

Người làm: Trần Minh Huệ

Zalo: Trần Minh Huệ

- số đt zalo: 0983746589

Email: tranminhhue2910@gmail.com

CD3: CÁC BÀI TOÁN VỀ LŨY THỪA SỐ TỰ NHIÊN

Dạng 1. SO SÁNH HAI LŨY THỪA

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Văn Lâm, tỉnh Hưng Yên 2022 - 2023)

Chứng tỏ rằng: $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } 2^{63} &= (2^7)^9 = 128^9 \\ 5^{27} &= (5^3)^9 = 125^9 \\ \Rightarrow 2^{63} &> 5^{27}\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\text{Lại có: } 2^{63} &= (2^9)^7 = 512^7 \\ 5^{28} &= (5^4)^7 = 625^7 \\ \Rightarrow 2^{63} &< 5^{28}\end{aligned}\quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}.$$

Dạng 2. SO SÁNH BIỂU THỨC LŨY THỪA VỚI MỘT SỐ (SO SÁNH HAI BIỂU THỨC LŨY THỪA).

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Ninh Giang (Đợt 1), tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} < \frac{3}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 3A = 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} \right) = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2021}}$$

$$3A - A = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2021}} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} \right)$$

$$3A - A = 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}} \right) - \frac{2022}{3^{2022}}$$

$$\text{Đặt } B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2020}}$$

$$3B - B = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}} \right)$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{2021}}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2021}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2A < 1 + \frac{1}{2} - \frac{2022}{3^{2022}}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{3}{4} - \frac{1011}{3^{2022}}$$

$$\Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Hà Nội 2022 - 2023)

Cho tổng $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2025^2}$. So sánh S với 1.

Lời giải

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N}, k > 1)$$

Ta có

Thay $k=10; k=11; \dots, k=2025$, ta có

$$S < \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}$$

$$\Rightarrow S < \frac{1}{9} - \frac{1}{2025} < 1$$

Vậy $S < 1$.

Câu 3. (HSG 7 thành phố Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1.$$

Chứng minh rằng

Lời giải

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2}$$

$$= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2024^2 - 2023^2}{2023^2 \cdot 2024^2}$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} - \frac{1}{2024^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2024^2}$$

$$\text{Ta thấy } 1 - \frac{1}{2024^2} < 1$$

$$\text{Do vậy } \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1$$

Câu 4. (HSG 7 thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$$

Chứng minh

Lời giải

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}}$$

$$4S = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2023}{4^{2022}}$$

Nên ta có

$$4S - S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}} - \frac{2023}{4^{2023}}$$

$$3S < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$$

$$A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$$

Đặt

$$4A = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{2021}}$$

$$4A - A = 4 - \frac{1}{4^{2022}}$$

$$\Rightarrow 3A < 4$$

$$\Rightarrow A < \frac{4}{3}$$

$$S < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Suy ra

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$$

Vậy

Câu 5. (HSG 7 huyện Mường Lát 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh: $A < \frac{3}{16}$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$

$$3A = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$3A + A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4A = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \right) - \frac{100}{3^{100}} \quad (1)$$

Đặt $B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$

$$3B = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$3B + B = 3 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$4B = 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3$$

$$\Rightarrow B < \frac{3}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $4A < \frac{3}{4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$
 Do đó $A < \frac{3}{16}$

Câu 6. (HSG 7 thị xã Điện Bàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Cho biểu thức $P = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{19}{(9.10)^2}$. Hãy so sánh P với 1.

Lời giải

Ta có $P = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{19}{(9.10)^2}$

$$P = \frac{3}{1.4} + \frac{5}{4.9} + \frac{7}{9.16} + \dots + \frac{19}{81.100}$$

$$P = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{81} - \frac{1}{100}$$

$$P = 1 - \frac{1}{100}$$

Suy ra $P < 1$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Quảng Xương, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$

Lời giải

Ta có

$$VT = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} \quad (1)$$

$$3.VT = 3 \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2022}} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) theo vế với vế ta được: $2.VT = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{2023}} \right) < \frac{1}{3}$

Vậy: $VT < \frac{1}{6}$ (3)

$$VP = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

Ta thấy $\frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{100.101}$

$$VP > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6} \quad (4)$$

Nên Từ (3) và (4) suy ra: $VP > VT$

Dạng 3. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC.

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$

Lời giải

$$3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$$

$$3^3 \cdot 3^{x-1} + 4 \cdot 3^2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$$

$$3^{x-1} \cdot (3^3 + 4 \cdot 3^2 + 1) = 6^6$$

$$3^{x-1} \cdot 64 = 6^6$$

$$3^{x-1} \cdot 2^6 = 6^6$$

$$3^{x-1} = 6^6 : 2^6$$

$$3^{x-1} = 3^6$$

Suy ra $x - 1 = 6$

Vậy $x = 7$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $(2x - 1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x + y + z| = 0$

Lời giải

Ta có: $(2x - 1)^{2008} \geq 0; \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} \geq 0; |x + y + z| \geq 0$

Nên $(2x - 1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x + y + z| = 0$ khi:

$$\begin{cases} (2x - 1)^{2008} = 0 \\ \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} = 0 \\ |x + y + z| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{5} \\ z = -\frac{9}{10} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{5}; z = -\frac{9}{10}$

Câu 3. (HSG 7 huyện Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho x, y, z là các số thực khác 0, thỏa mãn: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Tính giá trị của biểu thức $A = 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023}$.

Lời giải

Từ đề bài ta có x, y, z và $x + y + z$ khác 0.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow x + y + z = 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{0,5 - x + 1}{x} = \frac{0,5 - y + 2}{y} = \frac{0,5 - z - 3}{z} = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = -\frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned}\text{Khi đó ta có: } A &= 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023} \\ &= 4046 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{6}\right)^{2023} + \left(\frac{-5}{6}\right)^{2023} \\ &= 4046 \cdot \frac{1}{2} + 0 \\ &= 2023\end{aligned}$$

$$\text{Vậy với } x, y, z \text{ là các số thực khác } 0, \text{ thỏa mãn: } \frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

Thì giá trị của biểu thức $A = 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023} = 2023$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm các số tự nhiên a biết $6a+4$ và $a+2$ là các lũy thừa của 2.

Lời giải

Vì a là số tự nhiên nên $6a+4 > a+2$.

Mặt khác có $6a+4$ và $a+2$ là các lũy thừa của 2 nên $6a+4$ chia hết cho $a+2$
 $\Rightarrow 6a(a+2) - 8$ chia hết cho $a+2 \Rightarrow a+2 \in U^{(8)}$, mà a là số tự nhiên nên
 $\Rightarrow a+2 \in \{0; 4; 8\} \Rightarrow a \in \{0; 2; 6\}$

Thay vào các giá trị của a vừa tìm được vào đề bài $6a+4$ và $a+2$ là các lũy thừa của 2 thì $a=0; a=2$ (thỏa mãn).

Câu 5. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

$$\text{Tính } M = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(-\frac{3}{2}\right)^{100}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}M &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(-\frac{3}{2}\right)^{100} \\ -\frac{3}{2}M &= \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{2}\right)^4 + \left(-\frac{3}{2}\right)^5 + \dots + \left(-\frac{3}{2}\right)^{101} \\ M - \left(-\frac{3}{2}M\right) &= \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + \left(-\frac{3}{2}\right)^{100}\right] \\ &\quad - \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{2}\right)^4 + \left(-\frac{3}{2}\right)^5 + \dots + \left(-\frac{3}{2}\right)^{101}\right] \\ \frac{5}{2}M &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^{101} \\ M &= \frac{2}{5} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^{101}\right] \\ M &= \frac{9}{10} \left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{99}\right]\end{aligned}$$

Vậy
$$M = \frac{9}{10} \left[1 + \left(\frac{3}{2} \right)^{99} \right].$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>