

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} - \frac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)}.$

b) Chứng minh rằng $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}} < 2018.$

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $2\left((1-x)\sqrt{x^2+2x-1}+x\right)=x^2-1.$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x-3y-2+\sqrt{y(x-y-1)}+x=0 \\ 3\sqrt{8-x}-\frac{4y}{\sqrt{y+1}+1}=x^2-14y-8. \end{cases}$$

Câu 3 (3,0 điểm).

Cho đoạn thẳng AB và C là điểm nằm giữa hai điểm A, B . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB , vẽ nửa đường tròn đường kính AB và nửa đường tròn đường kính BC . Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính BC ($M \neq B; M \neq C$). Kẻ MH vuông góc với BC ($H \in BC$), đường thẳng MH cắt nửa đường tròn đường kính AB tại K . Hai đường thẳng AK và CM giao nhau tại E .

a) Chứng minh $BE^2 = BC \cdot AB.$

b) Từ C kẻ $CN \perp AB$ (N thuộc nửa đường tròn đường kính AB), gọi P là giao điểm của NK và CE . Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BNE và PNE cùng nằm trên đường thẳng BP .

c) Cho $BC = 2R$. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác MCH và MBH . Xác định vị trí điểm M để chu vi tam giác O_1HO_2 lớn nhất.

Câu 4 (1,5 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x^2 + 5y^2 = 41 + 2xy.$

b) Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2019 thỏa mãn $n^3 + 2019$ chia hết cho 6.

Câu 5 (1,5 điểm).

a) Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1.$

Chứng minh rằng $3(a+b)^2 - (a+b) + 4ab \geq \frac{1}{2}\sqrt{(a+3b)(b+3a)}.$

b) Cho 100 điểm trên mặt phẳng sao cho trong bất kỳ bốn điểm nào cũng có ít nhất ba điểm thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể bỏ đi một điểm trong 100 điểm đó để 99 điểm còn lại cùng thuộc một đường thẳng.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh: Họ tên, chữ ký GT 1:.....

Số báo danh: Họ tên, chữ ký GT 2:.....