CHỦ ĐỀ 7. ĐỐI XỨNG TRỤC - ĐỐI XỨNG TÂM

A. LÝ THUYẾT.

**1. Các định nghĩa**

• Hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng d, nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó (h.7.1).

• Hai điểm đối xứng nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó (h.7.2).

Description: 7 Description: 7

*Hình 7.1 Hình 7.2*

• Hai hình gọi là đối xứng nhau qua đường thẳng d (hoặc qua điểm O) nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d (hoặc qua điểm O) và ngược lại.

**2. Tính chất**

Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng (hoặc qua một điểm) thì chúng bằng nhau.

**3. Hình có trục đối xứng, có tâm đối xứng**

- Hình thang cân có trục đối xứng là đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy.

- Tương tự hình chữ nhật có hai trục đối xứng.

- Hình thoi có hai trục đối xứng là hai đường chéo. Hình vuông có 4 trục đối xứng.

- Hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông có tâm đối xứng là giao điểm hai đường chéo.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I. MỘT SỐ VÍ DỤ.

***Ví dụ 1.*** Cho tứ giác ABCD, hai đường thẳng AB và CD không vuông góc với nhau. Dựng điểm M trên đường thẳng CD sao cho tia phân giác của góc AMB vuông góc với đường thẳng CD.

*Giải*

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được điểm M trên đường thẳng CD sao cho tia phân giác Mx của góc AMB vuông góc với đường thẳng CD. Trên tia đối của tia MB lấy điểm A' sao cho MA' = MA.

Description: 7 Vì tia Mx là tia phân giác của góc AMB và Mx ⊥ CD nên đường thẳng CD là đường phân giác của góc AMA'.

Xét ΔMAA' cân tại M có MD là đường phân giác nên MD cũng là đường trung trực, suy ra A và A' đối xứng qua đường thẳng CD.

b) Cách dựng

- Dựng điểm A' đối xứng với A qua CD;

- Dựng giao điểm M của A'B với đường thẳng CD. Khi đó M là điểm cần dựng.

c) Chứng minh

Vì A và A' đối xứng qua CD nên CD là đường trung trực của AA', do đó CD cũng là đường phân giác của góc AMA'.

Nếu Mx là tia phân giác của góc AMB thì Mx ⊥ CD (tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù).

d) Biện luận

Bài toán luôn có một nghiệm hình.

*Nhận xét*: Cách dựng điểm M như trên còn cho ta kết quả là tổng AM + MB ngắn nhất.

***Ví dụ 2.*** Cho hình thang ABCD (AB // CD). Trên đáy AB lấy điểm K tuỳ ý. Vẽ điểm E đối xứng với K qua trung điểm M của AD. Vẽ điểm F đối xứng với K qua trung điểm N của BC. Chứng minh rằng EF có độ dài không đổi.

*Description: 7Giải*

\* *Tìm cách giải*

Ta thấy EF = ED + DC + CF mà CD không đổi nên muốn chứng minh EF không đổi ta cần chứng minh ED + CF không đổi.

\* *Trình bày lời giải*

DE và AK đối xứng nhau qua M nên

DE = AK và DE // AK do đó DE // AB.

Mặt khác, DC // AB suy ra ba điểm E, D, C thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta được BK = CF và ba điểm D, C, F thẳng hàng.

Ta có EF = ED + DC + CF = AK + DC + BK = AB + CD (không đổi).

*Nhận xét*: Khi điểm K di động trên cả đường thẳng AB thì độ dài của đoạn thẳng EF vẫn không đổi.

***Ví dụ 3.*** Cho góc xOy khác góc bẹt và hai điểm M, N nằm trong góc đó. Dựng hình bình hành AMBN sao cho A ∈ Ox và B ∈ Oy.

*Giải*

a) Phân tích

Description: 7Giả sử đã dựng được hình bình hành AMBN thoả mãn đề bài. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ điểm F đối xứng với O qua E. Khi đó tứ giác AOBF là hình bình hành.

• Điểm B thoả mãn hai điều kiện:

B ∈ Oy và B ∈ Ft // Ox.

• Điểm A thoả mãn hai điều kiện: A ∈ Ox và A thuộc tia BE.

b) Cách dựng

- Dựng trung điểm E của MN;

- Dựng điểm F đối xứng với O qua E;

- Dựng tia Ft // Ox cắt tia Oy tại B;

- Dựng giao điểm của tia BE và tia Ox.

c) Chứng minh

ΔAOE = ΔBFE (g.c.g) ⇒ EA = EB.

Mặt khác, EM = EN nên tứ giác AMNB là hình bình hành.

d) Biện luận

Bài toán luôn có một nghiệm hình.

***Ví dụ 4.*** Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), điểm D thuộc cạnh huyền BC. Vẽ điểm M và điểm N đối xứng với D lần lượt qua AB và AC. Chứng minh rằng:

a) M và N đối xứng qua A;

b) Xác định vị trí của điểm D để MN ngắn nhất, dài nhất.

*Giải*

\* *Tìm cách giải*

Description: 7Muốn chứng minh hai điểm M và N đối xứng qua A ta chứng minh AM = AN và 

\* *Trình bày lời giải*

a) AM đối xứng với AD qua AB nên

AM = AD và  (1)

AN đối xứng với AD qua AC nên AN = AD và  (2)

Từ (1) và (2) suy ra AM = AN và 

Vậy ba điểm M, A, N thẳng hàng. Từ đó suy ra M và N đối xứng qua A và MN = 2AD.

b) Vẽ AH ⊥ BC, ta có AD ≥ AH, do đó MN ≥ 2AH.

Vậy MN ngắn nhất là bằng 2AH khi D ≡ H (h.7.7).

Dựa vào quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu ta có AD ≤ AC suy ra MN = 2AD ≤ 2AC.

Do đó MN dài nhất là bằng 2AC khi D ≡ C (h.7.8).

Description: 7 Description: 7

*Hình 7.7 Hình 7.8*

II. LUYỆN TẬP.

**• Đối xứng trục**

* 1. Cho tam giác ABD. Vẽ điểm C đối xứng với A qua BD. Vẽ các đường phân giác ngoài tại các đỉnh A, B, C, D của tứ giác ABCD chúng cắt nhau tạo thành tứ giác EFGH.

a) Xác định dạng của tứ giác EFGH;

b) Chứng minh rằng BD là trục đối xứng của tứ giác EFGH.

* 1. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi D là điểm nằm giữa B và C. Vẽ các điểm M và N đối xứng với D lần lượt qua AB và AC.

a) Chứng minh rằng góc MAN luôn có số đo không đổi;

b) Xác định vị trí của D để MN có độ dài ngắn nhất.

* 1. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, CA, AB. Xác định vị trí của D, E, F để chu vi tam giác DEF nhỏ nhất.
  2. Cho hai điểm A, B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ xy. Hãy tìm trên xy hai điểm C và D sao cho CD = a cho trước và chu vi tứ giác ABCD là nhỏ nhất.
  3. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD và một điểm M ở trong tam giác. Vẽ các điểm N, P, A' đối xứng với M lần lượt qua AB, AC và AD.

a) Chứng minh rằng N và P đối xứng qua AA';

b) Gọi B', C' là các điểm đối xứng với M lần lượt qua các đường phân giác của góc B, góc C. Chứng minh rằng ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

* 1. Cho tứ giác ABCD và một điểm M nằm giữa A và B. Chứng minh rằng MC + MD nhỏ hơn số lớn nhất trong hai tổng AC + AD; BC + BD.

**• Đối xứng tâm**

* 1. Cho tam giác ABC và O là một điểm tuỳ ý trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng với O qua D, E, F. Chứng minh rằng ba đường thẳng AA', BB', CC'   
     đồng quy.
  2. Cho góc xOy khác góc bẹt và một điểm G ở trong góc đó. Dựng điểm A ∈ Ox, điểm B ∈ Oy sao cho G là trọng tâm của tam giác OAB.
  3. Cho tam giác ABC. Vẽ điểm D đối xứng với A qua điểm B. Vẽ điểm E đối xứng với B qua C. Vẽ điểm F đối xứng với C qua A. Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác DEF có cùng một trọng tâm.
  4. Dựng hình bình hành ABCD biết vị trí trung điểm M của AB, trung điểm N của BC và trung điểm P của CD.
  5. Dựng tứ giác ABCD biết AD = AB = BC và ba điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, AB và BC (biết M, N, P không thẳng hàng).
  6. Cho một hình vuông gồm 4×4 ô vuông. Trong mỗi ô viết một trong các số 1, 2, 3, 4. Chứng minh rằng tồn tại một hình bình hành có đỉnh là tâm của bốn ô vuông sao cho tổng hai số ở hai đỉnh đối diện là bằng nhau.