ĐỀ 86

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP HỒ CHÍ MINH

CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 CẤP THÀNH PHỐ

Năm học 2023-2024

Bài 1. (3 điểm):

Cho các số a, b thỏa mãn điều kiện:$2a^2+7ab-3b^2=0$, $b\neq 2a$, $b\neq -¿2$a

Tính giá trị của biểu thức: M = $\frac{8a-3b}{2a-b}$ $-¿$ $\frac{2a-5b}{2a+b}$

Bài 2. (3 điểm):

Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=2022$. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \geq 2$$

Bài 3. (3 điểm):

Giải phương trình: $\frac{4x}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{5}{x}=x$

Bài 4. (5 điểm):

Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định. Gọi C là điểm di động trên (O), (C khác A và B), vẽ đường kính CD của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC, AD lần lượt tại E và F. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BF; K là giao điểm của hai đường thẳng OE và AH.

a) Chứng minh năm điểm E, C, D, F, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECDF. Chứng minh điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định khi C di động trên đường tròn (O).

Bài 5. (3 điểm):

Qua điểm M thuộc cạnh BC của ΔABC ta kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, AC, chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.

Bài 6. (3 điểm):

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m; n) với m≥ n sao cho $A=(m+n)^3$ là ước của

B = $2n.(3m^2+n^2)+8$

-----------**HẾT**-------------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (3 điểm):

Cho các số a, b thỏa mãn điều kiện: $2a^2+7ab-3b^2=0$, $b \neq 2a$, $b \neq -¿2a$

Tính giá trị của biểu thức: M = $\frac{8a-3b}{2a-b} - ¿ \frac{2a-5b}{2a+b}$

Giải

M = $\frac{8a-3b}{2a-b} - ¿ \frac{2a-5b}{2a+b} = \frac{(8a-3b)(2a+b)-(2a-5b)(2a-b)}{(2a-b).(2a+b)}$

$= \frac{16a^2+8ab-6ab-3b^2-4a^2+2ab+10ab-5b^2}{4a^2-b^2}$

$= \frac{12a^2+14ab-8b^2}{4a^2-b^2} = \frac{12a^2+2.7ab-8b^2}{4a^2-b^2}$

$= \frac{12a^2+2.(3b^2-2a^2)-8b^2}{4a^2-b^2} = \frac{8a^2-2b^2}{4a^2-b^2} = \frac{2(4a^2-b^2)}{4a^2-b^2} = 2$

Bài 2. (3 điểm):

Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=2022$. Chứng minh:

$\frac{\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \geq 2$

Giải

Ta có a + $\frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow a+b+c+\frac{bc}{a} \geq b+c+2\sqrt{bc} = (\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+2022} \geq \sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})$ (1)

Ta có $b + \frac{ac}{b} \geq 2\sqrt{ac} \Rightarrow a+b+c+\frac{ac}{b} \geq a+c+2\sqrt{ac} = (\sqrt{a}+\sqrt{c})^2$

$\Rightarrow \sqrt{b^2+2022} \geq \sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{c})$ (2)

Ta có $c + \frac{ab}{c} \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow a+b+c+\frac{ab}{c} \geq a+c+2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\Rightarrow \sqrt{c^2+2022} \geq \sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ (2)

Từ (1); (2); (3)

$\Rightarrow \sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022} \geq \sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})+\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{c})+\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022} \geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac})$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+2022}+\sqrt{b^2+2022}+\sqrt{c^2+2022}}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \geq 2$$

Bài 3. (3 điểm):

Giải phương trình: $\frac{4x}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{5}{x}=x$

Giải

ĐK $x \neq 0 ; x \geq -1$

$\frac{4x}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{5}{x}=x \Leftrightarrow \frac{4x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}+\frac{5}{x}=x$

$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x+1}-1\right)+\frac{5}{x}=x$

$\Leftrightarrow 4x\sqrt{x+1}-4x+5=x^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x\sqrt{x+1}+4x-5=0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{x+1}\right)^2-3^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\left(x-2\sqrt{x+1}\right)-3\right]\left[\left(x-2\sqrt{x+1}\right)+3\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(x-2\sqrt{x+1}\right)-3=0\\ \left(x-2\sqrt{x+1}\right)+3=0\end{array}\right.$

Trường hợp 1:

$\left(x-2\sqrt{x+1}\right)-3=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=x-3$

ĐK $x \geq 3$ Bình phương hai vế ta được

$4(x+1)=x^2-6x+9$

$\Leftrightarrow x^2-10x+5=0$

$\Delta=b^2-4ac=10^2-4.5=80>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10+\sqrt{80}}{2}$ ¿$5+2\sqrt{5}$ (N)

$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10-\sqrt{80}}{2}$ ¿$5-2\sqrt{5}$ (L)

Trường hợp 2:

$\left(x-2\sqrt{x+1}\right)+3=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=x+3$

ĐK $x \geq -3$ Bình phương hai vế ta được

$4(x+1)=x^2+6x+9$

$\Leftrightarrow x^2+2x+5=0$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4.5=-16<0$Vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm $x_1=5+2\sqrt{5}$

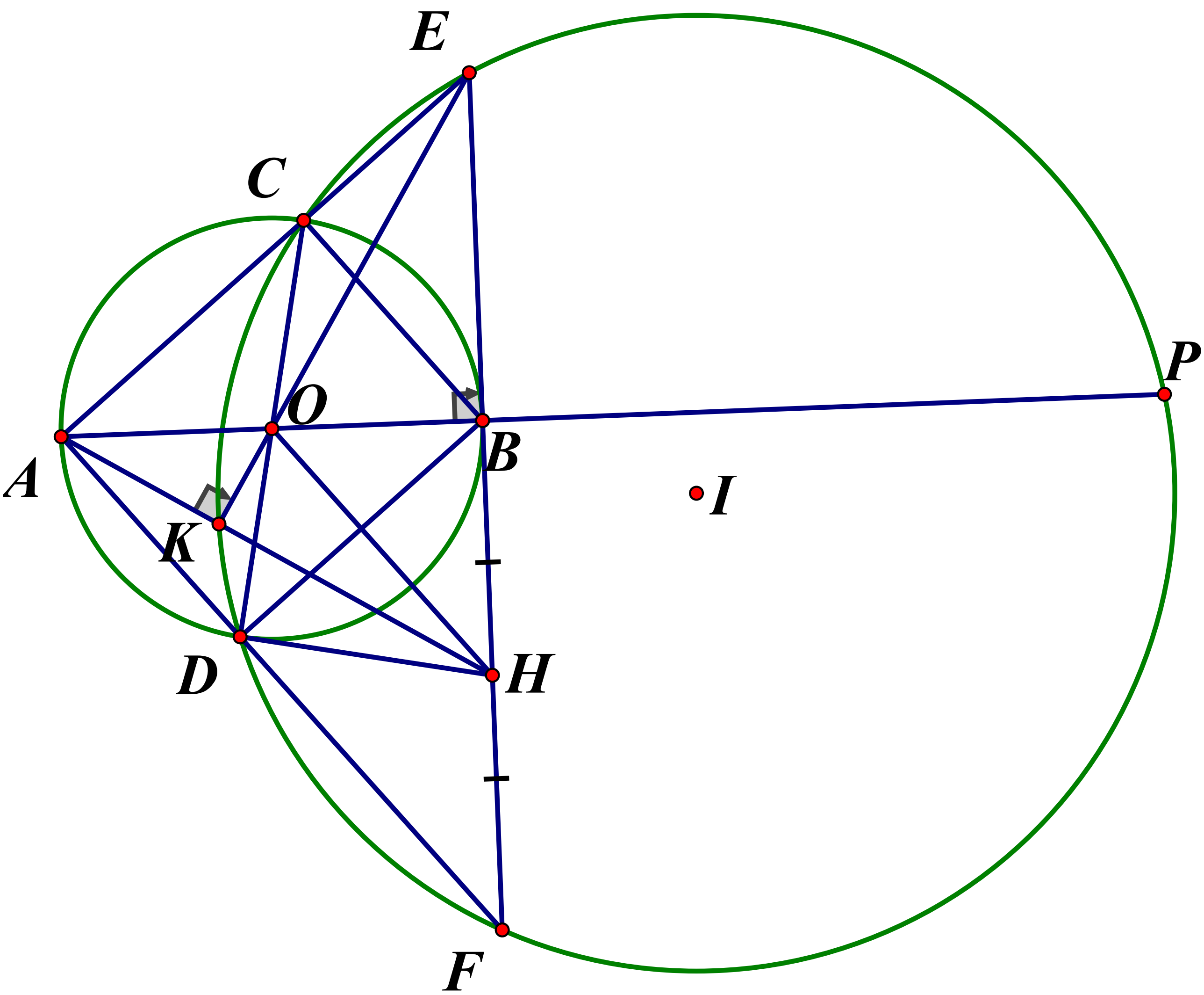
Bài 4. (5 điểm):

Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định. Gọi C là điểm di động trên (O), (C khác A và B), vẽ đường kính CD của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC, AD lần lượt tại E và F. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BF; K là giao điểm của hai đường thẳng OE và AH.

a) Chứng minh năm điểm E, C, D, F, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECDF. Chứng minh điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định khi C di động trên đường tròn (O).

Giải



a) **Ta có** $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ **(góc nội tiếp cùng chắn cung** AC **của** (O)**)**

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{BEC}$ **(cùng phụ với góc CAB)**

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BEC}$ hay $\widehat{ADC} = \widehat{FEC}$

Do đó tứ giác **CDFE** nội tiếp (góc ngoài bằng đối góc trong) (1)

Ta có OB = OD = R

$\Rightarrow$ DH = BH

Suy ra OH là đường trung trực của BD

Suy ra OH vuông góc với BD

Ta chứng minh tứ giác ADBC là hình chữ nhật suy ra BD song song với AC

Nên OH vuông góc với AC

Xét ΔAEH ta có

AB là đường cao của ΔAEH

HO là đường cao của ΔAEH

O là giao điểm của hai đường cao AB và HO của ΔAEH

Suy ra O là trực tâm của ΔAEH

Suy ra EO là đường cao thứ ba

Nên EO vuông góc với AH tại K

Xét ΔOBE và ΔOKA ta có:

$\widehat{EOB} = \widehat{KOA}$ (đối đỉnh)

$\widehat{OKA} = \widehat{OBE} = 90°$

Suy ra ΔOBE ΔOKA (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OB}{OK} = \dfrac{OE}{OA}$ **(tỉ số đồng dạng)**

$\Rightarrow OB.OA = OE.OK$

Mà tứ giác ADBC là hình chữ nhật có 2 đường chéo CD và AB cắt nhau tại O nên

$OB.OA = OC.OD$

$\Rightarrow OB.OA = OE.OK = OC.OD$

$\Rightarrow \dfrac{OE}{OD} = \dfrac{OC}{OK}$

Xét ΔOEC và ΔODK ta có:

$\widehat{EOC} = \widehat{KOD}$ (đối đỉnh)

$\dfrac{OE}{OD} = \dfrac{OC}{OK}$ **(chứng minh trên)**

ΔOEC ΔODK (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{OEC} = \widehat{ODK}$ (hai góc tương ứng)

Xét tứ giác ECKD ta có

$\widehat{OEC} = \widehat{ODK}$

Suy ra tứ giác ECDK nội tiếp (hai góc kề đỉnh bằng nhau cùng nhìn xuống đoạn CK (2)

Từ (1);(2) suy ra 5 điểm **E, C, D, F, K** cùng thuộc một đường tròn)

b) Gọi P và Q thứ tự là giao điểm của đường tròn (I) với đường thẳng AB và OA = R

Ta chứng minh được $OP.OQ = OC.OD = R^2$ (3)

Ta chứng minh được $AP.AQ = AC.AE = AB^2 = 4R^2$

Ta có: AP.AQ = (AO −¿ OQ).(AO + OP) = R^2 + AO.(OP −¿ OQ) −¿ OP.OQ = R(OP −¿ OQ)

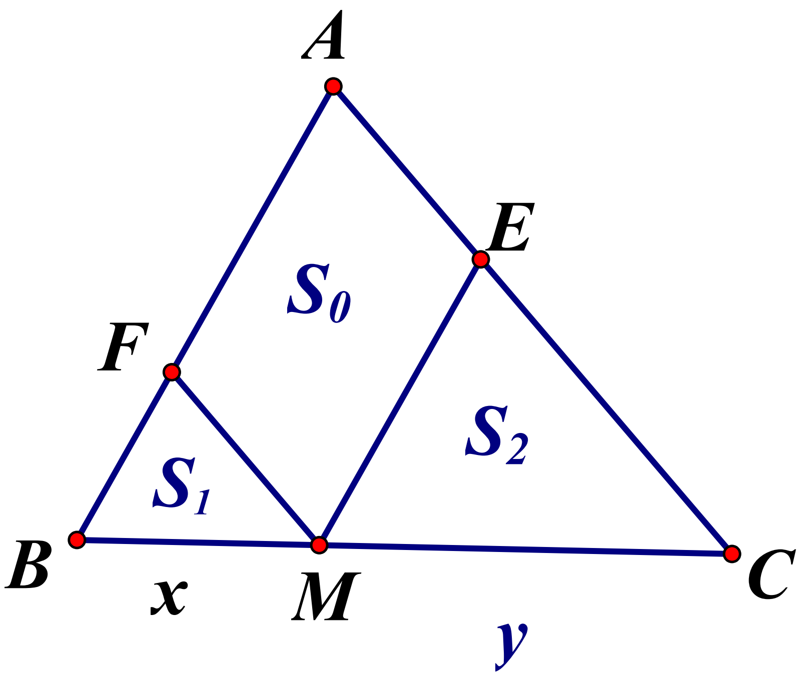
Suy ra OP −¿ OQ = 4R (4)

Từ (3); (4) suy ra OP, OQ không đổi hay P, Q là các điểm cố định. Do đó I di động trên đường thẳng cố định là trung trực của PQ.

Bài 5. (3 điểm):

Qua điểm M thuộc cạnh BC của ΔABC ta kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, AC, chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.

Giải



Gọi $S_0; S_1; S_2; S$ lần lượt là diện tích của hình bình hành MEAF; ΔMFB; ΔMCE; ΔABC

Đặt BM = x; CM = y; BC = a

Ta có x; y; a > 0 và x + y = a

Ta có $\frac{S_0+S_1+S_2}{S} = 1 \Rightarrow \frac{S_0}{S} = 1$ −¿ $\left(\frac{S_1}{S}+\frac{S_2}{S}\right)$ (1)

Ta có ΔMBF ΔCBA (g.g)

$\frac{S_1}{S} = \frac{(BM)^2}{(BC)^2} = \frac{x^2}{a^2}$ (2)

Ta có ΔMCE ΔBCA (g.g)

$\frac{S_2}{S} = \frac{(CM)^2}{(BC)^2} = \frac{y^2}{a^2}$ (3)

Từ (1); (2); (3) ⇒ $\frac{S_0}{S} = 1 - ¿ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}\right)$

$\frac{S_0}{S} = 1 - ¿ \left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right) = 1 - ¿ \left(\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2a^2}\right) = 1 - ¿ \left(\frac{a^2+(x-y)^2}{2a^2}\right)$

$\frac{S_0}{S} = 1 - ¿ \frac{a^2}{2a^2} - ¿ \frac{(x-y)^2}{2a^2} = \frac{1}{2} - ¿ \frac{(x-y)^2}{2a^2} \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow S_0 \le \frac{1}{2}$ S

Dấu bằng xảy ra khi x = y ⇒ BM = CM

Vậy giá trị lớn nhất của S_0 là $\frac{1}{2}$ S khi M là trung điểm của **BC**.

Bài 6. (3 điểm):

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m; n) với m≥ n sao cho $A=(m+n)^3$ là ước của B = $2n.(3m^2+n^2)+8$

Giải

A là ước của B ⇒ A ≤ B ⇒ $(m+n)^3 \le 2n.(3m^2+n^2)+8$

$\Rightarrow (m-n)^3 \le 8 \Rightarrow m-n \le 2 \Rightarrow m-n \in \{0;1;2\}$

Trường hợp 1: $m-n = 0$ ta có

$(2n)^3$ là ước của $2n.(3n^2+n^2)+8$ ⇒ $8n^3$ là ước của $8n^2+8$ ⇒ $n = 1$

Trường hợp 2: $m-n = 1$ ta có

$(2n+1)^3$ là ước của $2n.(3(n+1)^2+n^2)+8 \Rightarrow (2n+1)^3$ là ước của $(2n+1)^3 + 7$

⇒ n = 0

Trường hợp 3: $m-n = 2$ ta có

$(2n+2)^3$ là ước của $2n.(3(n+2)^2+n^2)+8 \Rightarrow (2n+2)^3$ là ước của

$8n^3+24n^2+24n+8$ ⇒ $(n+1)^3$ là ước của $(n+1)^3$ ⇒ n = k, ∀k ∈ N

-----------HẾT-------------