

Dạng 1.3 Biến đổi

Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Để dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 3. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 4. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

(Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1)

Phương pháp:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$

Suy ra $f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 5. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = -\int p(x) dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 6. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0$

Phương pháp:

$$\text{Chia hai vế với } [f(x)]^n \text{ ta được } \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x) dx$$

Câu 1. (Mã 102 2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$

B. $-\frac{2}{9}$

C. $-\frac{7}{6}$

D. $-\frac{11}{6}$

Lời giải

Chọn A

Từ hệ thức đề cho: $f'(x) = x[f(x)]^2$ (1), suy ra $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [1; 2]$. Do đó $f(x)$ là hàm không giảm trên đoạn $[1; 2]$, ta có $f(x) \leq f(2) < 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

$$\text{Chia 2 vế hệ thức (1) cho } [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x, \forall x \in [1; 2].$$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1; 2]$ hệ thức vừa tìm được, ta được:

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 x dx \Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{[f(x)]^2} df(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow \left. \frac{-1}{f(x)} \right|_1^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Do } f(2) = -\frac{1}{3} \text{ nên suy ra } f(1) = -\frac{2}{3}.$$

Chú ý: có thể tự kiểm tra các phép biến đổi tích phân trên đây là có nghĩa.

Câu 2. (Mã 104 2018) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{4}{35}$

B. $-\frac{71}{20}$

C. $-\frac{79}{20}$

D. $-\frac{4}{5}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f'(x) = x^3[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_1^2 x^3 dx$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right) \Big|_1^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{15}{4} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{4}{5}.$$

Câu 3. (Minh họa 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_{-1}^0 f(x) dx ?$$

A. $\frac{-17}{20}.$

B. $\frac{-13}{4}.$

C. $\frac{17}{4}.$

D. $-1.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x \Rightarrow x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) = -x^{11} + x^7 - 2x^2.$$

Lấy tích phân hai vế cận từ 0 đến 1 ta được:

$$\int_0^1 x^2 f(x^3) dx + \int_0^1 xf(1-x^2) dx = \int_0^1 (-x^{11} + x^7 - 2x^2) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(x^3) d(x^3) - \frac{1}{2} \int_0^1 f(1-x^2) d(1-x^2) = -\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} \int_1^0 f(t) dt = -\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = -\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6} \int_0^1 f(t) dt = -\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x) dx = -\frac{3}{4}.$$

Lấy tích phân hai vế cận từ -1 đến 0 ta được:

$$\int_{-1}^0 x^2 f(x^3) dx + \int_{-1}^0 xf(1-x^2) dx = \int_{-1}^0 (-x^{11} + x^7 - 2x^2) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x^3) d(x^3) - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(1-x^2) d(1-x^2) = -\frac{17}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = -\frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = -\frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(t) dt = -\frac{17}{24} + \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{17}{24} + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = -\frac{17}{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{13}{12}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{13}{4}$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1-x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. 4.

B. -1.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(1-x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(1-x) - 6x^2 f(x^3) = -\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(1-x) dx - \int_0^1 6x^2 f(x^3) dx = -\int_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}} dx \quad (*)$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 f(1-x) dx = -\int_0^1 f(1-x) d(1-x) \stackrel{u=1-x}{=} -\int_1^0 f(u) du = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Và } \int_0^1 6x^2 f(x^3) dx = 2 \int_0^1 f(x^3) d(x^3) \stackrel{u=x^3}{=} 2 \int_0^1 f(u) du = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx = -6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 6 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = 4.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = 4.$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1$, với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ đồng thời thỏa $f(1) = -2$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$

A. $-\frac{\ln 2}{2} - 1$.

B. $-\ln 2 - \frac{1}{2}$.

C. $-\ln 2 - \frac{3}{2}$.

D. $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 = xf'(x) + f(x) \Leftrightarrow (xf(x) + 1)^2 = (xf(x) + 1)'$$

$$\text{Do đó } \frac{(xf(x) + 1)'}{(xf(x) + 1)^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{(xf(x) + 1)'}{(xf(x) + 1)^2} dx = \int 1 dx \Rightarrow -\frac{1}{xf(x) + 1} = x + c \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x+c}$$

$$\text{Mặt khác } f(1) = -2 \text{ nên } -2 + 1 = -\frac{1}{1+c} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$\text{Vậy } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \left(\ln x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = -\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + (x^2 - 1)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân } \int_1^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{7}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. 7.

D. $-\frac{19}{3}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác : } (*) &\Rightarrow \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) f \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \right) dx = \int_1^2 (x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6) dx \\ &\Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx + \frac{4}{3} \int_1^2 f \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \right) d \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \int_1^2 f(x) dx + \frac{4}{3} \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và

$(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1).f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4, \forall x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng?

A. $\frac{23}{15}$.

B. $\frac{13}{15}$.

C. $-\frac{17}{15}$.

D. $-\frac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn B

$$(f'(x))^2 + 4(6x^2 - 1).f(x) = 40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 4(6x^2 - 1).f(x) dx = \int_0^1 (40x^6 - 44x^4 + 32x^2 - 4) dx. \quad (1)$$

$$\text{Xét } I = \int_0^1 4(6x^2 - 1).f(x) dx = \int_0^1 (24x^2 - 4) f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (24x^2 - 4) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = 8x^3 - 4x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = (8x^3 - 4x).f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (8x^3 - 4x).f'(x) dx = 4 - 2 \int_0^1 (4x^3 - 2x).f'(x) dx.$$

Do đó:

$$(1) \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2 \int_0^1 (4x^3 - 2x).f'(x) dx + \int_0^1 (4x^3 - 2x)^2 dx = \int_0^1 (56x^6 - 60x^4 + 36x^2 - 8) dx.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x) - (4x^3 - 2x)]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + c.$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 - x^2 + 1.$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^4 - x^2 + 1) dx = \frac{13}{15}.$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 3$ và

$f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)dx$ bằng

- A. $\frac{-4}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. **D. $\frac{-10}{3}$**

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int_0^2 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx$.

Từ $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Thay $x = 0$ vào (1) ta được $f(0) + f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 2 - f(0) = 2 - 3 = -1$.

Xét $I = \int_0^2 f(x)dx$

Đặt $x = 2 - t \Rightarrow dx = -dt$, đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

Khi đó $I = -\int_2^0 f(2-t)dt = \int_0^2 f(2-t)dt \Rightarrow I = \int_0^2 f(2-x)dx$

Do đó ta có $\int_0^2 (f(x) + f(2-x))dx = \int_0^2 (x^2 - 2x + 2)dx \Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3}$.

Vậy $\int_0^2 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx = 2 \cdot (-1) - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$.

Cách 2.

Từ $\begin{cases} f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2 & (1) \\ f(0) = 3 \end{cases}$

Thay $x = 0; x = 1$ vào (1) ta được $f(2) = -1; f(1) = \frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ từ giả thiết trên ta có $\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = \frac{1}{2} \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = \frac{1}{2} \\ b = -3 \end{cases}$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3 \Rightarrow f'(x) = x - 3$ suy ra $\int_0^2 xf'(x)dx = \int_0^2 x(x-3)dx = -\frac{10}{3}$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2; 4]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$. Biết

$4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3, \forall x \in [2; 4], f(2) = \frac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

- A. $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$. B. $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$. C. $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D. $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[2; 4] \Rightarrow f(x) \geq f(2)$ mà $f(2) = \frac{7}{4}$. Do đó: $f(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$.

Từ giả thiết ta có: $4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3 \Leftrightarrow x^3 [4f(x) + 1] = [f'(x)]^3$

$$\Leftrightarrow x \cdot \sqrt[3]{4f(x) + 1} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x) + 1}} = x.$$

$$\text{Suy ra: } \int \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x) + 1}} dx = \int x dx \Leftrightarrow \frac{1}{4} \int \frac{d[4f(x) + 1]}{\sqrt[3]{4f(x) + 1}} = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow \frac{3}{8} \sqrt[3]{[4f(x) + 1]^2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$f(2) = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 2 + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy: } f(x) = \frac{\sqrt{\left[\frac{4}{3}(x^2 - 1)\right]^3} - 1}{4} \Rightarrow f(4) = \frac{40\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$ và thỏa $f(1) = 0$,

$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 - 32x + 28$ với mọi x thuộc $[0; 2]$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{5}{3}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $-\frac{14}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } I = \int_1^2 2f(x) dx.$$

$$\text{Dùng tích phân từng phần, ta có: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = 2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = 2x - 4 \end{cases}.$$

$$I = (2x - 4)f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 (2x - 4)f'(x) dx = - \int_1^2 (2x - 4)f'(x) dx.$$

$$\text{Ta có } (f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 - 32x + 28 \Rightarrow \int_1^2 (f'(x))^2 dx + 2 \int_1^2 2f(x) dx = \int_1^2 (8x^2 - 32x + 28) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 (f'(x))^2 dx - 2 \int_1^2 (2x - 4)f'(x) dx + \int_1^2 (2x - 4)^2 dx = \int_1^2 (8x^2 - 32x + 28) dx + \int_1^2 (2x - 4)^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 [f'(x) - (2x - 4)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Mà } f(1) = 0 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx = \frac{4}{3}.$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(x) + f(1-x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}, \forall x \in [0;1]$. Tính

$$\int_0^1 f(x) dx$$

A. $\frac{3}{4} + 2 \ln 2.$

B. $3 + \ln 2.$

C. $\frac{3}{4} + \ln 2.$

D. $\frac{3}{2} + 2 \ln 2.$

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết, ta có: $f(x) + f(1-x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}, \forall x \in [0;1]$ và $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên

$$\int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 \frac{(x+1)^2 + 2}{x+1} dx \quad (1)$$

Đặt $1-x = t$ thì $dx = -dt$, với $x = 0 \Rightarrow t = 1$, với $x = 1 \Rightarrow t = 0$

$$\text{Do đó: } \int_0^1 f(1-x) dx = -\int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx \quad (2).$$

$$\text{Lại có } \int_0^1 \frac{(x+1)^2 + 2}{x+1} dx = \int_0^1 \left(x+1 + \frac{2}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x+1| \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} + 2 \ln 2 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } 2 \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2} + 2 \ln 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{4} + \ln 2.$$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$ ta được kết quả:

A. $I = e + 4.$

B. $I = 8.$

C. $I = 2.$

D. $I = e + 2.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Theo giả thuyết ta có } \int_0^2 [3f(x) + f(2-x)] dx = \int_0^2 [2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4] dx \quad (*).$$

$$\text{Ta tính } \int_0^2 f(2-x) dx = -\int_0^2 f(2-x) d(2-x) = \int_0^2 f(x) dx.$$

$$\text{Vì vậy } \int_0^2 [3f(x) + f(2-x)] dx = 4 \int_0^2 f(x) dx.$$

Hơn nữa $\int_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1} dx = \int_0^2 e^{x^2-2x+1} d(x^2-2x+1) = e^{x^2-2x+1} \Big|_0^2 = 0$ và $\int_0^2 4dx = 8$.

Suy ra $4 \int_0^2 f(x) dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$xf(x^5) + f(1-x^4) = x^{11} + x^8 + x^6 - 3x^4 + x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^0 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{35}{6}$.

B. $-\frac{15}{4}$.

C. $-\frac{7}{24}$.

D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có : $xf(x^5) + f(1-x^4) = x^{11} + x^8 + x^6 - 3x^4 + x + 3$

$\Rightarrow x^4 f(x^5) + x^3 f(1-x^4) = x^{14} + x^{11} + x^9 - 3x^7 + x^4 + 3x^3 \quad (*)$

$\Rightarrow \int_0^1 x^4 f(x^5) dx + \int_0^1 x^3 f(1-x^4) dx = \int_0^1 (x^{14} + x^{11} + x^9 - 3x^7 + x^4 + 3x^3) dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \int_0^1 f(x^5) d(x^5) - \frac{1}{4} \int_0^1 f(1-x^4) d(1-x^4) = \frac{33}{40}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{4} \int_0^1 f(x) dx = \frac{33}{40} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{11}{6}$

Mặt khác : $(*) \Rightarrow \int_{-1}^0 x^4 f(x^5) dx + \int_{-1}^0 x^3 f(1-x^4) dx = \int_{-1}^0 (x^{14} + x^{11} + x^9 - 3x^7 + x^4 + 3x^3) dx$

$(*) \Rightarrow \frac{1}{5} \int_{-1}^0 f(x^5) d(x^5) - \frac{1}{4} \int_{-1}^0 f(1-x^4) d(1-x^4) = -\frac{7}{24}$

$\Rightarrow \frac{1}{5} \int_{-1}^0 f(x) dx - \frac{1}{4} \int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{7}{24} \Rightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx = 5 \left(-\frac{7}{24} + \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{6} \right) = \frac{5}{6}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{2}{5}; 1\right]$ và thỏa mãn $2f(x) + 5f\left(\frac{2}{5x}\right) = 3x, \forall x \in \left[\frac{2}{5}; 1\right]$. Khi đó

$I = \int_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}} \ln 3x \cdot f'(3x) dx$ bằng:

A. $\frac{1}{5} \ln \frac{2}{5} + \frac{3}{35}$.

B. $\frac{1}{5} \ln \frac{5}{2} - \frac{3}{35}$.

C. $-\frac{1}{5} \ln \frac{5}{2} - \frac{3}{35}$.

D. $-\frac{1}{5} \ln \frac{2}{5} + \frac{3}{35}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Tụ Luận

Ta có: $2f(x) + 5f\left(\frac{2}{5x}\right) = 3x, \forall x \in \left[\frac{2}{5}; 1\right]$ (1)

$$\Leftrightarrow 2 \frac{f(x)}{x} + 5 \frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x} = 3, \forall x \in \left[\frac{2}{5}; 1\right]$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(x)}{x} dx + 5 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x} dx = \int_{\frac{2}{5}}^1 3 dx = \frac{9}{5} \quad (2)$$

Xét $I_1 = 5 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x} dx$ đặt $u = \frac{2}{5x} \Rightarrow du = -\frac{2}{5x^2} dx \Rightarrow -\frac{2}{5} \frac{du}{u^2} = dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = \frac{2}{5} \Rightarrow u = 1 \\ x = 1 \Rightarrow u = \frac{2}{5} \end{cases}$

$$\Rightarrow I_1 = -5 \int_1^{\frac{2}{5}} \frac{f(u)}{u} du = 5 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(u)}{u} du = 5 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(x)}{x} dx$$

Từ (2) suy ra, $2 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(x)}{x} dx + 5 \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{9}{5}$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{9}{35}$$

Tính $I = \int_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}} \ln 3x \cdot f'(3x) dx$.

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow \frac{1}{3} dt = dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = \frac{2}{15} \Rightarrow t = \frac{2}{5} \\ x = \frac{1}{3} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_{\frac{2}{5}}^1 \ln t \cdot f'(t) dt$$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = f'(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = f(t) \end{cases}$

$$I = \frac{1}{3}(\ln t \cdot f(t)) \Big|_{\frac{2}{5}}^1 - \frac{1}{3} \int_{\frac{2}{5}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = -\frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} \cdot f\left(\frac{2}{5}\right) - \frac{3}{35}$$

Tính $2f(x) + 5f\left(\frac{2}{5x}\right) = 3x, \forall x \in \left[\frac{2}{5}; 1\right]$

Cho $x = 1; x = \frac{2}{5}$ vào (1) ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2f(1) + 5f\left(\frac{2}{5}\right) = 3 \\ 2f\left(\frac{2}{5}\right) + 5f(1) = \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Suy ra, $I = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \ln \frac{2}{5} - \frac{3}{35} = \frac{1}{5} \ln \frac{5}{2} - \frac{3}{35}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + 2xf(x^2) = 2x^7 + 3x^3 - x - 1$ với $x \in \mathbb{R}$.

Tính tích phân $\int_0^1 xf'(x)dx$.

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int_0^1 xf'(x)dx = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx$ (*)

Từ $f(x) + 2xf(x^2) = 2x^7 + 3x^3 - x - 1$ (1)

Thay $x = 1$ vào (1) ta được $f(1) + 2f(1) = 3 \Rightarrow f(1) = 1$ (2)

Mặt khác từ (1) ta có $\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 2xf(x^2)dx = \int_0^1 (2x^7 + 3x^3 - x - 1)dx$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x^2)d(x^2) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2 \int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{4}$$
 (3)

Thay (2), (3) vào (*) ta được $\int_0^1 xf'(x)dx = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4 + x^3 + 4x - 4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq 1. \text{ Khi đó } \int_{-1}^1 f(x)dx \text{ có giá trị là}$$

A. 0.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $f(1-x) + \frac{2}{x^2} f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4 + x^3 + 4x - 4}{x^3}$

Ta có: $\int_1^2 f(1-x) dx + \int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right) \cdot \frac{2}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{-x^4 + x^3 + 4x - 4}{x^3} dx$

$$\Leftrightarrow -\int_1^2 f(1-x) d(1-x) + \int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right) d\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \int_1^2 \left(-x + 1 + \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^{-1} f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt = \left(-\frac{x^2}{2} + x - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(t) dt = 0.$$

Vậy $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$

Cách trắc nghiệm

Ta có: $x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4 + x^3 + 4x - 4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq 1$

$$\Leftrightarrow x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = \frac{-x^4 + x^3}{x} + \frac{4x - 4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 f(1-x) + 2f\left(\frac{2x-2}{x}\right) = x^2(1-x) + 2\left(\frac{2x-2}{x}\right), \forall x \neq 0, x \neq 1$$

Chọn $f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x dx = 0.$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + (x^2 - 1)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tích phân } \int_1^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{7}.$

B. $\frac{1}{3}.$

C. 7.

D. $-\frac{19}{3}.$

Lời giải**Chọn C**

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có: $f(x) + (x^2 - 1)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6$ (*)

$$\Rightarrow \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) dx = \int_{-2}^{-1} (x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \frac{4}{3} \int_{-2}^{-1} f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) d\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = -\frac{35}{3}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \frac{4}{3} \int_{-2}^{-1} f(x) dx = -\frac{35}{3} \Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f(x) dx = -5$$

$$\text{Mặt khác : } (*) \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) dx = \int_1^2 (x^5 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx + \frac{4}{3} \int_1^2 f\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) d\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(x) dx + \frac{4}{3} \int_{-2}^{-1} f(x) dx = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \cdot (-5) = 7.$$

Câu 18. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x) = \sqrt{x+2} + xf(3-x^2)$.

Tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$ bằng

A. $I = \frac{14}{3}.$

B. $I = \frac{28}{3}.$

C. $I = \frac{4}{3}.$

D. $I = 2.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = \int_{-1}^2 [\sqrt{x+2} + xf(3-x^2)] dx = \int_{-1}^2 \sqrt{x+2} dx + \int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx = \frac{14}{3} + \int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx.$$

$$\text{Xét } \int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx \text{ đặt } t = 3-x^2 \Rightarrow dt = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{dt}{2}.$$

$$\text{Đổi cận khi } x = -1 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = -1. \text{ Suy ra } \int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx = -\frac{1}{2} \int_2^{-1} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(t) dt.$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{14}{3} + \int_{-1}^2 xf(3-x^2) dx = \frac{14}{3} + \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(t) dt = \frac{14}{3} + \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(x) dx \Leftrightarrow I = \frac{14}{3} + \frac{I}{2} \Rightarrow I = \frac{28}{3}.$$

Câu 19. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1, f'(x) < 0, [f'(x)]^2 = f''(x), \forall x \in [0; 1]$. Giá trị $f(0) - f(1)$ thuộc khoảng

A. $(1; 2).$

B. $(-1; 0).$

C. $(0; 1).$

D. $(-2; -1).$

Lời giải

Chọn C

$$[f'(x)]^2 = f''(x) \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} dx = \int dx \Leftrightarrow \frac{-1}{f'(x)} = x + C$$

$$f'(0) = -1 \Rightarrow \frac{-1}{-1} = 0 + C \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow \frac{-1}{f'(x)} = x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-1}{x+1}$$

$$f(0) - f(1) = \int_1^0 f'(x) dx = \int_1^0 \frac{-1}{x+1} dx = -\ln|x+1| \Big|_1^0 = \ln 2 \in (0;1)$$

Câu 20. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn

$$[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = f'(0) = 2. \text{ Tính giá trị của } T = f^2(2)$$

A. $\frac{160}{15}$

B. $\frac{268}{15}$

C. $\frac{4}{15}$

D. $\frac{268}{30}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (f'(x) \cdot f(x))' = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có:

$$\int (f'(x) \cdot f(x))' dx = \int (x^3 - 2x) dx$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + C$$

Theo đề ra ta có: $f'(0) \cdot f(0) = C = 4$

Suy ra:

$$\int_0^2 f'(x) \cdot f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 4 \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^2 = \frac{104}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{268}{15}.$$

Câu 21. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập xác định $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn

$$f(x^2 + 3x + 1) = x + 2. \text{ Tính } I = \int_1^5 f(x) dx$$

A. $\frac{37}{6}$.

B. $\frac{527}{3}$.

C. $\frac{61}{6}$.

D. $\frac{464}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$f(x^2 + 3x + 1) = x + 2$$

$$\Leftrightarrow (2x + 3)f(x^2 + 3x + 1) = (2x + 3)(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (2x + 3)f(x^2 + 3x + 1)dx = \int_0^1 (2x + 3)(x + 2)dx = \frac{61}{6}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 3x + 1 \Rightarrow dt = (2x + 3)dx$$

x	0	1
t	1	5

$$\text{Suy ra } \int_1^5 f(t)dt = \frac{61}{6}.$$

Câu 22. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn điều

$$\text{kiện } f(x) + x(f'(x) - 2\sin x) = x^2 \cos x, x \in R \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x)dx$$

A. 0.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. 1.

D. π .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ giả thiết } f(x) + x(f'(x) - 2\sin x) = x^2 \cos x$$

$$\Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

$$\Leftrightarrow (xf(x))' = (x^2 \sin x)'$$

$$\Leftrightarrow xf(x) = x^2 \sin x + C$$

$$\text{Mặt khác: } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x \sin x.$$

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x)dx = xf'(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= x^2 \cos x + 2x \sin x - 2x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Câu 23. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = \frac{2}{3}$ và

$$(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})f'(x) = 1, \forall x \geq -1. \text{ Biết rằng } \int_0^1 f(x)dx = \frac{a\sqrt{2} + b}{15} \text{ với } a, b \in \mathbb{Z}. \text{ Tính } T = a + b.$$

A. -8.

B. -24.

C. 24.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})f'(x) = 1, \forall x \geq -1.$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int f'(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx$$

$$\Rightarrow \int f'(x)dx = \int (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

Mặt khác: $f(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}.$

Do đó: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \right) dx = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{x^5} \right) \Big|_0^1 = \frac{16\sqrt{2}-8}{15}.$

$$\Rightarrow a = 16; b = -8 \Rightarrow T = a + b = 8.$$

Câu 24. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x)dx.$$

A. $\frac{\pi}{4}.$

B. $\frac{\pi}{16}.$

C. $\frac{\pi}{20}.$

D. $\frac{\pi}{6}.$

Lời giải

Chọn C

Lấy tích phân hai vế, ta có $\int_0^1 [4x.f(x^2) + 3f(1-x)]dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \quad (*)$.

Xét tích phân $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$. Khi đó, ta có

$$J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Xét tích phân $K = \int_0^1 4x.f(x^2)dx$. Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$. Khi đó, ta có

$$K = \int_0^1 4x.f(x^2)dx = 2 \int_0^1 f(t)dt = 2 \int_0^1 f(x)dx.$$

Xét tích phân $L = \int_0^1 3f(1-x)dx$. Đặt $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx$. Khi đó, ta có

$$L = \int_0^1 3f(1-x) dx = 3 \int_1^0 f(t)(-dt) = 3 \int_0^1 f(t) dt = 3 \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{20}.$$

Câu 25. (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng

$(0; +\infty)$. Biết $f(3) = 3$ và $xf'(2x+1) - f(2x+1) = x^3, \forall x \in (0; +\infty)$. Giá trị của $\int_3^5 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{914}{3}$.

B. $\frac{59}{3}$.

C. $\frac{45}{4}$.

D. 88.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$xf'(2x+1) - f(2x+1) = x^3 \Leftrightarrow \frac{2x^2 f'(2x+1) - 2xf(2x+1)}{x^4} = 2, \forall x \in (0; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(2x+1)}{x^2} \right)' = 2 \Leftrightarrow \frac{f(2x+1)}{x^2} = 2x + C. (1)$$

$$\text{Cho } x=1 \text{ từ (1)} \Rightarrow \frac{f(3)}{1^2} = 2.1 + C \Leftrightarrow \frac{3}{1^2} = 2.1 + C \Rightarrow C=1 \Rightarrow f(2x+1) = x^2(2x+1) = 2x^3 + x^2.$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(2x+1) dx = \int_1^2 (2x^3 + x^2) dx = \left(2 \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{59}{6}.$$

$$\Rightarrow \int_3^5 f(x) dx = 2 \int_1^2 f(2x+1) dx = \frac{59}{3}.$$

Câu 26. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $[1; 4]$, thỏa mãn

$x + 2xf(x) = [f'(x)]^2$ với mọi $x \in [1; 4]$. Biết $f(1) = \frac{3}{2}$, tính $I = \int_1^4 f(x) dx$

A. $\frac{1188}{45}$.

B. $\frac{1187}{45}$.

C. $\frac{1186}{45}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Do $f(x)$ đồng biến trên $[1; 4]$ nên $f(x) \geq f(1) = \frac{3}{2} > -\frac{1}{2}$, ngoài ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in [1; 4]$. Khi đó ta có biến đổi sau:

$$x + 2xf(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{2f(x)+1}} = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2f(x)+1}\right)' = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C\right)' \Leftrightarrow \sqrt{2f(x)+1} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}\right)^2 - 1}{2} = \frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{9}\sqrt{x^3} + \frac{7}{18}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^4 f(x)dx = \left(\frac{1}{18}x^4 + \frac{16}{45}x^2\sqrt{x} + \frac{7}{18}x\right)\Big|_1^4 = \frac{1186}{45}.$$

Câu 27. (Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$7f(x) + 4f(4-x) = 2018x\sqrt{x^2+9}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_0^4 f(x)dx.$$

A. $\frac{2018}{11}.$

B. $\frac{7063}{3}.$

C. $\frac{98}{3}.$

D. $\frac{197764}{33}.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 7f(x) + 4f(4-x) = 2018x\sqrt{x^2+9} \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{7}f(4-x) + \frac{2018}{7}x\sqrt{x^2+9}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^4 f(x)dx = -\frac{4}{7} \int_0^4 f(4-x)dx + \frac{2018}{7} \int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx \quad (1).$$

$$\text{Xét: } \int_0^4 f(4-x)dx, \text{ đặt } t = 4-x, \Rightarrow dt = -dx \text{ nên } \int_0^4 f(4-x)dx = -\int_4^0 f(t)dt = \int_0^4 f(t)dx = I$$

$$\text{Xét: } \int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx, \text{ đặt } u = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow u^2 = x^2+9 \Rightarrow udu = xdx.$$

$$\text{Nên } \int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx = \int_3^5 u^2du = \frac{u^3}{3}\Big|_3^5 = \frac{98}{3}.$$

Câu 28. (THPT Ba Đình 2019) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f^2(1-x) = (x^2+3)f(x+1). \text{ Biết rằng } f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ tính } I = \int_0^2 (2x-1)f''(x)dx.$$

A. 8.

B. 0.

C. -4.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f^2(1-x) = (x^2+3), f(x+1) \Rightarrow f^4(1-x) = (x^2+3)^2 \cdot f^2(x+1) \quad (1) \\ f^2(1+x) = (x^2+3) \cdot f(1-x) \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow f(1-x) = x^2+3 = (1-x-1)^2+3$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2+3$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 (4x-2) dx = \left(2x^2 - 2x \right) \Big|_0^2 = 4.$$

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x.f(x).f'(x) = f^2(x) - x, \forall x \in \mathbb{R}$ và có $f(2) = 1$. Tích phân $\int_0^2 f^2(x) dx$

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{4}{3}$

C. 2

D. 4

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$x.f(x).f'(x) = f^2(x) - x \Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x) = 2f^2(x) - 2x$$

$$\Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x) + f^2(x) = 3f^2(x) - 2x \Leftrightarrow \int_0^2 (x.f^2(x))' dx = 3 \int_0^2 f^2(x) dx - \int_0^2 2x dx$$

$$\Leftrightarrow (x.f^2(x)) \Big|_0^2 = 3I - 4 \Leftrightarrow 2 = 3I - 4 \Leftrightarrow I = 2$$

Câu 30. (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$.

B. $-\ln 2$.

C. $-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

D. $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

$$f'(x) = (2x+1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2} = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{f(x)} = -\int (2x+1) dx = -x^2 - x + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{-x^2 - x + C}.$$

$$\text{Do } f(0) = -1 \Rightarrow C = -1. \text{ Vậy } f(x) = -\frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx = -\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = -\int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx.$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right). \text{ Suy ra } I = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \tan^2 t)}{\frac{3}{4}(1 + \tan^2 t)} dt = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = -\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x + 1)f(x); \forall x \in \mathbb{R}$.

Biết $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q})$. Giá trị của $a - b$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. $\frac{2}{3}$.

lời giải

Chọn A

Ta có $f(x).f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x + 1)f(x)$

lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\frac{f^2(x)}{2} + 6x^3 = (3x^2 + x)f(x)$

$$\Rightarrow f^2(x) - 2(3x^2 + x)f(x) + 12x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 6x^2 \\ f(x) = 2x \end{cases}$$

TH1: $f(x) = 6x^2$ không thỏa mãn kết quả $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = ae^2 + b, (a, b \in \mathbb{Q})$

TH2: $f(x) = 2x \Rightarrow \int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = \int_0^1 (x+1)e^{2x} dx = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}$. Suy ra $a = \frac{3}{4}; b = -\frac{1}{4}$

Vậy $a - b = 1$

Câu 32. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) > 0$ và

$f(x) - f'(x) = -\frac{2[f(x)]^2}{e^x \cdot x \sqrt{x-x^2}} \forall x \in (0;1)$. Biết $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f\left(\frac{1}{5}\right) \geq \frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{6} \leq f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{5} \leq f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{4}$

D. $f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{6}$

Lời giải

Vì $f(x) > 0$ và $\forall x \in (0;1)$ ta có:

$$f(x) - f'(x) = -\frac{2[f(x)]^2}{e^x \cdot x \sqrt{x-x^2}} \Leftrightarrow \frac{e^x f(x) - e^x f'(x)}{[f(x)]^2} = -\frac{2}{x \sqrt{x-x^2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e^x}{f(x)} \right)' = \frac{-2}{x \sqrt{x-x^2}} \Rightarrow \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \frac{-2}{x \sqrt{x-x^2}} dx = \frac{e^x}{f(x)} \Big|_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{f\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{\sqrt[5]{e}}{f\left(\frac{1}{5}\right)} = 2\sqrt{e} - \frac{\sqrt[5]{e}}{f\left(\frac{1}{5}\right)}$$

$$\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}} dx = \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \frac{-2}{x^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x}-1}} dx = \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}-1}} d\left(\frac{1}{x}\right) = 4\sqrt{\frac{1}{x}-1} \Big|_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} = -4$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{e} - \frac{\sqrt[5]{e}}{f\left(\frac{1}{5}\right)} = -4 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2(\sqrt{e}+2)}{\sqrt[5]{e}} \approx 5,97$$

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $M = \int_0^1 [2f(x) + 3x] f(x) dx - \int_0^1 [4f(x) + x] \sqrt{xf(x)} dx$ bằng

A. $-\frac{1}{24}$

B. $-\frac{1}{8}$

C. $-\frac{1}{12}$

D. $-\frac{1}{6}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $M = \int_0^1 [2f^2(x) + 3xf(x) - 4f(x)\sqrt{xf(x)} - x\sqrt{xf(x)}] dx$

$$= \int_0^1 \left[-(\sqrt{x} - \sqrt{f(x)})\sqrt{f(x)} \left[(\sqrt{f(x)} - \sqrt{x})^2 + f(x) \right] \right] dx$$

Đặt $a = \sqrt{x} - \sqrt{f(x)}$, $b = \sqrt{f(x)}$ thì

$$M = \int_0^1 [-ab(a^2 + b^2)] dx \geq \int_0^1 \left[-\frac{(a+b)^2}{4} \cdot \frac{(a+b)^2}{2} \right] dx \geq \int_0^1 -\frac{x^2}{8} dx = -\frac{1}{24}.$$

Câu 34. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương -2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x + 1)f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Biết $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = a.e^2 + b$, với $a; b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $a - b$ bằng.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có $f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x + 1)f(x)$

$$\Rightarrow \int [f(x) \cdot f'(x) + 18x^2] dx = \int [(3x^2 + x)f'(x) + (6x + 1)f(x)] dx$$

$$\Rightarrow \int \left[\frac{1}{2} f^2(x) + 6x^3 \right]' dx = \int [(3x^2 + x)f'(x)]' dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} f^2(x) + 6x^3 = (3x^2 + x)f(x) + C, \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

Mặt khác: theo giả thiết $f(0) = 0$ nên $C = 0$.

Khi đó $\frac{1}{2}f^2(x) + 6x^3 = (3x^2 + x)f(x)(1), \forall x \in \mathbb{R}$.

$$(1) \Leftrightarrow f^2(x) + 12x^3 = (6x^2 + 2x)f(x) \Leftrightarrow [f(x) - 2x][f(x) - 6x^2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2x \\ f(x) = 6x^2 \end{cases}.$$

Trường hợp 1: Với $f(x) = 6x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, ta có $f'(0) = 0$ (loại).

Trường hợp 2: Với $f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$, ta có :

$$\int_0^1 (x+1)e^{f(x)} dx = \int_0^1 (x+1)e^{2x} dx = \left[\frac{(x+1)e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a - b = 1.$$

Câu 35. (Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f^2(x) - 2f(x) \cdot (3-x)] dx = -\frac{109}{12}. \text{ Tính } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2-1} dx.$$

A. $\ln \frac{7}{9}$.

B. $\ln \frac{2}{9}$.

C. $\ln \frac{5}{9}$.

D. $\ln \frac{8}{9}$.

Lời giải

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f^2(x) - 2f(x) \cdot (3-x)] dx = -\frac{109}{12} \Leftrightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [(f(x) - (3-x))^2 - (3-x)^2] dx = -\frac{109}{12}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(x) - (3-x))^2 dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (3-x)^2 dx = -\frac{109}{12}.$$

$$\text{Mà } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (3-x)^2 dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (9-6x+x^2) dx = \left(9x-3x^2+\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{109}{12}$$

$$\text{Suy ra } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(x) - (3-x))^2 dx = 0.$$

$$\text{Vì } [f(x) - (3-x)]^2 \geq 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \text{ nên } f(x) = 3-x, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2-1} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3-x}{x^2-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x+2}{x^2-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{(x-1)(x+1)} \right) dx \\ &= \left(-\ln|x+1| + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Câu 36. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = \frac{2-\pi}{2}. \text{ Tính tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{\pi}{4}.$

B. $0.$

C. $1.$

D. $\frac{\pi}{2}.$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 2x) dx \\ &= \left(x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-2}{2}. \end{aligned}$$

Do đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{2-\pi}{2} + \frac{\pi-2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 dx = 0$$

$$\text{Suy ra } f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \text{ hay } f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Bởi vậy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx = -\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Câu 37. (THPT Hậu Lộc 2 - TH - 2018) Cho số thực $a > 0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x) = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx$?

A. $I = \frac{2a}{3}$.

B. $I = \frac{a}{2}$.

C. $I = \frac{a}{3}$.

D. $I = a$.

Lời giải

Đặt $t = a - x \Rightarrow dt = -dx$.

Thay vào ta được $I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)} dt = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-x)} dx$.

Suy ra $0 = \int_0^a \left[\frac{f(a-x) - f(x)}{(1+f(x))(1+f(a-x))} \right] dx$, do hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; a]$. Suy ra $f(a-x) = f(x)$, trên đoạn $[0; a]$.

Mà $f(x) \cdot f(a-x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$. Vậy $I = \int_0^a \frac{1}{2} dx = \frac{a}{2}$.

Câu 38. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018) Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{2}{15}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Ta có: $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x}$ (1)

Đặt $t = 1-x \Rightarrow x = 1-t$, phương trình (1) trở thành $2f(1-t) + 3f(t) = \sqrt{t}$

Thay t bởi x ta được phương trình $3f(x) + 2f(1-x) = \sqrt{x}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x} \\ 3f(x) + 2f(1-x) = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{5}(3\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x})$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{5} \int_0^1 (3\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x}) dx = \frac{3}{5} \int_0^1 \sqrt{x} dx - \frac{2}{5} \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$

*Xét $I = \int_0^1 \sqrt{x} dx$

Đặt $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2u du$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 1$

$\Rightarrow I = 2 \int_0^1 u^2 du = \frac{2u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

*Xét $J = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$

Đặt $v = \sqrt{1-x} \Rightarrow v^2 = 1-x \Rightarrow dx = -2v dv$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow v = 1$; $x = 1 \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow J = -2 \int_1^0 v^2 dv = 2 \int_0^1 v^2 dv = \frac{2v^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}.$$

Câu 39. (Hà Tĩnh - 2018) Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1$, $f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

- A. e^2 . B. $e^{\frac{3}{2}}$. C. e^3 . D. $e^{\frac{5}{2}}$.

Lời giải

Theo bài ra ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0; 2] \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 1 > 0$ do đó $f(x) > 0 \quad \forall x \in [0; 2]$.

$$\text{Ta có } \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = \frac{f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$$

$$\text{Theo đề bài } [f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$$

$$\Rightarrow f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2 = -[f(x)]^2 \Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = -1$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C \Rightarrow \int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^2 (x + C) dx \Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{f(x)} d(f(x)) = \left(\frac{x^2}{2} + Cx \right) \Big|_0^2$$

$$\Rightarrow \ln |f(x)| \Big|_0^2 = 2 + 2C \Rightarrow \ln |e^6| - \ln |1| = 2 + 2C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + 2.$$

$$\text{Do đó } \ln f(x) \Big|_0^1 = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 \Rightarrow \ln f(1) = \frac{5}{2} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{5}{2}}.$$

Câu 40. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[0; 3]$;

$f(3-x) \cdot f(x) = 1, f(x) \neq -1$ với mọi $x \in [0; 3]$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính tích phân: $\int_0^3 \frac{x \cdot f'(x)}{[1 + f(3-x)]^2 \cdot f^2(x)} dx$.

- A. 1. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} (1 + f(3-x))^2 \cdot f^2(x) &= f^2(x) + 2 \cdot f(3-x) \cdot f^2(x) + f^2(3-x) \cdot f^2(x) \\ &= f^2(x) + 2 \cdot f(x) + 1 = (f(x) + 1)^2. \end{aligned}$$

$$I = \int_0^3 \frac{x \cdot f'(x)}{(1 + f(x))^2} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{f'(x)}{(1+f(x))^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{1+f(x)} \end{cases}$$

$$I = \frac{-x}{1+f(x)} \Big|_0^3 + \int_0^3 \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{-3}{1+f(3)} + I_1$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow f(3) = 2$$

$$\text{Đặt } t = 3 - x \Rightarrow dt = -dx$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 3$$

$$x = 3 \Rightarrow t = 0$$

$$I_1 = \int_0^3 \frac{dt}{1+f(3-t)} = \int_0^3 \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^3 \frac{f(x).dx}{1+f(x)}$$

$$2I_1 = \int_0^3 \frac{1+f(x)}{1+f(x)} dx = 3 \Rightarrow I_1 = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } I = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 41. (Sở Bình Phước - 2018) Cho số thực $a > 0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x) = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx$?

A. $I = \frac{a}{3}$.

B. $I = \frac{a}{2}$.

C. $I = a$.

D. $I = \frac{2a}{3}$.

Lời giải

- Đặt $t = a - x \Rightarrow dx = -dt$; đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = a$, $x = a \Rightarrow t = 0$.

$$\Rightarrow I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)} dt = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-x)} dx = \int_0^a \frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}} dx = \int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^a \frac{1+f(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^a dx = x \Big|_0^a = a$$

$$\text{Vậy } I = \frac{a}{2}.$$

Câu 42. (THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và đồng thời thỏa mãn hai điều kiện $f(x+1) = f(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$, $\forall x \neq 0$. Gọi

$$I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+1} dx. \text{ Hãy chọn khẳng định đúng về giá trị của } I.$$

A. $I \in (-1; 0)$.

B. $I \in (1; 2)$.

C. $I \in (0; 1)$.

D. $I \in (-2; -1)$.

Lời giải

- Đặt $y = f(x)$. Khi đó từ giả thiết ta có :

$$f(x+1) = y+1, f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{y+1}{(x+1)^2}, f\left(-\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{y+1}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Suy ra } f\left(\frac{x}{x+1}\right) = f\left(-\frac{1}{x+1} + 1\right) = f\left(-\frac{1}{x+1}\right) + 1 = -\frac{y+1}{(x+1)^2} + 1 = \frac{x^2 + 2x - y}{(x+1)^2} \quad (1)$$

$$\text{Và } f\left(\frac{x+1}{x}\right) = f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{y}{x^2} = \frac{x^2 + y}{x^2},$$

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right) = \frac{f\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} = \frac{\frac{x^2 + y}{x^2}}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} = \frac{x^2 + y}{(x+1)^2} \quad (2).$$

$$\text{- Từ (1) và (2) suy ra : } \frac{x^2 + 2x - y}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + y}{(x+1)^2} \Rightarrow x^2 + 2x - y = x^2 + y \Rightarrow y = x \text{ hay } f(x) = x.$$

$$\text{Do đó: } I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+1} \cdot dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,35.$$

$$\text{Vậy } I \in (0; 1).$$

Câu 43. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn điều kiện

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \text{ và } \int_0^1 xf(x) dx = \frac{3}{2}. \text{ Hỏi giá trị nhỏ nhất của } \int_0^1 f^2(x) dx \text{ bằng bao nhiêu?}$$

A. $\frac{27}{4}$.

B. $\frac{34}{5}$.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta tìm hàm } ax + b \text{ thỏa mãn } \int_0^1 [f(x) - (ax + b)]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(x) dx = 2 \\ \int_0^1 xf(x) dx = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{a}{2}x^2 + bx\right) \Big|_0^1 = 2 \\ \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2\right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b = 2 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a = 6; b = -1.$$

$$+ \int_0^1 [f(x) - (6x - 1)]^2 dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx \geq 2 \int_0^1 f(x)(6x - 1) dx - \int_0^1 (6x - 1)^2 dx = 12 \int_0^1 xf(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 (6x - 1)^2 dx = 7$$

Câu 44. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x) > 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$$(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2} \text{ và } f(0) = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2. \text{ Giá trị } f(3) \text{ bằng}$$

- A. $\frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 5)^2$. B. $4(4\ln 2 - \ln 5)^2$. C. $\frac{1}{4}(4\ln 2 - \ln 5)^2$. D. $2(4\ln 2 - \ln 5)^2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } (x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

Khi đó

$$\int_0^3 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int_0^3 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \Leftrightarrow \int_0^3 \frac{d(f(x))}{\sqrt{f(x)}} = \int_0^3 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} \Big|_0^3 = \ln \frac{x+1}{x+2} \Big|_0^3 \Leftrightarrow 2\sqrt{f(3)} - 2\sqrt{f(0)} = \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(3)} = \ln \frac{8}{5} + 2\sqrt{f(0)} \Leftrightarrow \sqrt{f(3)} = \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 5) + \sqrt{f(0)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{f(3)} = \frac{1}{2}(3\ln 2 - \ln 5) + \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{f(3)} = \frac{1}{2}(4\ln 2 - \ln 5).$$

$$\text{Vậy } f(3) = \frac{1}{4}(4\ln 2 - \ln 5)^2.$$

Câu 45. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn

$$f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \ln(x+1). \text{ Biết } \int_1^{17} f(x) dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c \text{ với } a, b, c \in \mathbb{R}. \text{ Giá trị của}$$

$a+b+2c$ bằng

- A. $\frac{29}{2}$. B. 5. C. 7. D. 37.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2x} \ln(x+1) \Leftrightarrow xf(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}} = \frac{2x+1}{2} \ln(x+1).$$

$$\text{Suy ra } \int_1^4 \left[xf(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}} \right] dx = \int_1^4 \frac{2x+1}{2} \ln(x+1) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^4 \left[xf(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}} \right] dx &= \int_1^4 f(x^2+1) \frac{d(x^2+1)}{2} + \int_1^4 f(\sqrt{x}) \frac{d(\sqrt{x})}{2} \\ &= \int_2^{17} \frac{1}{2} f(x) dx + \int_1^2 \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^{17} f(x) dx. \\ \int_1^4 \frac{2x+1}{2} \ln(x+1) dx &= \frac{1}{2} \int_1^4 \ln(x+1) d(x^2+x) = \frac{1}{2} \left[(x^2+x) \ln(x+1) \Big|_1^4 - \int_1^4 (x^2+x) \frac{1}{x+1} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[20 \ln 5 - 2 \ln 2 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 \right] = \frac{1}{2} \left[20 \ln 5 - 2 \ln 2 - \frac{15}{2} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \int_1^{17} f(x) dx = 20 \ln 5 - 2 \ln 2 - \frac{15}{2} \Rightarrow a = 20, b = 2, c = -\frac{15}{2}.$$

$$\text{Vậy } a + b + 2c = 7.$$

Câu 46. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$6x^2 f(x^3) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{\pi}{8}.$

B. $\frac{\pi}{20}.$

C. $\frac{\pi}{16}.$

D. $\frac{\pi}{4}.$

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $6x^2 f(x^3) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2}$, lấy tích phân từ 0 đến 1 của 2 vế ta được

$$\int_0^1 6x^2 f(x^3) dx + \int_0^1 4f(1-x) dx = \int_0^1 3\sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Đặt } I_1 = \int_0^1 6x^2 f(x^3) dx, I_2 = \int_0^1 4f(1-x) dx, I = \int_0^1 3\sqrt{1-x^2} dx.$$

$$+) \text{ Đặt } t = x^3 \text{ ta được } I_1 = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(x) dx$$

$$+) \text{ Đặt } v = 1-x \text{ ta được } I_2 = 4 \int_0^1 f(v) dv = 4 \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Từ đó ta được } I = 6 \int_0^1 f(x) dx$$

$$+) \text{ Đặt } u = \sin x \text{ ta được } I = \frac{3\pi}{4}, \text{ suy ra } \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{8}.$$

Câu 47. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết

$$f(4x) = f(x) + 4x^3 + 2x \text{ và } f(0) = 2. \text{ Tính } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

A. $\frac{147}{63}.$

B. $\frac{149}{63}.$

C. $\frac{148}{63}.$

D. $\frac{352}{63}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(4x) = f(x) + 4x^3 + 2x \Rightarrow f(4x) - f(x) = 4x^3 + 2x \quad (1).$

Suy ra: $f(x)$ và $f(4x)$ là hàm số bậc ba.

Khi đó: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ và $f(4x) = 64ax^3 + 16bx^2 + 4cx + d.$

Ta có: $f(4x) - f(x) = 63ax^3 + 15bx^2 + 3cx \quad (2).$

Từ (1) và (2) ta suy ra:
$$\begin{cases} a = \frac{4}{63} \\ b = 0 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}.$$
 Mặt khác: vì $f(0) = 2$ nên $d = 2.$

Do đó, $f(x) = \frac{4}{63}x^3 + \frac{2}{3}x + 2.$

Vậy $I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{4}{63}x^3 + \frac{2}{3}x + 2 \right) dx = \frac{352}{63}.$

* Chứng minh $f(x)$ là duy nhất.

Ta có: $f(x) = \frac{4}{63}x^3 + \frac{2}{3}x + 2$ và $f(4x) = \frac{256}{63}x^3 + \frac{8}{3}x + 2; f(4x) - f(x) = 4x^3 + 2x.$

Suy ra: $f(4x) - \frac{4}{63}(4x)^3 - \frac{2}{3}(4x) = f(x) - \frac{4}{63}x^3 - \frac{2}{3}x.$

Đặt $g(4x) = f(4x) - \frac{4}{63}(4x)^3 - \frac{2}{3}(4x)$ và $g(x) = f(x) - \frac{4}{63}x^3 - \frac{2}{3}x.$

Ta có: $g(4x) = g(x); g(0) = f(0) = 2.$

Suy ra: $g(x) = g\left(\frac{x}{4}\right) = g\left(\frac{x}{4^2}\right) = \dots = g\left(\frac{x}{4^n}\right), n \in \mathbb{N}^*$

Khi $n \rightarrow +\infty$ suy ra $g(x) = g(0) = 2.$

Vậy $f(x) = \frac{4}{63}x^3 - \frac{2}{3}x + 2, \forall x$.

Câu 48. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ thỏa mãn

$$\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}, f(2) = 0 \text{ và } \int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7. \text{ Tính tích phân } I = \int_1^2 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{7}{5}$.

B. $I = -\frac{7}{5}$.

C. $I = -\frac{7}{20}$.

D. $I = \frac{7}{20}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} &= \int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_1^2 f(x) d(x-1)^3 = \frac{1}{3} \left[(x-1)^3 f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx \right] \\ &= -\frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx \Rightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx = 1 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \int_1^2 [f'(x) - 7(x-1)^3]^2 dx = \int_1^2 [f'(x)]^2 dx - 14 \int_1^2 f'(x)(x-1)^3 dx + 49 \int_1^2 (x-1)^6 dx = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = 7 \int (x-1)^3 dx = \frac{7(x-1)^4}{4} + C.$$

$$\text{Mà } f(2) = 0 \text{ nên } C = -\frac{7}{4}. \text{ Suy ra } f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left[\frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4} \right] dx = -\frac{7}{5}.$$

Câu 49. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\sin x f(\cos x) + \cos x f(\sin x) = \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{6}$.

B. 1.

C. $\frac{7}{18}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\sin x f(\cos x) + \cos x f(\sin x) = \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f(\cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x \right) dx$$

$$\Rightarrow -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) d(\cos x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) d(\sin x) = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1 - \cos^2 2x}{3} \right) d(\cos 2x).$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -\int_1^0 f(t) dt + \int_0^1 f(u) du = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cos 2x + \frac{\cos^3 2x}{9} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\Rightarrow \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 f(u) du = -\frac{1}{2} \left[\left(-\frac{2}{3} + \frac{-1}{9} \right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9} \right) \right] \\ &\Rightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{9} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{18} \end{aligned}$$

Câu 50. (Chuyên Lam Sơn 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; \pi]$. Biết $f(0) = 2e$ và $f(x)$ thỏa mãn hệ thức $f'(x) + \sin x \cdot f(x) = \cos x \cdot e^{\cos x}, \forall x \in [0; \pi]$. Tính $I = \int_0^{\pi} f(x) dx$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. $I \approx 6,55$. B. $I \approx 17,30$. C. $I \approx 10,31$. D. $I \approx 16,91$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Giả thiết } f'(x) + \sin x \cdot f(x) = \cos x \cdot e^{\cos x} \Leftrightarrow e^{-\cos x} \cdot f'(x) + e^{-\cos x} \cdot \sin x \cdot f(x) = \cos x$$

$$\Leftrightarrow [e^{-\cos x} \cdot f(x)]' = \cos x \Rightarrow e^{-\cos x} \cdot f(x) = \sin x + C_1 \quad (1).$$

$$\text{Do } f(0) = 2e, \text{ thế vào (1) ta được } C_1 = 2 \text{ suy ra } f(x) = (2 + \sin x) e^{\cos x}.$$

$$\text{Dùng máy tính thì } I = \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} (2 + \sin x) \cdot e^{\cos x} dx \approx 10,30532891.$$

Câu 51. (Chuyên Thái Bình - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0; 1]$. Biết $f(x) \cdot f(1-x) = 1$ với $\forall x \in [0; 1]$. Tính giá trị $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(x) \cdot f(1-x) + f(x) = 1 + f(x) \Rightarrow \frac{1}{f(1-x)+1} = \frac{f(x)}{1+f(x)}$$

$$\text{Xét } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)}$$

$$\text{Đặt } t = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t \Rightarrow dx = -dt. \text{ Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0.$$

$$\text{Khi đó } I = -\int_1^0 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+f(1-t)} = \int_0^1 \frac{dx}{1+f(1-x)} = \int_0^1 \frac{f(x) dx}{1+f(x)}$$

Mặt khác $\int_0^1 \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^1 \frac{1+f(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^1 dx = 1$ hay $2I = 1$. Vậy $I = \frac{1}{2}$.

Câu 52. (THPT Cẩm Bình 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn

$f(x) = x \cdot \ln \left(\frac{x^3}{x \cdot f'(x) - f(x)} \right)$ và $f(1) = 0$. Tính tích phân $I = \int_1^5 f(x) dx$.

- A. $12 \ln 13 - 13$. B. $13 \ln 13 - 12$. C. $12 \ln 13 + 13$. D. $13 \ln 13 + 12$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Từ giả thiết và } f(x) &= x \cdot \ln \left(\frac{x^3}{x \cdot f'(x) - f(x)} \right) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln \frac{x^3}{x \cdot f'(x) - f(x)} \\ \Leftrightarrow e^{\frac{f(x)}{x}} &= \frac{x^3}{x \cdot f'(x) - f(x)} \Leftrightarrow \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} \cdot e^{\frac{f(x)}{x}} = x \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \right]' \cdot e^{\frac{f(x)}{x}} = x \quad (1) \end{aligned}$$

Lấy nguyên hàm hai vế của (1) suy ra $e^{\frac{f(x)}{x}} = \frac{x^2}{2} + C$.

Do $f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$, nên $e^{\frac{f(x)}{x}} = \frac{x^2 + 1}{2} \Rightarrow f(x) = x \ln \frac{x^2 + 1}{2}$ với $x \in (0; +\infty)$.

$$I = \int_1^5 f(x) dx = \int_1^5 x \ln \frac{x^2 + 1}{2} dx \quad (2).$$

Đặt $u = \ln \frac{x^2 + 1}{2} \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2 + 1} dx$; $dv = x dx$, chọn $v = \frac{x^2 + 1}{2}$.

Theo công thức tích phân từng phần, ta được:

$$I = \left(\frac{x^2 + 1}{2} \cdot \ln \frac{x^2 + 1}{2} \right) \Big|_1^5 - \int_1^5 x dx = 13 \ln 13 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^5 = 13 \ln 13 - 12.$$

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$,

$[2f(x) + 1 - x^2] f'(x) = 2x[1 + f(x)]$, $\forall x \in [0; 1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét trên đoạn $[0; 1]$, theo đề bài: $[2f(x) + 1 - x^2] f'(x) = 2x[1 + f(x)]$

$$\Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) = 2x + (x^2 - 1) \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow [f^2(x)]' = [x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x)]'$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x) + C \quad (1).$$

Thay $x = 1$ vào (1) ta được: $f^2(1) = 1 + C \Leftrightarrow C = 0$ (vì $f(1) = 1$).

Do đó, (1) trở thành: $f^2(x) = x^2 + (x^2 - 1) \cdot f(x)$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 1 = x^2 - 1 + (x^2 - 1) \cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - 1] \cdot [f(x) + 1] = (x^2 - 1) \cdot [f(x) + 1]$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 = x^2 - 1 \text{ (vì } f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) + 1 > 0 \text{ } \forall x \in [0; 1])$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Câu 54. (Kinh Môn - Hải Dương 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2 \ln 2$ và $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$ (1). Biết $f(2) = a + b \cdot \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị của $2(a^2 + b^2)$ là:

A. $\frac{27}{4}$.

B. 9.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét trên đoạn $[1; 2]$, chia cả hai vế của phương trình (1) cho $(x+1)^2$, ta được:

$$\frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \cdot f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \int \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' dx = \int \frac{x}{x+1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f(x) + C_1 = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \Rightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| + C \text{ (2)}.$$

Theo giả thiết, $f(1) = -2 \ln 2$ nên thay $x = 1$ vào phương trình (2), ta được:

$$\frac{1}{2} f(1) = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow -\ln 2 = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

Thay $x = 2$ vào (2), ta được:

$$\frac{2}{3} f(2) = 2 - \ln 3 - 1 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}. \text{ Vậy } 2(a^2 + b^2) = 9.$$

Câu 55. (Sở Cần Thơ - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1; 3]$;

$f(x) \neq 0, \forall x \in [1; 3]; f'(x)[1 + f(x)]^2 = (x-1)^2 [f(x)]^4$ và $f(1) = -1$. Biết rằng

$\int_e^3 f(x) dx = a \ln 3 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$), giá trị của $a + b^2$ bằng

A. 4.

B. 0.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ } f'(x)[1+f(x)]^2 = (x-1)^2[f(x)]^4 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x-1)^2.$$

$$\text{Hay } \int \left(\frac{f'(x)}{f^4(x)} + \frac{2f'(x)}{f^3(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) dx = \int (x-1)^2 dx \Rightarrow -\left(\frac{1}{3f^3(x)} + \frac{1}{f^2(x)} + \frac{1}{f(x)} \right) = \frac{1}{3}(x-1)^3 + C$$

(2).

$$\text{Do } f(1) = -1 \text{ nên } C = \frac{1}{3}. \text{ Thay vào (2) ta được } \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^3 = -(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x}.$$

$$\text{Khi đó: } \int_e^3 \frac{-1}{x} dx = -\ln|x| \Big|_e^3 = -\ln 3 + 1 \Rightarrow a = -1, b = 1, \text{ nên } a + b^2 = 0.$$

Cách khác

$$\text{Từ } f'(x)[1+f(x)]^2 = (x-1)^2[f(x)]^4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^2 \cdot \frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x-1)^2.$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)' = (x-1)^2.$$

$$\text{Nên } -\int \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)' dx = \int (x-1)^2 dx \Rightarrow -\int \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^2 d\left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right) = \int (x-1)^2 dx.$$

$$\text{Suy ra } -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^3 = \frac{1}{3}(x-1)^3 + C(2).$$

$$\text{Do } f(1) = -1 \text{ nên } C = 0. \text{ Thay vào (2) ta được } \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right)^3 = -(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x}.$$

Câu 56. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1, (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}.$

Tính $f(3)$

A. $f(3) = 1.$

B. $f(3) = e^2.$

C. $f(3) = e^3.$

D. $f(3) = e.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt[3]{e^x} \cdot \sqrt[3]{(f(x))^2} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Rightarrow \int_0^3 \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} dx = \int_0^3 \sqrt[3]{e^x} dx \Leftrightarrow \int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} df(x) = \int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{f(x)} \Big|_0^3 = 3e^{\frac{x}{3}} \Big|_0^3$$

$$\sqrt[3]{f(3)} - \sqrt[3]{f(0)} = e - 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{f(3)} - 1 = e - 1 \Leftrightarrow f(3) = e^3.$$

Câu 57. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^2(1-x) = (x^2+3).f'(x+1) \forall x \in \mathbb{R}$. Biết

$f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, tính $I = \int_0^2 (2x-1)f''(x).dx$.

A. 4.

B. 0.

C. 8.

D. -4.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $u = 2x-1 \Rightarrow du = 2dx$,

$$dv = f''(x)dx \Rightarrow v = f'(x).$$

$$I = \int_0^2 (2x-1)f''(x).dx = (2x-1)f'(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 2f'(x)dx$$

$$= 3f'(2) + f'(0) - 2f(x)\Big|_0^2 = 3f'(2) + f'(0) - 2f(2) + 2f(0) (*).$$

Ta có: $f^2(1-x) = (x^2+3).f'(x+1) \forall x \in \mathbb{R}$

Ta lấy:

$$* x=1 \Rightarrow f^2(0) = 4.f'(2).$$

$$* x=-1 \Rightarrow f^2(2) = 4.f'(0) \Rightarrow f^4(2) = 64.f'(2).$$

Mà theo đề $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(2) = 4$.

Vậy, ta có: $f(2) = f(0) = 4(1)$.

Ta có: $-2f'(1-x)f(1-x) = 2x.f'(x+1) + (x^2+3).f'(x+1)$.

Ta lấy:

$$x=1 \Rightarrow -2f'(0)f(0) = 2f(2) + 4f'(2) \Rightarrow f'(2) + 2f'(0) = -2.$$

$$x=-1 \Rightarrow -2f'(2)f(2) = -2f(0) + 4f'(0) \Rightarrow 2f'(2) + f'(0) = 2.$$

Vậy, ta có: $f'(0) = -2, f'(2) = 2(2)$.

Thế (1) và (2) vào (*), suy ra $I = \int_0^2 (2x-1)f''(x).dx = 3f'(2) + f'(0) - 2f(2) + 2f(0)$

$$= 3.2 - 2 - 2.4 + 2.4 = 4.$$

Câu 58. (Sở Nam Định - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn

$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0;1]$ và $f(1) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. 2.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{21}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } (f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 4 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (8x^2 + 4) dx = \frac{20}{3}. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \int_0^1 xf'(x) dx = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow -4 \int_0^1 xf'(x) dx = -8 + 4 \int_0^1 f(x) dx. \quad (2)$$

$$\int_0^1 (2x)^2 dx = \frac{4}{3}. \quad (3)$$

$$\text{Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được } \int_0^1 (f'(x) - 2x)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C.$$

$$\text{Có } f(1) = C + 1 = 2 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1.$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{4}{3}.$$

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương thỏa mãn $f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + 2x^3, \forall x \in (0; +\infty)$ và

$$\int_2^3 \frac{x^5}{f^2(x)} dx = \frac{1}{20}. \text{ Giá trị của biểu thức } f(2) + f(3) \text{ bằng}$$

A. 110.

B. 90.

C. 20.

D. 25.

Lời giải**Chọn A**

Với $x \in (0; +\infty)$:

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + 2x^3 \Leftrightarrow \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = 2x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = x^2 + C \Leftrightarrow f(x) = x^2(x^2 + C).$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = x^4(x^2 + C)^2.$$

$$\text{Khi đó } \int_2^3 \frac{x^5}{f^2(x)} dx = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \int_2^3 \frac{x}{(x^2 + C)^2} dx = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{d(x^2 + C)}{(x^2 + C)^2} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \int_2^3 \frac{d(x^2 + C)}{(x^2 + C)^2} = \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2 + C} \Big|_2^3 = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{4 + C} - \frac{1}{9 + C} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow C^2 + 13C - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ C = -14 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } C = -14 \Rightarrow f(x) = x^2(x^2 - 14).$$

Chọn $x = 1 \in (0; +\infty)$ ta được $f(1) = -13 < 0$ (vô lý vì $f(x)$ là hàm số dương).

$$+ \text{ Với } C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2(x^2 + 1) \text{ là hàm số dương.}$$

$$\text{Khi đó } f(2) + f(3) = 110.$$

Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}, \forall x \in [0; 1]$

. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{1}{2018.2020}.$

B. $\frac{1}{2019.2020}.$

C. $\frac{1}{2020.2021}.$

D. $\frac{1}{2019.2021}.$

Lời giải**Chọn D**

Ta có:

$$3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow 3x^2 f(x) + x^3 \cdot f'(x) \geq x^{2020} \forall x \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow (x^3 f(x))' \geq x^{2020}, \forall x \in [0;1]$$

$$\Rightarrow x^3 f(x) \geq \int x^{2020} dx, \forall x \in [0;1] \Rightarrow x^3 f(x) \geq \frac{x^{2021}}{2021} + C, \forall x \in [0;1].$$

$$\text{Cho } x=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow x^3 f(x) \geq \frac{x^{2021}}{2021}, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) \geq \frac{x^{2018}}{2021}, \forall x \in [0;1].$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \frac{x^{2018}}{2021} dx = \left(\frac{x^{2019}}{2019 \cdot 2021} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2019 \cdot 2021}.$$

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 2 \ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + 3x + 2$. Giá trị $f(2) = a + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{13}{4}$.

C. $\frac{25}{4}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải**Chọn D**Do hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ nên

$$x(x+1)f'(x) + f(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1} f(x) \right)' = \frac{x+2}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left(\frac{x}{x+1} f(x) \right)' dx = \int_1^2 \frac{x+2}{x+1} dx$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1} f(x) \right) \Big|_1^2 = 1 + \ln \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} f(2) - \frac{1}{2} f(1) = 1 + \ln \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} f(2) - \ln 2 = 1 + \ln \frac{3}{2} \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \ln 3.$$

$$\Rightarrow a = b = \frac{3}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{9}{2}.$$

Câu 62. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính giá trị của tích phân } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

A. $I = e + 2$.

B. $I = 2e + 4$.

C. $I = 2$.

D. $I = 8$.

Lời giải**Chọn C**

Cách 1:

$$3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow 3\int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(2-x)dx = \int_0^2 (2x-2)e^{x^2-2x+1}dx + 4\int_0^2 dx \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = 2-x \Rightarrow \int_0^2 f(2-x)dx = -\int_2^0 f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 f(x)dx \quad (2).$$

$$\text{Đặt } u = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow du = (2x-2)dx \Rightarrow \int_0^2 (2x-2)e^{x^2-2x+1}dx = \int_1^1 e^u du = 0 \quad (3).$$

$$\text{Thay (2) và (3) vào (1)} \Rightarrow 4\int_0^2 f(x)dx = 4\int_0^2 dx \Rightarrow I = \int_0^2 f(x)dx = 2. \text{ Chọn phương án C.}$$

$$\text{Cách 2: Do } 3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{Thay } x = 2-x \text{ vào (1) ta có: } 3f(2-x) + f(x) = -2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: } \begin{cases} 3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) + 3f(2-x) = -2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9f(x) + 3f(2-x) = 6(x-1)e^{x^2-2x+1} + 12 \\ f(x) + 3f(2-x) = -2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 1$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 1)dx = 2$$

Câu 63. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2; 4]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$. Biết rằng

$$f(2) = \frac{7}{4} \text{ và } 4x^3 f(x) = [f'(x)]^3 - x^3, \forall x \in [2; 4]. \text{ Giá trị của } f(4) \text{ bằng}$$

A. $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$.

B. $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$.

C. $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$.

D. $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Lời giải**Chọn D**

Ta có $f'(x) > 0, \forall x \in [2; 4]$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[2; 4]$.

$$\text{Suy ra } f(x) \geq f(2) = \frac{7}{4} > 0, \forall x \in [2; 4] \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác, từ giả thiết ta có } x^3 [4f(x) + 1] = [f'(x)]^3, \forall x \in [2; 4]$$

$$\text{Kết hợp với (1) ta suy ra: } 4x = \frac{4f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}, \forall x \in [2; 4].$$

Lấy tích phân 2 vế cận từ 2 đến 4 ta được:

$$24 = \int_2^4 4x dx = \int_2^4 \frac{4f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}} dx = \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{[4f(x)+1]^2} \right]_2^4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{[4f(x)+1]^2} \Big|_2^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[3]{[4f(4)+1]^2} - \sqrt[3]{[4 \cdot \frac{7}{4} + 1]^2} = 16 \Leftrightarrow \sqrt[3]{[4f(4)+1]^2} = 20$$

$$\Rightarrow [4f(4)+1]^2 = 8000 \Rightarrow f(4) = \frac{40\sqrt{5}-1}{4}.$$

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[e; e^2]$. Biết $x^2 f'(x) \cdot \ln x - xf(x) + \ln^2 x = 0, \forall x \in [e; e^2]$ và $f(e) = \frac{1}{e}$. Tính tích phân $I = \int_e^{e^2} f(x) dx$.

- A. $I = 2$. B. $I = \frac{3}{2}$. C. $I = 3$. D. $I = \ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2 f'(x) \cdot \ln x - xf(x) + \ln^2 x = 0, \forall x \in [e; e^2]$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot f(x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\ln x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{x} + C$ theo đề bài ta có $f(e) = \frac{1}{e} \Rightarrow C = 0$

$$\text{suy ra } f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow I = \int_e^{e^2} f(x) dx = I = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{3}{2}.$$

Câu 65. (Chuyên Vinh – 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 2, f(2) = 1$ và $\int_1^2 [xf'(x)]^2 dx = 2$. Tích phân $\int_1^2 x^2 f(x) dx$ bằng

- A. 4..
B. 2.
C. 1.
D. 3.

Lời giải

Chọn **D**

$$\text{Ta có: } \int_1^2 \frac{4}{x^2} dx = -\frac{4}{x} \Big|_1^2 = 2; \quad \int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^2 = -1$$

$$\text{Vì } \int_1^2 \left[(xf'(x))^2 + 4f'(x) + \frac{4}{x^2} \right] dx = 0 \text{ nên } \int_1^2 \left[xf'(x) + \frac{2}{x} \right]^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x} + C$$

$$\text{Mà } f(1) = 2 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x}$$

$$\text{Khi đó } \int_1^2 x^2 f(x) dx = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{2}{x^2} dx = 2x \Big|_1^2 = 3.$$

Câu 66. (Liên trường Hà Tĩnh – 2022) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} e^{3x}(4f(x) + f'(x)) = 2\sqrt{f(x)}, \forall x \geq 0 \text{ và } f(0) = 1. \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ Tính } I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx$$

A. $I = \frac{11}{24}.$

B. $I = -\frac{1}{12}.$

C. $I = \frac{209}{640}.$

D. $I = \frac{201}{640}.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } e^{3x}(4f(x) + f'(x)) = 2\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow 2e^{2x}\sqrt{f(x)} + e^{2x} \cdot \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow (e^{2x} \cdot \sqrt{f(x)})' = \frac{1}{e^x}.$$

$$\text{Do đó } e^{2x} \cdot \sqrt{f(x)} \text{ là một nguyên hàm của } \frac{1}{e^x}, \text{ tức } e^{2x} \cdot \sqrt{f(x)} = -\frac{1}{e^x} + C.$$

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào ta được } C = 2. \text{ Tìm được } f(x) = \left(\frac{2}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{3x}} \right)^2.$$

$$I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx = \int_0^{\ln 2} \left(\frac{2}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{3x}} \right)^2 dx = \int_0^{\ln 2} \left(\frac{4}{e^{4x}} - \frac{4}{e^{3x}} + \frac{1}{e^{6x}} \right) dx = \frac{209}{640}.$$

Câu 67. (THPT Nguyễn Tất Thành-Đh-SP-HN-2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục

trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ $f(0) = 1$ và $f'(x) = -4x^3(f(x))^2 \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_0^1 x^3 \cdot f(x) dx.$$

A. $I = \frac{\ln 2}{4}.$

B. $I = \ln 2.$

C. $I = \frac{1}{4}.$

D. $I = \frac{1}{6}.$

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

$$\text{Ta có: } f'(x) = -4x^3(f(x))^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -4x^3 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = \int 4x^3 dx = x^4 + C$$

Do $f(0) = 1$ nên $C = 1$. Từ đó: $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1} \Rightarrow x^3 f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$

Vậy $I = \int_0^1 x^3 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d(x^4 + 1)}{x^4 + 1} = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \ln 2$.

Câu 68. (Sở Thanh Hóa 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$2f(x) + xf'(x) = 3x + 10, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 6$. Biết

$\int_{-1}^4 \frac{\ln(2 + \sqrt{f(x)})}{f^2(x) - 6f(x) + 9} dx = a \ln 5 + b \ln 6 + \sqrt{c} \ln(2 + \sqrt{3}), (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Khi đó $a + b + c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(2; 3)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Ta có $2f(x) + xf'(x) = 3x + 10 \Leftrightarrow f'(x) + \frac{2}{x} f(x) = 3 + \frac{10}{x} \Leftrightarrow x^2 f'(x) + 2xf'(x) = 3x^2 + 10x$

$\Leftrightarrow (x^2 f(x))' = 3x^2 + 10x \Rightarrow x^2 f(x) = \int (3x^2 + 10x) dx = x^3 + 5x^2 + C; f(1) = 6 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x + 5$.

Khi đó $I = \int_{-1}^4 \frac{\ln(2 + \sqrt{f(x)})}{f^2(x) - 6f(x) + 9} dx = \int_{-1}^4 \frac{\ln(2 + \sqrt{f(x)})}{(f(x) - 3)^2} dx = \int_{-1}^4 \frac{\ln(2 + \sqrt{x+5})}{(x+2)^2} dx$.

Trước tiên từng phần

$$I = \int_{-1}^4 \ln(2 + \sqrt{x+5}) d\left(-\frac{1}{x+2}\right) = -\frac{1}{x+2} \ln(2 + \sqrt{x+5}) \Big|_{-1}^4 + \int_{-1}^4 \frac{1}{x+2} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+5}}}{2 + \sqrt{x+5}} dx$$

$$= -\frac{1}{6} \ln 5 + \ln 4 + \int_{-1}^4 \frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{2 + \sqrt{x+5}} dx = -\frac{1}{6} \ln 5 + \ln 4 + K.$$

Tích phân K chúng ta đổi biến $t = 2 + \sqrt{x+5} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} dx; x+5 = (t-2)^2 \Rightarrow x+2 = (t-2)^2 - 3$.

Đổi cận $x = -1 \Rightarrow t = 4; x = 4 \Rightarrow t = 5 \Rightarrow K = \int_4^5 \frac{1}{t((t-2)^2 - 3)} dt$.

Đồng nhất hệ số $\frac{1}{t((t-2)^2 - 3)} = \frac{a}{t} + b \cdot \frac{2(t-2)}{(t-2)^2 - 3} + \frac{c}{(t-2)^2 - 3} \Rightarrow a = 1; b = -\frac{1}{2}; c = 2$.

$$\begin{aligned}
K &= \int_4^5 \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2(t-2)}{(t-2)^2-3} + \frac{2}{(t-2)^2-3} \right] dt = \left(\ln|t| - \frac{1}{2} \ln|(t-2)^2-3| + \frac{2}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-2-\sqrt{3}}{t-2+\sqrt{3}} \right| \right) \Big|_4^5 \\
&= \ln 5 - \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 6 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} - \ln \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right) = \ln 5 - \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 6 + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(2+\sqrt{3}) \\
I &= \left(-\frac{1}{6} \ln 5 + \ln 4 \right) + \left(\ln 5 - \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 6 + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(2+\sqrt{3}) \right) \\
&= \frac{5}{6} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 6 + \sqrt{\frac{1}{3}} \ln(2+\sqrt{3}) \Rightarrow a+b+c = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Câu 69. (Sở Bắc Giang 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm xác định trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $x(f'(x) + x) = (x+1)f(x); f(1) = e+1$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)dx = \frac{a}{b}$; trong đó a, b là những số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó giá trị của $(2a+b)$ tương ứng bằng:

- A. 4.
- B. 5.
- C. 8.
- D. 7.

Lời giải

Ta có: $x(f'(x) + x) = (x+1)f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - xf(x) - f(x) = -x^2$

Với $x=0$ ta có: $f(0) = 0$ (1)

Với $x \neq 0$

Chia cả hai vế cho x^2 : $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - \frac{f(x)}{x} = -1 \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \right]' - \frac{f(x)}{x} = -1$

Nhân hai vế với e^{-x} : $e^{-x} \left[\frac{f(x)}{x} \right]' - e^{-x} \frac{f(x)}{x} = -e^{-x} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \cdot e^{-x} \right]' = -e^{-x}$

Lấy nguyên hàm hai vế: $\frac{f(x)}{x} \cdot e^{-x} = e^{-x} + C$

Do $f(1) = e+1$ nên: $\frac{f(1)}{1} \cdot e^{-1} = e^{-1} + C \Leftrightarrow C = 1$

Vậy $\frac{f(x)}{x} \cdot e^{-x} = e^{-x} + 1 \Leftrightarrow f(x) = x(1+e^x)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $f(x) = x(1+e^x)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài

Khi đó: $\int_0^1 x(1+e^x)dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \int_0^1 xe^x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + (xe^x - e^x) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$.

Kết luận $(2a+b) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$.

Câu 70. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình – 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm không âm trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0;1]$ và $[f(x)]^2 \cdot [f'(x)]^2 (x^2 + 1)^2 = 1 + [f(x)]^2$. Nếu $f(0) = \sqrt{3}$ thì giá trị $f(1)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(3; \frac{7}{2}\right)$.

B. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } [f(x)]^2 \cdot [f'(x)]^2 (x^2 + 1)^2 = 1 + [f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^2 \cdot [f'(x)]^2}{1 + [f(x)]^2} = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + [f(x)]^2}} = \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + [f(x)]^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + [f(x)]^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$+ \text{ Nếu đặt } t = \sqrt{1 + [f(x)]^2} \Rightarrow dt = \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + [f(x)]^2}} dx \Rightarrow VT = \int_2^{\sqrt{1 + f^2(1)}} dt = \sqrt{1 + f^2(1)} - 2$$

$$+ \text{ Nếu đặt } x = \tan u \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 u) du$$

$$\Rightarrow VP = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 u} (1 + \tan^2 u) dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sqrt{1 + f^2(1)} - 2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(1) = \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \pi + 3} \approx 2,6 \in \left(\frac{5}{2}; 3\right).$$

Câu 71. (Chuyên Lam Sơn 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; \pi)$ thỏa mãn

$$f'(x) = f(x) \cdot \cot x + 2x \cdot \sin x. \text{ Biết } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}. \text{ Tính } f\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

A. $\frac{\pi^2}{36}$.

B. $\frac{\pi^2}{72}$.

C. $\frac{\pi^2}{54}$.

D. $\frac{\pi^2}{80}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f(x) \cdot \cot x + 2x \cdot \sin x \Leftrightarrow \sin x \cdot f'(x) - f(x) \cdot \cos x + 2x \cdot \sin^2 x \\
&\Leftrightarrow \sin x \cdot f'(x) - f(x) \cdot \cos x = 2x \cdot \sin^2 x \\
&\Leftrightarrow \frac{\sin x \cdot f'(x) - f(x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} = 2x \\
&\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot f'(x) - f(x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2x \cdot dx \\
&\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(x)}{\sin x} \right) dx = x^2 \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sin x} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{36} \\
&\Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1} - \frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{36} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{72}
\end{aligned}$$

Câu 72. (Sở Hưng Yên 2022) Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ và $f'(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + 1, \forall x \in (0; \pi)$. Khi đó

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx \text{ bằng}$$

- A.** $\ln 2 + \frac{\pi^2}{32} + \pi$. **B.** $\ln 2 - \frac{\pi^2}{32} + \pi$. **C.** $-\ln 2 + \frac{\pi^2}{32} - \pi$. **D.** $\ln 2 + \frac{\pi^2}{32} - \pi$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + 1 \text{ suy ra } f(x) = \int \left[\frac{2}{\sin^2 x} + 1 \right] dx = -2 \cot x + x + C.$$

$$\text{Mà } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \text{ suy ra } C = 4 - \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[-2 \cot x + x + 4 - \frac{\pi}{2} \right] dx = \left[-2 \ln |\sin x| + \frac{x^2}{2} + \left(4 - \frac{\pi}{2} \right) x \right] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \ln 2 + \frac{\pi^2}{32} + \pi.$$

Câu 73. (THPT Đồng Lộc - Hà Tĩnh 2022) Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}. \text{ Tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A.** $\frac{\pi}{16}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{20}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Tích phân hai vế của } 4x \cdot f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2} \text{ ta được:}$$

$$4 \int_0^1 xf(x^2)dx + 3 \int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \quad (1).$$

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, ta có:

$$\int_0^1 xf(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x^2)d(x^2) = \frac{1}{2} [F(1^2) - F(0^2)] = \frac{1}{2} [F(1) - F(0)]$$

$$\int_0^1 f(1-x)dx = - \int_0^1 f(1-x)d(1-x) = -[F(1-1) - F(1-0)] = F(1) - F(0)$$

Mặt khác, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ là $\frac{1}{4}$ diện tích hình tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R=1$ nên

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Do đó, } (1) \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} [F(1) - F(0)] + 3 [F(1) - F(0)] = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow F(1) - F(0) = \frac{\pi}{20}.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{20}.$$

Câu 74. (THPT Ninh Bình - Bạc Liêu 2022) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5.

B. 20.

C. 15.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 2x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = x^2(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x + 3 \Rightarrow \int_1^2 \left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx = \int_1^2 (2x + 3) dx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right) \Big|_1^2 = (x^2 + 3x) \Big|_1^2 \Rightarrow \frac{f(2)}{2} - \frac{f(1)}{1} = (2^2 + 3 \cdot 2) - (1^2 + 3 \cdot 1) \Rightarrow f(2) = 20$$

Câu 75. (Sở Lạng Sơn 2022) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1-x) + x^2 f''(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x$ với mọi

$x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{3}{4}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Do vế phải của $f(1-x) + x^2 f''(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x$ (1) là hàm bậc ba nên giả sử $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

Do đó

$$f(1-x) + x^2 f''(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow a(1-x)^3 + b(1-x)^2 + c(1-x) + d + x^2(6ax + 2b) = 5x^3 + 3x^2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow a - 3ax + 3ax^2 - ax^3 + b - 2bx + bx^2 + c - cx + 6ax^3 + 2bx^2 = 5x^3 + 3x^2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow 5ax^3 + (3a + 3b)x^2 - (3a + 2b + c)x + a + b + c + d = 5x^3 + 3x^2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 5 \\ 3a + 3b = 3 \\ 3a + 2b + c = 3 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 1.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = -\frac{3}{4}.$$

Câu 76. (Sở Thanh Hóa 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của

$f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) + G(2) = 4$ và $F(1) + G(1) = 1$. Khi đó $\int_0^x \sin \frac{x}{2} f\left(\cos \frac{x}{2} + 1\right) dx$ bằng

A. 6.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 3.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $G(x) = F(x) + C$

$$\begin{cases} F(2) + G(2) = 4 \\ F(1) + G(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(2) + C = 4 \\ 2F(1) + C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow F(2) - F(1) = \frac{3}{2}.$$

$$I = \int_0^x \sin \frac{x}{2} f\left(\cos \frac{x}{2} + 1\right) dx.$$

Đặt $t = \cos \frac{x}{2} + 1$, ta có $dt = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} dx$

x	0	π	
t	2	1	

$$\text{Vậy } I = \int_0^{\pi} f\left(\cos \frac{x}{2} + 1\right) \sin \frac{x}{2} dx = \int_2^1 f(t)(-2)dt = 2 \int_1^2 f(t)dt$$

$$= 2 \int_1^2 f(x)dx = 2(F(2) - F(1)) = 3.$$

Câu 77. (Sở Bắc Ninh 2023) Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số a để $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_a(1 + \tan x)dx \geq \frac{\pi}{16}$ bằng

- A.** 9.
- B.** 10.
- C.** 5.
- D.** 14.

Lời giải

Chọn A

$$+) \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ a \geq 2 \end{cases}$$

$$\bullet I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_a(1 + \tan x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_a \left[1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_a \left[1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_a \left[\frac{2}{1 + \tan x} \right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\log_a 2 - \log_a(1 + \tan x)] dx = (\log_a 2) \cdot x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot \log_a 2 \cdot \frac{\pi}{4}.$$

$$\bullet I \geq \frac{\pi}{16} \Leftrightarrow \log_a 2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 a \leq 2 \Leftrightarrow a \leq 4$$

$$\Rightarrow a \in \{2; 3; 4\}$$

Câu 78. (Sở Bình Phước 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4) - 2G(4) = 6$ và $F(-8) - 2G(-8) = -2$. Khi đó $\int_{-1}^3 f(3x-5)dx$ bằng

- A.** 8.
- B.** $\frac{8}{3}$.
- C.** -3.
- D.** $-\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } 3x - 5 = t \Rightarrow 3dx = dt. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = -8 \\ x = 3 \Rightarrow t = 4 \end{cases}$$

$$\text{Nên: } \int_{-1}^3 f(3x-5)dx = \frac{1}{3} \int_{-8}^4 f(t)dt = \frac{1}{3}(F(4) - F(-8)) \quad (1)$$

Vì $F(x), G(x)$ là 2 nguyên hàm của $f(x)$ nên $F(x) = G(x) + C$.

$$\text{Theo giả thiết: } \begin{cases} F(4) = G(4) + C \\ F(4) = 2G(4) + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2F(4) = 2G(4) + 2C \\ F(4) = 2G(4) + 6 \end{cases} \Rightarrow F(4) = 2C - 6.$$

$$\text{Và: } \begin{cases} F(-8) = G(-8) + C \\ F(-8) = 2G(-8) - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2F(-8) = 2G(-8) + 2C \\ F(-8) = 2G(-8) - 2 \end{cases} \Rightarrow F(-8) = 2C + 2$$

$$\text{Thế } F(4), F(-8) \text{ vào (1) ta được: } \int_{-1}^3 f(3x-5)dx = \frac{1}{3}[(2C-6) - (2C+2)] = -\frac{8}{3}.$$

Câu 79. (Sở Sơn La 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2F(11) + G(11) = 55$ và $2F(-1) + G(-1) = 1$ Khi đó $\int_0^2 x(2 + f(3x^2 - 1))dx$ bằng

A. 7.

B. 20.

C. 5.

D. 22.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_0^2 x(2 + f(3x^2 - 1))dx = \int_0^2 2x dx + \int_0^2 xf(3x^2 - 1)dx = 4 + \int_0^2 xf(3x^2 - 1)dx = 4 + I.$$

$$\text{Đặt } t = 3x^2 - 1 \Rightarrow dt = 6x dx \Rightarrow \frac{1}{6} dt = x dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = -1; x = 2 \Rightarrow t = 11.$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{1}{6} \int_{-1}^{11} f(t)dt = \frac{1}{6} \int_{-1}^{11} f(x)dx = \frac{1}{6}(F(11) - F(-1)).$$

$$\text{Vì } F(x), G(x) \text{ là hai nguyên hàm của } f(x) \text{ trên } \mathbb{R} \Rightarrow F(x) = G(x) + C.$$

$$\text{Suy ra } F(11) - F(-1) = G(11) - G(-1).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2F(11) + G(11) = 55 \\ 2F(-1) + G(-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2(F(11) - F(-1)) + G(11) - G(-1) = 54$$

$$\Rightarrow 3(F(11) - F(-1)) = 54 \Rightarrow F(11) - F(-1) = 18.$$

$$\text{Suy ra } I = 3. \text{ Vậy } \int_0^2 x(2 + f(3x^2 - 1))dx = 4 + 3 = 7.$$

Câu 80. (THPT Nam Trực – Nam Định 2023) Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$

và thỏa mãn $\sqrt{x^3 + 1} \cdot [4x \cdot f'(1-x) - f(x)] = x^5, \forall x \in [0;1]$. Tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$ có kết quả dạng

$$\frac{a - b\sqrt{2}}{c}, (a, b, c \in \mathbb{N}^*, \frac{a}{c}, \frac{b}{c} \text{ là phân số tối giản}). \text{ Giá trị } T = a - 2b + 3c \text{ bằng}$$

A. 89.

B. 27.

C. 35.

D. 81.

Lời giải

$$\text{Từ } \sqrt{x^3+1} \cdot [4x \cdot f'(1-x) - f(x)] = x^5 \Rightarrow 4x \cdot f'(1-x) - f(x) = \frac{x^5}{\sqrt{x^3+1}}$$

$$\text{Lấy tích phân hai vế từ 0 đến 1 ta được: } 4 \int_0^1 x f'(1-x) dx - \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{x^3+1}} dx$$

$$\text{Đổi biến } t = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t \Rightarrow dx = -dt; x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=0$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 x f'(1-x) dx = \int_1^0 (1-t) f'(t) \cdot (-dt) = \int_0^1 (1-t) f'(t) dt \text{ sau đó từng phần}$$

$$= \int_0^1 (1-t) d(f(t)) = (1-t)f(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 f(t) dt = -f(0) + \int_0^1 f(t) dt$$

$$\text{Vậy } 4(-f(0) + I) - I = \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{x^3+1}} dx$$

$$\text{Thay } x=0 \text{ vào phương trình đã cho suy ra } f(0)=0 \Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{x^3+1}} dx.$$

$$\text{Đổi biến } \sqrt{x^3+1} = t \Rightarrow x^3+1 = t^2 \Rightarrow 3x^2 dx = 2t dt; x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2-1}{t} \cdot \frac{2}{3} t dt = \frac{2}{9} \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1) dt = \frac{4-2\sqrt{2}}{27} \Rightarrow a=4, b=2, c=27.$$

$$\Rightarrow T = a - 2b + 3c = 4 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 27 = 81.$$

Chọn đáp án **D.**

Câu 81. (Sở Phú Thọ 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết

$$f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0)=0; f(x) > -1, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } \int_0^{2\sqrt{2}} f'(x) dx \text{ bằng}$$

A. 3.

B. 8.

C. -1.

D. 6.

Lời giải

Ta có

$$\int_0^{2\sqrt{2}} f'(x) dx = f(2\sqrt{2}) - f(0) = f(2\sqrt{2})$$

$$f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1} \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+1}} dx = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)+1} \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{f(2\sqrt{2})+1} - \sqrt{f(0)+1} = 2 \Leftrightarrow f(2\sqrt{2}) = 8.$$

Chọn đáp án

B.

Câu 82. (Sở Thừa Thiên Huế 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) + x = \int_0^2 [f(x) - x] dx, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Xác định giá trị } m \text{ để } \int_0^2 [mx + f(x)] dx = 0.$$

A. $m = 0$.

B. $m = -2$.

C. $m = -1$.

D. $m = -3$.

Lời giải

$$\text{Theo đề ta có } f(x) + x = \int_0^2 [f(x) - x] dx = \underbrace{\int_0^2 f(x) dx}_k - \int_0^2 x dx = k - 2 \quad (1), \text{ với } k \text{ là hằng số.}$$

$$\text{Suy ra } f(x) = -x + k - 2.$$

Mặt khác, lấy tích phân cận từ 0 tới 2 hai vế của (1) ta được

$$\underbrace{\int_0^2 f(x) dx}_k + \underbrace{\int_0^2 x dx}_{=2} = \int_0^2 (k - 2) dx \Rightarrow k + 2 = 2(k - 2) \Rightarrow k = 6.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = -x + 4, \text{ thử lại thấy thỏa mãn } f(x) + x = \int_0^2 [f(x) - x] dx, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Theo đề } \int_0^2 [mx + f(x)] dx = 0 \Leftrightarrow m \underbrace{\int_0^2 x dx}_2 + \underbrace{\int_0^2 f(x) dx}_6 = 0 \Leftrightarrow 2m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3.$$

Câu 83. (Cụm Nam Trực – Nam Định 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn

$$\sqrt{x^3+1} [4xf'(1-x) - f(x)] = x^5. \text{ Tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx = \frac{a-b\sqrt{2}}{c}, (a, b, c \in \mathbb{Z}^+; (a, c) = (b, c) = 1). \text{ Giá trị}$$

$$T = a - 2b + 3c \text{ bằng}$$

A. 89.

B. 27.

C. 35.

D. 81.

Lời giải

Chọn D

$$\forall x \in [0; 1]: \sqrt{x^3 + 1} [4xf'(1-x) - f(x)] = x^5 \Leftrightarrow 4xf'(1-x) - f(x) = \frac{x^5}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [4xf'(1-x) - f(x)] dx = \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 4[1 - (1-x)]f'(1-x) dx - \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 4(1-x)f'(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^3 \cdot x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx.$$

Tính $I = \int_0^1 \frac{x^3 \cdot x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$. Đặt $t = \sqrt{x^3 + 1} \Rightarrow t^2 = x^3 + 1 \Rightarrow 2t dt = 3x^2 dx$.

$$I = \int_0^1 \frac{x^3 \cdot x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx = \frac{2}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2 - 1}{t} t dt = \frac{2}{3} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{9}.$$

Từ giả thiết, ta có: $f(0) = 0$.

$$J = \int_0^1 (1-x)f'(x) dx = (1-x)f(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

Từ đó, ta được:

$$\int_0^1 4(1-x)f'(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^3 \cdot x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx \Leftrightarrow 3 \int_0^1 f(x) dx = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{9} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{27}.$$

Vậy $a = 4, b = 2, c = 27 \Rightarrow a - 2b + 3c = 4 - 4 + 81 = 81$.

Câu 84. (Sở Hà Nam 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f(x) > 0, \forall x \geq 0 \text{ và } (x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}, \forall x \geq 0. \text{ Tính } \sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)}.$$

A. $\ln \frac{9}{8}$.

B. $\frac{1}{2} \ln \frac{9}{8}$.

C. $\ln \frac{4}{3}$.

D. $\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$

Lấy tích phân hai vế ta có:

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int_1^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{d(f(x))}{\sqrt{f(x)}} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} \Big|_1^2 = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \Big|_1^2 \Leftrightarrow 2[\sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)}] = \ln \frac{3}{4} - \ln \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)} = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{8}.$$

Câu 85. (Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và khác 0 trên $[-1; 2]$, thỏa mãn $x \cdot f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f^2(x) + 2f(x)$ và $f(1) = \frac{1}{2}$. Biết

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = a + b \ln 2, (a, b \in \mathbb{Z}), \text{ biểu thức } a + b \text{ bằng}$$

- A. -9.
- B. 3.
- C. 4.
- D. 0.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục và khác 0 trên $[-1; 2]$, ta có $x \cdot f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f^2(x) + 2f(x)$ nên

$$(x \cdot f(x))' = f^2(x) + 2f(x) \Leftrightarrow f(x) + x \cdot f'(x) = f^2(x) + 2f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - x \cdot f'(x)}{f^2(x)} = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{f(x)} \right)' = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{f(x)} = -x + C.$$

$$\text{Vì } f(1) = \frac{1}{2} \text{ nên } C = 3. \text{ Suy ra } f(x) = \frac{x}{-x+3} = -1 - \frac{3}{x-3}.$$

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 \left(-1 - \frac{3}{x-3} \right) dx = (-x - 3 \ln |x-3|) \Big|_{-1}^2 = -3 + 6 \ln 2$$

Do đó $a = -3; b = 6$. Giá trị biểu thức $a + b = 3$.

Câu 86. (Sở Quảng Bình 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(10) + G(1) = -11$ và $F(0) + G(10) = 1$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \cdot f(\sin 2x) dx$ bằng

- A. 5.
- B. 10.
- C. -12.
- D. -6.

Lời giải

Chọn D

Vì $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$

$$\text{Ta có } G(x) = F(x) + C \Rightarrow \begin{cases} G(10) = F(10) + C \\ G(1) = F(1) + C \end{cases} \Rightarrow G(10) - G(1) = F(10) - F(1).$$

$$\text{Theo bài ra ta lại có } \begin{cases} F(10) + G(1) = -11 & (1) \\ F(0) + G(10) = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy (1) - (2) ta được } F(10) - F(0) - [G(10) - G(1)] = -12$$

$$\Leftrightarrow F(10) - F(0) - [F(10) - F(1)] = -12 \Leftrightarrow F(1) - F(0) = -12$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \cdot f(\sin 2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) d(\sin 2x) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) d(t) = \frac{1}{2} [F(1) - F(0)] = -6$$

$$\text{Vậy } I = -6.$$

Câu 87. (Sở Phú Thọ 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ thỏa mãn

$$f(x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x, \forall x \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]. \text{ Tích phân } I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{2}{3}.$

B. $\frac{16}{9}.$

C. $\frac{8}{9}.$

D. $\frac{3}{4}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2 + x} + \frac{1}{x+1} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x - 1.$$

$$\text{Suy ra } \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx + \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{1}{x+1} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{\frac{1}{3}}^3 (x-1) dx. (*)$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{x} \text{ suy ra } dx = -\frac{1}{t^2} dt \text{ và } x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{t}{t+1}.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \Rightarrow t = 3 \\ x = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{1}{x+1} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\int_3^{\frac{1}{3}} \frac{t}{t+1} \cdot f(t) \cdot \frac{1}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(t)}{t^2 + t} dt = I.$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow 2I = \frac{16}{9} \Leftrightarrow I = \frac{8}{9}.$$

Câu 88. (Sở Nam Định 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(1) = 5 \text{ và } xf'(1-x^3) + f'(x) = x^7 - 5x^4 + 7x + 3 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x)dx.$$

A. $-\frac{5}{6}$

B. $-\frac{13}{12}$

C. $\frac{5}{6}$

D. $\frac{17}{6}$

Lời giải

Chọn D.

$$xf'(1-x^3) + f'(x) = x^7 - 5x^4 + 7x + 3 \Leftrightarrow -3x^2 \cdot f'(1-x^3) - 3xf'(x) = -3x^8 + 15x^5 - 21x^2 - 9x.$$

$$\int_0^1 (-3x^2 \cdot f'(1-x^3) - 3xf'(x))dx = \int_0^1 (-3x^8 + 15x^5 - 21x^2 - 9x)dx$$

$$\int_0^1 -3x^2 \cdot f'(1-x^3)dx - 3 \int_0^1 xf'(x)dx = -\frac{28}{3}$$

$$\text{Xét } A = \int_0^1 -3x^2 \cdot f'(1-x^3)dx = \int_1^0 f(t)dt = -\int_0^1 f(x)dx$$

$$B = \int_0^1 xf'(x)dx = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 5 - \int_0^1 f(x)dx.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 -3x^2 \cdot f'(1-x^3)dx - 3 \int_0^1 xf'(x)dx = -\int_0^1 f(x)dx - 15 + 3 \int_0^1 f(x)dx = -\frac{28}{3} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{17}{6}$$

Câu 89. (Sở Lạng Sơn 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{(\sin x + 2 \cos x)^2}$ với mọi

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ và } f(0) = 0. \text{ Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{3\pi + 2 \ln 2}{10}.$

B. $\frac{\pi - \ln 2}{5}.$

C. $\frac{-\pi + \ln 2}{5}.$

D. $\frac{\pi + 4 \ln 2}{20}.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(x) = \int \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sin^2(x + \alpha)}, \text{ với } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } f(x) = -\frac{1}{5} \cot(x + \alpha) + C, \text{ mà } f(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{10}.$$

$$\text{Tính } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \left(-\frac{1}{5} \ln |\sin(x + \alpha)| + \frac{x}{10} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{5} \ln(\cot \alpha) + \frac{\pi}{20} = \frac{4 \ln 2 + \pi}{20}.$$

Câu 90. (Sở Kon Tum 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(0) = 0 \text{ và } f(x) + f'(x) = x - 2, \forall x \in [0;1]. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $-\frac{5e+3}{2e}.$

B. $\frac{3-2e}{5}.$

C. $\frac{e-6}{2e}.$

D. $-\frac{5}{2}.$

Lời giải

Chọn C

Vì $e^x > 0$ nên nhân cả hai vế của giả thiết với e^x , ta được $e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = (x-2)e^x$

$$\Leftrightarrow (e^x)' \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = (x-2)e^x \Leftrightarrow (e^x \cdot f(x))' = (x-2)e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x \cdot f(x) = \int (x-2)e^x dx = \int (x-2) \cdot d(e^x) = (x-2)e^x - \int e^x dx = (x-2)e^x - e^x + C$$

$$\Leftrightarrow e^x \cdot f(x) = (x-3)e^x + C \text{ mà } f(0) = 0 \text{ suy ra } e^0 \cdot f(0) = (0-3)e^0 + C \Leftrightarrow C = 3.$$

$$\text{Do đó } e^x \cdot f(x) = (x-3)e^x + 3 \Leftrightarrow f(x) = x-3 + \frac{3}{e^x}$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(x-3 + \frac{3}{e^x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 3x - \frac{3}{e^x} \right) \Big|_0^1 = \frac{e-6}{2e}.$$

Câu 91. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

thỏa mãn $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + \sin 2x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot f'(2x) dx$ gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

A. 1,08 .

B. 0,07 .

C. 0,83 .

D. 0,17 .

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Xét } A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot f'(2x) dx$$

$$+) \text{ Đặt } t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$$

$$+) x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{2} \cdot f'(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot f'(t) dt = \frac{1}{4} \left[t f(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt \right]$$

$$\text{Xét } f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + \sin 2x (*)$$

$$+) \text{ Từ } (*) \text{ suy ra } f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \text{ mà } f(0) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$+) \text{ Từ } (*) \text{ suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin 2x) dx (**)$$

$$\text{Đặt } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = I$$

$$\text{Khi đó } (**) \Leftrightarrow 2I = \frac{\pi}{2} + 1 \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{2} \cdot f'(t) dt = \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{2} \cdot 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right] = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8} \approx 0,07.$$

Câu 92. (Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ không âm và có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$. Biết $f(1) = 3$ và $\left[2f(x) + 1 - 3x^2\right] f'(x) = 6x[1 + f(x)], \forall x \in [0; 1]$. Tích phân

$$\int_0^1 \left[f^3(x) - \frac{6}{7} \right] dx \text{ bằng}$$

A. 2.

B. $\frac{27}{7}$.

C. 3.

D. $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \bullet & \left[2f(x) + 1 - 3x^2\right] f'(x) = 6x[1 + f(x)] \Leftrightarrow 6x \cdot f(x) + (3x^2 - 1) \cdot f'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 6x \\ \bullet & \left[(3x^2 - 1) \cdot f(x)\right]' = 2f(x) \cdot f'(x) - 6x \Rightarrow (3x^2 - 1) \cdot f(x) = f^2(x) - 3x^2 + C. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } f(1) = 3 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow (3x^2 - 1)f(x) = f^2(x) - 3x^2 \Rightarrow f(x)[f(x) + 1] = 3x^2[f(x) + 1].$$

$$\text{Do } y = f(x) \text{ không âm} \Rightarrow f(x) + 1 > 0 \Rightarrow f(x) = 3x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x^2 \Rightarrow \int_0^1 \left[f^3(x) - \frac{6}{7} \right] dx = \int_0^1 \left[(3x^2)^3 - \frac{6}{7} \right] dx = 3.$$

Câu 93. (Sở Cà Mau 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ và thỏa mãn

$$f(x-1) - 3 \cdot f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) = 1 - 2x, \forall x \neq \frac{1}{2}. \text{ Biết } I = \int_1^2 f(x) dx = a + b \ln 3 + c \ln 5 \text{ với } a, b, c \text{ là các số hữu tỉ.}$$

Tính giá trị biểu thức $P = 8a - 16b + 16c$

A. $P = 16$.

B. $P = 4$.

C. $P = 10$.

D. $P = 8$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét } f(x-1) - 3 \cdot f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) = 1 - 2x \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = x - 1 \rightarrow x = t + 1 \quad (*) \Rightarrow f(t) - 3 \cdot f\left(\frac{-t}{2t+1}\right) = -2t - 1 \Rightarrow f(x) - 3 \cdot f\left(\frac{-x}{2x+1}\right) = -2x - 1 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } u = \frac{x-1}{1-2x} \Rightarrow x = \frac{u+1}{2u+1} (*) \Rightarrow f\left(\frac{-u}{1+2u}\right) - 3f(u) = \frac{-1}{1+2u} \Rightarrow f\left(\frac{-x}{1+2x}\right) - 3f(x) = \frac{-1}{1+2x} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 3 \cdot f\left(\frac{-x}{2x+1}\right) = -2x-1 \\ f\left(\frac{-x}{1+2x}\right) - 3f(x) = \frac{-1}{1+2x} \end{cases} \cdot \text{Xem } A = f(x), B = f\left(\frac{-x}{1+2x}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - 3B = -2x-1 \\ -3A + B = -\frac{1}{1+2x} \end{cases} \Leftrightarrow A = f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} + \frac{3}{8(1+2x)}$$

$$\text{Xét } I = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} + \frac{3}{8(1+2x)} \right] dx = \left(\frac{x^2}{8} + \frac{x}{8} + \frac{3}{16} \ln(2x+1) \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{16} \ln 5 - \frac{3}{16} \ln 3 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{16}, c = \frac{3}{16} \Rightarrow P = 8a - 16b + 16c = 10$$

Câu 94. (THPT Cụm Yên Phong - Bắc Ninh 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$

thoả mãn $6x^2 \cdot f(x^3) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ là

- A. $\frac{\pi}{8}$
- B. $\frac{\pi}{16}$.
- C. $\frac{\pi}{4}$.
- D. $\frac{\pi}{20}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 6x^2 \cdot f(x^3) + 4f(1-x) = 3\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \int_0^1 6x^2 \cdot f(x^3) dx + \int_0^1 4f(1-x) dx = \int_0^1 3\sqrt{1-x^2} dx.$$

$$\text{Mặt khác } \int_0^1 6x^2 \cdot f(x^3) dx + \int_0^1 4f(1-x) dx = 2 \int_0^1 f(x^3) dx^3 - 4 \int_0^1 f(1-x) d(1-x)$$

$$= 6 \int_0^1 f(t) dt = 6 \int_0^1 f(x) dx$$

$$\text{Đặt } x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 3\sqrt{1-x^2} dx = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt$$

$$= \frac{3}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4}.$$

Khi đó $6 \int_0^1 f(x) dx = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{8}.$

Câu 95. (Sở Bà Rịa - Vũng Tàu 2023) Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$, biết rằng $f(1) = 0$ và với mọi x dương thì $f(x) = x + (x^2 + x)f'(x)$. Các số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn

$\int_1^2 \frac{f(x)}{x(x+1)} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng

A. $-\frac{2}{3}.$

B. $\frac{1}{3}.$

C. $-1.$

D. $-\frac{1}{3}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) = x + (x^2 + x)f'(x) &\Leftrightarrow (x^2 + x)f'(x) - f(x) = -x \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x^2} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x) = -\frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x) = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \left[\frac{x+1}{x} f(x) \right]' = -\frac{1}{x} \\ &\Rightarrow \int \left[\frac{x+1}{x} f(x) \right]' dx = -\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{x+1}{x} f(x) = -\ln x + C. \end{aligned}$$

Với $x = 1$ ta có $2f(1) = -\ln 1 + C \Leftrightarrow C = 0.$

Khi đó $\frac{x+1}{x} f(x) = -\ln x \Leftrightarrow f(x) = -\frac{x \ln x}{x+1}.$

Vậy $I = \int_1^2 \frac{f(x)}{x(x+1)} dx = -\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= -\left(-\frac{\ln x}{x+1} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx \right) = -\left(-\frac{\ln 2}{3} + 0 + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right) \\ &= -\left(-\frac{\ln 2}{3} + (\ln x - \ln(x+1)) \Big|_1^2 \right) = -\left(-\frac{\ln 2}{3} + \left(\ln \frac{x}{x+1} \right) \Big|_1^2 \right) = \frac{1}{3} \ln 2 - \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 - \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \ln 3 - \frac{5}{3} \ln 2 + 0 \end{aligned}$$

Vậy $a = 1, b = -\frac{5}{3}, c = 0 \Rightarrow a + b + c = 1 - \frac{5}{3} + 0 = -\frac{2}{3}.$

Câu 96. (Sở Bạc Liêu 2023) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$. Biết

$f(1)=1$ và $f(x)f(1-x)=e^{x^2-x}$ với mọi $x\in[0;1]$. Giá trị tích phân $I=\int_0^1\frac{(2x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$ bằng

A. $-\frac{1}{5}$.

B. $\frac{1}{10}$.

C. $-\frac{1}{10}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương nên ta lấy logarit cơ số e hai vế $f(x)f(1-x)=e^{x^2-x}$

Ta được $\ln f(x)+\ln f(1-x)=x^2-x$

$$\Rightarrow \ln f(x)=x^2-x-\ln f(1-x)$$

Ta có: $I=\int_0^1\frac{(2x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$

$$I=\int_0^1(2x^3-3x^2)d\ln f(x)=(2x^3-3x^2)\ln f(x)\Big|_0^1-6\int_0^1(x^2-x)\ln f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow I=-6\int_0^1(x^2-x)(x^2-x-\ln f(1-x))dx$$

Đặt $1-x=t$

$$I=-6\int_0^1(t^2-t)(t^2-t-\ln f(t))dt=6\int_0^1(t^2-t)\ln f(t)dt-6\int_0^1(t^2-t)(t^2-t)dt$$

Do tích phân không phụ thuộc vào tên biến nên:

$$I=6\int_0^1(x^2-x)\ln f(x)dx-6\int_0^1(x^2-x)(x^2-x)dx$$

$$\Leftrightarrow I=-I-6\int_0^1(x^2-x)(x^2-x)dx$$

$$\Leftrightarrow 2I=-6\int_0^1(x^2-x)(x^2-x)dx$$

$$\Leftrightarrow 2I=-6\times\frac{1}{30}=-\frac{1}{5}\Leftrightarrow I=-\frac{1}{10}$$

Câu 97. (Sở Bình Phước 2023) Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $[1;3]$, thỏa mãn

$x^2+4x^2f(x)=\left[f'(x)\right]^2, \forall x\in[1;3], f(2)=2$. Tính $I=\int_1^3f(x)dx$.

A. $\frac{20}{3}$.

B. $\frac{117}{15}$.

C. $\frac{23}{3}$.

D. $\frac{233}{30}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $[1;3]$, ta có

$$\begin{aligned}x^2 + 4x^2 f(x) &= [f'(x)]^2 \Leftrightarrow x^2(1 + 4f(x)) = [f'(x)]^2 \\ \Leftrightarrow \frac{2f'(x)}{\sqrt{1+4f(x)}} &= 2x \Leftrightarrow (\sqrt{1+4f(x)})' = 2x \\ \Leftrightarrow \sqrt{1+4f(x)} &= x^2 + C.\end{aligned}$$

Vì $f(2) = 2$ nên $C = -1$. Do đó $f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2 - 1}{4}$.

vậy $I = \int_1^3 \frac{(x^2 - 1)^2 - 1}{4} dx = \frac{233}{30}$.