ĐỀ 88

HSG TOÁN 9 _ TUYÊN QUANG _ 2023-2024

Câu 1 (5,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức P = $\left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\right):\left(\frac{2\left(x-2\sqrt{x}+1\right)}{x-1}\right)$ với x > 0; x≠1

b) Cho các số thực dương a, b, c, d thoả mãn a ≥ c + d và b ≥c + d. Chứng minh rằng ab ≥ ad + bc.

Câu 2 (5,0 điểm).

a) Tìm m để phương trình $(x-1)(x^2-2x+m)=0$ (1) có ba nghiệm phân biệt $x_1;\ x_2;$ x_3 thỏa mãn $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{3}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\frac{1}{y^2}+x+\frac{1}{y}=4 \\ x^3+\frac{1}{y^3}+\frac{x}{y}\left(\frac{1}{y}+x\right)=4 \end{cases}$

Câu 3 (5,0 điểm).

Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm của AC. Phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại E (E thuộc miền trong tam giác ABC). Đường thẳng BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại F khác B. Đường thẳng AF cắt BE tại I và CI cắt BD tại K.

a) Chứng minh rằng BI là tia phân giác của góc $\widehat{ABK}$

b) Gọi M là trung điểm của BC.Chứng minh tứ giác AFMC nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh rằng AD^2 = DK.DB

Câu 4 (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x-y=xy$

b) Cho các số nguyên dương a; b; n không chia hết cho số nguyên tố lẻ p. Chứng minh rằng A = $(a-b)n^{\frac{p-1}{2}}+a+b$ không chia hết cho p.

Câu 5 (2,0 điểm).

Trên một tờ giấy A4 kích thước 210 mm × 297 mm, bạn An vẽ 30 đường tròn bán kính 1cm. Chứng minh rằng sau khi bạn An vẽ 30 đường tròn, bạn Bình luôn dựng được 5 hình vuông có độ dài các cạnh là 2cm mà không có điểm chung với bất kỳ đường tròn nào và hai hình vuông bất kỳ cũng không giao nhau.

---------- HẾT-----------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 (5,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức P = $\left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\right):\left(\frac{2\left(x-2\sqrt{x}+1\right)}{x-1}\right)$ với x > 0; x≠1

b) Cho các số thực dương a, b, c, d thoả mãn a ≥ c + d và b ≥c + d. Chứng minh rằng ab ≥ ad + bc.

Lời giải

a) Với x > 0; x≠1

P = $\left(\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}-\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\right):\left(\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)$

= $\frac{x+\sqrt{x}+1-x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}:\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\left(\sqrt{x}+1\right)}$

= $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

Vậy P = $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ Với x > 0; x≠1

b) Từ a ≥ c + d ⇒ $a-c\geq$ d (1)

b ≥c + d ⇒ $b-d\geq$ c (2)

Nhân (1) và (2) theo vế ta được

$\left(a-c\right)\left(b-d\right)\geq cd \Leftrightarrow ab-ad-bc+cd \Leftrightarrow ab\geq ad+bc$

Câu 2 (5,0 điểm).

a) Tìm m để phương trình $\left(x-1\right)\left(x^2-2x+m\right)=0$ (1) có ba nghiệm phân biệt $x_1; x_2;$ x_3 thỏa mãn $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{3}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\frac{1}{y^2}+x+\frac{1}{y}=4 \\ x^3+\frac{1}{y^3}+\frac{x}{y}\left(\frac{1}{y}+x\right)=4 \end{cases}$

Lời giải

a)

+ Từ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{3}$ suy ra $x_1\neq 0; x_2\neq 0; x_3\neq 0$

+ Từ phương trình (1) suy ra một nghiệm $x_1 = 1$

+ Xét phương trình $x^2 - 2x + m = 0 (2)$.

Để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{3}$ (*) thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt $x_2; x_3$ đều khác 1.

Điều kiện để phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là: $\Delta' = 1 - m > 0$

$\Leftrightarrow m < 1$

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm x_2 và x_3 thỏa mãn định lí Viet:

$x_2 + x_3 = 2$; $x_2 x_3 = m$.

+ Từ (*) với $x_1 = 1$ ta có:

$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{3} - 1 \Leftrightarrow \frac{x_2 + x_3}{x_2 x_3} = \frac{-2}{3} \Rightarrow \frac{2}{m} = \frac{-2}{3} \Rightarrow$ m = -3 (Thỏa mãn điều kiện m < 1)

+ Với m = -3 thay vào phương trình (2) ta được phương trình

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. (TMĐK)$

Kết luận m = -3 thỏa mãn điều kiện đề tài.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} + x + \frac{1}{y} = 4 (1) \\ x^3 + \frac{1}{y^3} + \frac{x}{y}\left(\frac{1}{y} + x\right) = 4 (2) \end{cases}$

+ Điều kiện $x \neq 0$; $y \neq 0$

+ Áp dụng HĐT: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$.

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

Ta được

$x^2 + \frac{1}{y^2} = \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y}$ và $x^3 + \frac{1}{y^3} = \left(x + \frac{1}{y}\right)^3 - 3\frac{x}{y}\left(x + \frac{1}{y}\right)$

Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} + x + \frac{1}{y} = 4 \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^3 - 2\frac{x}{y}\left(x + \frac{1}{y}\right) = 4 \end{cases}$

Đặt $a = x + \frac{1}{y}$ và b = $\frac{x}{y}$ ta được hệ $\begin{cases} a^2 - 2b + a = 4 \\ a^3 - 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 2ab + a^2 = 4a \\ a^3 - 2ab = 4 \end{cases}$

+ Trừ vế với vế ta được $a^2=4a-4 \Leftrightarrow (a-2)^2=0 \Leftrightarrow a=2$.

+ Với a = 2 ⇒ b = 1 khi đó ta có: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{x}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$ (TMĐK)

+ Kết luận hệ có nghiệm duy nhất (x,y) = (1,1)

Câu 3 (5,0 điểm).

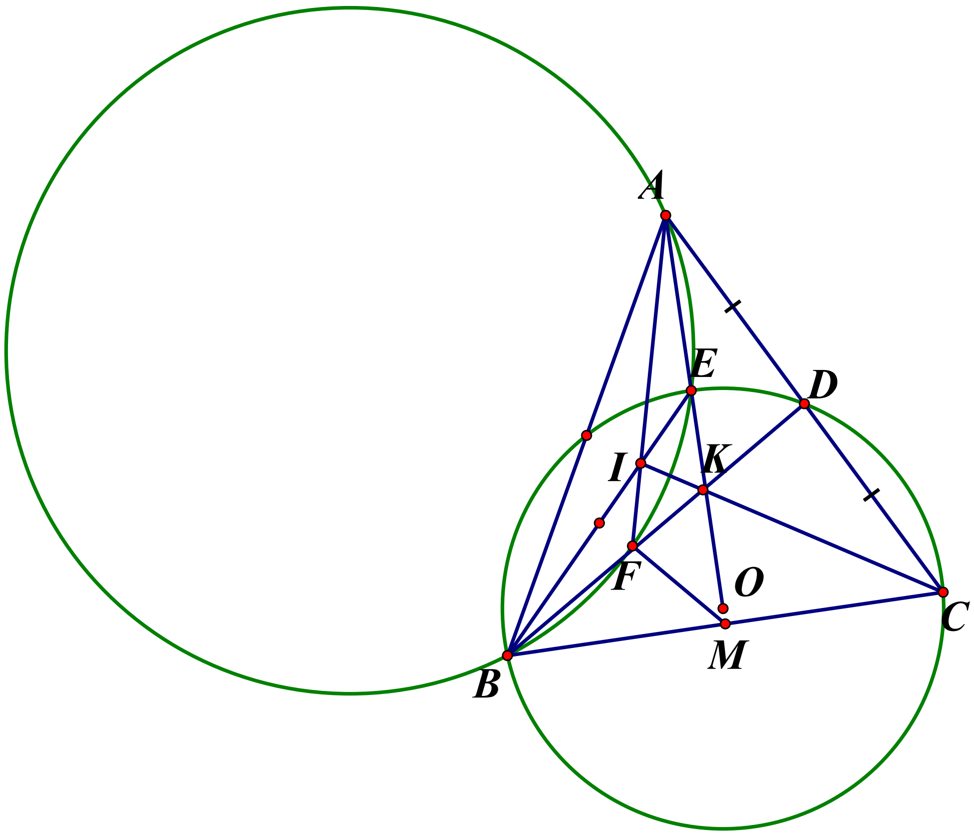
Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm của AC. Phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại E (E thuộc miền trong tam giác ABC). Đường thẳng BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại F khác B. Đường thẳng AF cắt BE tại I và CI cắt BD tại K.

a) Chứng minh rằng BI là tia phân giác của góc $\widehat{ABK}$

b) Gọi M là trung điểm của BC.Chứng minh tứ giác AFMC nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh rằng AD^2 = DK.DB

Lời giải



a) Chứng minh rằng BI là tia phân giác của $\widehat{ABK}$

- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE.

Khi đó ta có: △AEC = △AEB (c-g-c) ⇒ $\widehat{ACE} = \widehat{ABE}$ (1)

Mà $\widehat{ACE} = \widehat{EBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ED của đường tròn (O)) (2)

- Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{EBD}$ hay BI là phân giác $\widehat{ABK}$.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh tứ giác AFMC nội tiếp đường tròn.

- Tứ giác ABFE nội tiếp đường tròn (O') nên $\widehat{DFE} = \widehat{BAE}$

Mà $\widehat{BAE} = \widehat{EAD}$ (do AE là phân giác $\widehat{BAC}$) suy ra $\widehat{DFE} = \widehat{EAD}$

- Từ BE là phân giác $\widehat{ABF}$ suy ra $\widehat{AE} = \widehat{EF}$ suy ra △EAF cân tại E. Do đó $\widehat{EAF}$ = $\widehat{AFE}$

- Từ đó $\widehat{EAD} + \widehat{EAF} = \widehat{EFD} + \widehat{EFA}$ hay $\widehat{FAD} = \widehat{DFA}$ suy ra △DAF cân tại D

Do đó DF = DA = DC. Suy ra △AFC vuông tại F (3).

- △ABC cân tại A có M là trung điểm BC nên △AMC vuông tại M (4)

- Từ (3) và (4) suy ra tứ giác AFMC nội tiếp đường tròng (D); đường kính AC.

c) Chứng minh rằng AD^2 = DK.DB

+ Kẻ DH // AF, H - CI. Khi đó:

$\frac{CD}{CA} = \frac{HD}{AI}$; $\frac{KF}{KD} = \frac{FI}{HD}$ suy ra $\frac{CD}{CA} \cdot \frac{KF}{KD} = \frac{HD}{AI} \cdot \frac{FI}{HD} = \frac{FI}{AI}$ do đó $\frac{AI}{FI} \cdot \frac{CD}{CA} \cdot \frac{KF}{KD}$ = 1

Mà BI là phân giác $\widehat{ABF}$ nên $\frac{AI}{FI} = \frac{AB}{BF}$ suy ra $\frac{AB}{BF} \cdot \frac{CD}{CA} \cdot \frac{KF}{KD} = 1$

$\Rightarrow \frac{CD}{FB} \cdot \frac{KF}{KD} = 1$

Do đó DC = DF nên $\frac{DF}{BF} \cdot \frac{KF}{KD} = 1 \Rightarrow \frac{BF}{DF} = \frac{KF}{KD}$ hay $\frac{BF}{DA} = \frac{KF}{KD}$

Suy ra $\frac{BF}{DA} + 1 = \frac{KF}{KD} + 1 \Rightarrow \frac{BF+DF}{DA} = \frac{KF+KD}{KD}$

Do đó $\frac{BD}{DA} = \frac{DF}{DK} \Rightarrow \frac{BD}{DA} = \frac{DA}{DK}$ hay $\frac{BD}{DA} = \frac{DA}{DK}$ suy ra $AD^2 = DK.DB$

Câu 4 (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x - y = xy$

b) Cho các số nguyên dương a; b; n không chia hết cho số nguyên tố lẻ p. Chứng minh rằng A = $(a-b)n^{\frac{p-1}{2}} + a + b$ không chia hết cho p.

Lời giải

a) $x-y=xy \Leftrightarrow (x+1)y=x$ (1)

+ Nếu $x=-1$ thì VT = 0;VP = -1, suy ra phương trình vô nghiệm

+ Nếu $x\neq -$¿1 thì y = $\frac{x}{x+1}$ = $\frac{x+1-1}{x+1}$ = 1 - $\frac{1}{x+1}$

Do đó y ∈ Z $\Leftrightarrow$ $x+1 \in U(1)$ = $\{-1;1\}$

Nếu $x+1=1 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow$ y = 0

Nếu $x+1=-1 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=2$

Vậy có hai cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình là (0; 0), (2; -2)

b)

+ Vì các số nguyên dương a, b, n không chia hết cho số nguyên tố lẻ p nên

(a, p) = 1; (b, p) = 1; (n, p) = 1

+ Ta có p là số nguyên tố và (n, p) = 1 nên theo định lí Fermat nhỏ ta có

n^{p-1} = 1 (mod p) $\Rightarrow$ $n^{p-1}-1 \vdots$ p hay $n^{2.\frac{p-1}{2}}-1 \vdots$ p $\Rightarrow$ $\left(n^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1 \vdots$ p hay

$\left(n^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}}+1\right) \vdots$ p

Vì p nguyên tố nên $n^{\frac{p-1}{2}}-1 \vdots$ p hoặc $n^{\frac{p-1}{2}}+1 \vdots$ p

- Xét A = $(a-b)n^{\frac{p-1}{2}}+a+b$

¿$a.n^{\frac{p-1}{2}} - b.n^{\frac{p-1}{2}} + a + b = a\left(n^{\frac{p-1}{2}}+1\right) - b\left(n^{\frac{p-1}{2}}-1\right)$

* TH 1:

Nếu $n^{\frac{p-1}{2}}-1 \vdots$ p thì $n^{\frac{p-1}{2}}-1 = pk(k \in$ N) Suy ra

$A = a(pk+1+1) - bp = pk(a-b) + 2a$ không chia hết cho p

* TH 2:

Nếu $n^{\frac{p-1}{2}}+1 \vdots$ p thì $n^{\frac{p-1}{2}}+1 = pt(t \in$ N) Do đó

A = $apt - b(pt-1-1) = pt(a-b) + b$ không chia hết cho p

Vậy A không chia hết cho P.

Câu 5 (2,0 điểm).

Trên một tờ giấy A4 kích thước 210 mm × 297 mm, bạn An vẽ 30 đường tròn bán kính 1cm. Chứng minh rằng sau khi bạn An vẽ 30 đường tròn, bạn Bình luôn dựng được 5 hình vuông có độ dài các cạnh là 2cm mà không có điểm chung với bất kỳ đường tròn nào và hai hình vuông bất kỳ cũng không giao nhau.

Lời giải.

+ Chia chiều rộng tờ giấy A4 thành 10 phần bằng nhau, mỗi phần có chiều dài là $21:10=2,1$ cm

+ Chia chiều dài tờ giấy A4 thành 14 phần bằng nhau, mỗi phần có chiều dài là $29,7:14\approx 2,12$ cm.

+ Với cách chia trên ta chia tờ giấy A4 thành 10.14 = 140 hình chữ nhật có kích thước 2,1 x 2,12 cm (Các hình chữ nhật này không có điểm trong chung)

+ Vẽ 30 hình tròn bán kính 1 cm nên theo nguyên lí Drichle tồn tại ít nhất $\left[\frac{140}{30}+1\right]$ = 5 hình chữ nhật không chứa hình tròn nào. Mà trong 5 hình chữ nhật này vẽ được 5 hình vuông cạnh 2cm, suy ra điều phải chứng minh.