

CHỦ ĐỀ 06 : TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

LÍ THUYẾT

❖ Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

- **Phương pháp:** Cho 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') .

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C') : $f(x) = g(x)$ (*)
- Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.
- Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và (C') .

❖ Tương giao của đồ thị hàm bậc 3

- **Phương pháp 1: Bảng biến thiên (phương pháp đồ thị)**

- Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x, m) = 0$ (phương trình ẩn x tham số m)
- Cô lập m đưa phương trình về dạng $m = f(x)$
- Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x)$.
- Dựa vào giả thiết và bảng biến thiên từ đó suy ra m .

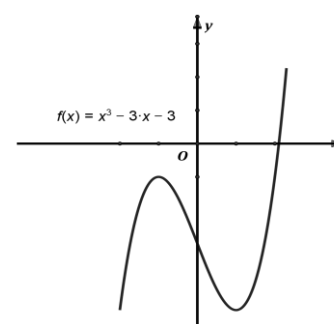
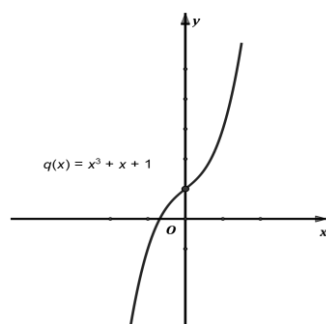
➤ **Dấu hiệu:** Sử dụng phương pháp bảng biến thiên khi m độc lập với x .

❖ Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2.

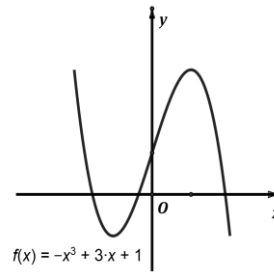
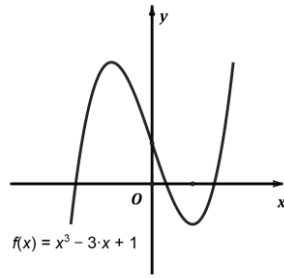
- Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x, m) = 0$
- Nhẩm nghiệm: (Khử tham số). Giả sử $x = x_0$ là 1 nghiệm của phương trình.
- Phân tích: $F(x, m) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ (là $g(x) = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x tham số m).
- Dựa vào yêu cầu bài toán đi xử lý phương trình bậc hai $g(x) = 0$.

❖ Phương pháp 3: Cực trị

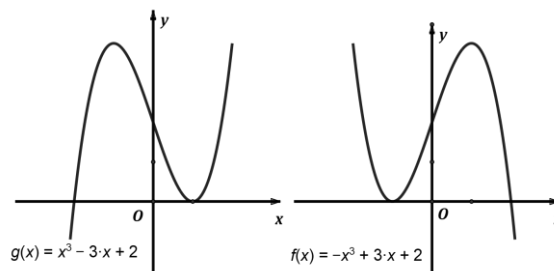
- **Nhận dạng:** Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.
- **Quy tắc:**
 - Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x, m) = 0$ (1). Xét hàm số $y = F(x, m)$
 - Đề (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y = F(x, m)$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm.
 - Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$
 - Hoặc hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd} \cdot y_{ct} > 0$ (tham khảo hình vẽ)



- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị $y = F(x, m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd} \cdot y_{ct} < 0$ (tham khảo hình vẽ).



- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị $y = F(x, m)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd} \cdot y_{ct} = 0$ (tham khảo hình vẽ)



❖ Tương giao của hàm số phân thức

- Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (C) và đường thẳng $d: y = px + q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $\frac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x, m) = 0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).
- Các câu hỏi thường gặp:
 - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{d}{c}$.
 - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn: $-\frac{d}{c} < x_1 < x_2$.
 - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}$.
 - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < -\frac{d}{c} < x_2$.
 - Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:
 - ✓ Đoạn thẳng $AB = kS$
 - ✓ Tam giác ABC vuông.
 - ✓ Tam giác ABC có diện tích S_0

- **Quy tắc:**

- Tìm điều kiện tồn tại A, B $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt.
- Xác định tọa độ của A và B (chú ý Vi ét)
- Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.

- **Chú ý:** Công thức khoảng cách:

- $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B): AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $\begin{cases} M(x_0; y_0) \\ \Delta: Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

❖ **Tương giao của hàm số bậc 4**

- Nghiệm của phương trình bậc bốn trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (1)$

- **Nhắm nghiệm:**

- Nhắm nghiệm: Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.
- Khi đó ta phân tích: $f(x, m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$
- Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc hai $g(x) = 0$

- **Ẩn phụ - tam thức bậc 2:**

- Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0 \quad (2)$.
- Để (1) có đúng 1 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{cases}$
- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{cases}$
- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$
- Để (1) có đúng 4 nghiệm thì (2) có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$

- Bài toán: tìm m để (C): $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (1)$ cắt Ox tại bốn điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

- Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0 \quad (2)$.
- Để (1) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm dương $t_1, t_2 \quad (t_1 < t_2)$ thỏa mãn $t_2 = 9t_1$.
- Kết hợp $t_2 = 9t_1$ với định lý Vi – ét tìm được m.

VÍ DỤ MINH HỌA

Lời giải

VÍ DỤ 1: Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y = m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ tại hai điểm phân biệt M, N thỏa mãn tam giác OMN vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $m \in \left(\frac{11}{4}; \frac{15}{4}\right)$. B. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$. C. $m \in \left(\frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right)$. D. $m \in \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

Chọn D

Ta có $y = m + 1$ (d) và $y = x^4 - 3x^2 - 2$ (C).

Xét phương trình tương giao: $x^4 - 3x^2 - 2 = m + 1 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - (m + 3) = 0$. (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - 3t - (m + 3) = 0$. (2)

Phương trình (2) có tích $a.c = -m - 3 < 0$ khi m là số thực dương.

Suy ra phương trình (2) luôn có hai nghiệm trái dấu $t_1 < 0 < t_2$.

Từ đó suy ra phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau $x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = \sqrt{t_2}$ đồng thời (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua Oy là $M(-\sqrt{t_2}; m + 1), N(\sqrt{t_2}; m + 1)$.

Mặt khác tam giác OMN vuông tại O thì $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \Leftrightarrow t_2 = (m + 1)^2$.

Thay $t_2 = (m + 1)^2$ vào phương trình (2) ta được:

$$(m + 1)^4 - 3(m + 1)^2 - (m + 3) = 0 \Leftrightarrow (m + 1)^4 - 3(m + 1)^2 - (m + 1) - 2 = 0.$$

Đặt $a = m + 1 > 1$ ta được phương trình

$$a^4 - 3a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(a^3 + 2a^2 + a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ (do } a > 1 \text{ nên } a^3 + 2a^2 + a + 1 > 0).$$

Từ đó ta được $m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn $m > 0$). Vậy $m = 1$.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$		$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) + 1 = m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $(-4; 2)$. B. $(-\infty; 2]$. C. $[-4; 2)$. D. $(-3; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $f(x) + 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m - 1$ có đúng ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m - 1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

Căn cứ vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta được $-4 < m - 1 < 2 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Vậy $m \in (-3; 3)$.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 1)$, B , C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B , C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng

A. $\frac{9}{2}$.

B. $\frac{9}{5}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ và $y = 1$ là:

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 6x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 6x + m = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 1)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 9 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{9}{4} \end{cases}. \text{ Theo hệ thức Viet ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}.$$

Để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B , C vuông góc với nhau thì

$$f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1 \Leftrightarrow (3x_1^2 + 6x_1 + m) \cdot (3x_2^2 + 6x_2 + m) = -1$$

$$\Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 3m(x_1^2 + x_2^2) + 6m(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 + m^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9 + \sqrt{65}}{8} \\ m = \frac{9 - \sqrt{65}}{8} \end{cases} \Rightarrow S = \frac{9 + \sqrt{65}}{8} + \frac{9 - \sqrt{65}}{8} = \frac{9}{4}.$$

VÍ DỤ 4: Cho hàm số $y = \frac{x}{1-x}$ (C) và điểm $A(-1; 1)$. Tìm m để đường thẳng $d: y = mx - m - 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = -1$.

B. $m = 0$.

C. $m = -2$.

D. $m = -\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là: $\frac{x}{1-x} = mx - m - 1$ (đk: $x \neq 1$)

$$\Rightarrow x = (1-x)(mx - m - 1) \Leftrightarrow x = mx - m - 1 - mx^2 + mx + x \Leftrightarrow mx^2 - 2mx + m + 1 = 0 (*)$$

Để (C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N thì (*) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m+1) = -m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \\ m - 2m + m + 1 \neq 0 \end{cases}$$

Giả sử $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$. Theo hệ thức viết: $x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = \frac{m+1}{m}$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2) - 2m - 2 = 2m - 2m - 2 = -2$$

$$\text{và } y_1 \cdot y_2 = (mx_1 - m - 1)(mx_2 - m - 1) = m^2 x_1 x_2 - m(m+1)(x_1 + x_2) + (m+1)^2$$

$$= m(m+1) - 2m(m+1) + (m+1)^2 = m+1$$

$$\text{Ta có: } AM^2 + AN^2 = (x_1 + 1)^2 + (y_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (y_2 - 1)^2$$

$$= (x_1 + x_2 + 2)^2 - 2(x_1 + 1)(x_2 + 1) + (y_1 + y_2 - 2)^2 - 2(y_1 - 1)(y_2 - 1)$$

$$= (x_1 + x_2 + 2)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1) + (y_1 + y_2 - 2)^2 - 2(y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1)$$

$$= (2+2)^2 - 2\left(\frac{m+1}{m} + 2 + 1\right) + (-2-2)^2 - 2(m+1 - (-2) + 1)$$

$$= 18 - 2\left(\frac{m+1}{m}\right) - 2m = 18 - 2 - 2 \cdot \frac{1}{m} - 2m = 16 + 2 \cdot \left[\frac{1}{-m} + (-m)\right] \geq 16 + 2 \cdot 2 = 20 \quad (\text{BĐT Cauchy})$$

$$\text{Suy ra: } AM^2 + AN^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất là } 20 \text{ khi } \frac{1}{-m} = -m \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Vậy $m = -1$ (vì $m < 0$)

VÍ DỤ 5: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C), có bao nhiêu đường thẳng d có đúng 3 điểm chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Vì đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (C) tại 3 điểm phân biệt nên đường thẳng d là đường thẳng có hệ số góc dạng $y = ax + b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $x^4 - 2x^2 = ax + b$.

Mà phương trình là phương trình bậc 4 nên phương trình muốn có 3 nghiệm phân biệt thì trong đó sẽ có 1 nghiệm kép gọi là x_1 , hai nghiệm còn lại là x_2, x_3 .

Suy ra đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C), không mất tính tổng quát giả sử đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị hàm số (C) tại x_1 .

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x_1 , d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ

$x_2, x_3 (\neq x_1)$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$. Ta có: $d: y = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$$x^4 - 2x^2 = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2 \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_1)^2(x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ f(x) = x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$ thì phương trình

$$f(x) = 0 \text{ phải có 2 nghiệm phân biệt } x_2, x_3 \text{ khác } x_1 \text{ và thỏa mãn định lý Vi - ét: } \begin{cases} x_2 + x_3 = -2x_1 \\ x_2 \cdot x_3 = 3x_1^2 - 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \Delta' = x_1^2 - 3x_1^2 + 2 > 0 \\ x_1^2 + 2x_1^2 + 3x_1^2 - 2 \neq 0 \\ x_1^3 + (x_2 + x_3)^3 - 3x_2x_3(x_2 + x_3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x_1 < 1 \\ 3x_1^2 - 1 \neq 0 \\ x_1^3 + (-2x_1)^3 - 3(3x_1^2 - 2)(-2x_1) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-11 + \sqrt{165}}{22}. \text{ Vậy có đúng 1 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

VÍ DỤ 6: Có bao nhiêu số thực của tham số m để đường thẳng $y = (m-6)x - 4$ cắt đồ thị hàm số

$$y = x^3 + x^2 - 3x - 1 \text{ tại ba điểm phân biệt có tung độ } y_1, y_2, y_3 \text{ thỏa mãn } \frac{1}{y_1 + 4} + \frac{1}{y_2 + 4} + \frac{1}{y_3 + 4} = \frac{2}{3}.$$

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm bậc ba đã cho là

$$x^3 + x^2 - 3x - 1 = (m-6)x - 4 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + (3-m)x + 3 = 0 \quad (1).$$

Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của phương trình (1).

$$\text{Theo hệ thức viét đối với phương trình bậc ba ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 3 - m \\ x_1x_2x_3 = -3 \end{cases}$$

Nhận thấy tung độ của ba giao điểm thỏa mãn phương trình $y = (m-6)x - 4$ nên ta có được

$$y_1 + 4 = (m-6)x_1, \quad y_2 + 4 = (m-6)x_2 \quad \text{và} \quad y_3 + 4 = (m-6)x_3.$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{y_1 + 4} + \frac{1}{y_2 + 4} + \frac{1}{y_3 + 4} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{(m-6)x_1} + \frac{1}{(m-6)x_2} + \frac{1}{(m-6)x_3} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m-6} \cdot \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{m-6} \cdot \frac{3-m}{-3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow m = 9.$$

Chủ đề 06: Tương giao của đồ thị hàm số

Thử lại với $m = 9$ suy ra phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + x^2 - 6x + 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn giả thiết cho (Dùng casio để kiểm tra). Vậy có một số thực m thỏa mãn.

VÍ DỤ 7: Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ là $0, 1, m$ và n . Tính $S = m^2 + n^2$.

A. $S = 0$.

B. $S = 1$.

C. $S = 2$.

D. $S = 3$.

Lời giải

Chọn D

Do đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ tại điểm có hoành độ là 0 nên phương trình đường thẳng có dạng $y = ax$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = ax$ với đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ là :

$$x^4 - 2x^2 = ax \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x - a) = 0.$$

Do phương trình có bốn nghiệm là $0, 1, m, n$ nên ta có :

$$x(x^3 - 2x - a) = x(x - 1)(x - m)(x - n) \Rightarrow x^3 - 2x - a = (x^2 - mx - x + m)(x - n)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x - a = x^3 - nx^2 - mx^2 + mnx - x^2 + nx + mx - mn$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x - a = x^3 + (-n - m - 1)x^2 + (m + n + mn)x - mn$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m - n - 1 = 0 \\ m + n + mn = -2 \\ -mn = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + n = -1 \\ mn = -1 \end{cases} \Rightarrow S = m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn = 3.$$

VÍ DỤ 7: Cho phương trình $(x^2 - 3x + m)^2 + x^2 - 8x + 2m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 20]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

A. 19.

B. 18.

C. 17.

D. 20.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } (x^2 - 3x + m)^2 + x^2 - 8x + 2m = 0 \Leftrightarrow [(x^2 - 3x + m)^2 - x^2] + (2x^2 - 8x + 2m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + m)(x^2 - 2x + m) + 2(x^2 - 4x + m) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + m)(x^2 - 2x + m + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + m = 0 & (1) \\ x^2 - 2x + m + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt không trùng nhau.

Phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_1 > 0 \\ \Delta'_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m > 0 \\ 1-m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Giả sử phương trình (1) và (2) có nghiệm x_0 trùng nhau

$$\Rightarrow \text{Hệ sau có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + m = 0 & (1) \\ x^2 - 2x + m + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0^2 - 4x_0 + m - (x_0^2 - 2x_0 + m + 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

Với $x_0 = -1$ thay vào (1) ta được $m = -5$.

$\Rightarrow$ Với $m \neq -5$ phương trình (1) và (2) không có nghiệm trùng nhau.

Kết hợp m là số nguyên thuộc đoạn $[-20; 20] \Rightarrow m \in [-20; -1] \setminus \{-5\}$.

Vậy có 18 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.