UBND HUYỆN YÊN ĐỊNH
PHÒNG GIÁO DỤC&ĐÀO TẠO

KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
NĂM HỌC: 2023 - 2024
Môn thi: TOÁN
(Thời gian làm bài 150 phút)
(Đề thi gồm có 05 câu, 01 trang)

Câu I (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{\dfrac{16}{x^2}-\dfrac{8}{x}+1}}$, với $x > 4.$
   a) Rút gọn biểu thức A .
   b) Tìm giá trị của x để biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất

2.Cho các số x, y, z khác 0 thỏa mãn đồng thời $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$ và $\dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4.$

Tính giá trị của biểu thức $P=(x+2y+z)^{2024}$

Câu II (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{x^2+7}{2(x+1)}.$
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ \sqrt{2xy-1}+\sqrt{2-x^2y^2}=2 \end{cases}$

Câu III (4,0 điểm)

1. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $16(x^3-y^3)=15xy+371$
2. Cho ba số tự nhiên a,b,c thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và $3c^2=c(a+b)+ab.$
   Chứng minh $8c+1$ là số chính phương.

Câu IV (6 điểm) Cho điểm M thuộc đường tròn (O) đường kính AB (M khác A, B và $MA < MB$). Tia phân giác của góc AMB cắt AB tại C. Qua C, vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt các đường thẳng AM và BM lần lượt tại D và H.

1. a) Chứng minh hai đường thẳng AH và BD cắt nhau tại điểm N nằm trên đường tròn (O)
   b) Gọi E là hình chiếu của H trên tiếp tuyến tại A của thuộc đường tròn (O)
   Chứng minh tứ giác $ACHE$ là hình vuông.
2. Gọi F là hình chiếu của D trên tiếp tuyến tại B của thuộc đường tròn (O)
   Chứng minh bốn điểm E, M, N, F thẳng hàng.
3. Gọi S_1, S_2 là diện tích của các tứ giác $ACHE, BCDF.$ Chứng minh
   $CM^2 < \sqrt{S_1 S_2}$

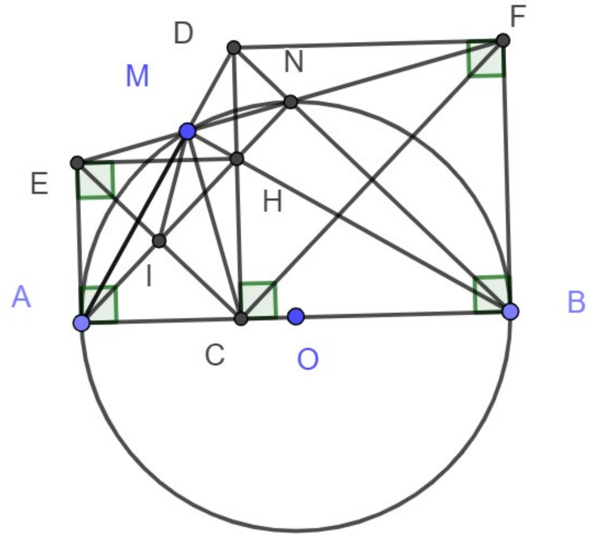
Câu V (2 điểm) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $2ab+6bc+2ac=7abc.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C=\frac{4ab}{a+2b}+\frac{9ac}{a+4c}+\frac{4bc}{b+c}$

Câu	Nội dung	Điểm
I	1. a) $A=\frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{\frac{16}{x^2}-\frac{8}{x}+1}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{4}{x}-1\right)^2}}=\frac{\sqrt{x-4}+2+\left\|\sqrt{x-4}-2\right\|}{\left\|\frac{4}{x}-1\right\|}$	0,5
	Khi $4<x<8$ thì $A=\frac{\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4}}{\frac{x-4}{x}}=\frac{4x}{x-4}$ Khi $x\geq 8$ thì $A=\frac{\sqrt{x-4}+2+\sqrt{x-4}-2}{\frac{x-4}{x}}=\frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4}$	0,5
	b) Xét $4<x<8$ ta có $A=\frac{4x}{x-4}=4+\frac{16}{x-4}$ Do $4<x<8$ nên $0<x-4<4\Rightarrow\frac{16}{x-4}>4$, do đó $A>8$.	0,5
	Xét $x\geq 8$, ta có $A=\frac{2x\sqrt{x-4}}{x-4}=\frac{2x}{\sqrt{x-4}}=2\left(\sqrt{x-4}+\frac{4}{\sqrt{x-4}}\right)$ $\geq 2.2\sqrt{\sqrt{x-4}.\frac{4}{\sqrt{x-4}}}=8.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{x-4}=\frac{4}{\sqrt{x-4}}\Leftrightarrow x=8.$ So sánh hai trường hợp ta được Min A=8 tại x=8	0,5
	2. Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2\Rightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=4.$	0,5
	Do đó $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=0.$ $\Leftrightarrow x=y=-z$	0,5
	Thay vào $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ ta được $x=y=\frac{1}{2};z=\frac{-1}{2}$	0,5
	Khi đó $P=\left(\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}\right)^{2024}=1.$	0,5

II	1. Điều kiện $x>0.$ Phương trình tương đương $2(x+1)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x^2+7.$ Chia hai vế cho $x\neq 0.$ ta được $2(x+1)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x+\frac{7}{x}\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\frac{4}{x}=0$ $\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2\right)\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-\frac{2}{x}\right)=0$ Trường hợp 1: $\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2=0\Leftrightarrow\sqrt{x+\frac{3}{x}}=2\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x\in\{1;3\}$ Trường hợp 2: $\sqrt{x+\frac{3}{x}}-\frac{2}{x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{2}{x}\Leftrightarrow x^3+3x-4=0$ $\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x+4)=0\Leftrightarrow x=1.$ Vậy $x\in\{1;3\}$	0,5 0,5 0,5 0,5
	2. Điều kiện $\frac{1}{2}\le xy\le\sqrt{2}.$ Ta có $\sqrt{2xy-1}+\sqrt{2-x^2y^2}\le\frac{2xy-1+1}{2}+\frac{2-x^2y^2+1}{2}=2$ Dấu “=” xảy ra khi $xy=1$ và thu được hệ phương trình tương đương $\begin{cases}xy=1\\x+y=2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1.$	0,5 0,5 0,5 0,5
Câu III	1. Giả sử tồn tại các số nguyên dương x,y thỏa mãn đề bài. Ta có $15xy+371=16(x-y)(x^2+xy+y^2)$ Do vế trái dương nên $x-y>0$ hay $x-y\ge 1$. Suy ra $15xy+371\ge 16(x^2+xy+y^2)=1+15xy+16(x^2+y^2)$ $\Leftrightarrow 16(x^2+y^2)\le 370\Leftrightarrow x^2+y^2\le 23.$ Mặt khác từ đề bài $16(x^3-y^3)=15xy+371\Rightarrow 16(x^3-y^3)=14xy+370+(xy+1)$ Suy ra $xy+1$ là số chẵn do đó x,y cùng lẻ. Do $x\ge y\ge 1$ và $x^2\le 23$ nên cgir xảy ra $x=3$. Thay vào đề bài ta có $y=1$ Cặp số duy nhất thỏa mãn đề bài $(x,y)=(3,1)$ 2. Với a,b,c đã cho, ta có $4c^2=c^2+ab+bc+ca=(c+a)(b+c)\quad(*)$ Ta đặt $(a+c,b+c)=d,$ Khi đó $(a+c)-(b+c)=a-b.$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

		Do $a-b$ là số nguyên tố nên ta suy ra $d=1$ hoặc $d=a-b$. Nếu $d=a-b$, ta đặt $c+a=(a-b)x^2, c+b=(a-b)y^2$ trong đó x,y là các số tự nhiên. Lấy hiệu hai vế ta được $a-b=(a-b)(x^2-y^2)\Rightarrow (x-y)(x+y)=1$ $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$	0,5
		Ta thu được $c+b=0,$ tức là $c=b=0$. Khi đó $8c+1=1$ là một số chính phương. Nếu $d=1$ thì $c+b, c+a$ là các số chính phương. Ta đặt $c+a=m^2, c+b=n^2$, trong đó m,n là các số tự nhiên. $a-b=m^2-n^2\Rightarrow a-b=(m-n)(m+n)$ Lấy hiệu hai vế ta được $\Rightarrow m-n=1\Rightarrow m=n+1$.	0,5
		Kết hợp $m=n+1$ với $(*)$ ta được $4c^2=(c+a)(b+c)=m^2n^2=n^2(n+1)^2$. $\Rightarrow 2c=n(n+1)$ Khi đó $8c+1=4n(n+1)+1=(2n+1)^2$ là một số chính phương.	0,5

Câu IV	1.  a) Ta có M thuộc đường tròn đường kính AB nên $\angle AMB = 90^0$ Xét ΔABD có $DC \perp AD, BM \perp AD \Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác suy ra AH là đường cao thứ ba $AH \perp BD$ tại N nên N nằm trên đường tròn (O) b) Tứ giác ACHE là hình chữ nhật Mà $\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB}$ (tính chất phân giác) $\frac{CH}{CB} = \frac{MA}{MB}$ suy ra $CA = CH$ nên ACHE là hình vuông. 2. Tứ giác ACHE là hình vuông nên $AH = CE$ và cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. ΔMAH vuông tại M, MI là đường trung tuyến nên $MI = \frac{1}{2}AH \Rightarrow MI = \frac{1}{2}CE \Rightarrow \Delta MCE$ vuông tại M nên $ME \perp MC \ (1)$ Chứng minh tương tự ta cũng có tứ giác BCDF là hình vuông và $MF \perp MC \ (2)$ Xét ΔDMN và ΔDBA có : $\widehat{ABD}\ chung, \frac{DM}{DB} = \frac{DN}{DA}\left(= \cos \widehat{ADB}\right) \Rightarrow \Delta DMN \sim \Delta DBA(cgc)$ $\Rightarrow \widehat{DMN} = \widehat{DBA} = 45^0$ Mà $\widehat{AMC} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} = 45^0$ (tính chất phân giác) $\widehat{CMN} = 180^0 - \left(\widehat{AMC} + \widehat{DMN}\right) = 90^0 \Rightarrow MN \perp MC(3)$ Từ (1) , (2) và (3) ta có 4 điểm E, M,N,F thẳng hàng. 3. Ta có $\widehat{ECD} = \widehat{DCF} = 45^0$ (tính chất hình vuông) $\Rightarrow \widehat{ECF} = \widehat{ECD} + \widehat{DCF} = 90^0$ Xét ΔCEF vuông tại C có đường cao CM: $\frac{1}{CM^2} = \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CF^2} \geq \sqrt{\frac{1}{CE^2} \cdot \frac{1}{CF^2}}$ $= 2\sqrt{\frac{1}{\left(CA\sqrt{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{\left(CB\sqrt{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{CA^2} \cdot \frac{1}{CB^2}} = \sqrt{\frac{1}{S_1} \cdot \frac{1}{S_2}} = \frac{1}{\sqrt{S_1.S_2}}$ $\Rightarrow CM^2 \leq \sqrt{S_1.S_2}$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

Câu V	Ta có $2ab+6bc+2ac=7abc$ và $a,b,c>0$. Mà $abc>0$ Do đó $\frac{2}{c}+\frac{6}{a}+\frac{2}{b}=7$. Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} x,y,z>0 \\ 2z+6x+2y=7. \end{cases}$ Khi đó $C=\frac{4ab}{a+2b}+\frac{9ac}{a+4c}+\frac{4bc}{b+c}=\frac{4}{2x+y}+\frac{9}{4x+z}+\frac{4}{y+z}$ $\Rightarrow C=\frac{4}{2x+y}+2x+y+\frac{9}{4x+z}+4x+z+\frac{4}{y+z}+y+z-(2x+y+4x+z+y+$ $=\left(\frac{2}{\sqrt{2x+y}}-\sqrt{2x+y}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{4x+z}}-\sqrt{4x+z}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{y+z}}-\sqrt{y+z}\right)^2+7\geq 7$ Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{1}{2}, y=1, z=1 \Leftrightarrow a=2, b=1, c=1.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của $C=7$ khi $a=2, b=1, c=1.$	0,5 0,5 0,5 0,5