

Lời nói đầu.

Trong chương trình Toán học được giảng dạy ở trường phổ thông, *Hình học* bao giờ cũng là môn học khó khăn hơn đối với học sinh. Nắm được kiến thức cơ bản đã là một vấn đề khó, vận dụng kiến thức đó một cách linh hoạt để giải toán còn là một việc khó khăn hơn nhiều. Tìm ra mối liên quan giữa các nội dung đó để có được các cách giải toán hay, hiệu quả là một việc làm thiết thực.

Trên cơ sở nội dung, chương trình làm việc của cá nhân và của tổ nhóm chuyên môn, bản thân tôi đã tìm ra được một vài hướng giải quyết một số vấn đề trong các nội dung nhằm nâng cao chất lượng bài giảng cũng như tạo hứng thú cho học sinh trong việc học tập và nghiên cứu toán học. Những vấn đề nghiên cứu được, tôi tập hợp và viết lại trong báo cáo sáng kiến kinh nghiệm này nhằm giúp cho bản thân và đồng nghiệp cũng như học sinh có thêm một tài liệu tham khảo trong quá trình giảng dạy và học tập môn toán ở trường THPT.

Nội dung sáng kiến có thể chưa thật đầy đủ so với nội dung của vấn đề mà tôi lựa chọn nhưng thiết nghĩ, có thể bổ sung vào hành trang của người giáo viên một công cụ mới có hiệu quả.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy giáo cùng chuyên môn đã đọc trước bản thảo và đóng góp nhiều ý kiến sát thực tiễn để tôi hoàn thành đề tài này: thầy giáo Nguyễn Văn Hải - Hiệu trưởng, thầy giáo Nguyễn Danh Du - Phó hiệu trưởng, thầy giáo Hoàng Minh Hiền - Phó hiệu trưởng, thầy giáo Phạm Ngọc Bá - tổ trưởng, các thầy giáo, cô giáo trong tổ Toán - Tin học trường THPT Bím Sơn.

Bím sơn, tháng 4 năm 2016

Người thực hiện đề tài

Vò Quý Phụng

Phần I: MỞ ĐẦU

I- Lý do lựa chọn đề tài.

I.1. Tính lịch sử.

“Cùng với KHCN, giáo dục là quốc sách hàng đầu”. Chủ trương đó đã thể hiện rõ quan điểm, đường lối của Đảng và nhà nước ta, khẳng định tầm quan trọng của giáo dục đối với sự phát triển của đất nước, bởi lẽ giáo dục đóng vai trò quyết định trong việc đào tạo lực lượng sản xuất, đem đến sự thành công của công cuộc xây dựng đất nước, xây dựng CNXH.

Ngành Giáo dục đã triển khai thực hiện công tác đổi mới giáo dục phổ thông bao gồm: Đổi mới cơ sở vật chất phục vụ cho dạy học, đổi mới chương trình sách giáo khoa, đổi mới công tác quản lý chỉ đạo, đổi mới phương pháp dạy học, đổi mới cách kiểm tra đánh giá v.v... nhằm giúp học sinh phát triển một cách toàn diện. Năm học này, Bộ Giáo dục và đào tạo đưa ra khẩu hiệu “Xây dựng trường học thân thiện và học sinh tích cực” cũng chính là nhằm hướng học sinh đến sự phát triển toàn diện.

Trong hệ thống các môn học được đưa vào đào tạo ở trường phổ thông, môn Toán đóng vai trò hết sức quan trọng, bởi lẽ qua học toán học sinh sẽ được phát triển một cách tốt nhất tư duy sáng tạo, linh hoạt, dễ thích ứng với mọi hoàn cảnh, phù hợp với xu thế phát triển của đất nước ta hiện nay. Học tốt môn toán sẽ giúp học sinh học tốt nhiều môn học khác. Xưa nay đây là môn học mà không ít học sinh phải ngại ngùng khi nhắc đến, việc học toán đối với nhiều học sinh luôn là một điều khó khăn. Trong các phân môn của toán học phổ thông thì Hình học luôn được coi là môn học khó khăn hơn cả.

Tất cả những đánh giá trên có thể xuất phát từ những lý do khách quan và chủ quan như: Học sinh chưa nắm được phương pháp học tập, giáo viên còn ôm đồm kiến thức trong giảng dạy, khó khăn về một cơ sở lý luận trong việc dạy học bộ môn v.v... Học toán đồng nghĩa với giải toán. Muốn làm được bài tập, ngoài việc phải có vốn kiến thức từ các công thức, quy tắc, định nghĩa, khái niệm, định lý ... còn cần có một phương pháp suy luận đúng đắn.

I.2. Tính cấp thiết.

Bằng việc trao đổi với đồng nghiệp và kinh nghiệm dạy Hình học của bản thân, tôi nhận thấy chất lượng dạy và học hình học nói chung chưa cao: hầu hết học sinh đều ngại, sợ học Hình học, không biết cách giải một bài toán Hình học. Mà việc giải một bài tập Hình học không chỉ dựa vào việc có nắm được các kiến thức cơ bản hay không mà còn dựa rất nhiều vào việc nhận ra được mối liên quan giữa các kiến thức đó và vận dụng chúng như thế nào vào bài toán.

I.3. Thực trạng.

Trong các kỳ thi học sinh giỏi cũng như trong kỳ thi tuyển sinh vào Đại học - Cao đẳng, nay là kỳ thi THPT Quốc gia cũng xuất hiện một số bài toán về mặt cầu: *Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện, mặt cầu nội tiếp khối đa diện, mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của khối đa diện ...*

Hai loại *m ặt cầu ngo ại tiếp* và *m ặt cầu n ội tiếp kh ối đ ă diện* đ ược sách giáo khoa đề cập đ ến và m ột số sách tham khảo viết khá kỹ. Riêng *m ặt cầu tiếp xúc v ới các cạnh của kh ối đ ă diện* rất ít tài liệu đề cập đ ến. Sách giáo khoa cũng chỉ đề cập đ ến d ưới dạng m ột bài toán ví dụ (*Bài toán 2, trang 42, SGK Hình học 12-nâng cao*) và m ột bài tập (*Bài tập 6-b, trang 45, SGK Hình học 12-nâng cao; Bài tập 8, trang 49, SGK Hình học 12-chu ẩn*). Hơn n ữa, cũng chỉ đề cập đ ến m ặt cầu tiếp xúc v ới các cạnh của kh ối tứ diện chứ chưa nói đ ến các kh ối đ ă diện khác.

Đ ối v ới học sinh trường THPT B ỉm Sơn thì:

- Đ ă số học sinh nắm vững và vận dụng tốt các kiến thức cơ bản vào việc giải các bài tập. Tuy nhiên, còn có m ột vài lớp và m ột số học sinh rải rác ở các lớp vẫn không thể nắm vững và vận dụng đ ược các kiến thức cơ bản vào việc giải các bài tập.

- V ới kiến thức Hình học thì khá nhiều học sinh không nắm đ ược các kiến thức cơ bản, và quan trọng là kỹ năng vận dụng kiến thức hình học cơ bản vào các hoạt động giải toán còn yếu.

N ăm học 2015-2016 tôi đ ược phân công giảng dạy 2 lớp: 12A1 và 12A6. V ới lớp 12A1 bao gồm các học sinh đăng ký học nâng cao kh ối D (38 học sinh) và kh ối C (10 học sinh); Lớp 12A6 bao gồm các học sinh đăng ký học nâng cao kh ối A (29 học sinh) và kh ối B (21 học sinh).

Ngay đầu n ăm học, tiến hành khảo sát riêng về hình học ở 2 lớp nói trên v ới nội dung đề bài sau:

Cho hình thang ABCD vu ờng tại A và B, có $AD = 2a$, $AB = BC = a$. Trên tia Ax vu ờng góc v ới m ặt ph ẳng (ABCD) lấy m ột điểm S. Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu vu ờng góc của A trên SC và SD. Chứng minh rằng:

1/ $\angle B C' D' = 90^\circ$.

2/ Ba đường thẳng AB, AC', AD' đ ồng ph ẳng.

3/ Đường thẳng C'D' luôn đi qua m ột điểm cố định khi S di động trên tia Ax.

Kết quả thu đ ược như sau:

Lớp	Số bài	Không làm đ ược câu nào	Chỉ làm đ ược câu 1	Làm đ ược 2 câu (1 + 2)	Làm đ ược cả 3 câu
12A1	48	13 (27,08%)	13 (27,08%)	16 (33,33%)	6 (12,51%)
12A6	47	4 (8,51%)	7 (14,89%)	25 (53,19%)	11 (23,41%)

Qua bài làm của học sinh và qua thực tế giảng dạy, tôi nhận thấy bộc lộ những nhược điểm chính ở học sinh như sau:

- M ột số học sinh không nắm vững kiến thức cơ bản: Các khái niệm, các định nghĩa, định lý (các học sinh không làm đ ược câu nào).

- Không tổng hợp đ ược kiến thức đã học để vận dụng vào bài toán; Máy móc, thiếu linh hoạt trong suy nghĩ khi giải toán.

Trong rất nhiều nguyên nhân dẫn đ ến kết việc học sinh không tiếp thu tốt

các kiến thức về hình học, có một nguyên nhân là học sinh ít được thực hành các bài toán cơ bản có tính tổng hợp kiến thức và sáng tạo trong vận dụng kiến thức đã học. Có một lý do ở đây là thời lượng quy định cho mỗi bài học không đủ cho giáo viên và học sinh làm được việc này. Đặc biệt là đối với các học sinh không thực sự khá về môn Toán.

Chính vì những lý do trên, nhằm giúp các em học sinh lĩnh hội tốt hơn về kiến thức hình học, có kỹ năng giải bài tập về Hình học không gian, tôi mạnh dạn lựa chọn và nghiên cứu vấn đề: ***“Rèn luyện cho học sinh kỹ năng giải toán hình học không gian qua nghiên cứu mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của khối đa diện.”***

II. Mục đích nghiên cứu.

Không có phương pháp tốt, không thể có kết quả cao. Biết vận dụng các kiến thức cơ bản một cách phù hợp sẽ có được cách giải bài tập tốt hơn. Đối với khá nhiều học sinh, khi học và giải toán Hình học không gian có khá nhiều trở ngại.

Từ đó giúp học sinh vượt qua tâm lý ngại và sợ học hình học, đặc biệt là các bài toán về hình *Học không gian*.

III. Thời gian, địa điểm nghiên cứu.

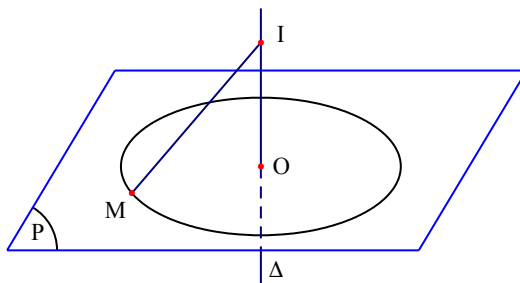
Sáng kiến kinh nghiệm này được nghiên cứu, áp dụng thực hiện trong năm học 2015 - 2016, tại hai lớp 12A1 và 12A6, trường THPT Bim Sơn, Thanh Hóa. Đây là hai lớp có đặc thù riêng hơn so với các lớp khác trong cùng khối 12 của nhà trường.

Nội dung sáng kiến được trình bày cho học sinh trong một số giờ học tự chọn của bộ môn Toán và một số buổi học bồi dưỡng (ngoài giờ học chính khóa).

Phần II: NỘI DUNG

I- Trục của đường tròn.

Định nghĩa: Trục của đường tròn là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của đường tròn đó.



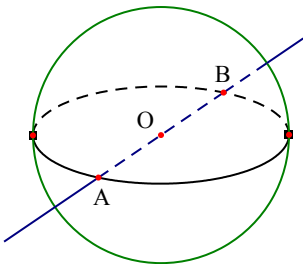
Tính chất: Cho đường thẳng Δ là trục của đường tròn (T) và điểm I thuộc Δ. Khi đó I cách đều mọi điểm của (T).

Thật vậy: Gọi O, R là tâm và bán kính của (T); M là điểm bất kỳ trên (T). Khi đó: $IM = \sqrt{IO^2 + OM^2} = \sqrt{IO^2 + R^2}$: Không đổi với mọi điểm M trên (T). Điều đó chứng tỏ I cách đều mọi điểm trên (T).

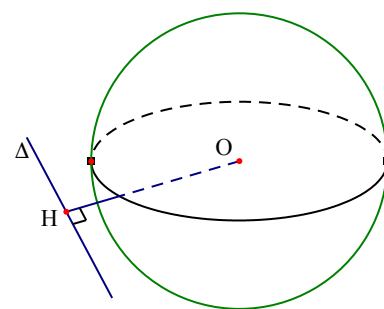
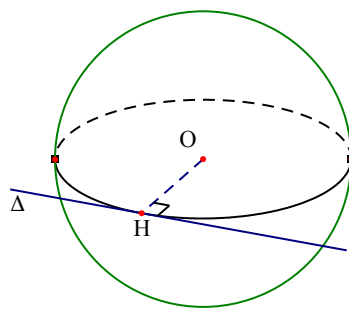
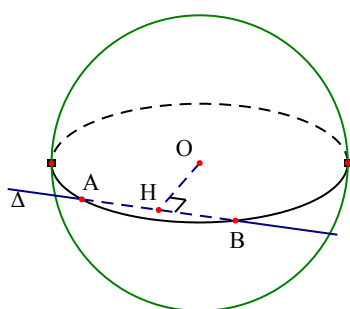
II- Hướng dẫn học sinh tiếp cận và giải quyết một số bài toán về mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của khối đa diện.

1. Giúp học sinh nắm chắc kiến thức về tiếp tuyến của mặt cầu.

a/ Với đường thẳng Δ và mặt cầu $S(O; R)$, thực hiện khắc sâu các kiến thức về đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu theo sơ đồ sau:

Giả thiết đặt ra	Giáo viên hướng dẫn	Học sinh hiểu được
Nếu Δ đi qua O. 	Nhớ lại khái niệm đường kính của mặt cầu.	Δ chứa một đường kính của $S(O; R)$ $\Rightarrow \Delta$ cắt $S(O; R)$ tại hai điểm phân biệt.
Nếu Δ không đi qua O.	- Xét mp(Δ ; O). - Nếu M là giao điểm của Δ với $S(O; R)$ thì có kết luận gì ? - Điều đó cho thấy giao điểm của Δ với $S(O; R)$ cũng chính là giao điểm của Δ với (T).	- Mặt phẳng (Δ ; O) cắt $S(O; R)$ theo giao tuyến là đường tròn lớn (T). - Nếu $M = \Delta \cap S(O; R)$ thì $M \in (T)$.

Kết quả:	Từ đó có kết quả như đã nêu trong Sách giáo khoa.	- Nếu $d < R$: Δ cắt mặt cầu $S(O; R)$ tại hai điểm phân biệt. - Nếu $d = R$: Δ cắt mặt cầu $S(O; R)$ tại một điểm duy nhất. Khi đó Δ là tiếp tuyến của $S(O; R)$; Điểm chung duy nhất là tiếp điểm. - Nếu $d > R$: Δ không cắt mặt cầu $S(O; R)$.
Khi Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ tại H , rút ra các kết quả gì ?	Nhớ lại các kết quả tương tự trong hình học phẳng: Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn.	- $H = \Delta \cap S(O; R)$. - $OH = d(O; \Delta)$. - $OH \perp \Delta$.
Phát biểu điều ngược lại.	Điều ngược lại có đúng không ?	Nếu OH là bán kính và Δ vuông góc với OH tại H thì Δ là tiếp tuyến của $S(O; R)$.



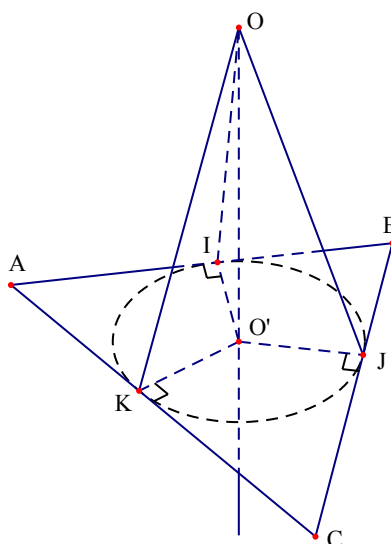
b/ Một số khái niệm trong hình học không gian với đường thẳng và mặt cầu cũng có kết quả tương tự trong mặt phẳng giữa đường tròn với đường thẳng. Tiến hành cho học sinh so sánh các kết quả đó để giúp học sinh có mối liên hệ giữa hình học phẳng và hình học không gian, cũng như nắm vững hơn các kiến thức về tiếp tuyến của mặt cầu:

Khái niệm trong HHKG	Khái niệm tương tự trong hình học phẳng	Chú thích
Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$.	Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$.	Đường tròn $(O; R)$ là giao tuyến của $mp(\Delta; O)$ với mặt cầu $S(O; R)$.
Qua điểm M nằm trong mặt cầu không có tiếp tuyến nào với mặt cầu.	Qua điểm M nằm trong đường tròn không có tiếp tuyến nào với đường tròn.	

MA, MB là tiếp tuyến mặt cầu $S(O; R)$ tại A, B thì $MA = MB$.	MA, MB là tiếp tuyến với đường tròn $(O; R)$ tại A, B thì $MA = MB$.	Tính chất tiếp tuyến.
Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ tại $H \Leftrightarrow \Delta$ vuông góc với OH tại H.	Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ tại $H \Leftrightarrow \Delta$ vuông góc với OH tại H.	Điều kiện tiếp xúc của đường thẳng với đường tròn, mặt cầu.
Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R) \Leftrightarrow d(O; \Delta) = R$.	Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn $(O; R) \Leftrightarrow d(O; \Delta) = R$.	Điều kiện tiếp xúc của đường thẳng với đường tròn, mặt cầu.

c/ Giúp học sinh vận dụng kiến thức về tiếp tuyến với mặt cầu để xây dựng kiến thức mới:

* Cho học sinh làm lại *Bài tập 6.a, trang 45, SGK Hình học 12 (Nâng cao)* và phân tích kỹ kiến thức và cách vận dụng: ***Tìm tập hợp tâm các mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác cho trước.***



Lời giải: Giả sử mặt cầu $S(O; R)$ tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA của ΔABC lần lượt tại I, J, K.

Khi đó: $OI \perp AB, OJ \perp BC, OK \perp CA$ (1)

Hơn nữa: $OI = OJ = OK$.

Gọi O' là hình chiếu của O trên mp(ABC) thì $OO' \perp mp(ABC)$

$\Rightarrow OO' \perp O'I, OO' \perp O'J, OO' \perp O'K$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $O'I \perp AB, O'J \perp BC, O'K \perp CA$ (3)

Mặt khác: $\Delta OO'I = \Delta OO'J = \Delta OO'K$ (trường hợp bằng nhau của tam giác vuông) $\Rightarrow O'I = O'J = O'K$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra O' cách đều ba cạnh AB, BC, CA của $\Delta ABC \Rightarrow O'$ là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC .

Như vậy O thuộc trục của đường tròn nội tiếp ΔABC .

Điều ngược lại chứng minh dễ dàng.

cách từ M đến các cạnh đó; O là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P) chứa đa giác; K là hình chiếu của M trên một cạnh AB bất kỳ của đa giác.

Khi đó: $MO \perp (P) \Rightarrow MO \perp AB$; $MK \perp AB \Rightarrow OK \perp AB$.

Mặt khác: $OK = \sqrt{MK^2 - OM^2} = \sqrt{d^2 - OM^2}$: Không đổi.

Như vậy, K cách đều các cạnh của đa giác nên K là tâm của đường tròn nội tiếp đa giác, hay M thuộc trục đường tròn nội tiếp đa giác.

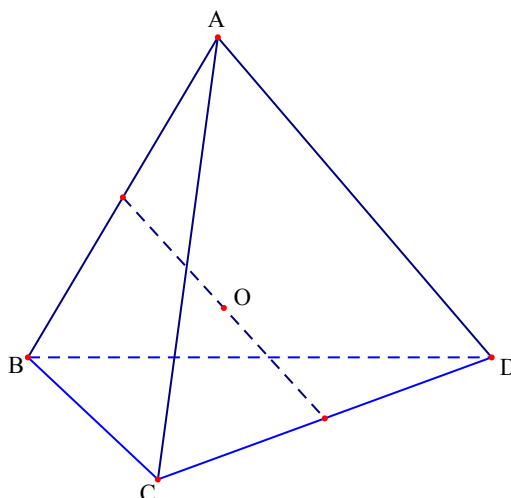
Ngược lại nếu M thuộc trục của đường tròn nội tiếp đa giác thì dễ chứng minh được M cách đều các cạnh của đa giác.

Thực hiện hướng dẫn học sinh theo sơ đồ sau:

Giáo viên hướng dẫn	Học sinh hiểu được	Phân tích
Với Bài tập 6.a vừa giải ở trên, nhận xét về khoảng cách từ tâm mặt cầu tới các cạnh của tam giác.	Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến các cạnh của tam giác bằng nhau.	
So sánh nội dung đó với yêu cầu của định lý.	Thực tế yêu cầu của định lý là tìm mối liên hệ giữa tâm mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của đa giác với tâm đường tròn nội tiếp đa giác.	
Để giải quyết được vấn đề cần phải giải quyết nội dung chính là gì ?	Hình chiếu của điểm thỏa mãn bài toán cách đều các cạnh của đa giác.	

2. Mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của khối đa diện.

a/ Bài toán 2.1: **Tìm điểm O trong không gian cách đều tất cả các đường thẳng chứa các cạnh của tứ diện đều ABCD.**



Giải: Gọi O là trọng tâm của tứ diện đều ABCD.

Khi đó: $OA = OB = OC = OD$ (tính chất tứ diện đều).

Suy ra: $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCD = \triangle ODA = \triangle OAC = \triangle OBD$.

Từ đó khoảng cách từ O đến các đường thẳng AB, BC, CD, DA, AC, BD bằng nhau.

Vậy O là điểm cách đều tất cả các đường thẳng chứa các cạnh của tứ diện đều ABCD.

Thực hiện hướng dẫn học sinh theo sơ đồ sau:

Giáo viên hướng dẫn	Học sinh hiểu được	Phân tích
Tứ diện đều có tính chất gì ?	- Tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng nhau. - Tứ diện đều có trọng tâm là giao điểm của các đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối diện.	
Gọi O là trọng tâm của tứ diện ABCD.	$OA = OB = OC = OD$	
Kết hợp với các cạnh của tứ diện bằng nhau.	$\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCD = \triangle ODA = \triangle OAC = \triangle OBD$	
Khoảng cách từ O tới các cạnh của tứ diện.	Khoảng cách từ O đến các cạnh của tứ diện bằng nhau.	

* Tác giả cũng đã hướng dẫn học sinh nghiên cứu sâu thêm nội dung bài toán:

- Xét xem có điểm nào khác thỏa mãn bài toán không ?

Giả sử O' là điểm cách đều tất cả các cạnh của tứ diện đều ABCD.

Gọi I, K là hình chiếu của O' trên AB, BC $\Rightarrow O'I = O'K$

$\Rightarrow \triangle O'BI = \triangle O'BK$ (trường hợp bằng nhau của tam giác vuông)

$\Rightarrow BI = BK \Rightarrow AI = CK$ (do $AB = BC$)

$\Rightarrow \triangle O'AI = \triangle O'CK \Rightarrow O'A = O'C$.

Chứng minh tương tự ta có kết quả: $O'A = O'B = O'C = O'D \Rightarrow O' \equiv O$ là trọng tâm của tứ diện đều ABCD.

Vậy trọng tâm của tứ diện là điểm duy nhất thỏa mãn bài toán. ■

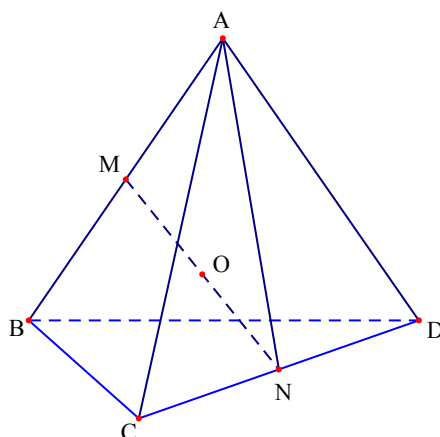
* Qua việc xem xét bài toán ở góc độ trên, giúp cho học sinh tìm ra được lời giải tổng quát của bài toán chứ không chỉ nhờ vào sự phát hiện tính chất đặc biệt của trọng tâm tứ diện đều.

Đồng thời, tác giả cũng nhấn mạnh thêm cho học sinh kết quả sau:

- Gọi R là khoảng cách từ trọng tâm O đến các cạnh của tứ diện đều ABCD thì mặt cầu $S(O; R)$ tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện.

* Sau khi hoàn thành bài toán, tác giả cho học sinh thực hiện giải bài toán tương tự sau:

Bài toán 2.2: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a . Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện đó.



Giải: Gọi O là trọng tâm, R là khoảng cách từ O đến các cạnh của tứ diện. Theo Bài toán 2.1, mặt cầu tâm S(O; R) thỏa mãn bài toán.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD thì O là trung điểm MN và $MN \perp AB$.

Lại có: $AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của ΔACD đều cạnh a).

$$\begin{aligned} \text{Từ đó: } MN &= \sqrt{AN^2 - AM^2} = \\ &= \sqrt{AN^2 - \left(\frac{1}{2}AB^2\right)} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy, bán kính mặt cầu nói trên là: $R = OM = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. ■

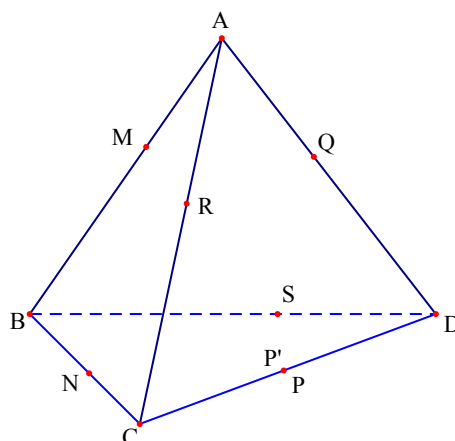
* Đặt vấn đề cho học sinh: Nếu tứ diện ABCD không phải là tứ diện đều thì có mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của nó hay không ?

Giáo viên hướng dẫn	Học sinh hiểu được	Phân tích
Giả sử mặt cầu S(O; R) tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện ABCD. Xét các tiếp tuyến xuất phát từ cùng một đỉnh.	Các tiếp tuyến bằng nhau.	Tính chất tiếp tuyến với mặt cầu.
Từ kết quả đó so sánh các cạnh; có thể so sánh tổng các cạnh.	Tổng các cặp cạnh đối bằng nhau.	Kết quả gần giống với tứ giác ngoại tiếp đường tròn trong hình học phẳng.

Cụ thể hóa, ta được định lý sau:

b/ **Định lý 2:** Điều kiện cần và đủ để tồn tại mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện ABCD là: $AB + CD = AC + BD = AD + BC$ (1)

Chứng minh:



- Điều kiện cần: Giả sử tồn tại mặt cầu (S) tâm O tiếp xúc với AB, BC, CD, DA, AC, BD lần lượt tại M, N, P, Q, R, S.

Khi đó: $AM = AR = AQ$; $BM = BS = BN$;
 $CP = CR = CN$; $DP = DS = DQ$.

Cộng các đẳng thức đó ta được: $AB + CD = AC + BD = AD + BC$.

- Điều kiện đủ: Giả sử (1) thỏa mãn.

Gọi $(O_1; R_1)$, $(O_2; R_2)$ là các đường tròn nội tiếp các tam giác BCD, ACD và P, P' tương ứng là tiếp điểm của các đường tròn đó với cạnh CD.

Khi đó ta có: $CP = \frac{1}{2}(AC + CD - AD) = \frac{1}{2}(AC - AD + CD)$

$CP' = \frac{1}{2}(BC + CD - BD) = \frac{1}{2}(BC - BD + CD)$.

Mà $AC + BD = AD + BC$ nên: $AC - AD = BC - BD$.

Do đó: $CP' = CP$, hay $P' \equiv P$.

Gọi PO là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔO_1PO_2 .

Khi đó: $\angle O_1PO_2 = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Leftrightarrow OO_1 \perp O_1P$.

Mà $CD \perp (PO_1O_2) \Rightarrow CD \perp OO_1$. Do đó $OO_1 \perp (BCD) \Rightarrow OO_1$ là trục của đường tròn nội tiếp ΔBCD .

Tương tự: OO_2 là trục của đường tròn nội tiếp ΔACD .

Hai trục OO_1 và OO_2 cắt nhau tại O.

Chứng minh tương tự cũng có các trục của các đường tròn nội tiếp các mặt của tứ diện ABCD đôi một cắt nhau.

Hiển nhiên không có 3 trục nào trong 4 đồng phẳng nên chúng đồng quy tại O.

Như vậy O là điểm cách đều tất cả các cạnh của tứ diện ABCD nên O là tâm mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện. ■

* Để rèn luyện và củng cố thêm kết quả đạt được, cũng như cho học sinh có điều kiện thể hiện những gì đã đạt được, tác giả đã cho học sinh tự giải bài toán sau (và kết quả là hầu hết học sinh đã tự làm được):

Bài tập 1: Cho tứ diện ABCD có $AB = a$, $CD = b$, $AC = AD = BC = BD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Biết $IJ = k$. Tìm hệ thức liên hệ giữa

a, b, k để tồn tại mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện đã cho.

Giải: Từ giả thiết suy ra: $IJ \perp AB$, $IJ \perp CD$.

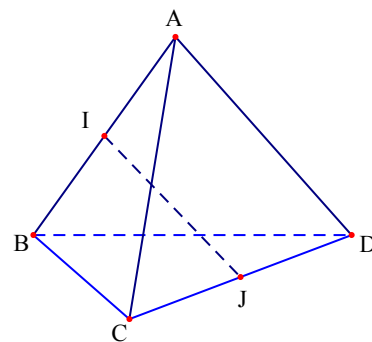
Theo định lý 2, tồn tại mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện khi và chỉ khi:

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC \quad (*)$$

$$\text{Do } AC = BD \text{ nên: } (*) \Leftrightarrow AB + CD = 2AC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (AB + CD)^2 = 4AC^2$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 = 4\left(\frac{a^2}{4} + k^2 + \frac{k^2}{4}\right) \Leftrightarrow ab = 2k^2. \blacksquare$$



* Để xét được mặt cầu tiếp xúc với khối đa diện

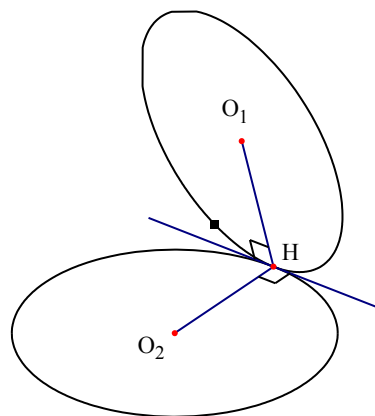
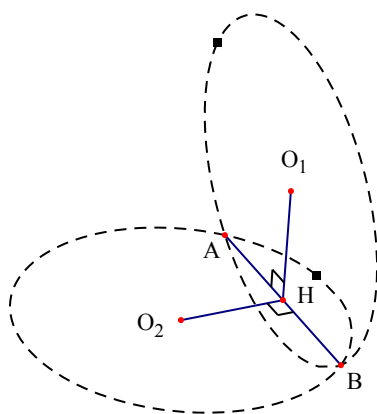
khác, mà trực tiếp là khối lăng trụ, tác giả nêu cho học sinh và giúp học sinh giải quyết 2 vấn đề:

- Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$, $(O_2; R_2)$ có chung dây cung AB và nằm trong hai mặt phẳng (P), (Q) khác nhau. Có hay không một mặt cầu đi qua cả hai đường tròn đó.

(Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow O_1H \perp AB$, $O_2H \perp AB \Rightarrow mp(O_1O_2H) \perp AB$; Gọi d_1, d_2 là các trục của các đường tròn (O_1) và (O_2) thì $d_1 \cap d_2 = O$: Là tâm mặt cầu).

- Khi hai đường tròn chỉ có điểm chung duy nhất là H. Tìm điều kiện để có mặt cầu như thế.

(Bài toán thỏa mãn khi $(P) \cap (Q) = \Delta$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn).



* Mở rộng nội dung vấn đề trên, có thể đi đến được mệnh đề sau:

c/ Mệnh đề 2: Cho (D_1) và (D_2) là hai đa giác ngoại tiếp, nằm trong hai mặt phẳng khác nhau và có chung một cạnh. Điều kiện cần và đủ để tồn tại một mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của (D_1) và (D_2) là tiếp điểm của hai đường tròn nội tiếp (D_1) và (D_2) với cạnh chung của chúng trùng nhau.

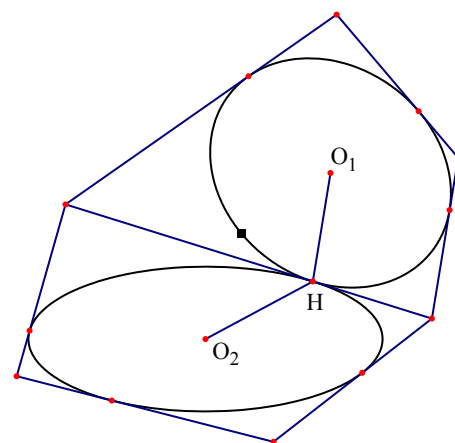
Chứng minh: Gọi (P), (Q) là các mặt phẳng chứa các đa giác (D_1) , (D_2) và AB là cạnh chung của hai đa giác đó.

* Điều kiện cần: Nếu có mặt cầu (S) tiếp xúc với tất cả các cạnh của (D_1) và (D_2)

thì (S) tiếp xúc với AB tại E. Hơn nữa, (P) và (Q) cắt (S) theo các giao tuyến là các đường tròn (T_1), (T_2) lần lượt nội tiếp (D_1), (D_2). Hiển nhiên AB tiếp xúc với (T_1), (T_2) cùng tại A.

* Điều kiện đủ: Giả sử các đường tròn (T_1), (T_2) có tâm O_1 , O_2 lần lượt nội tiếp (D_1), (D_2) và E là tiếp điểm của cạnh chung AB với hai đường tròn đó. Khi đó: $O_1E \perp AB$, $O_2E \perp AB$.

Gọi d_1 , d_2 lần lượt là trục của (T_1) và (T_2) $\Rightarrow O_1 \in d_1$, $O_2 \in d_2$, $d_1 \perp (P)$, $d_2 \perp (Q) \Rightarrow mp(O_1E; d_1) \perp AB$, $mp(O_2E; d_2) \perp AB \Rightarrow mp(O_1E; d_1)$ và $mp(O_2E; d_2)$ trùng nhau. Vì $mp(P) \cap mp(Q) = AB$ nên d_1 và d_2 phân biệt $\Rightarrow d_1 \cap d_2 = O$. Đây chính là điểm cách đều tất cả các cạnh của hai đa giác (D_1), (D_2).



Vậy tồn tại mặt cầu tâm O tiếp xúc với tất cả các cạnh của (D_1) và (D_2).

* Áp dụng mệnh đề 2, tác giả đã hướng dẫn học sinh chứng minh được mệnh đề sau:

d/ Mệnh đề 3: **Nếu khối đa diện (H) có mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh thì tất cả các mặt của (H) là các đa giác ngoại tiếp và tâm O của mặt cầu nằm trên trục đường tròn nội tiếp các mặt của đa diện (H).**

Chứng minh: Xét đa giác (X) là một mặt bên bất kỳ của (H) và gọi (P) là mặt phẳng chứa đa giác đó.

Do mặt cầu tâm (O) tiếp xúc với tất cả các cạnh của (H) nên mặt cầu (O) tiếp xúc với các cạnh của đa giác (X). Do đó, (X) là đa giác ngoại tiếp đường tròn (T) là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt cầu (O).

Hơn nữa, tâm O của mặt cầu cách đều tất cả các cạnh của đa giác (X) nên O thuộc trục của đường tròn nội tiếp đa giác (X).

Vì (X) là mặt bên bất kỳ nên kết quả trên đúng với mọi mặt bên của đa diện (H).

Vậy, ta có điều phải chứng minh. ■

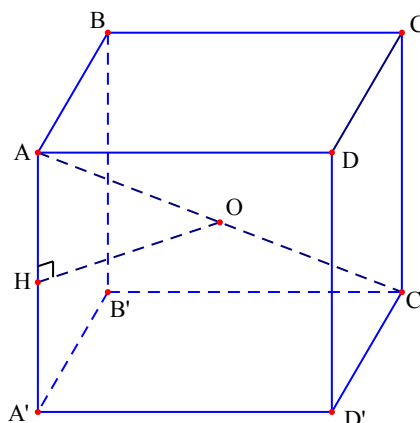
III- Một số phương pháp xác định tâm mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của khối đa diện.

1. Phương pháp 1: *Chỉ ra một điểm cách đều tất cả các cạnh của khối đa diện.*

Ví dụ: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. hãy xác định tâm và tính bán kính mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương đó.

Giải: Gọi O là tâm của hình lập phương ABCD.A'B'C'D', tức O là giao điểm của các đường chéo của hình lập phương đó.

Gọi H là trung điểm cạnh AA'. Khi đó: $OH \perp AA'$.



Do đó ta có: $d(O; AA') = OH = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự cũng tính được khoảng cách từ O đến các cạnh của hình lập phương bằng nhau và bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy, mặt cầu tâm O, bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương đã cho. ■

2. Phương pháp 2: *Dựng hai trục của hai đường tròn nội tiếp hai mặt, chứng minh hai trục đó cắt nhau tại O và O cách đều tất cả các cạnh của đa diện.*

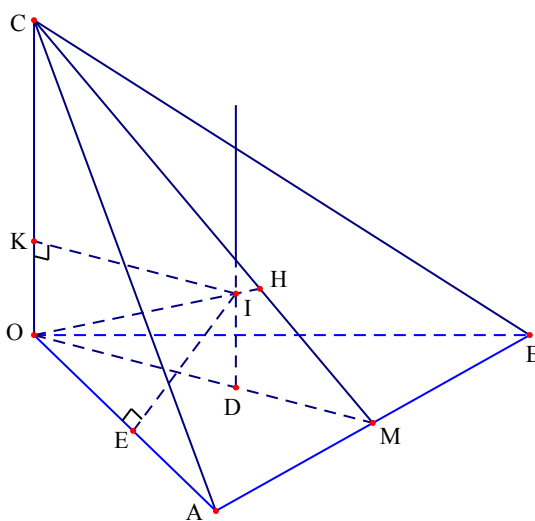
Ví dụ: Cho OABC là tứ diện vuông tại O, cạnh $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Tìm điều kiện giữa a, b, c để tồn tại mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện OABC đã cho. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.

Giải: Tồn tại mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện OABC $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow OA + BC = OB + AC = OC + AB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + \sqrt{b^2 + c^2} = b + \sqrt{a^2 + c^2} = c + \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = b = c.$$



Khi đó $O.ABC$ là hình chóp đều.

Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow OH$ là trục của đường tròn nội tiếp ΔABC .

Gọi D là tâm đường tròn nội tiếp ΔOAB , OD cắt AB tại M .

Vì $OA = OB$ nên $AM = MB$ và $OM \perp AB \Rightarrow CM$ đi qua H .

Hơn nữa, vì $a = b = c$ nên ΔABC đều $\Rightarrow CM \perp AB$.

Gọi I là giao điểm của đường thẳng OH với trục của đường tròn nội tiếp ΔOAB . Vì I thuộc trục đường tròn nội tiếp ΔOAB và ΔABC nên I cách đều các đường thẳng BC, CA, AB, BO, OA .

Kẻ $IE \perp OA, IK \perp OC$. Mặt khác $\Delta OIE = \Delta OIK \Rightarrow IE = IK \Rightarrow I$ cách đều OA và OC .

Như vậy I cách đều cả 6 cạnh của tứ diện $OABC$ nên I là tâm của mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện đó.

Ta có: $\Delta IOE \sim \Delta AOH \Rightarrow \frac{IE}{AH} = \frac{OE}{OH} \Rightarrow IE = OE \cdot \frac{AH}{OH}$.

Trong đó: $AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}, OE = OA - AE = OA - AM = a - \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

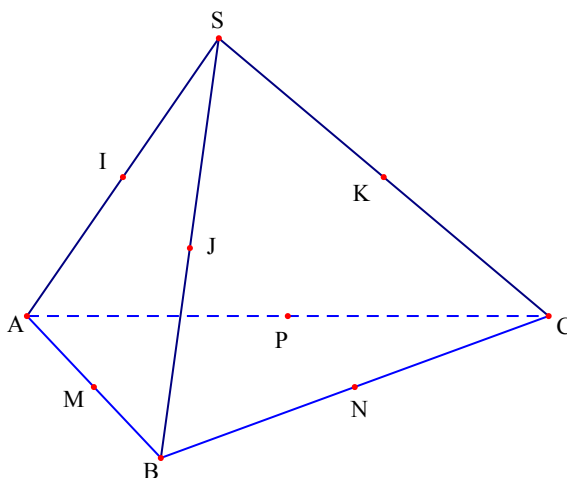
$$\Rightarrow OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IE = a(\sqrt{2} - 1).$$

Vậy bán kính mặt cầu là $R = IE = a(\sqrt{2} - 1)$. ■

IV- Vận dụng các kiến thức mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của khối đa diện để giải các bài toán.

Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABC$ và một mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình chóp, trong đó tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại trung điểm mỗi cạnh. Chứng minh rằng hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều.

Giải: Giả sử O, R là tâm và bán kính mặt cầu và gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA . Gọi I, J, K lần lượt là tiếp điểm của mặt cầu với SA, SB, SC .



Theo tính chất tiếp tuyến ta có: $AI = AM, BJ = BM$.

Vì M là trung điểm AB nên $AM = MB$. Do đó: $AI = BJ$ (1)

Vì $SI = SJ$ (tính chất tiếp tuyến) nên: $SI + AI = SJ + BJ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $SA = SB$.

Tương tự cũng chứng minh được: $SB = SC$.

Như vậy: $SA = SB = SC$.

Mặt khác theo tính chất tiếp tuyến và cách gọi ta có:

$$AB = 2BM = 2BN = BC = 2CN = 2CP = CA$$

Nghĩa là: $AB = BC = CA$, hay $\triangle ABC$ đều.

Do đó hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều. ■

Phần III: KẾT QUẢ ÁP DỤNG SÁNG KIẾN

Tác giả đã sử dụng nội dung Sáng kiến để dạy cho học sinh lớp 12A1 và 12A6 trong một số tiết học Tự chọn và một số buổi học bồi dưỡng (ngoài giờ học chính khóa). Sau khi thực hiện xong nội dung giáo án và học sinh đã được học một số nội dung khác, tác giả đã khảo sát lại chất lượng của hai lớp với thời lượng 60 phút bằng đề kiểm tra sau:

Bài 1: Cho hình chóp $S.ABC$. Biết rằng có một mặt cầu bán kính R tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình chóp và tâm I của mặt cầu nằm trên đường cao SH của hình chóp đó.

1/ Chứng minh rằng $S.ABC$ là hình chóp đều.

2/ Biết $IS = R\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

(Tham khảo Bài tập 10, trang 55, SGK Hình học 12 (nâng cao))

Bài 2: Cho $ABCD$ là tứ diện đều có cạnh bằng a và mặt cầu (S) tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện đó. Tính thể tích của khối tứ diện đều $MNPQ$ nội tiếp hình cầu (S) .

Giải:

* **Bài 1:**

1/ Vì các cạnh của hình chóp tiếp xúc với mặt cầu nên:

$$SA + BC = SB + AC = SC + AB \quad (1)$$

Mặt khác tâm I của mặt cầu thuộc đường cao SH của hình chóp nên ta có:

$$ISA = ISB = ISC \Leftrightarrow HSB = HSA = HSC \Rightarrow SA = SB = SC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB = BC = CA$.

Vậy hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều.

2/ Đặt $SH = h$.

Gọi M là trung điểm của BC thì mp(SAM) cắt mặt cầu theo đường tròn lớn, đường tròn này tiếp xúc với SA tại A_1 , đi qua điểm M và cắt AM tại M_1 .

Dễ thấy $AM_1 = M_1H = HM$.

$$\text{Vì } \triangle SA_1I \sim \triangle SHA \Rightarrow \frac{A_1I}{SI} = \frac{AH}{SA} \Leftrightarrow \frac{R}{R\sqrt{3}} = \frac{AH}{\sqrt{h^2 + AH^2}}.$$

Từ $AH = 2M_1H$ suy ra:

$$AH^2 = 4M_1H^2 = 4(IM_1^2 - IH^2) = 4[R^2 - (h - R\sqrt{3})^2].$$

$$\text{Từ đó: } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{R^2 - (h - R\sqrt{3})^2}}{\sqrt{h^2 + 4[R^2 - (h - R\sqrt{3})^2]}}$$

$$\Leftrightarrow 9h^2 - 16Rh\sqrt{3} + 16R^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{4R}{\sqrt{3}} \quad (\text{do } h > IS > R).$$

Gọi K là tiếp điểm của mặt cầu với SA .

$$\text{Ta có: } \triangle SIK \sim \triangle SAH \Rightarrow \frac{SI}{SA} = \frac{SK}{SH}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{SI \cdot SH}{SK} = \frac{SI \cdot SH}{\sqrt{SI^2 - IK^2}} = \frac{R\sqrt{3} \cdot \frac{4R}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3R^2 - R^2}} = 2R\sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra: } AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{8R^2 - \frac{16R^2}{3}} = \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2AH}{\sqrt{3}} = \frac{4R\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Do đó: } V_{S,ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} h \cdot \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8R^2 \sqrt{3}}{9} = \frac{32R^3}{27}.$$

* **Bài 2:** Theo kết quả trên thì tâm O của mặt cầu (S) là trọng tâm của tứ diện ABCD và mặt cầu (S) tiếp xúc với các cạnh của tứ diện tại trung điểm của mỗi cạnh.

Tứ diện có chiều cao: $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (theo kết quả Ví dụ 2, trang 25, SGK Hình học 12 (nâng cao)).

$$\text{Theo tính chất trọng tâm tứ diện: } OA = \frac{3}{4}h = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Gọi I là trung điểm AB thì bán kính mặt cầu (S):

$$R = OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{OA^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\frac{6a^2}{16} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Lại có tứ diện đều nội tiếp mặt cầu thì tâm mặt cầu chính là trọng tâm của tứ diện. Hơn nữa, bán kính mặt cầu chính là khoảng cách từ trọng tâm đến đỉnh của tứ diện.

$$\text{Do đó gọi } b \text{ là cạnh của tứ diện } MNPQ \text{ thì } b = R = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy thể tích tứ diện } MNPQ \text{ là: } V = \frac{b^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{a^3}{192} \cdot \blacksquare$$

Kết quả thu được như sau :

Lớp	Số bài	Không làm đúng câu nào	Chỉ là đúng 1 câu	Làm đúng được 2 câu	Làm đúng cả 3 câu	Điểm cao nhất
12A1	48	2 (4,16%)	6 (12,50%)	14 (29,17%)	26 (54,17%)	8,75
12A6	49	0	3 (6,12%)	9 (18,37%)	37 (75,51%)	9,25

Phần IV: KẾT LUẬN VÀ ĐỀ XUẤT

Trên đây là một số kinh nghiệm và suy nghĩ của cá nhân tôi trong quá trình giảng dạy và công tác trong năm học vừa qua. Trong quá trình giảng dạy tôi nhận thấy với những kinh nghiệm trên, học sinh đã bước đầu khắc phục được tâm lý “sợ” hình học không gian, thực hiện giải một bài toán hình học không gian với tư duy mạch lạc hơn. Đồng thời phát huy tính tích cực, sáng tạo trong học tập của học sinh. Thông qua vấn đề đặt ra và một số bài toán tôi muốn hình thành cho học sinh tư duy logic, quá trình tập dượt sáng tạo toán học. Điều đó góp phần nâng cao chất lượng dạy và học.

Tuy nhiên, những ý kiến này chưa hẳn đã là phù hợp với tất cả mọi đối tượng học sinh, đặc biệt là các học sinh khá giỏi. Việc áp dụng nội dung sáng kiến này vào giảng dạy cần được bố trí hợp lý về mặt thời gian. Nếu trường nào không bố trí giờ học tự chọn và học sinh không học bồi dưỡng thêm ở trường thì sẽ khó khăn về mặt thời gian để có thể áp dụng được. Hơn nữa, rất cần đến sự kiên trì của giáo viên vì đối tượng học sinh áp dụng trong sáng kiến này là những học sinh rỗng kiến thức, có tổ chất, tư duy toán học chưa tốt, ngại học toán, đặc biệt là hình học không gian.

Với những kết quả đã thu được, tôi mạnh dạn nêu lên nội dung sáng kiến của mình và mong được sự đóng góp ý kiến của các đồng nghiệp để nội dung được hoàn thiện hơn trong những lần chỉnh sửa sau.

XÁC NHẬN CỦA
THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 27 tháng 5 năm 2016
Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết,
không sao chép nội dung của người khác.

Vũ Quý Phõng

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Mõng Hy (chủ biên) – Bài tập Hình học 12 - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam - 2008.
- [2] Văn Như Cương (chủ biên) – Bài tập Hình học 12 nâng cao - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam - 2011.
- [3] Phan Huy Khải (chủ biên) – Bài tập Hình học 12 - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam - 2011.
- [4] Phan Huy Khải (chủ biên) – Bài tập Hình học 12 nâng cao - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam - 2011.
- [5] SGK Hình học 11, Hình học 11 nâng cao, Hình học 12, Hình học 12 nâng cao - Bộ Giáo dục và Đào tạo.
- [6] Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.
- [7] Nguyễn Hải Châu, Nguyễn Thế Thạch (đồng chủ biên) - Kiểm tra đánh giá thường xuyên và định kỳ môn Toán lớp 10 - Nhà xuất bản Giáo dục - 2008.

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
Phần I: MỞ ĐẦU	1
I- Lý do lựa chọn đề tài	1
II. Mục đích nghiên cứu	3
III. Thời gian, địa điểm nghiên cứu	3
Phần II: NỘI DUNG	4
I- Trục của đường tròn	4
II- Hướng dẫn học sinh tiếp cận và giải quyết một số bài toán về mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của khối đa diện	4
1. Giúp học sinh nắm chắc kiến thức về tiếp tuyến của mặt cầu.	4
2. Mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của khối đa diện.	8
III- Một số phương pháp xác định tâm mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của khối đa diện.	13
1. Phương pháp 1.	13
2. Phương pháp 2.	14
IV- Vận dụng các kiến thức mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của khối đa diện để giải các bài toán.	15
Phần III: KẾT QUẢ ÁP DỤNG SÁNG KIẾN	17
Phần IV: KẾT LUẬN VÀ ĐỀ XUẤT	19