}{50.60}$ là

A. $x = 5$. B. $x = 4$. C. $x = 7$. D. $x = 9$.

Câu 2: Cho $M = \frac{2\sqrt{a} - 16}{a - 6\sqrt{a} + 8} - \frac{\sqrt{a} + 4}{\sqrt{a} - 2} - \frac{2\sqrt{a} + 1}{4 - \sqrt{a}}$. S là tập hợp các giá trị nguyên của a để M nhận giá trị nguyên. Tập S có tất cả bao nhiêu tập con?

A. 3. B. 8. C. 4. D. 2.

Câu 3: Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm A sao cho $OA = 3R$. Đường thẳng qua A và cắt đường tròn tại hai điểm B, C . Tính $AB.AC$.

A. $AB.AC = 5R^2$. B. $AB.AC = 2R^2$. C. $AB.AC = 8R^2$. D. $AB.AC = 3R^2$.

Câu 4: Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ với $x > 0, y > 0$ thỏa mãn phương trình $4x^2 + 9y + 1 = 3x + 6\sqrt{xy}$?

A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH ($H \in BC$); $AB = 2, AC = 3CH$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $3\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị x nguyên để biểu thức $A = \frac{2x+3}{x+2}$ nhận giá trị nguyên?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 7: Gọi M là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O trên đường thẳng $y = (m+2)x + m - 5$ (với m là tham số). Giá trị lớn nhất của OM bằng

A. $5\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{5}$. D. $2\sqrt{5}$.

Câu 8: Cho biểu thức $f(x) = (x^3 + 6x - 7)^{2021}$. Biết $a = \sqrt[3]{3 + \sqrt{17}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{17}}$, giá trị của $f(a)$ là

A. 1. B. -2. C. 0. D. -1.

Câu 9: Biết điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm mà đường thẳng $y = (1-m)x + 2m - 6$ luôn đi qua với mọi m . Giá trị của biểu thức $A = x_0^2 + y_0^2$ là

A. -2. B. 20. C. 6. D. 4.

Câu 10: Cho hai hàm số $y = (m^2 + 1)x + 2$ và $y = 2x + m + 1$. Tìm tham số m để đồ thị của hai hàm số đã cho là hai đường thẳng song song.

A. $m = \pm 1$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = -1$.

Câu 11: Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD (D thuộc BC) sao cho $BD = a; CD = b; a > b$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C cắt BC tại M . Độ dài MA được tính theo công thức nào sau đây?

A. $MA = \frac{2ab}{a+b}$. B. $MA = \frac{2ab}{a-b}$. C. $MA = \frac{ab}{a-b}$. D. $MA = \frac{2ab}{2a-b}$.

Câu 12: Tìm hai tham số m, n để hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ mx - y = n - 2 \end{cases}$ có vô số nghiệm.

- A. $m = 2; n = -2$. B. $m = 2; n = 6$. C. $m = -2; n = -2$. D. $m = -2; n = 2$.

Câu 13: Cho ba số x, y, z sao cho $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$. Giá trị lớn nhất của $P = \frac{yz\sqrt{x-1} + xz\sqrt{y-2} + xy\sqrt{z-3}}{xyz}$ là $\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$, ($a, b, c \in \mathbb{N}$). Tổng $a + b + c$ bằng

- A. 22. B. 18. C. 20. D. 19.

Câu 14: Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x + my = 2m - 1 \\ mx - y = m^2 - 2 \end{cases}$ (với m là tham số) có nghiệm $(x_0; y_0)$. Giá trị lớn nhất của $x_0 y_0$ là

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 15: Cho hệ phương trình $\begin{cases} \frac{4}{x+2y} - \frac{1}{x-2y} = -\frac{13}{3} \\ \frac{1}{x+2y} + \frac{6}{x-2y} = 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x_0; y_0)$. Tính $|y_0 - x_0|$.

- A. $|y_0 - x_0| = 4$. B. $|y_0 - x_0| = 2$. C. $|y_0 - x_0| = -2$. D. $|y_0 - x_0| = 3$.

Câu 16: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Giả sử $AB = 6\text{cm}$, $BH = 4\text{cm}$. Tính BC .

- A. 10cm . B. $BC = 9\text{cm}$. C. $BC = 10,5\text{cm}$. D. $BC = 8\sqrt{2}\text{cm}$.

Câu 17: Phương trình $|2x - 5| + 3 = x$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 18: Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B cố định nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Điểm C nằm trên đoạn thẳng AO sao cho $OC = \frac{R}{2}$ và điểm M thay đổi trên đường tròn. Giá trị nhỏ nhất của $MA + 2MB$ bằng

- A. BC . B. $4BC$. C. $3BC$. D. $2BC$.

Câu 19: Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA = R$, dây cung BC vuông góc với OA tại trung điểm M của đoạn thẳng OA , kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B , tiếp tuyến đó cắt OA tại E . Độ dài đoạn thẳng BE là

- A. $3R$. B. $R\sqrt{2}$. C. $R\sqrt{3}$. D. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20: Cho các hàm số $y = 0,5x + 3$, $y = 6 - x$, $y = mx$ có đồ thị lần lượt là các đường thẳng d_1, d_2, Δ_m . Với những giá trị nào của tham số m thì Δ_m cắt d_1, d_2 tại hai điểm A, B sao cho A có hoành độ âm, B có hoành độ dương?

- A. $-0,5 < m < 1$. B. $-1 < m < 0,5; m \neq 0$.
C. $-1 < m < 0,5$. D. $-0,5 < m < 1; m \neq 0$.

II. TỰ LUẬN

Câu 1. (5,5 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{1 - \sqrt{x}}$, ($x \geq 0, x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

2. Cho đường thẳng $d: y = ax + b, (a \neq 0)$ đi qua $M(1;4)$ và cắt Ox tại điểm A có hoành độ dương, cắt Oy tại B có tung độ dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = OA + OB$.

Câu 2. (3,5 điểm)

1. Giải phương trình $7x^2 - 5x + 6 = (11x - 1)\sqrt{x^2 + 3}$.

2. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a - b$ là số nguyên tố và $3c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng $8c + 1$ là số chính phương.

Câu 3. (4 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < BC < CA$) ngoại tiếp đường tròn tâm I . Lấy E và F lần lượt trên các đường thẳng AC và AB sao cho $CB = CE = BF$ đồng thời chúng nằm về cùng phía với A so với đường thẳng BC . Các đường thẳng BE và CF cắt nhau tại G .

a) Chứng minh rằng bốn điểm C, E, I và G cùng nằm trên một đường tròn.

b) Trên đường thẳng qua G và song song với AC lấy điểm H sao cho $HG = AF$ đồng thời H nằm khác phía với C so với đường thẳng BG . Chứng minh rằng $\angle HGC = \frac{1}{2} \angle A$.

Câu 4. (1 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{xy + x + y}} + \frac{1}{\sqrt{yz + y + z}} + \frac{1}{\sqrt{zx + z + x}} \geq \sqrt{3}.$$

----- **HẾT** -----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi số 1 (Họ tên và ký).....

Cán bộ coi thi số 2 (Họ tên và ký).....

**SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
BẮC GIANG**

HDC

**HƯỚNG DẪN CHẤM
BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2020-2021
MÔN THI: TOÁN – LỚP 9**

Ngày thi: 06/3/2021

(Bản hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm- Mỗi đáp án đúng được 0,3 điểm)

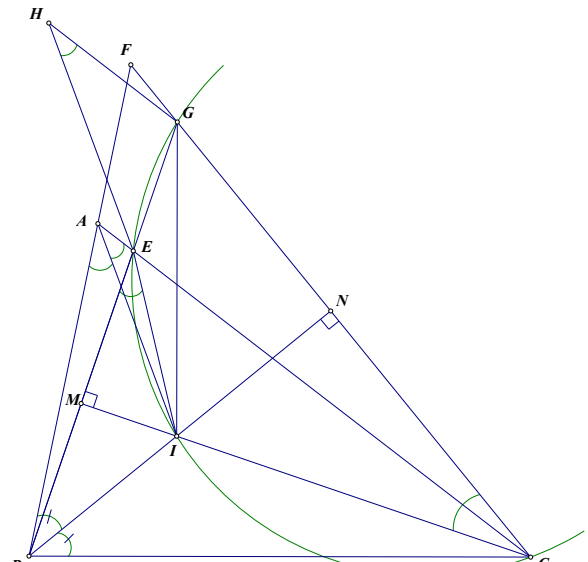
Mã đề	Câu	Đáp án
101	1	A
101	2	B
101	3	C
101	4	A
101	5	D
101	6	B
101	7	A
101	8	D
101	9	B
101	10	D
101	11	C
101	12	C
101	13	A
101	14	A
101	15	B
101	16	B
101	17	D
101	18	D
101	19	C
101	20	C

Mã đề	Câu	Đáp án
102	1	D
102	2	B
102	3	C
102	4	D
102	5	A
102	6	C
102	7	A
102	8	A
102	9	B
102	10	A
102	11	C
102	12	B
102	13	D
102	14	D
102	15	B
102	16	C
102	17	B
102	18	C
102	19	D
102	20	A

II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

Câu		Hướng dẫn giải	Điểm
Câu 1 (5,5 điểm)			
1. (3,5 điểm)	a) 2 điểm	$A = \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3 - (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} + 2)^2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)}$	0,5
		$A = \frac{x - \sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)}$	0,5
		$A = \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)}$	0,5
		$A = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$	0,25
		Kết luận	0,25
	b) 1,5 điểm	$A = 1 - \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$	0,25

		Với Đề $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x} - 1$ là ước của 2	0,25
		$\Rightarrow \sqrt{x} - 1 \in \{\pm 2; \pm 1\}$	0,5
		Đáp số $x = 0, x = 4, x = 9$	0,5
2. (2 điểm)		$M \in d \Rightarrow a + b = 4 \Rightarrow b = 4 - a$	0,5
		$\Rightarrow d \cap Ox = A\left(-\frac{b}{a}; 0\right), d \cap Oy = B(0; b) \quad (b > 0, a < 0)$	0,25
		$+ OA + OB = -\frac{b}{a} + b = -\frac{4 - a}{a} + 4 - a$	0,25
		$= \left(-\frac{4}{a}\right) + (-a) + 5 \geq 9$	0,5
		Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{4}{a} = a \Rightarrow a = -2 \quad (a < 0) \Rightarrow b = 6$ (tm) Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 9	0,5
Câu 2 (5 điểm)			
1. (2 điểm)		$7x^2 - 5x + 6 = (11x - 1)\sqrt{x^2 + 3}$	0,25
		$\Leftrightarrow 7x^2 - 5x + 6 - (11x - 1)\sqrt{x^2 + 3} = 0$	
		$\Leftrightarrow (5x^2 - 5x - 10x\sqrt{x^2 + 3}) + (2x^2 + 6 - (x - 1)\sqrt{x^2 + 3}) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow 5x.(x - 1 - 2\sqrt{x^2 + 3}) + \sqrt{x^2 + 3}.(2\sqrt{x^2 + 3} - x + 1) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow (x - 1 - 2\sqrt{x^2 + 3})(5x - \sqrt{x^2 + 3}) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2 + 3} = x - 1 \\ \sqrt{x^2 + 3} = 5x \end{cases}$	0,25
		$\Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2 + 3} = x - 1 \\ 3x^2 + 2x + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$	0,25
		$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 3} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{4}$	0,25
		Kết luận	0,25
2. (1,5 điểm)		Ta có $4c^2 = c^2 + ab + bc + ca = (c + a)(c + b)$	0,25
		Gọi $d = (c + a, c + b), (c + a) - (c + b) = a - b; d \Rightarrow d = 1$ hoặc $d = a - b$ (Do $a - b$ là số nguyên tố)	0,25
		TH1: $d = 1 \Rightarrow c + a$ và $c + b$ nguyên tố cùng nhau nên $c + a = x^2, c + b = y^2$ (x và y nguyên dương)	0,25

	Nên $a - b = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ là số nguyên tố nên $x - y = 1 \Rightarrow x = 1 + y$	
	$4c^2 = (c + a)(c + b) = x^2 y^2 \Rightarrow 2c = xy = (1 + y)y = y^2 + y$ $\Rightarrow 8c + 1 = 4y^2 + 4y + 1 = (2y + 1)^2$ là số chính phương.	0,25
	TH2: $d = a - b \Rightarrow c + a = (a - b)x; c + b = (a - b)y$, với x, y nguyên dương và nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow a - b = (c + a) - (c + b) = (a - b)x - (a - b)y \Rightarrow 1 = x - y \Rightarrow x = y + 1$	0,25
	Ta có $4c^2 = (c + a)(c + b) = (a - b)^2 .xy \Rightarrow xy = y(y + 1)$ là số chính phương Mà y và $y + 1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên $y = 0$ (vô lý do y nguyên dương). Kết luận.	0,25
Câu 3 (4 d)	 Bổ đề: Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° thì nội tiếp một đường tròn. (Nếu học sinh không chứng minh bổ đề mà sử dụng thì vẫn cho điểm tối đa)	
	a) Gọi $BI \cap CF = \{N\}$; $CI \cap BE = \{M\}$. $\triangle IBE$ cân tại I $\Rightarrow \angle IEB = \angle IBM$ (1).	0,5
	$\left. \begin{array}{l} \angle IBM + \angle BIM = 90^\circ \\ \angle ICN + \angle CIN = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle IBM = \angle ICN$ (2).	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $\angle IEB = \angle ICN$ $\Rightarrow \angle FCG + \angle GEI = 180^\circ$	0,75
	$\Rightarrow$ tứ giác $CIEG$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	b) Chứng minh được tứ giác $AFCI$ nội tiếp	0,25

	(vì $\angle AFC = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{\angle BAC + \angle BCA}{2} = \angle FAC + \angle FCA = 180^\circ - \angle AIC$)	
	Chứng minh được tứ giác $AEIB$ nội tiếp (vì $\angle EAI = \angle FIC = \angle FCF = \angle FBE$)	0,25
	Do tứ giác $CIEG$ và $AFCI$ nội tiếp, nên $\angle EGI = \angle ECI = \angle AFI$ Hơn nữa, do $\angle IAB = \angle IEB$ nên $\angle GEI = \angle FAI$ suy ra $\triangle GEI$ đồng dạng với $\triangle FAI$.	0,25
	Suy ra $\frac{EG}{BI} = \frac{EG}{EI} = \frac{AF}{AI} \Rightarrow \frac{HG}{GE} = \frac{AF}{GE} = \frac{AI}{BI}$	0,25
	Nhưng $\angle HGE = \angle AEB = \angle AIB$ suy ra $\triangle HGE$ đồng dạng $\triangle AIB$	0,25
	Từ đó $\angle HGE = \angle AIB = \frac{\angle AIB}{2}$	0,25
Câu 4	Ta chứng minh $(x+y+1)^2 \geq 3(xy+x+y)$, với $\forall x, y$. Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với $2(x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2y + 2x) \geq 6(xy + x + y)$ $\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$.	0,25
	Do đó $\frac{1}{\sqrt{xy+x+y}} \geq \frac{\sqrt{3}}{x+y+1}$, với $\forall x, y > 0$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$. Tương tự ta suy ra $\frac{1}{\sqrt{xy+x+y}} + \frac{1}{\sqrt{yz+y+z}} + \frac{1}{\sqrt{zx+z+x}} \geq \frac{\sqrt{3}}{x+y+1} + \frac{\sqrt{3}}{y+z+1} + \frac{\sqrt{3}}{z+x+1}$ (1) Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.	0,25
	Ta chứng minh: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \geq \frac{9}{m+n+p}$, $\forall m, n, p > 0$ Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với $1 + \frac{n}{m} + \frac{p}{m} + \frac{m}{n} + 1 + \frac{p}{n} + \frac{m}{p} + \frac{n}{p} + 1 \geq 9$ $\Leftrightarrow \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n} \right) + \left(\frac{p}{m} + \frac{m}{p} \right) + \left(\frac{p}{n} + \frac{n}{p} \right) \geq 6$ Theo bất đẳng thức Cô si ta thấy bất đẳng thức trên luôn đúng. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow m=n=p$.	0,25

	Do đó $\frac{\sqrt{3}}{x+y+1} + \frac{\sqrt{3}}{y+z+1} + \frac{\sqrt{3}}{z+x+1} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2(x+y+z)+3} = \sqrt{3} \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$	0,25
--	---	------