BỒI DƯỠNG VÀ PHÁT TRIỂN TƯ DUY

ĐỘT PHÁ TRONG GIẢI

TOÁN HỌC 8

TẬP 2

HÌNH HỌC

THEO CHUẨN KIẾN THỨC KĨ NĂNG

☞ *Tóm tắt lí thuyết căn bản*

☞ *Giải chi tiết, phân tích, bình luận, hướng dẫn làm bài dành cho học sinh lớp 8 và chuyên Toán.*

☞ *Tham khảo cho phụ huynh và giáo viên.*

LỜI NÓI ĐẦU

Sách giáo khoa Toán 8 hiện hành được biên soạn theo tinh thần đổi mới của chương trình và phương pháp dạy – học, nhằm nâng cao tính chủ động, tích cực của học sinh trong quá trình học tập.

Tác giả xin trân trọng giới thiệu cuốn sách "**BỒI DƯỠNG VÀ PHÁT TRIỂN TƯ DUY ĐỘT PHÁ TRONG GIẢI TOÁN HỌC 8**", được viết với mong muốn gửi tới các thầy cô, phụ huynh và các em học sinh một tài liệu tham khảo hữu ích trong dạy và học môn Toán ở cấp THCS theo định hướng đổi mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Cuốn sách được cấu trúc gồm các phần:

- Kiến thức căn bản cần nắm: Nhắc lại những kiến thức cơ bản cần nắm, những công thức quan trọng trong bài học, có ví dụ cụ thể…

- Bài tập sách giáo khoa, bài tập tham khảo: Lời giải chi tiết cho các bài tập**,** bài tập được tuyển chọn từ nhiều nguồn của môn Toán được chia bài tập thành các dạng có phương pháp làm bài, các ví dụ minh họa có lời giải chi tiết...Có nhiều cách giải khác nhau cho một bài toán...

Cuốn sách này còn là tài liệu tham khảo bổ ích cho quí thầy cô giáo và các bậc phụ huynh học sinh để hướng dẫn, giúp đỡ các em học tập tốt bộ môn Toán.

Các tác giả

MỤC LỤC

CHƯƠNG I. TỨ GIÁC
BÀI 1. TỨ GIÁC

A.LÝ THUYẾT:

1) Định nghĩa:

Tứ giác ABCD là hình gồm 4 đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, trong đó bất kỳ hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kỳ cạnh nào của tứ giác.

Hai đỉnh kề nhau: A và B; B và C; C và D; D và A

Hai đỉnh đối nhau: A và C; B và D

Đường chéo AC; BD

Hai cạnh kề nhau: AB và BC; BC và CD; CD và DA

Hai cạnh đối nhau: AB và CD; AD và BC

Hai góc kề nhau: $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$; $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$; $\widehat{C}$ và $\widehat{D}$; $\widehat{D}$ và $\widehat{A}$

Hai góc đối nhau: $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$; $\widehat{B}$ và $\widehat{D}$

Điểm nằm trong tứ giác: M

Điểm nằm trên tứ giác: N

Điểm nằm ngoài tứ giác: P

2) <u>Định lý</u>: Tổng các góc của một tứ giác bằng 180^0

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 1. Cho tứ giác ABCD biết $\widehat{B}+\widehat{C}=200^0$, $\widehat{B}+\widehat{D}=180^0$; $\widehat{C}+\widehat{D}=120^0$.

a) Tính số đo các góc của tứ giác.

b) Gọi I là giao điểm của các tia phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ của tứ giác. Chứng minh: $\widehat{AIB}=\dfrac{\widehat{C}+\widehat{D}}{2}$

Bài giải:

a) Từ giả thiết ta có: $2\widehat{B}+2\widehat{C}+2\widehat{D}=200^0+180^0+120^0 \Rightarrow \widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=250^0$.

Vì $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^0 \Rightarrow \widehat{A}=110^0$.

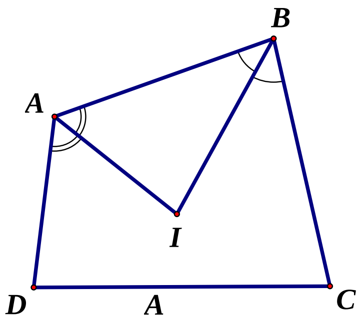
$\widehat{B}=250^0-\left(\widehat{C}+\widehat{D}\right)=250^0-120^0=130^0$.

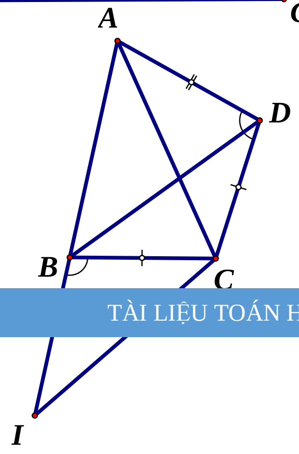
$\widehat{C}=200^0-\widehat{B}=200^0-130^0=70^0$.

$\widehat{D}=120^0-\widehat{C}=120^0-70^0=50^0$.

b) Trong tam giác ABI:

$$\widehat{AIB}=180^0-\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}=\frac{360^0-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)}{2}=\frac{\widehat{C}+\widehat{D}}{2}.$$





Bài 2. Cho tứ giác lồi ABCD có $\widehat{B}+\widehat{D}=180^0$, CB = CD. Chứng minh AC là tia phân giác của $\widehat{BAD}$.

Bài giải:

Trên tia đối tia BA lấy điểm I sao cho BI = AD.

Ta có $\widehat{ADC} = \widehat{IBC}$ (cùng bù với góc $\widehat{ABC}$).

AD = IB, DC = BC. Từ đó ta có $\Delta ADC = \Delta IBC$.

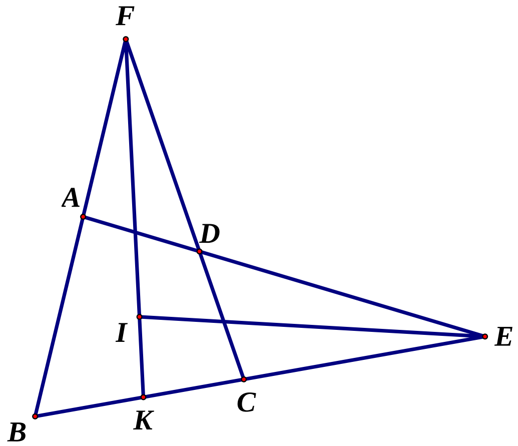
Suy ra: $\widehat{DAC} = \widehat{BIC}$ và AC = IC.

Tam giác ACI cân tại C nên $\widehat{BAC} = \widehat{BIC} = \widehat{DAC}$.

Vậy AC là phân giác trong góc $\widehat{BAD}$.

Bài 3. Cho tứ giác lồi ABCD, hai cạnh AD và BC cắt nhau tại E, hai cạnh DC và AB cắt nhau tại F. Kẻ tia phân giác của hai góc CED và BFC cắt nhau tại I. Tính góc EIF theo các góc trong tứ giác ABCD.

Bài giải:



FI cắt BC tại K, suy ra K thuộc đoạn BC

$\Rightarrow \widehat{EIF} = \widehat{EKI} + \widehat{IEK}$ ($\widehat{EIF}$ là góc ngoài của Δ IKE)

$= \widehat{B} + \widehat{BFK} + \widehat{IEK}$ ($\widehat{CKF}$ là góc ngoài của Δ FBK)

$$\widehat{BFC} = 180^0 - \left(\widehat{B} + \widehat{C}\right) \Rightarrow \widehat{BFK} = 90^0 - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}.$$

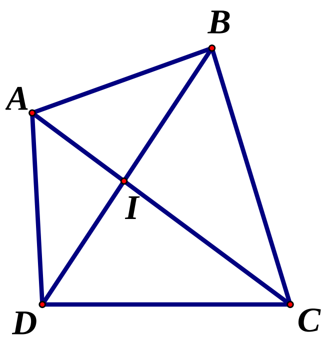
$$\widehat{AEB} = 180^0 - \left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) \Rightarrow \widehat{IEK} = 90^0 - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}.$$

Vậy $\widehat{EIF} = \widehat{B} + 90^0 - \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} + 90^0 - \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$

$$= 180^0 - \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2}$$

Bài 4. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh: $\frac{1}{2}p < AC + BD < p$ (p: chu vi của tứ giác)

Bài giải:



Gọi I là giao điểm của AC và BD. Theo bất đẳng thức tam giác, ta có:

IA + IB > AB, IA + ID >AD, IB + IC >BC, IC +ID >CD

Cộng theo vế, ta được: 2(IA + IB + IC + ID) > p, từ đó:

$AC + BD > \frac{1}{2}p$.

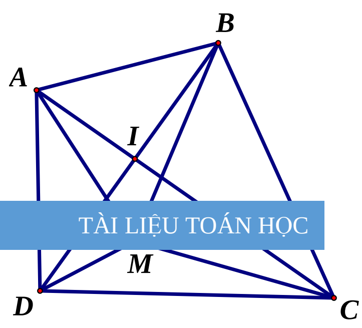
Lại có: AC < AB+BC, AC < AD + DC, BD < BA +AD, BD < BC + CD.

Suy ra $2(AC + BD) < 2(AB + BC + CD + DA) = 2p \Rightarrow AC + BD < p$.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD, M là một điểm trong tứ giác đó. Xác định vị trí của M để MA + MB + MC + MD nhỏ nhất.

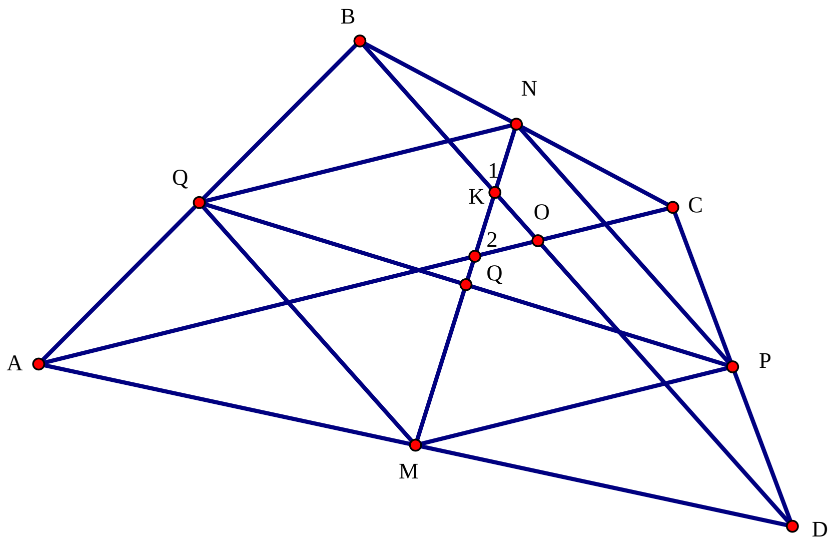
Bài giải:

Gọi I là giao điểm của AC và BD. Ta có các bất đẳng thức:



MA + MC ≥ AC, MB + MD ≥ BD.
Từ đó suy ra MA + MB + MC + MD ≥ AC + BD
MA + MB + MC + MD = AC + BD khi M trùng với I.
Vậy khi M là giao điểm hai đường chéo thì MA + MB + MC + MD nhỏ nhất.

Bài 6. Một đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh đối diện của một tứ giác lồi tạo với các đường chéo của hai góc bằng nhau .Chứng minh rằng tứ giác ấy có hai đường chéo bằng nhau.
Giải.



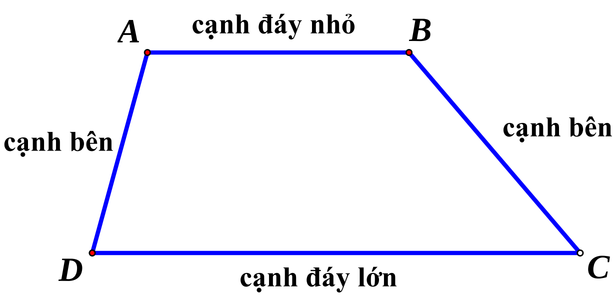
Gọi Q,P lần lượt là trung điểm của AB ,CD tương ứng
Khi đó ta có :
QN//MP ; NP//QM. ⇒ Tứ giác QNPM là hình bình hành.
Vì MN tạo với AC và BD hai góc bằng nhau nên suy ra MN cũng tạo với QN và QM hai góc bằng nhau
Tức là : $\widehat{QNM} = \widehat{QMN}$
Suy ra Tam giác QMN cân tại Q
Suy ra QN=QM
Ta có QN=$\frac{1}{2}AC$ và QM=$\frac{1}{2}BD$ (Đường trung bình của tam giác)
Mà QN=QM (Chứng minh trên)
Suy ra AC=BD
Vậy Tứ giác trên có hai đường chéo bằng nhau

BÀI 2. HÌNH THANG

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Tứ giác ABCD là hình thang

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB // CD \\ BC // AD \end{array}\right.$



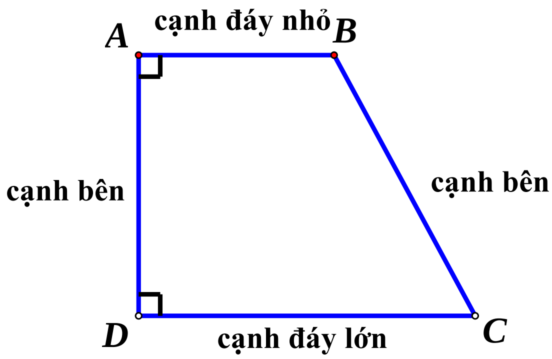
2.Tính chất:

* Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì nó là hình chữ nhật.

* Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì nó là hình bình hành.

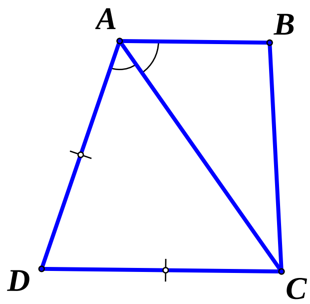
3. Hình thang vuông:

Hình thang vuông là hình thang có hai góc vuông.



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 7. Cho tứ giác ABCD có AD = DC, đường chéo AC là phân giác góc Â. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.



Bài giải:

Ta có AD = DC nên tam giác ADC cân tại D.

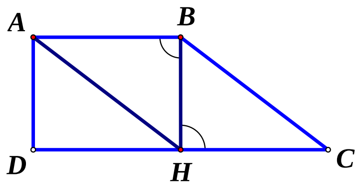
Suy ra $\widehat{DCA} = \widehat{DAC} = \widehat{BAC}$

Suy ra AB//CD (hai góc so le trong bằng nhau)

Vậy ABCD là hình thang.

Bài 8. Cho hình thang ABCD, đáy AB = 40cm, CD = 80cm, BC = 50cm, AD = 30cm. Chứng minh rằng ABCD là hình thang vuông.

Bài giải:



Gọi H là trung điểm của CD. Ta có DH = CH = 40cm

Xét hai tam giác ABH và CHB có:

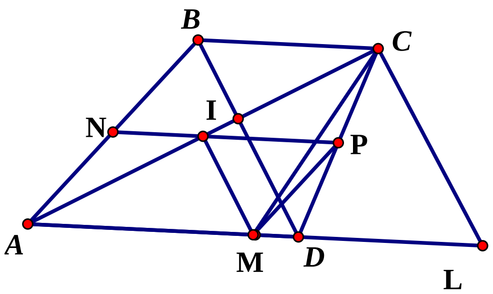
AB = CH = 40cm, $\widehat{ABH} = \widehat{CHB}$ (so le trong), BH = HB

Suy ra $\Delta ABH = \Delta CHB$ (c-g-c) $\Rightarrow$ AH = CB = 50cm.

Tam giác ADH có: $AD^2 + DH^2 = 40^2 + 30^2 = 50^2 = AH^2$

Suy ra tam giác ADH vuông tại D. Vậy hình thang ABCD là hình thang vuông.

Bài 9. Cho hình thang ABCD (AD//BC; AD > BC) có đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại I. Trên đáy AD lấy M sao cho AM bằng độ dài đường trung bình của hình thang. Chứng minh: tam giác ACM cân tại M



Giải:

Gọi L là điểm đối xứng với đối xứng với A qua M Gọi NM là đường trung bình của hình thang ABCD như hình vẽ

Gọi I là giáo điểm của AC và NP

Vì NP//BC $\Rightarrow$ NI//BC mà N là trung điểm AB

$\Rightarrow$ I cũng là trung điểm AC 1)

Suy ra IM//CL (2)

Xét hình thang ABCD ta có:'

P=$\frac{BC+AD}{2}$=AM $\Leftrightarrow BC+AD=2AM$

$\Rightarrow \mathrm{BC}+\mathrm{AD}-\mathrm{AM}=\mathrm{AM} \Rightarrow \mathrm{BC}+\mathrm{MD}=\mathrm{AM}=\mathrm{ML}$

$\Rightarrow \mathrm{BC}=\mathrm{ML}-\mathrm{MD}=\mathrm{DL}$

Suy ra BC=DL mà BC//DL

Suy ra tứ giác BCLD là hình bình hành

Suy ra BD//CL

Mà BD $\perp$ AC (gt) $\Rightarrow CL \perp AC$ (3)

Từ (1) ,(2) và (3) IM $\perp$ AC và MI là đường trung trục của đoạn thẳng AC

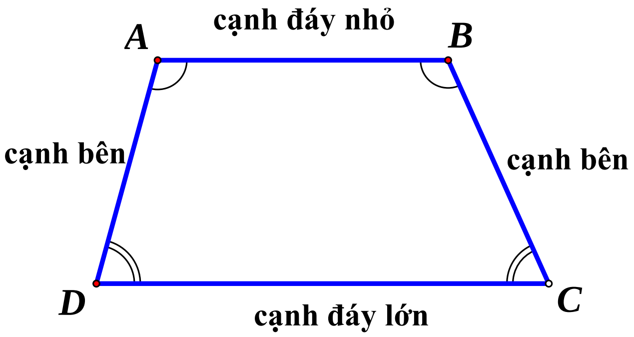
Suy ra MA=MC

Vậy tam giác MAC cân tại M.

BÀI 3. HÌNH THANG CÂN

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Tứ giác ABCD là hình thang cân $\Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ \left[\begin{array}{l} \widehat{C} = \widehat{D} \\ \widehat{A} = \widehat{B} \end{array}\right. \end{cases}$



2. Tính chất: Trong hình thang cân:

* Hai cạnh bên bằng nhau

* Hai đường chéo bằng nhau

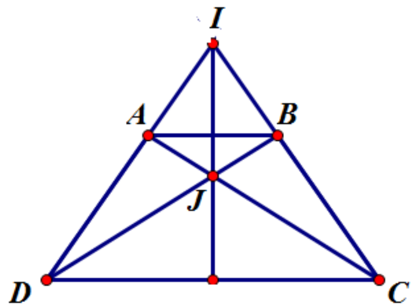
3. Dấu hiệu nhân biết:

* Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

* Hình thang có hai góc chung một cạnh đáy bằng nhau là hình thang cân.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 10. Cho hình thang cân ABCD (AB//CD). AD cắt BC tại I, AC cắt BD tại J. Chứng minh rằng IJ là trung trực của AB và là trung trực của CD.



Bài giải:

ABCD là hình thang cân nên $\widehat{C} = \widehat{D}$

Suy ra tam giác ICD cân tại I

$\Rightarrow$ I nằm trên đường trung trực của CD. (1)

Ta lại có $\widehat{IAB} = \widehat{D} = \widehat{C} = \widehat{IBA}$ nên tam giác IAB cân tại I.

$\Rightarrow$I nằm trên đường trung trực của AB. (2)

Xét tam giác ACD và tam giác BDC có:

AD = BC (vì ABCD là hình thang cân)

CD: cạnh chung

AC = BD (2 đường chéo của hình thang cân)

Do đó $\Delta ACD = \Delta BDC$, suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$

$\Rightarrow$tam giác JCD cân tại J $\Rightarrow$ J nằm trên đường trung trực của CD (3)

Tương tự ta có tam giác JAB cân tại J $\Rightarrow$ J nằm trên đường trung trực của AB (4)

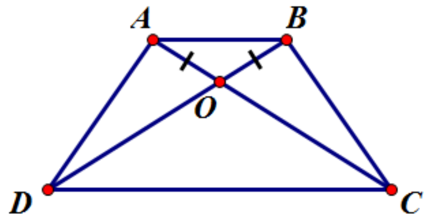
Từ (1), (2), (3), (4) suy ra IJ là đường trung trực của AB và CD.

Bài 11. Cho hình thang ABCD (AB // CD). AC cắt BD tại O. Biết OA = OB. Chứng minh rằng: ABCD là hình thang cân.

Bài giải:

Vì OA = OB nên tam giác OAB cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$



Ta có $\widehat{OCD} = \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{ODC}$

$\Rightarrow$ tam giác OCD cân tại O $\Rightarrow$ OC = OD

Suy ra AC = OA + OC = OB + OD = BD.

Hình thang ABCD có hai đường chéo AC và BD bằng nhau nên ABCD là hình thang cân.

Bài 12. Cho hình thang cân ABCD (AB//CD, AB < CD). AD cắt BC tại O.

a) Chứng minh rằng ΔOAB cân

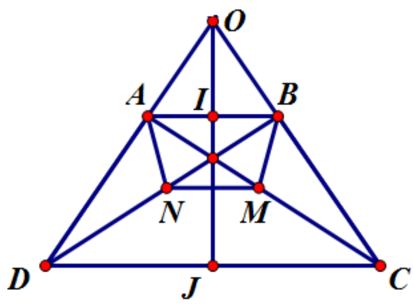
b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng ba điểm I, J, O thẳng hàng

c) Qua điểm M thuộc cạnh AC, vẽ đường thẳng song song với CD, cắt BD tại N. Chứng minh rằng MNAB, MNDC là các hình thang cân.

Bài giải:

a) Vì ABCD là hình thang cân nên $\widehat{C} = \widehat{D}$ suy ra OCD là tam giác cân.

Ta có $\widehat{OAB} = \widehat{D} = \widehat{C} = \widehat{OBA}$ (hai góc đồng vị)



$\Rightarrow$ Tam giác OAB cân tại O.

b) OI là trung tuyến của tam giác cân OAB

nên OI cũng là đường cao tam giác OAB

$\Rightarrow$OI $\perp$ AB

Mà AB // CD nên OI $\perp$ CD

Tam giác OCD cân tại O có OI $\perp$ CD nên OI cắt CD tại trung điểm J của CD.

Vậy ba điểm O, I, J thẳng hàng.

c) Xét ΔACD và ΔBDC có:

AC = BD (2 đường chéo của hình thang cân)

AD = BC (2 cạnh bên của hình thang cân)

CD = DC

Do đó ΔACD = ΔBDC (c-c-c)

Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$ hay $\widehat{MCD} = \widehat{NDC}$

Hình thang MNDC có $\widehat{MCD} = \widehat{NDC}$ nên MNDC là hình thang cân.

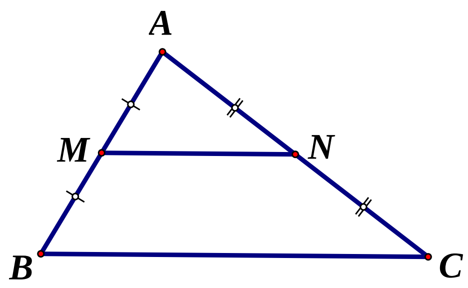
$\Rightarrow$MC = ND$\Rightarrow$ AC – MC = BD – ND$\Rightarrow$ AM = BN

Hình thang MNAB có hai đường chéo AM và BN bằng nhau nên MNAB là hình thang cân.

BÀI 4. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH

A. LÝ THUYẾT

1. Đường trung bình của tam giác:



a) Định lý mở đầu:
Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.

b) Định nghĩa:
Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối hai trung điểm hai cạnh của tam giác đó.

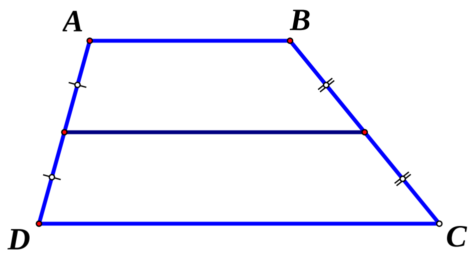
c) Định lý đường trung bình của tam giác:
Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và có độ dài bằng một nửa cạnh ấy.

2. Đường trung bình của hình thang:

a) Định lý mở đầu:
Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên còn lại.

b) Định nghĩa:
Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang ấy.

c) Định lý đường trung bình của hình thang:
Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và có độ dài bằng nửa tổng độ dài hai đáy.



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 13. Cho hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$ và AB = 2AD = 2CD. Kẻ CH vuông góc với AB tại H.

a) Tính số đo các góc của hình thang ABCD.

b) CMR tam giác ABC vuông cân.

c) Tính chu vi hình thang nếu AB = 6cm.

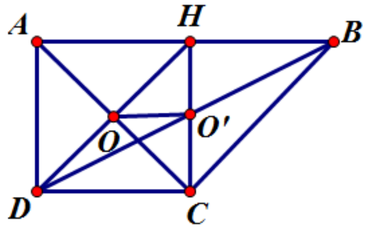
d) Gọi O là giao điểm AC và DH, O′ là giao điểm của DB và CH. Chứng minh rằng AB = 4OO′

Bài giải:

a) Ta có tứ giác ADCH $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = \widehat{C} = 90^o$ và AH // CD, AD // CH

AHCD là hình thang cân hai đáy AH, CD

$\Rightarrow$ AD = CH.



AHCD cũng là hình thang cân với hai đáy AD, HC

$\Rightarrow AH = CD$.

BH = AB – AH = 2CD – CD = CD và CH = AD = BH

Do đó ΔBCH vuông cân tại H, suy ra $\widehat{B} = 45^o$, $\widehat{BCH} = 45^o$

$\widehat{C} = \widehat{BCH} + \widehat{DCH} = 45^o + 90^o = 135^o$

Vậy $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$, $\widehat{B} = 45^o$, $\widehat{C} = 135^o$

b) ΔABC có H là trung điểm AB và CH $\perp$ AB nên ABC là tam giác cân tại C

Ta lại có $\widehat{B} = 45^o$, suy ra ΔABC vuông cân tại C.

c) Ta có AB = 6cm

$AD = CD = \frac{1}{2}AB = 3cm.$

ΔABC vuông cân tại C nên $BC = \frac{1}{\sqrt{2}}AB = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ cm

Chu vi hình thang ABCD là: $AB + BC + CD + DA = 6 + 3\sqrt{2} + 3 + 3 = 12 + 3\sqrt{2}\,(cm)$

d) Dễ thấy $\widehat{ACD} = 45^0 \Rightarrow \widehat{HDC} = 45^0 \Rightarrow DH // BC \Rightarrow DH \perp AC$.

Vì ΔACD vuông cân tại D nên O là trung điểm của AC.

Ta có $\Delta DO'C = \Delta BO'H$ (g-c-g) $\Rightarrow$ O′C = O′H, hay O′ là trung điểm của CH.

Xét ΔAHC có OO′ là đường trung bình nên AH = 2OO′

Mà AB = 2AH nên AB = 4OO′.

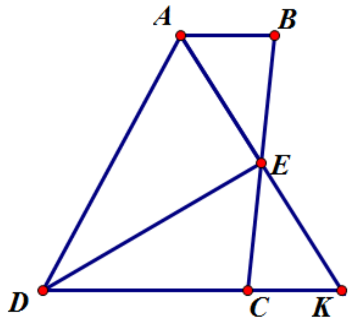
Bài 14. Cho hình thang ABCD (AB//CD) có E là trung điểm của BC, $\widehat{AED} = 90^o$. Gọi K là giao điểm của AE và DC. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ABE = \Delta KCE$

b) DE là tia phân giác của góc D.

Bài giải:

a) Xét ΔABE và ΔKCE có:



$\widehat{ABE} = \widehat{KCE}$ (2 góc sole trong)

$\widehat{AEB} = \widehat{KEC}$ (2 góc đối đỉnh)

BE = CE (E là trung điểm BC)

Do đó $\Delta ABE = \Delta KCE$ (g – c – g)

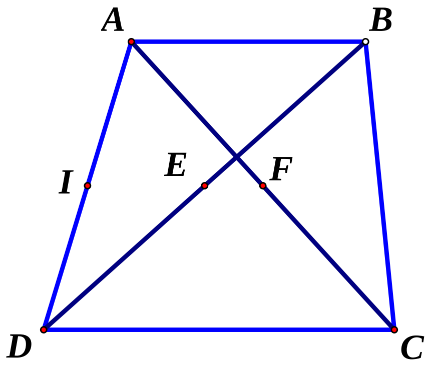
b) Vì $\Delta ABE = \Delta KCE$ nên AE = KE $\Rightarrow$ E là trung điểm AK $\Rightarrow$ DE là trung tuyến của tam giác ADK

Ta lại có DE $\perp$ AK suy ra DE là đường cao của ΔADK.

Do đó tam giác ADK cân tại D và DE là phân giác góc D.

Bài 15. Cho tứ giác ABCD trong đó CD > AB. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BD và AC. Chứng minh rằng nếu ABCD là hình thang thì $EF = \dfrac{CD - AB}{2}$.

Bài giải:



Gọi I là trung điểm AD.

Ta có EI // AB và $EI = \dfrac{1}{2}AB$

FI // CD và $FI = \dfrac{1}{2}CD$.

Qua điểm I ta có EI // AB và FI // CD // AB nên I, E, F thẳng hàng.

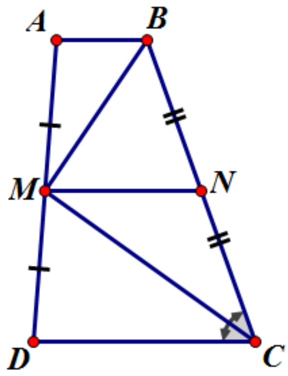
Suy ra $EF = FI - EI = \dfrac{1}{2}AB - \dfrac{1}{2}CD$ hay

$EF = \dfrac{CD - AB}{2}$

Bài 16. Cho hình thang ABCD (AB//CD), tia phân giác của góc C đi qua trung điểm M của cạnh bên AD. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{BMC} = 90^o$ b) BC = AB + CD

Bài giải:



a) Gọi N là trung điểm BC.

Ta có MN // CD $\Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{CMN}$

Mà $\widehat{MCD} = \widehat{MCN}$ (vì CM là phân giác $\widehat{D}$)

Suy ra $\widehat{CMN} = \widehat{MCN} = \dfrac{1}{2}\widehat{DCB}$

Tam giác MCN cân tại N $\Rightarrow$ MN = NC = NB, do đó ΔMNB cân tại N $\Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{NBM}$. Mặt khác $\widehat{NMB} = \widehat{MBA}$, suy ra $\widehat{NMB} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}$

$\widehat{BMC} = \widehat{CMN} + \widehat{NMB} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{BCD} + \widehat{ABC}\right) = 90^o$.

b) Vì MN là đường trung bình của hình thang ABCD nên $MN = \dfrac{1}{2}(AB + CD)$

Ta lại có $MN = \dfrac{1}{2}BC$. Do đó BC = AB + CD

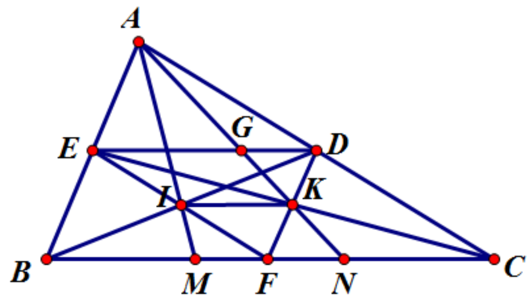
Bài 17. Cho tam giác ABC có các trung tuyến BD và CE. Trên cạnh BC lấy các điểm M, N sao cho BM = MN = NC. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của AN và CE. Chứng minh rằng:

a) BCDE là hình thang

b) K là trung điểm của EC

c) BC = 4IK

Bài giải:



a) Ta có DE là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow$ DE // BC $\Rightarrow$ BCDE là hình thang.

b) Gọi G là giao điểm AN và DE.

Ta có E là trung điểm AB và ED // BN

$\Rightarrow$ G là trung điểm AN

$\Rightarrow$ EG là đường trung bình của Δ ABN

$\Rightarrow EG = \frac{1}{2}BN = \frac{1}{3}BC$

Ta lại có $ED = \frac{1}{2}BC \Rightarrow EG = \frac{2}{3}ED \Rightarrow$ G là trọng tâm Δ ACE

$\Rightarrow$ AK là trung tuyến của Δ ACE $\Rightarrow$ K là trung điểm EC

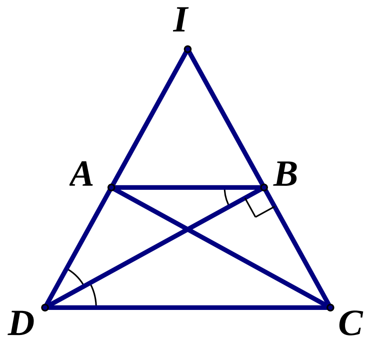
c) Chứng minh tương tự ta có I là trung điểm EF.

Gọi F là trung điểm BC, ta có DF // AB và DK // AB $\Rightarrow$ D, K, F thẳng hàng.

$DK = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{4}AB = \frac{1}{2}DF$, suy ra K là trung điểm của DF.

Suy ra IK là đường trung bình của Δ DEF $\Rightarrow IK = \frac{1}{2}DE$.

Mà $DE = \frac{1}{2}BC \Rightarrow IK = \frac{1}{4}BC$ hay BC = 4IK.



Bài 18. Cho hình thang cân ABCD có $\widehat{D} = 60^o$, DB là phân giác của $\widehat{D}$. Biết chu vi hình thang bằng 20cm. Tính độ dài các cạnh hình thang.

Bài giải:

Vì ABCD là hình thang cân nên $\widehat{C} = \widehat{D} = 60^0$ và

$\widehat{A} = \widehat{B} = 180^0 - 60^0 = 120^0$

Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{CDB}$ (vì DB là phân giác $\widehat{D}$)

Mà $\widehat{CDB} = \widehat{ABD}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ADB} = \widehat{CDB} = 30^o$

$\Rightarrow$ Tam giác ABD cân tại A $\Rightarrow$ AB = AD = BC

Gọi I là giao điểm của AD và BC, dễ dàng chứng minh Δ ICD đều (có hai góc bằng 60^0) và B là trung điểm IC (vì DB là đường phân giác góc D, cũng là đường trung tuyến trong Δ IDC). Do đó CD = IC = 2BC.

Đặt AB = a $\Rightarrow$ BC = AD = AB = a và CD = 2a.

Chu vi hình thang ABCD: AB + BC + CD + AD = 5a = 20cm

$\Rightarrow$ a = 4cm

$\Rightarrow$ AB = BC = AD = 4cm và CD = 8cm.

Bài 19. Cho ΔABC, đường thẳng d đi qua A không cắt các cạnh của tam giác ABC. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng d. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng MD = ME.

Bài giải:

Ta có BD // CE (cùng vuông góc DE)

$\Rightarrow$ BCED là hình thang vuông.

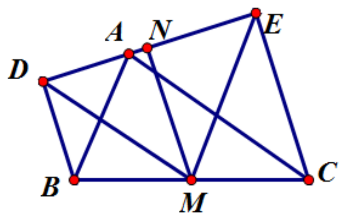
Gọi N là trung điểm DE

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình của hình thang vuông BCED

$\Rightarrow$ MN $\perp$ DE.

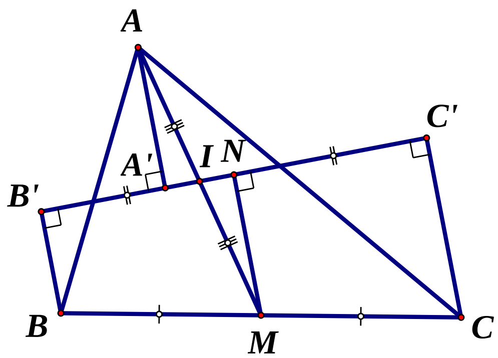
Tam giác MDE có MN là trung tuyến và MN $\perp$ DE

$\Rightarrow$ MDE là tam giác cân tại M $\Rightarrow$ MD = ME



Bài 20. Cho tam giác ABC, AM là trung tuyến. Vẽ đường thẳng d qua trung điểm I của AM cắt các cạnh AB, AC. Gọi A′, B′, C′ thứ tự là hình chiếu của A, B, C lên đường thẳng d. Chứng minh rằng BB′ + CC′ = 2AA′.

Bài giải:



Gọi N là hình chiếu của M trên d.

Xét tứ giác BB′C′C có BB′ // CC′ (cùng vuông góc d)

$\Rightarrow$ BB′C′C là hình thang.

M là trung điểm BC và MN // BB′ // CC′ (cùng vuông góc d)

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình của hình thang BB′C′C

$\Rightarrow$ BB′ + CC′ = 2MN (1)

Hai tam giác AA’I và MNI vuông tại A’ và N có AI = MI và $\widehat{AIA'} = \widehat{MIN}$ (hai góc đối đỉnh).

Suy ra $\Delta AA'I = \Delta MNI$ (g-c-g) $\Rightarrow$ AA′ = MN (2).

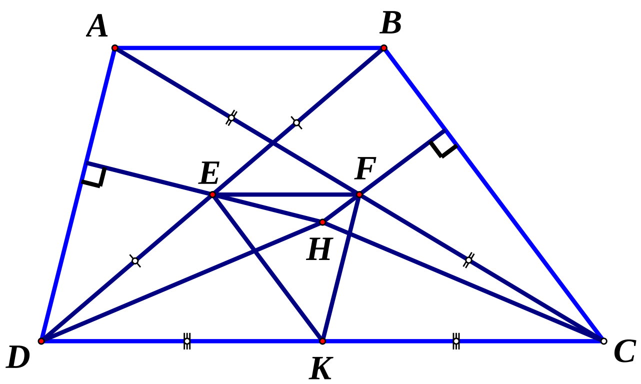
(1), (2) suy ra BB′ + CC′ =2AA′.

Bài 21.* Cho hình thang ABCD (AB//CD). Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của BD, AC, DC. Gọi H là giao điểm của đường thẳng qua E vuông góc với AD và đường thẳng qua F vuông góc với BC. Chứng minh rằng:

a) H là trực tâm của tam giác EFK

b) Tam giác HCD cân.

Bài giải:



a) Ta có E, K lần lượt là trung điểm BD, CD $\Rightarrow$ EK // BC.

Mà FH $\perp$ BC $\Rightarrow$ FH $\perp$ EK.

Tương tự ta có EH $\perp$ FK

Suy ra H là trực tâm tam giác EFK.

b) Ta có H là trực tâm tam giác EFK nên KH $\perp$ EF

Gọi I là trung điểm của AD, dễ dàng chứng minh được IE // AB // CD và IF // CD. Từ đó suy ra EF // AB // CD.

Do đó, KH $\perp$ CD.

Tam giác HCD có K là trung điểm CD và KH $\perp$ CD nên HCD là tam giác cân tại H.

Bài 22. Cho tam giác đều ABC. Trên tia đối tia AB ta lấy điểm D và trên tia đối tia AC ta lấy điểm E sao cho AD = AE. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BE, AD, AC, AB.

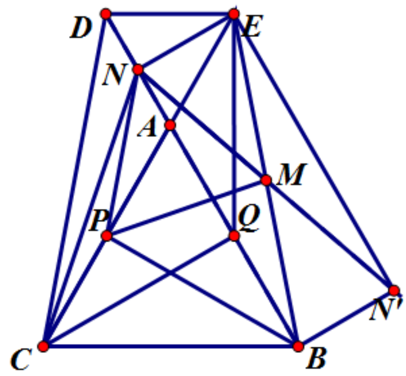
a) Chứng minh rằng tứ giác BCDE là hình thang cân.

b) Chứng minh rằng tứ giác CNEQ là hình thang.

c) Trên tia đối của tia MN lấy N′ sao cho N′M = MN. Chứng minh rằng BN′ vuông góc với BD; EB = 2MN.

d) ΔMNP là tam giác đều.

Bài giải:



a) Ta có tam giác ADE cân và có $\widehat{A} = 60^0$ nên Δ ADE là tam giác đều.

$\widehat{ADE} = \widehat{ABC} = 60^0 \Rightarrow$ DE // BC (hai góc so le trong bằng nhau)

Ta lại có: DB = AD + AB = AE + AC = EC

Do đó BCDE là hình thang cân.

b) Tam giác đều ADE có EN là trung tuyến

$\Rightarrow$EN $\perp$ AD hay EN $\perp$ BD.

CQ là trung tuyến tam giác đều ABC $\Rightarrow$CQ $\perp$ AB hay EQ $\perp$ BD.

Suy ra EN // CQ (cùng vuông góc BD)

$\Rightarrow$CNEQ là hình thang.

c) Hai tam giác MEN và MBN′ có:

MN = MN′, $\widehat{NME} = \widehat{N'MB}$ (đối đỉnh), NE = MB, suy ra $\Delta MEN = \Delta MBN'$.

$\Rightarrow \widehat{ENM} = \widehat{MN'B} \Rightarrow$N′B // EN (hai góc so le trong bằng nhau).

Mà EN $\perp$ BD nên BN′ $\perp$ BD.

Dễ dàng chứng minh được $\widehat{ENB} = \widehat{N'BN}$ (c-g-c)$\Rightarrow$BE = NN′ = 2MN.

d) Xét tam giác ACD có NP là đường trung bình $\Rightarrow$NP = $\frac{1}{2}$DC

Mà DC = EB (vì BCDE là hình thang cân) nên NP = $\frac{1}{2}$EB = MN (1).

Theo trên, MN = MB = MN′ = ME nên các tam giác MBN và MEN′ cân tại M.

Ta được $\widehat{BNN'} = \widehat{BEN'} = \widehat{NBE} \Rightarrow$ EN′ // AB.

Ta có: $\widehat{ANP} = \widehat{ADC} = \widehat{AEB}$ và $\widehat{ANM} = \widehat{BEN'}$

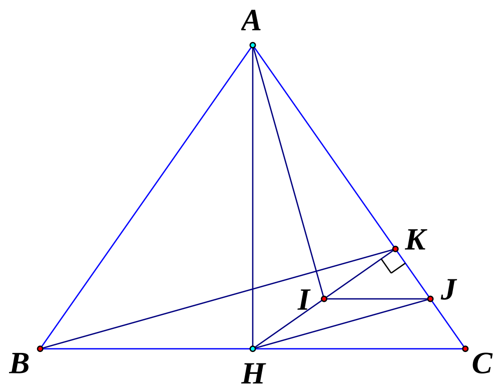
Do đó: $\widehat{PNM} = \widehat{ANP} + \widehat{ANM} = \widehat{AEB} + \widehat{BEN'} = \widehat{AEN'}$.

Vì EN′ // AB nên $\widehat{AEN'} = \widehat{CAB} = 60^0$ (đồng vị).

Từ đó ta có $\widehat{PNM} = 60^0$ (2).

Từ (1), (2) suy ra MNP là tam giác đều.

Bài 23. Cho tam giac ABC cân tại A, đường cao AH. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên AC. Gọi I là trung điểm HK. Chứng minh rằng: BK $\perp$AI.



Lời giải:

Gọi J là trung điểm của KC, ta có IJ là đường trung bình trong tam giác KHC.

Do đó IJ // HC $\Rightarrow$ IJ $\perp$ AH.

Trong tam giác AHJ có IJ $\perp$ AH, HI $\perp$ AJ. Từ đó, I là trực tâm tam giác AHJ.

$\Rightarrow$ AI $\perp$ HJ (1).

Trong tam giác BKC, HJ là đường trung bình, suy ra HJ // BK (2).

(1) và (2) suy ra AI $\perp$ BK.

Bài 24. Cho hình thang cân ABCD (AB//CD; AD = BC), có đáy nhỏ AB. Độ dài đường cao BH bằng độ dài đường trung bình MN (M thuộc AD, N thuộc BC) của hình thang ABCD. Vẽ BE// AC (E thuộc DC). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng

a) $MN = \dfrac{DE}{2}$ b)Tam giác OAB cân c) Tam giác DBE vuông cân

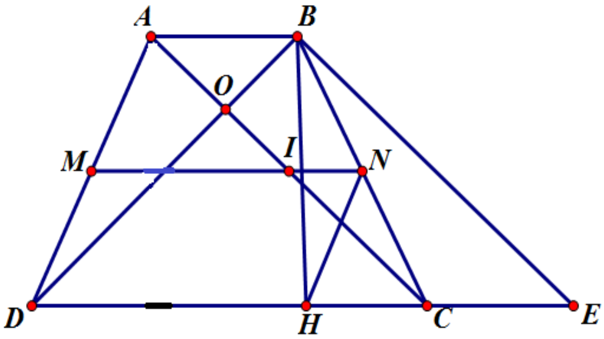
Bài giải:

a) $\widehat{ABC} = \widehat{ECB}$ (so le trong), BC = CB, $\widehat{BCA} = \widehat{CBE}$ (so le trong)

Suy ra $\Delta ABC = \Delta ECB$ (g-c-g) $\Rightarrow$ AB = EC.

MN là đường trung bình của hình thang cân ABCD

$\Rightarrow MN = \dfrac{DC+AB}{2} = \dfrac{DC+CE}{2} = \dfrac{DE}{2}$



b) Xét ΔABC và ΔBAD có:

AB = BA

AC = BD (2 đường chéo hình thang cân)

BC = AD (2 cạnh bên hình thang cân)

Do đó $\Delta ABC = \Delta BAD$ (c – c – c)

Suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{ABD}$ hay $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$

$\Rightarrow$ Tam giác OAB cân tại O.

c) Tam giác DBE có BE = AC = BD $\Rightarrow$ Tam giác DBE cân tại B.

BH là đường cao tam giác cân DBE nên BH cũng là trung tuyến của tam giác này.

Mà $BH = MN = \dfrac{DE}{2} \Rightarrow$ Tam giác BDE vuông tại B

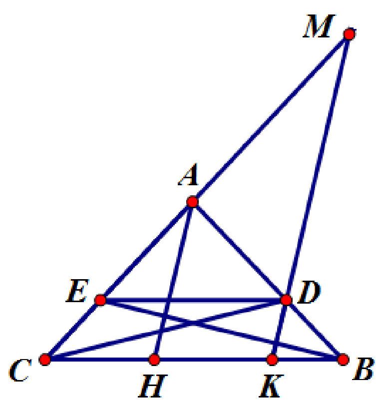
Vậy DBE là tam giác vuông cân.

Bài 25. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên các cạnh góc vuông AB, AC lấy điểm D và E sao cho AD = AE. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BE, cắt BC ở K. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với BE, cắt BC ở H. Gọi M là giao điểm DK với AC. Chứng minh rằng:

a) $\Delta BAE = \Delta CAD$

b) MDC là tam giác cân

c) KH = HC



Bài giải:

a) Xét ΔBAE và ΔCAD có:

$\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ (góc chung)

AE = AD (giả thiết)

BA = CA (vì ΔABC vuông cân tại A)

Do đó: $\Delta BAE = \Delta CAD$ (c – g – c)

b) Vì $\Delta BAE = \Delta CAD$ nên $\widehat{AEB} = \widehat{ADC}$

Ta có DK $\perp$ BE $\Rightarrow \widehat{BDK} + \widehat{DBE} = 90^o$

hay $\widehat{BDK} + \widehat{ABE} = 90^o$

Ta lại có $\widehat{AEB} + \widehat{ABE} = 90^0$.

Suy ra $\widehat{BDK} = \widehat{AEB} = \widehat{ADC}$

Mặt khác $\widehat{BDK} = \widehat{ADM}$ (2 góc đối đỉnh). Do đó $\widehat{ADM} = \widehat{ADC} \Rightarrow$ DA là phân giác $\widehat{CDM}$

Tam giác MDC có DA vừa là phân giác vừa là đường cao $\Rightarrow$ Tam giác MDC cân tại D.

c) Tam giác MDC cân tại D có DA là phân giác nên DA cũng là trung tuyến tam giác này

$\Rightarrow$ A là trung điểm MC

Tam giác MCK có A là trung điểm MC và AH // MK (cùng vuông góc BE) $\Rightarrow$ AH là đường trung bình của tam giác MCK $\Rightarrow$ H là trung điểm CK

Vậy KH = HC.

Bài 26 . Cho Δ ABC nhọn (AB < AC). Bên ngoài Δ ABC vẽ Δ BAD vuông cân ở A, Δ ACE vuông cân ở A; BE cắt CD tại I. gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, BD. Chứng minh tứ giác AINM là hình thang cân.

Lời giải:

* Chứng minh BE $\perp$ CD:

Xét hai tam giác: ABE và ADC, có:

AB = AD (vì Δ ABD vuông cân tại A).

$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ (cùng bằng $90^0 + \widehat{BAC}$)

AE = AC (vì Δ ACE vuông cân tại A)

Do vậy $\Delta ABE = \Delta ADC \Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{ADI}$.

AB cắt DI tại H, ta có: $\widehat{AHD} + \widehat{ADH} = 90^0$; $\widehat{AHD} = \widehat{BHI}$; $\widehat{ADH} = \widehat{HBI}$

Suy ra $\widehat{BHI} + \widehat{HBI} = 90^0$. Vậy BE $\perp$ CD tại I.

* Chứng minh AM = IN và AN = IM:

Gọi K là điểm đối xứng của D qua A. Xét hai tam giác: Δ ABC và Δ AKE.

AB = AK (cùng bằng AD); $\widehat{BAC} = \widehat{KAE}$ (cùng phụ với $\widehat{CAK}$); AC = AE.

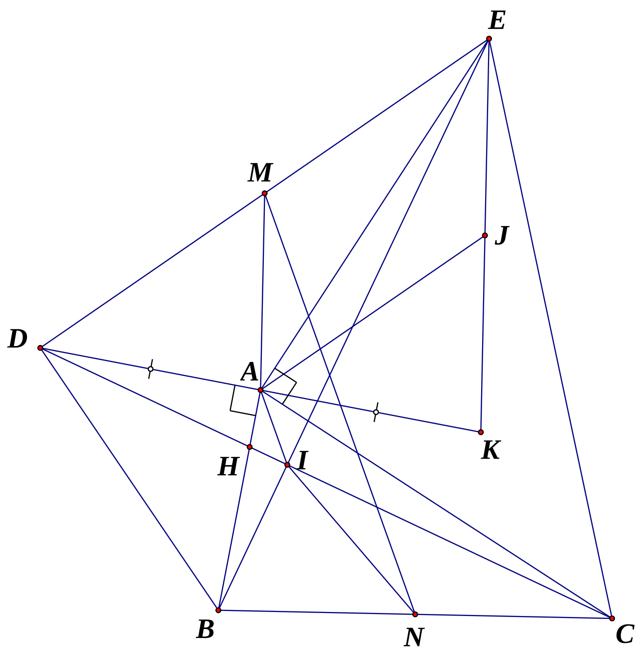
Do đó Δ ABC = Δ AKE. Suy ra EK = BC.

Trong tam giác DKE, AM là đường trung bình nên AM = $\frac{1}{2}$KE.

Trong tam giác IBC vuông tại I, IN là trung tuyến nên IN = $\frac{1}{2}$BC.

Từ đó cho ta AM = IN.

Gọi J là trung điểm của KE, vì hai tam giác ABC và AKE bằng nhau nên hai trung tuyến tương ứng bằng nhau. Ta có AN =



AJ.

AI là đường trung bình trong tam giác DEK, ta có AJ = $\frac{1}{2}$DE.

IM là trung tuyến trong tam giác IDE vuông tại I nên IM = $\frac{1}{2}$DE.

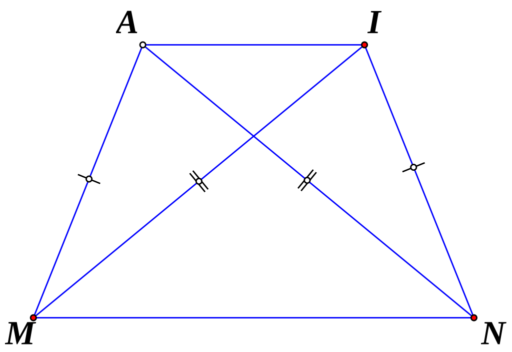
Do đó: AJ = IM.

* Xét tứ giác AMNI có AM = IN và AN = IM, ta chứng minh AMNI là hình thang cân.

Δ AMI = Δ INA (c-c-c) $\Rightarrow \widehat{IAM} = \widehat{AIN}$ (1).

Δ AMN = Δ INM (c-c-c) $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{INM}$ (2).

Từ (1) và (2) dễ dàng suy ra AMNI là hình thang cân với hai đáy AI, MN.



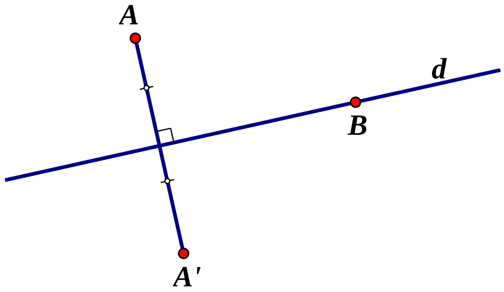
BÀI 6. TRỤC ĐỐI XỨNG

A. LÝ THUYẾT

1. <u>Hai điểm đối xứng qua một đường thẳng</u>:

Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Quy ước: Nếu điểm B nằm trên đường thẳng d thì điểm đối xứng với B qua đường thẳng B là chính B.



2. <u>Hai hình đối xứng qua một đường thẳng</u>:

Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d và ngược lại.

Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.

3. <u>Hình có trục đối xứng:</u>

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua đường thẳng d cũng thuộc hình H.

Khi đó ta nói hình H có trục đối xứng d.

4. <u>Định lý</u>:

Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó.

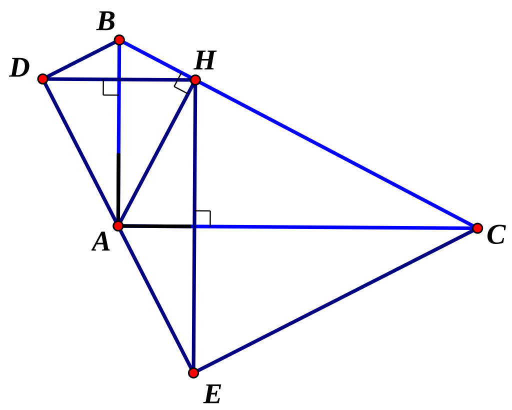
B. RÈN LUYỆN KỸ NẰNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 27. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là điểm đối xứng của điểm H qua AB và AC. Chứng minh rằng:

a) A là trung điểm của đoạn DE

b) Tứ giác BDEC là hình thang vuông.

c) Cho BH = 2cm, Ch = 8cm. Tính AH và chu vi hình thang BDEC.



Bài giải:

a) Vì D đối xứng với H qua đường thẳng AB nên $\widehat{DAH} = 2\widehat{BAH}$. Tương tự ta có $\widehat{EAH} = 2\widehat{CAH}$.

Do đó:

$$\widehat{DAE} = \widehat{DAH} + \widehat{EAH} = 2\left(\widehat{BAH} + \widehat{CAH}\right) = 180^0$$

suy ra D, A, E thẳng hàng

Mặt khác: AD = AE = AH. Vậy A là trung điểm của DE.

b) Góc $\widehat{ADB}$ và $\widehat{AHB}$ đối xứng nhau qua đường thẳng AB nên $\widehat{ADB} = \widehat{AHB} = 90^0$.

Tương tự ta có $\widehat{AEC} = \widehat{AHC} = 90^0$. Tứ giác BDEC có hai góc kề $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^0$, do vậy BDEC là hình thang vuông tại D và E.

c) BH = 2cm, CH = 8cm.

Trong tam giác ABH vuông tại H, theo định lý Pitago: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = AB^2 - 4$

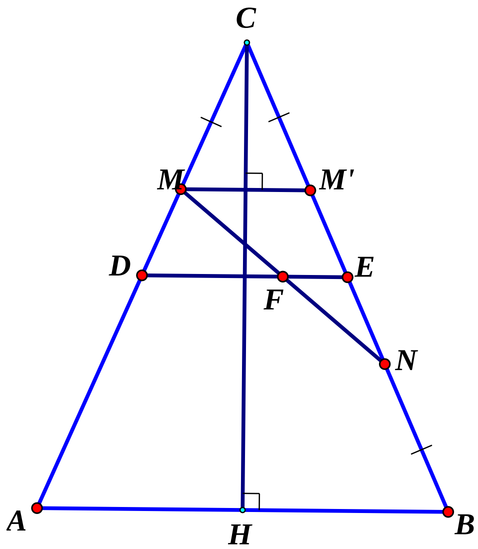
Trong tam giác ACH vuông tại H, theo định lý Pitago $AH^2 = AC^2 - CH^2 = AC^2 - 64$
Suy ra: $2AH^2 = AB^2 + AC^2 - 68$.
Lại có $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 100$, suy ra $2AH^2 = 100 - 68 = 32 \Rightarrow AH^2 = 16$.
Vậy $AH = 4$.
Đặt V là chu vi hình thang BDEC.
Ta có $BD = BH, DE = 2DA = 2HA, EC = HC$. Do đó:

$V = BD + DE + EC + CB = BH + 2AH + CH + CB = 2 + 8 + 8 + 10 = 28(cm)$.

Bài 28. Trên các cạnh bên CA, CB của tam giác CAB cân tại C lấy các điểm M, N sao cho $CM + CN = AC$.

a) Trên cạnh CB lấy điểm M′ sao cho CM′ = BN. Chứng minh M, M′ đối xứng nhau qua đường cao CH của tam giác CAB.

b) Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, MN. Chứng minh: D, E, F thẳng hàng.



Bài giải:

a) Ta có $CA = CB$.
Theo giả thiết: $CM + CN = AC = BC$ nên $BN = BC - CN = CM$. Vì $CM' = BN$ suy ra $CM = CM'$. Vậy tam giác CMM′ cân tại C.
CH là đường phân giác góc ACB, nên CH là đường trung trực của cạnh MM′. Vậy M và M′ đối xứng nhau qua đường thẳng CH.

b) $MM' \perp CH$, $AB \perp CH \Rightarrow MM' \,//\, AB$.
DE là đường trung bình trong tam giác ABC nên DE // AB, suy ra DE // MM′.

Vì $\begin{cases} EC = EB \\ M'C = NB \end{cases} \Rightarrow EM' = EN$, suy ra E là trung điểm của M′N.

Trong tam giác MM′N, đường thẳng DE song song với MM′ và đi qua trung điểm của M′N nên DE là đường trung bình, do đó DE đi qua trung điểm F của MN. Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Bài 29. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn trong đó góc A có số đo bằng 60^o. Lấy D là điểm bất kì trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của D qua cạnh AB và AC. EF cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tại M và N.

a) Chứng minh rằng AE = AF

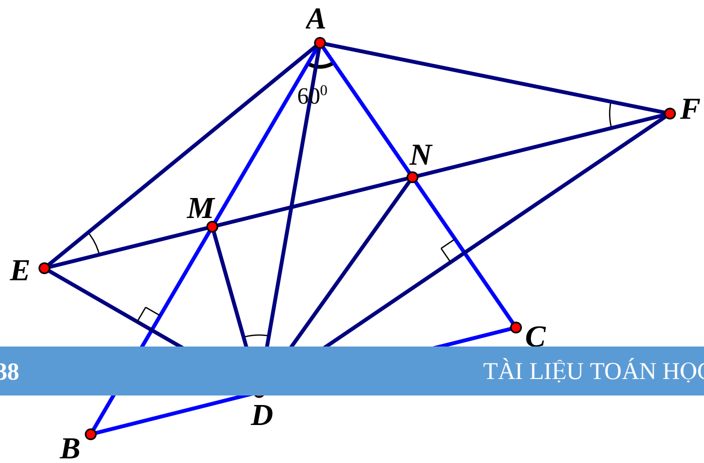
b) Tính góc EAF

c) Chứng minh rằng DA là phân giác của góc MDN

Bài giải:

a) E đối xứng của D qua đường thẳng AB nên AE = AD, F đối xứng của D qua đường thẳng AC nên AF = AD.
Từ đó ta có AE = AF.

b) Góc $\widehat{EAB}$ và $\widehat{DAB}$ đối xứng nhau qua đường thẳng AB nên $\widehat{EAB} = \widehat{DAB}$, suy ra



$\widehat{EAD} = \widehat{EAB} + \widehat{DAB} = 2\widehat{DAB}$. Chứng minh tương tự ta có $\widehat{FAD} = 2\widehat{DAC}$.

Do vậy: $\widehat{EAF} = \widehat{EAD} + \widehat{FAD} = 2\left(\widehat{DAB} + \widehat{DAC}\right) = 2\widehat{BAC} = 120^0$.

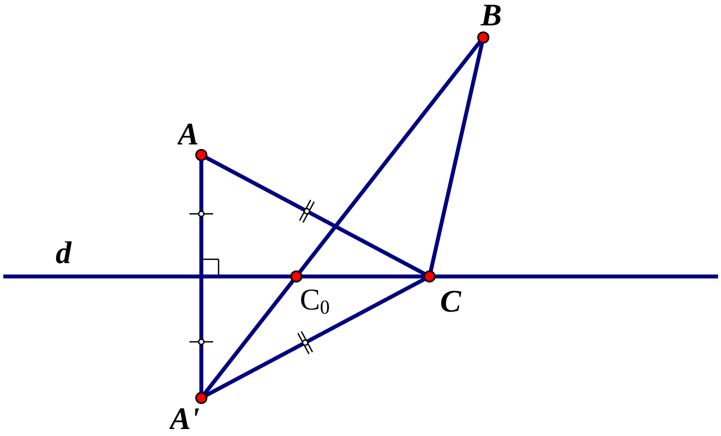
c) Hai góc MDA và MEA đối xứng nhau qua đường thẳng AB nên $\widehat{MDA} = \widehat{MEA}$ (1).

Tương tự ta có $\widehat{NDA} = \widehat{NFA}$ (2).

Mặt khác theo câu a), tam giác AEF cân tại A nên $\widehat{MEA} = \widehat{NFA}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{MDA} = \widehat{NDA}$. Vậy DA là đường phân giác góc $\widehat{MDN}$.

Bài 30. Cho hai điểm A và B cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d. Tìm trên d một điểm C sao cho tổng độ dài CA + CB là ngắn nhất.



Bài giải:

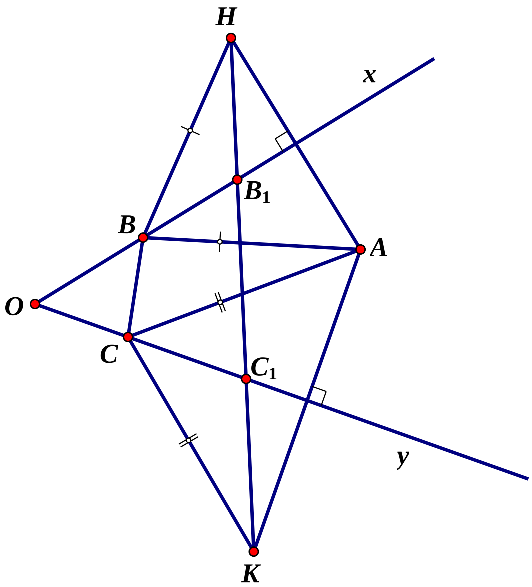
Gọi A′ là điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d. Với mỗi điểm C trên đường thẳng d, ta có $CA = CA'$. Do đó:

$CA + CB = CA' + CB \geq A'B$.

$CA + CB$ nhỏ nhất khi $CA' + CB = A'B$, hay C thuộc đoạn A′B. Vậy điểm C thỏa đề bài là giao điểm của đoạn BA′ với đường thẳng d.

Bài 31. Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc xOy. Tìm trên hai cạnh Ox và Oy hai điểm B và C sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất.

Bài giải:



Gọi H, K lần lượt là điểm đối xứng của A qua Ox và Oy. Với hai điểm B và C lần lượt nằm trên tia Ox, Oy, ta có:

AB = HB và CA = CK.

Do đó chu vi tam giác ABC bằng:

$AB + BC + CA = HB + BC + CK \leq HK$.

Chu vi tam giác ABC nhỏ nhất khi:

$HB + BC + CK = HK$, hay H, B, C, K thẳng hàng theo thứ tự đó.

Vậy điểm B và C trên tia Ox, Oy để tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất lần lượt là giao điểm của HK với các tia Ox, Oy.

Bài 32. Cho tứ giác ABCD có góc ngoài của tứ giác tại đỉnh C bằng góc ACB. Chứng minh rằng AB + DB > AC + DC.

Bài giải:

Gọi E là một điểm trên tia đối của tia CB. Theo giả thiết ta có: $\widehat{DCE} = \widehat{ACB}$.

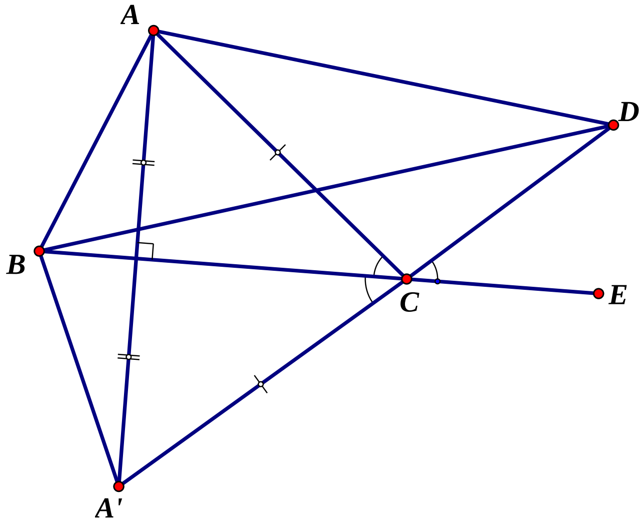
Gọi A′ là điểm đối xứng của A qua đường thẳng BC. Ta có $\widehat{A'CB} = \widehat{ACB} = \widehat{DCE}$, suy ra: $\widehat{DCE} + \widehat{A'CE} = \widehat{A'CB} + \widehat{A'CE} = 180^0$.

Vậy ba điểm D, C, A′ thẳng hàng. Vì A và D nằm cùng phía so với đường thẳng BC nên C nằm giữa D và A′.

Ta có: AB +DB =A′B + BD,

$AC + CD = A'C + CD = A'D$.

Trong tam giác BDA′, A′B + BD > A′D. Do vậy ta được $AB + DB > AC + CD$.



Bài 33. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 20^0$, $\widehat{B} = 80^0$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho AM = BC. Tính $\widehat{BMC}$.

Bài giải:

Bên trong tam giác ABC, dựng tam giác đều BCD. Ta có:

$\widehat{ACD} = \widehat{ACB} - \widehat{DCB} = 80^0 - 60^0 = 20^0$.

Xét hai tam giác ACD và BAM có:

AC = BA (vì tam giác ABC cân tại A)

$\widehat{ACD} = \widehat{BAM} = 20^0$.

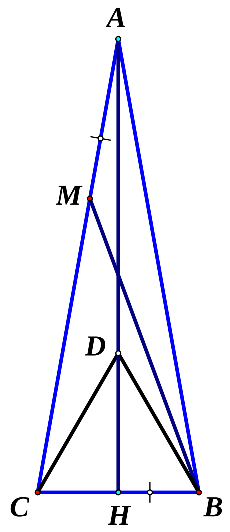
CD = AM (cùng bằng BC)

Do vậy, hai tam giác ACD và BAM bằng nhau. Ta có:

$\widehat{ABM} = \widehat{CAD}$ (1).

Gọi H là trung điểm của BC, ta có $AH \perp BC$ và $DH \perp BC$ suy ra hai đường thẳng AD và AH trùng nhau, AD là trục đối xứng của tam giác cân ABC. Từ đó ta có $\widehat{CAD} = \widehat{BAD} = 10^0$ (2).

(1) và (2) suy ra $\widehat{ABM} = 10^0$.



Vậy $\widehat{BMC} = \widehat{BAM} + \widehat{ABM} = 20^0 + 10^0 = 30^0$.

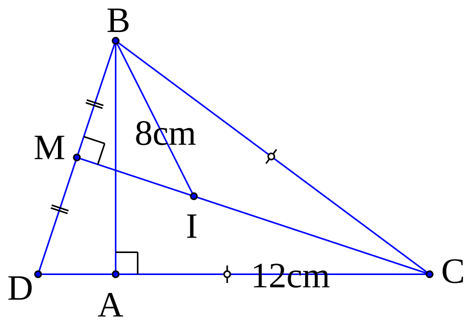
Bài 34.** Cho Δ ABC vuông tại A. Gọi I là giao điểm của các đường phân giác của Δ ABC. Biết AC = 12cm; IB = 8cm. Tính độ dài BC.

Giải:

Gọi D là điểm đối xứng của B qua đường thẳng CI. Vì CI là phân giác góc $\widehat{BAC}$ nên D thuộc đường thẳng AC và BC = DC.

Gọi M là trung điểm BD, thì $CM \perp BD$.

Ta có: $\widehat{BIM} = \widehat{ICB} + \widehat{IBC} = 45^0$, do đó tam giác BMI vuông cân tại M, suy ra $BM = 4\sqrt{2}$ (cm).



$\Rightarrow$ BD = $8\sqrt{2}$ (cm).

AD = CD – AC = BC – 12 (cm)

Tam giác ABC vuông tại A, có: $AB^2 = BC^2 - AC^2 = BC^2 - 144$

Tam giác ABD vuông tại A, có: $AB^2 = BD^2 - AD^2 = 128 - (BC - 12)^2$

Như vậy ta có: $128 - (BC - 12)^2 = BC^2 - 144$

$\Rightarrow 128 - (BC^2 - 24BC + 144) = BC^2 - 144$

$\Rightarrow 2BC^2 - 24BC - 128 = 0$

$\Rightarrow 2BC^2 - 32BC + 8BC - 128 = 0$

$\Rightarrow 2BC(BC - 16) + 8(BC - 16) = 0$

$\Rightarrow (2BC + 8)(BC - 16) = 0.$

$\Rightarrow BC = 16$ (cm).

BÀI 7. HÌNH BÌNH HÀNH

A. LÝ THUYẾT:

1. <u>Định nghĩa</u>: Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song với nhau.

2. <u>Tính chất – Định lí</u>: Trong hình bình hành:

a) Các cạnh đối song song và bằng nhau.

b) Các góc đối bằng nhau

c) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết hình bình hành:

a) Tứ giác có các cạnh đối song song nhau

b) Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau

c) Tứ giác có các góc đối bằng nhau

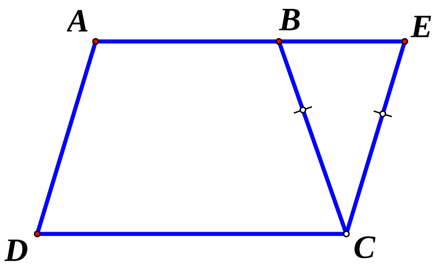
d) Tứ giác có một cặp cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau

e) Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

B. VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Cho hình thang cân ABCD (AB//CD, AB < CD). Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho CB = CE. Chứng minh AECD là hình bình hành.

Giải:



Dễ thấy tam giác BCE cân tại C suy ra $\widehat{CBE} = \widehat{CEB}$

Ta lại có $\widehat{CBA} = \widehat{DAB}$

Mà $\widehat{CBE} + \widehat{CBA} = 180^\circ$

Nên $\widehat{CEB} + \widehat{DAB} = 180^\circ$

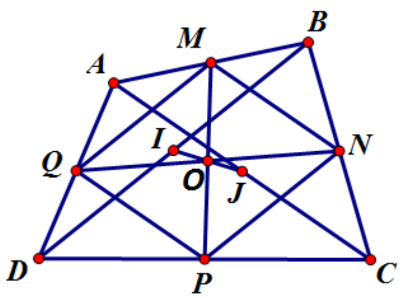
Suy ra AC//ED (2 góc trong cùng phía bù nhau)

Suy ra AECD là hình bình hành

Ví dụ 2: Cho tứ giác ABCD, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng các đoạn thẳng MP, QN, IJ đồng quy tại một điểm.



Giải:

a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra MN//AC và MN = $\frac{1}{2}$AC; PQ là đường trung bình của tam giác ADC suy ra PQ// AC và PQ = $\frac{1}{2}$AC.

Do đó MN//PQ và MN = PQ, suy ra MNPQ là hình bình hành.

b) Gọi O là trung điểm MP thì O cũng là trung điểm QN.

Tam giác ABD có MI là đường trung bình nên MI//AD và MI = $\frac{1}{2}$AD.

Tam giác ACD có PJ là đường trung bình nên PJ//AD và PJ = $\frac{1}{2}$AD.

Suy ra MI//PJ và MI = PJ $\Rightarrow$ MIJP là hình bình hành. Mà O là trung điểm MP nên O cũng là trung điểm IJ.

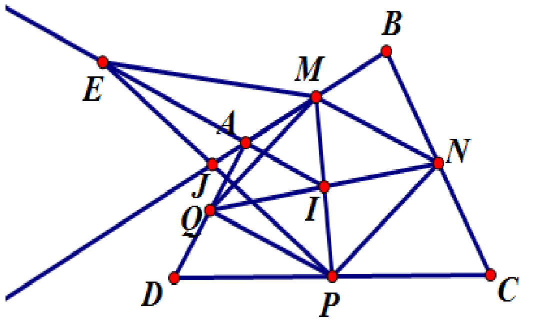
Vậy các đoạn thẳng MP, QN, IJ đồng quy tại O.

Ví dụ 3: Cho tứ giác ABCD, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

b) Gọi I là giao điểm của MP và QN. Gọi E là điểm trên tia IA sao cho EA = 2AI và J là giao điểm của tia MA và EP. Chứng minh rằng J là trung điểm của EP.

Giải:



a) Tương tự ví dụ 2.

b) Xét tam giác EMP có EI là trung tuyến.

Điểm A nằm trên đoạn EI và EA = 2AI

$\Leftrightarrow EA = \dfrac{2}{3}EI \Leftrightarrow$ A là trọng tâm tam giác EMP.

Suy ra MA là trung tuyến của tam giác EMP

Mà MA cắt EP tại J nên J là trung điểm EP.

C. RÈN LUYỆN KỸ NẰNG GIẢI BÀI TẬP:

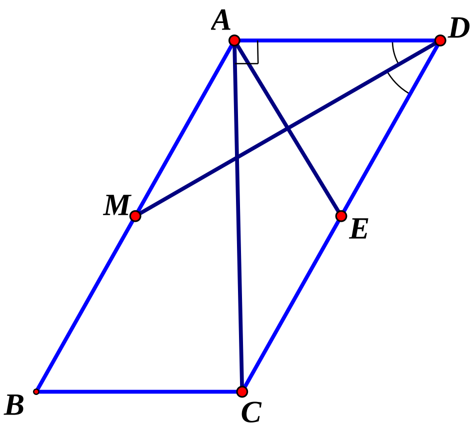
Bài 35. Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = 120^{o}$, phân giác góc $\widehat{D}$ đi qua trung điểm của cạnh AB. Gọi E là trung điểm của CD. Chứng minh:

a) AB = 2AD

b) ΔADE đều, ΔAEC cân

c) AC $\perp$ AD

Bài giải:



a) Gọi M là trung điểm của cạnh AB, ta có

$\widehat{AMD} = \widehat{CDM}$ (1) (so le trong).

Mặt khác, DM là phân giác góc D nên $\widehat{ADM} = \widehat{CDM}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ADM}$, do đó tam giác ADM cân tại A.

Vậy $AD = AM = \dfrac{1}{2}AB$.

b) Trong hình bình hành ABCD, $\widehat{A} = 120^{0} \Rightarrow \widehat{D} = 60^{0}$ và $AD = DE = \dfrac{1}{2}CD$. Tam giác ADE cân và có một góc bằng 60^{0}, nên tam giác ADE đều.

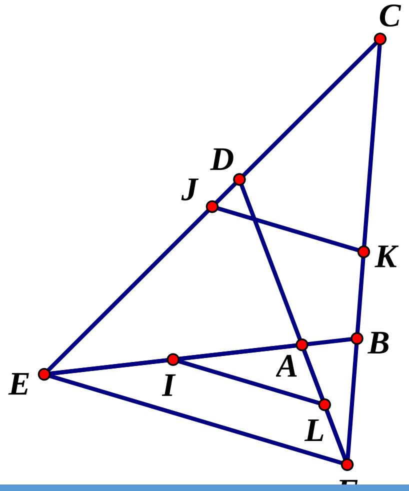
Theo trên, tâm giác ADE đều nên AE = ED = EC, suy ra tam giác AEC cân tại E.

c) Vì ΔADE đều và ΔACE cân tại E nên

$\widehat{EAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{AED} = 30^{0}$ (góc ngoài của ΔAEC)

Mặt khác $\widehat{EAD} = 60^{0}$, suy ra $\widehat{CAD} = 90^{0}$.

Vậy AC $\perp$ AD.



Bài 36. Cho tứ giác ABCD. Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại E, đường thẳng BC cắt đường thẳng AD tại F. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AE, CE, CF, AF. Chứng minh rằng IL//JK.

Bài giải:

Xét ΔAEF, I là trung điểm của AE, L là trung điểm của AF nên IL là đường trung bình. Ta có IL // EF (1).

Tương tự, xét ΔCEF, JK là đường trung bình nên JK // EF (2).

Mặt khác, I, J, K lần lượt nằm trên ba cạnh của tam giác EBC nên I, J, K không thẳng hàng.

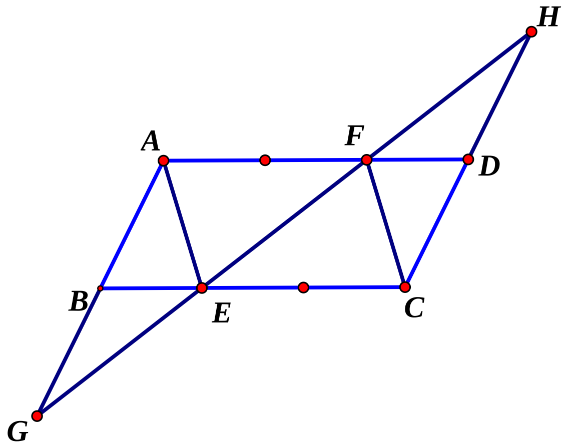
Vậy từ (1) và (2) suy ra IL // JK.

Bài 37. Cho hình bình hành ABCD. Hai điểm E, F lần lượt lấy trên BC, AD sao cho BE $=\frac{1}{3}$ BC, DF $=\frac{1}{3}$ DA và EF lần lượt cắt AB, CD tại G, H. Chứng minh rằng:

a) GE = EF = FH

b) Tứ giác AECF là hình bình hành.

Bài giải:



a) Trong ΔAGF, B trên cạnh AG, E trên cạnh FG. Ta có $BE = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{2}AF$ và BE // AF suy ra BE là đường trung bình trong ΔAGF.

Do đó E là trung điểm của GF (1).

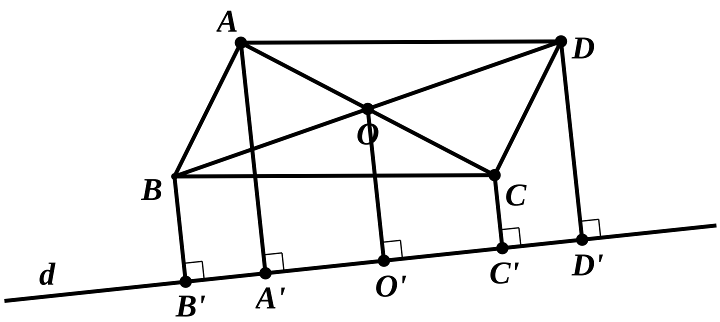
Chứng minh tương tự, DF là đường trung bình trong tam giác CHE, nên F là trung điểm của HE (2).

Từ (1) và (2) suy ra GE = EF = FH.

b) Ta có $AF = \frac{2}{3}AD$ và $EC = \frac{2}{3}BC$, suy ra $AF = CE$. Mặt khác AF // CE, do vậy tứ giác AECF là hình bình hành.

Bài 38. Cho hình bình hành ABCD có 2 đường chéo cắt nhau tại O, đường thẳng d nằm ngoài hình bình hành. Gọi A′, B′, C′, D′, O′ lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, O trên đường thẳng d. Chứng minh rằng: AA′ + CC′ = BB′ + DD′ = 2OO′

Bài giải:



Ta có

$AA' \perp d, CC' \perp d \Rightarrow AA' // CC'$

suy ra tứ giác AA′C′C là hình thang.

O là trung điểm AC và OO′ song song với AA′ nên OO′ là đường trung bình của hình thang AA′C′C.

Từ đó ta có: AA′ + CC′ = 2OO′.

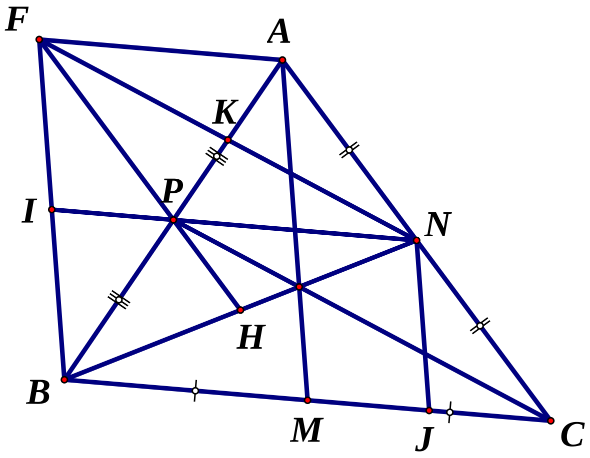
Lập luận tương tự, ta có BB′ + DD′ = 2OO′.

Vậy AA′ + CC′ = BB′ + DD′ = 2OO′.

Bài 39. Cho tam giác ABC có 3 đường trung tuyến AM, BN, CP. Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng qua B song song với AM tại F; NP cắt BF tại I, FN cắt AB tại

K, FP cắt BN tại H, NJ//AM (J thuộc BC). Chứng minh rằng các tứ giác AFPN, CNFP, NIBJ là các hình bình hành.

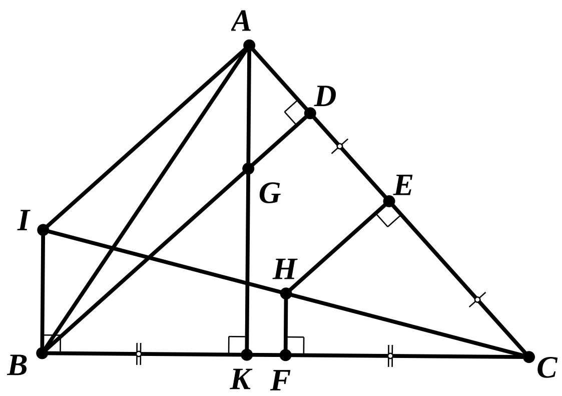
Bài giải:



AF // BM và AM // BF, do đó AMBF là hình bình hành.
Suy ra AF = MB và AF // MB (1).
Lại có PN là đường trung bình trong Δ ABC nên PN = MB và PN // MB (2).
Từ (1) và (2) suy ra PN = AF và PN // AF.
Vậy AFPN là hình bình hành.
Theo trên, AFPN là hình bình hành nên FP = AN = NC và FP // NC, từ đó suy ra CNFP là hình bình hành.
Trong ΔACM, NJ là đường trung bình, suy ra NJ // AM // IB. Lại có NI // BJ, do vậy tứ giác NIBJ là hình bình hành.

Bài 40. Cho tam giác ABC, các đường cao AK và BD cắt nhau tại G. Vẽ các đường trung trực HE, HF của các cạnh AC, BC. Đường thẳng qua A song song với BG cắt đường thẳng qua B song song với AK tại I. Chứng minh rằng:
a) BG = AI
b) BG = 2HE
c) AG = 2HF

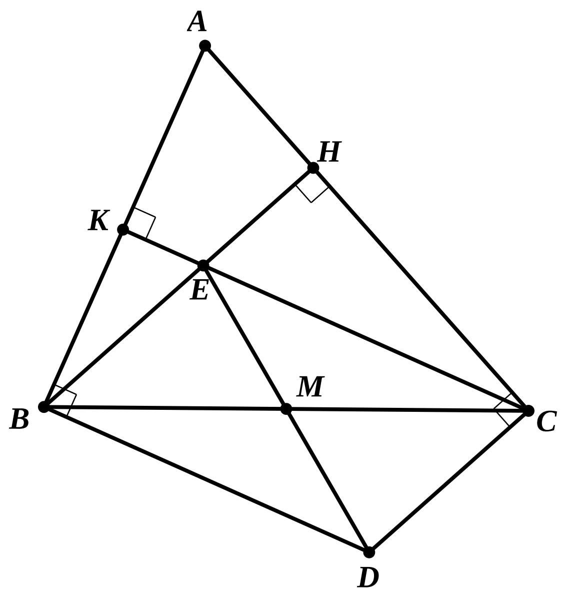
Bài giải:



a) Ta có AG // BI và BG // AI nên tứ giác AIBG là hình bình hành, suy ra BG = AI.
b) IB // AG $\Rightarrow$ IB $\perp$ BC, mà HF $\perp$ BC, do đó IB // HF.
Lại có F là trung điểm của BC nên HF đi qua trung điểm của IC.
Chứng minh tương tự, HE cũng đi qua trung điểm của IC.
Từ đó ta được H là trung điểm của IC.
Trong ΔAIC, HE là đường trung bình, do đó HE = $\frac{1}{2}$AI = $\frac{1}{2}$BG. Vậy BG = 2HE.
c) Theo chứng minh trên, HF là đường trung bình trong ΔCBI.
Suy ra HF = $\frac{1}{2}$BI = $\frac{1}{2}$AG (Vì AIBG là hình bình hành). Vậy AG = 2HF.

Bài 41. Cho tam giác ABC, các đường cao BH và CK cắt nhau tại E. Đường thẳng qua B vuông góc với AB và đường thẳng qua C vuông góc với AC cắt nhau tại D. Gọi M là trung điểm của BC.

a) Tứ giác BDCE là hình gì? Vì sao?
b) Chứng minh rằng M là trung điểm của DE. Tam giác ABC thỏa mãn điều kiện gì thì DE đi qua A?
c) Chứng minh rằng $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^o$.



Bài giải:

a) Ta có:

$\begin{cases} BE \perp AC \\ DC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BE\ //\ DC\ (1),$

$\begin{cases} CE \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow CE\ //\ BD\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra BDCE là hình bình hành.

b) Vì BDCE là hình bình hành và M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của DE.

DE đi qua A khi và chỉ khi A, E, M thẳng hàng. Vì E là giao điểm hai đường cao BH và CK nên AE là đường cao trong tam giác ABC. Vậy AE qua M khi và chỉ khi đường cao và đường trung tuyến kẻ từ A trùng nhau, hay tam giác ABC cân tại A.

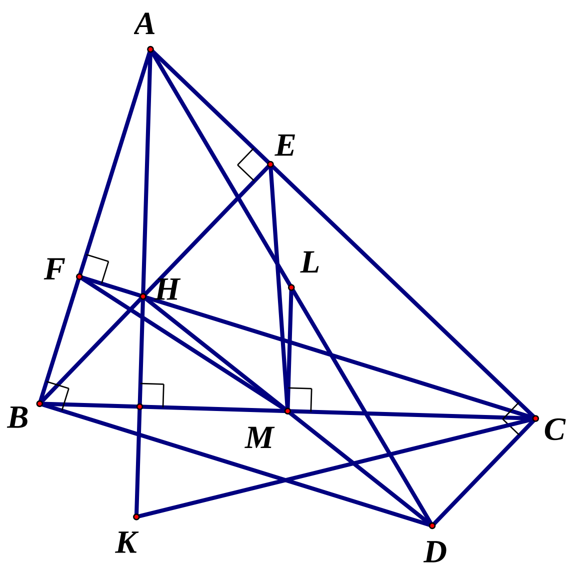
c) Trong tứ giác ABDC: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^0$, mà $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^0$ nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^0$.

Vậy $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^o$.

Bài 42. Cho Δ ABC nhọn (AB < AC), hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Vẽ đường thẳng vuông góc với AB tại B, vẽ đường thẳng vuông góc với AC tại C, hai đường thẳng này cắt nhau tại D.

a) Chứng minh AH $\perp$ BC và tứ giác BHCD là hình bình hành.
b) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh ba điểm H, M, D thẳng hàng và Δ EMF cân.
c) Gọi K là điểm đối xứng của H qua BC. Chứng minh BD = CK.
d) Đường thẳng vuông góc BC tại M cắt AD tại L. Chứng minh AH = 2ML.

Giải:



a)

* Chứng minh AH $\perp$ BC: H là giao điểm hai đường cao BE và CF nên H là trực tâm tam giác ABC, do đó AH $\perp$ BC.

* Chứng minh tứ giác BHCD là hình bình hành.

BH $\perp$ AC, DC $\perp$ AC $\Rightarrow$ BH // DC (1)

CH $\perp$ AB, DB $\perp$ AB $\Rightarrow$ CH // DB (2)

(1) và (2) suy ra BHCD là hình bình hành.

b) Hình bình hành BHCD có hai đường chéo BC và HD, do đó M là trung điểm BC cũng là trung điểm HD. Vậy H, M, D thẳng hàng.

Δ FBC vuông tại F, có FM là trung tuyến, do đó FM =

$\frac{1}{2}$BC. Δ EBC vuông tại E, có EM là trung tuyến, do đó EM = $\frac{1}{2}$BC.

Từ đó ta được FM = EM, hay Δ EMF cân tại M.

c) Chứng minh BD = CK.

K và H đối xứng nhau qua đường thẳng BC nên CH = CK.

Tứ giác BHCD là hình bình hành nên CH = BD.

Từ đó co ta BD = CK.

d) Chứng minh AH = 2ML.

Theo trên AH $\perp$ BC, theo giả thiết ML $\perp$ BC, do đó ML // AH.

Trong Δ AHD có M là trung điểm của HD (chứng minh trên), L thuộc AD và ML // AH.

Từ đó suy ra ML là đường trung bình trong tam giác AHD. Vậy AH = 2ML.

Bài . Cho hình bình hành ABCD. Vẽ hình bình hành BDCE là BDFC. CD cắt BF ở M và AM cắt CF ở N.

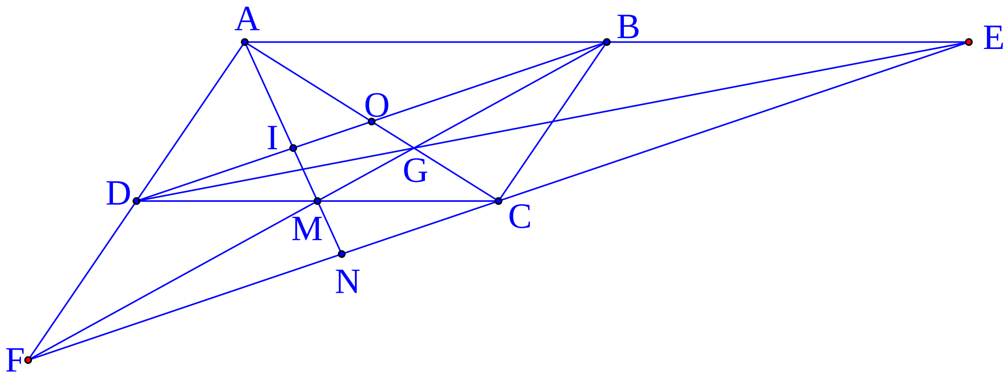
a) Chứng minh A đối xứng với E qua B.

b) Chứng minh C là trung điểm của EF.

c) Chứng minh AC, BF, DE đồng qui tại một điểm.

d) Chứng minh FC = 3NC.

Giải:



a) Vì ABCD là hình bình hành nên AB // CD và AB = CD; Vì BDCE là hình bình hành nên EB // CD và EB = CD.

Từ đó ta có A, B, E thẳng hàng và AB = EB, do đó A đối xứng với E qua B.

b) BDCE là hình bình hành nên CE = DB và CE // DB; BDFC là hình bình hành nên CF = DB và CF // DB.

Do đó C, E, F thẳng hàng và CE = CF, vậy C là trung điểm của EF.

c) Dễ thấy DF = BC và DF // BC; AD = BC và AD // BC. Do đó DF = AD và A, D, F thẳng hàng, hay D là trung điểm của AF.

Xét tam giác AEF, có AC, FB và ED là trung tuyến, do vậy AC, BF, BD đồng qui tại trọng tâm tam giác AEF.

d) Gọi I là giao điểm của AN và BD và O là giao điểm của AC và BD. Ta có I là trọng tâm tam giác ACD, suy ra IO = $\frac{1}{3}$DO = $\frac{1}{6}$DB = $\frac{1}{6}$FC (1).

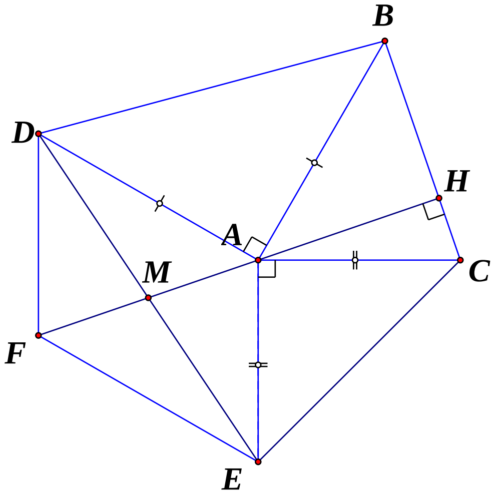
Trong tam giác CAN có O là trung điểm của AC và OI // CN nên OI là đường trung bình, do đó ta có $IO = \frac{1}{2}CN$ (2).

(1), (2) suy ra FC = 3CN.

Bài 43.* Cho tam giác nhọn ABC. Về phía ngoài tam giác, dựng các tam giác vuông cân ABD và ACE vuông tại A. Chứng tỏ rằng đường trung tuyến AM của tam giác ADE vuông góc với BC.

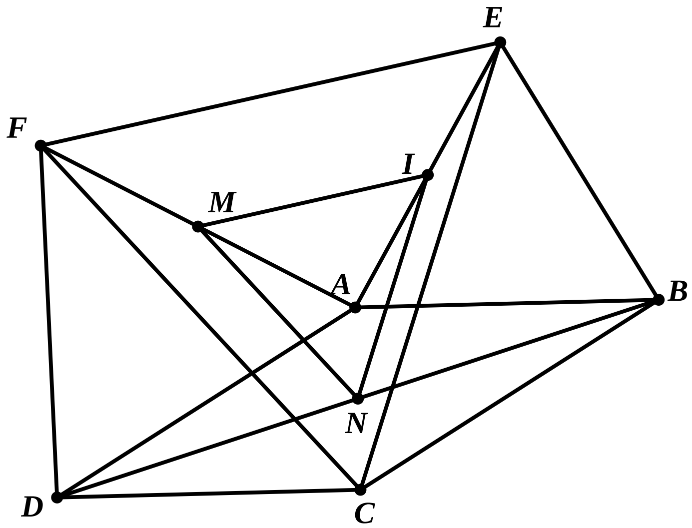
Lời giải:

Gọi H là giao điểm của AM và BC.
Dựng hình bình hành ADFE.
Ta có $\widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180^0$. Suy ra $\widehat{FEA} = \widehat{BAC}$ (cùng bù với góc $\widehat{DAE}$).
Hai tam giác CAB và AEF có:
AC = EA.
CAB = AEF (theo trên).
AB = EF.
Suy ra $\Delta CAB = \Delta AEF$ (c-g-c)
$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{EAF}$.
Mặt khác $\widehat{CAH} + \widehat{EAF} = 90^0$
Do đó $\widehat{CAH} + \widehat{ACB} = 90^0$
Vậy $\widehat{AHC} = 90^0$.



Bài 44*. Cho hình bình hành ABCD. Dựng các tam giác đều ABE, ADF ở ngoài hình bình hành ABCD. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AF, BD, AE. Chứng minh rằng:
a) Tam giác CEF là tam giác đều.
b) $\widehat{MNI} = 60^o$.

Bài giải:



a) Ta có: $\widehat{EBC} = \widehat{EBA} + \widehat{ABC} = 60^0 + \widehat{ABC}$, $\widehat{FDC} = \widehat{FDA} + \widehat{ADC} = 60^0 + \widehat{ADC}$.

Mặt khác, vì tứ giác ABCD là hình bình hành nên $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$, suy ra $\widehat{EBC} = \widehat{FDC}$.
Hai tam giác EBC và FDC có:
EB = CD (cùng bằng AB), $\widehat{EBC} = \widehat{CDF}$, BC = DC (cùng bằng AD)
Suy ra $\Delta EBC = \Delta FDC$ (c-g-c), từ đó ta có EC = FC (1).

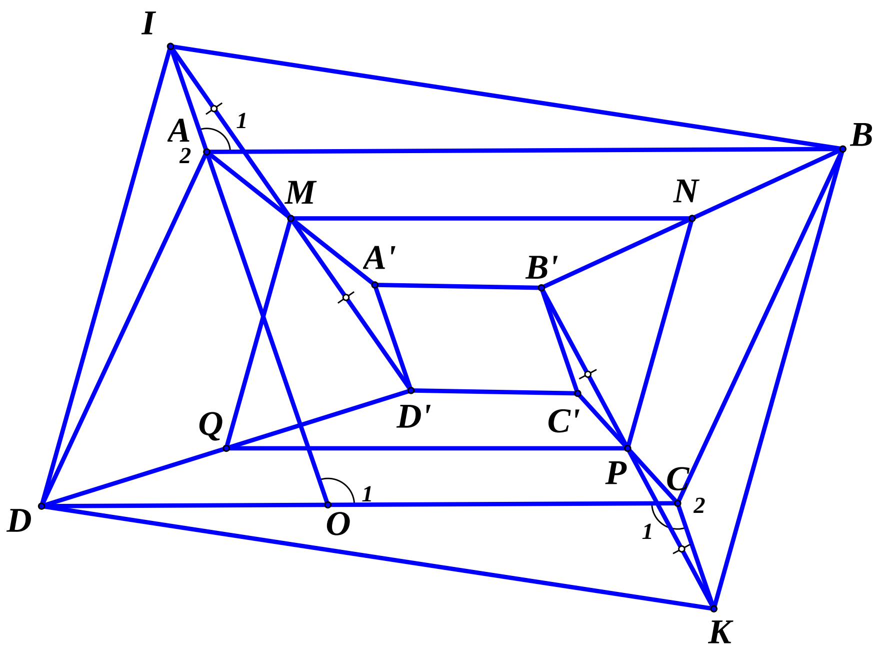
$$\widehat{EAF} = 360^0 - \left(\widehat{EAB} + \widehat{FAD} + \widehat{DAB}\right) = 240^0 - \widehat{DAB}$$

$$= 240^0 - \left(180^0 - \widehat{ABC}\right) = 60^0 + \widehat{ABC}$$

Do đó $\widehat{EAF} = \widehat{EBC}$. Hai tam giác EAF và EBC có:
EA = EB, $\widehat{EAF} = \widehat{EBC}$ và AF = BC, do vậy $\Delta EAF = \Delta EBC$, từ đó ta có EF = EC (2).
Từ (1) và (2) suy ra EC = CF = FE. Vậy ΔCEF đều.
b) N là trung điểm của BD cũng là trung điểm của AC. Như vậy, MN, IN, MI lần lượt là đường trung bình trong các tam giác AFC, AEC và AEF. Ta có:
$MN = \frac{1}{2}FC$, $IN = \frac{1}{2}EC$, $MI = \frac{1}{2}EF$.
Theo trên, $FC = EC = EF \Rightarrow MN = IN = MI$. Suy ra MNI là tam giác đều.
Vậy $\widehat{MNI} = 60^o$.

Bài 45*. Cho hình bình hành ABCD. Ở miền trong hình bình hành ABCD vẽ hình bình hành A′B′C′D′. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AA′, BB′, CC′, DD′. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Bài giải:



Gọi I là điểm đối xứng của D′ qua M, K là điểm đối xứng của B′ qua P, suy ra các tứ giác AIA′D′ và CKC′B′ là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn).
Từ đó ta có AI = A′D′ = B′C′ = CK và AI // A′D′ // B′C′ // CK.
AI cắt CD tại O thì $A_1 = O_1$ (góc đồng vị) và $O_1 = C_1$ (so le trong).
Vì $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{IAD} = \widehat{KCB}$.
Từ đó ta chứng minh được $\Delta IAD = \Delta KCB$ và $\Delta IAB = \Delta KCD$ (c-g-c)
$\Delta IAD = \Delta KCB \Rightarrow ID = KB$.

$\Delta IAB = \Delta KCD \Rightarrow IB = KD$.

Như vậy ta được tứ giác IDKB là hình bình hành, suy ra ID // KB, ID = KB (1).

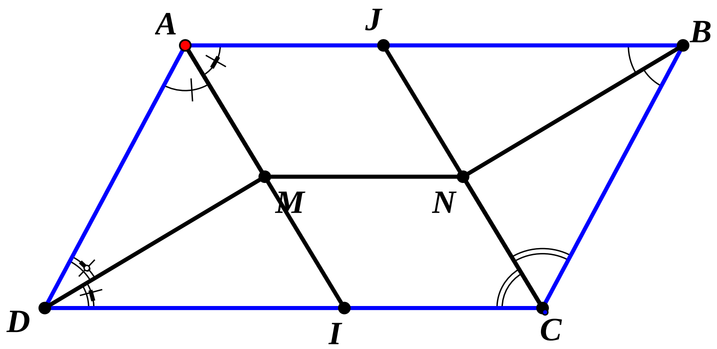
MQ là đường trung bình trong tam giác ID’D, ta có MQ = $\frac{1}{2}$ID và MQ // ID (2) .

Tương tự NP = $\frac{1}{2}$KB và NP // KB (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ MQ // NP và MQ = NP. Vậy MNPQ là hình bình hành.

Bài 46*. Cho hình bình hành ABCD, các phân giác $\widehat{A}$ và $\widehat{D}$ cắt nhau tại M, các phân giác $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại N. Chứng minh rằng MN // AB.

Bài giải:



Giả sử AM cắt DC tại I, CN cắt AB tại J.

Ta có $\widehat{DAI} = \widehat{BAI} = \widehat{DIA}$ (so le trong) suy ra tam giác DAI cân tại D, do đó M là trung điểm của AI.

Chứng minh tương tự, ta có N là trung điểm của CJ.

Xét tứ giác AICJ, có AJ // CI nên AICJ là hình thang và MN là đường trung bình trong hình thang AICJ. Vậy MN // AB (chứng minh xong).

Bài 47. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm F; trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho BE = CF. Vẽ hình bình hành BEFD.

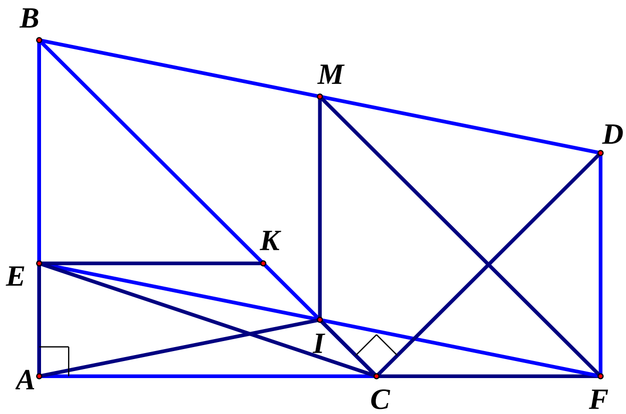
a) Chứng minh $DC \perp BC$.

b) Gọi I là giao EF và BC. Chứng minh AI = $\frac{1}{2}$DB.

c) Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với AF cắt BD tại M. Chứng minh MICF là hình thang cân.

d) Tìm vị trí của E trên AB để A, I, D thẳng hàng.

Giải:



a) BEFD là hình bình hành suy ra DF // AB và DF = BE.

Từ đó ta có: $DF \perp FC$ và DF = CF. Hay tam giác DFC vuông cân tại F

Do đó $\widehat{DCF} = 45^0$.

Lại có $\widehat{BCA} = 45^0$, suy ra $\widehat{BCD} = 90^0$.

Vậy $DC \perp BC$.

b) Dựng đường thẳng qua E vuông góc với

AB, cắt BC tại K. Dễ thấy BEK là tam giác vuông cân, suy ra EK = BE = CF.

Mặt khác EK // CF (cùng vuông góc với AB). Từ đó ta được EKFC là hình bình hành, suy ra I là trung điểm của EF.

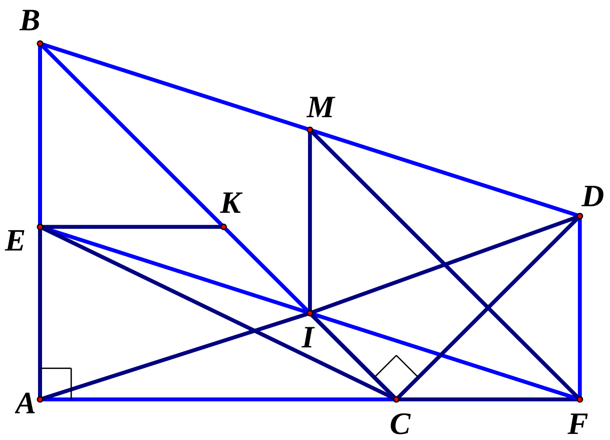
Trong tam giác AEF vuông tại A, có AI là trung tuyến, do vậy: $AI = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}BD$.

c) $MI \perp AF \Rightarrow MI // BE$.

Lại có I là trung điểm của EF và BEFD là hình bình hành nên M là trung điểm của BD. Suy ra MF // BI // IC và MI = DF = FC.

Vậy MICF là hình thang cân.

Giả sử A, I, D thẳng hàng.



Xét Δ ABD có M là trung điểm của BD, MI // AB. Suy ra MI là đường trung bình trong Δ ABD. Như vậy I là trung điểm của AD.

Từ đó dễ dàng suy ra AEDF là hình chữ nhật.

Khi đó: AE = FD = FC = BE. Vậy E là trung điểm của AB.

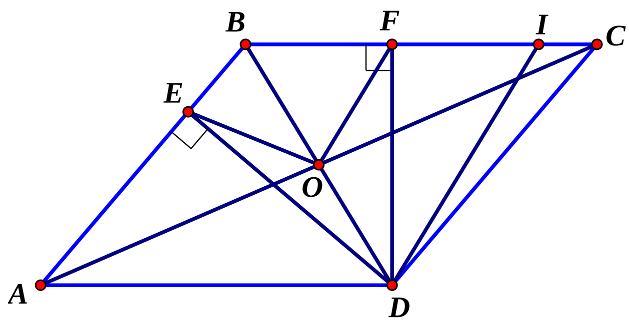
Ngược lại, nếu E là trung điểm của AB thì ta dễ dàng suy ra A, I, D thẳng hàng.

Bài 48*. Cho hình bình hành ABCD, $\widehat{A}$ là góc nhọn, AC cắt BD tại O, $DE \perp AB$ tại E, $DF \perp BC$ tại F.

a) Chứng minh rằng tam giác FOE cân

b) Giả sử $\widehat{BAD} = m$. Tính $\widehat{EOF}$ theo m.

Bài giải:



a) Trên tia đối của tia FB lấy điểm I sao cho FI = FB. Ta có F là trung điểm của BI.

Ta giác DBI có DF vừa là trung tuyến, vừa là đường cao nên tam giác BDI cân tại D.

OF là đường trung bình trong tam giác BDI, suy ra $FO = \frac{1}{2}ID = \frac{1}{2}BD$.

Lập luận tương tự, ta có $EO = \frac{1}{2}BD$.

Từ đó suy ra EO = FO, hay tam giác FOE cân tại O.

b) Theo chứng minh ở câu trên, tam giác ODF cân tại O suy ra $\widehat{ODF} = \widehat{OFD}$

Ta có: $\widehat{ODF} + \widehat{OFD} = \widehat{BOF}$ (góc ngoài tam giác ODF) $\Rightarrow \widehat{BOF} = 2\widehat{ODF}$

Tương tự $\widehat{BOE} = \widehat{ODE}$.

Do đó $\widehat{EOF} = \widehat{BOE} + \widehat{BOF} = 2\widehat{EDF}$.

Mặt khác, $\widehat{EDF} + \widehat{ABC} + \widehat{BED} + \widehat{BFD} = 360^0 \Rightarrow \widehat{EDF} + \widehat{ABC} = 180^0$

Do đó $\widehat{EDF} = \widehat{BAD} = m$ (cùng bù với $\widehat{ABC}$)

Vậy $\widehat{EOF} = 2m$.

Bài 49*. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Lấy điểm G trên AM sao cho AG = 2GM.

a) Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC.

b) Gọi N, P lần lượt là trung điểm của CA, AB. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm của tam giác MNP.

Bài giải:

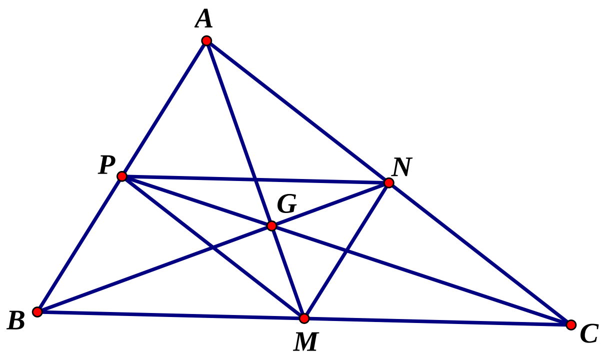
a) AG = 2GM suy ra $AM = AG + GM = AG + \frac{1}{2}AG = \frac{3}{2}AG$.

Điểm G trên đoạn AM thỏa mãn $AG = \frac{2}{3}AM$, do đó G là trọng tâm tam giác ABC

b) Ta có $PN = \frac{1}{2}BC = MC$ và PN // MC, do đó tứ giác CMPN là hình bình hành. Suy ra đường thẳng CP đi qua trung điểm của MN. Vì CP là đường trung tuyến trong tam giác ABC nên CP đi qua G, do vậy PG là đi qua trung điểm của MN.

Chứng minh tương tự, NG đi qua trung điểm của MP.

Vậy G là trọng tâm tam giác MNP.



Bài 50. Cho tam giác ABC cân tại B, trực tâm H, M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua H vuông góc với MH cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng H là trung điểm của EF.

Giải:

Gọi D là điểm đối xứng của C qua H.

HM là đường trung bình trong tam giác BCD nên BD // MH.

Mà $MH \perp HE$ nên $HE \perp BD$ (1).

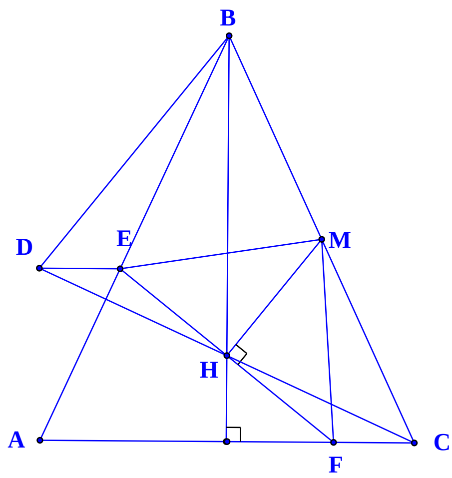
Vì H là trực tâm tam giác ABC nên $BE \perp HD$ (2).

Từ đó suy ra E là trực tâm tam giác BDH, do đó $DE \perp BH$.

Suy ra DE // CF.

Từ đó ta chứng minh được DECF là hình bình hành, với H là giao điểm hai đường chéo.

Vậy H là trung điểm của EF.



BÀI 8. ĐỐI XỨNG TÂM

A. LÝ THUYẾT

1. Hai điểm đối xứng qua một điểm:

a) Định nghĩa: Hai điểm M, M′ gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng MM′.

b) Quy ước: Nếu điểm M trùng với điểm O thì điểm đối xứng với điểm M là điểm M′ cũng trùng với điểm O.

c) Tính chất: M đối xứng với M′ qua O $\Rightarrow$ OM = OM′

2. Hai hình đối xứng qua một điểm:

a) Định nghĩa: Hai hình H và H′ gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình H có điểm đối xứng qua O thuộc hình H′. Khi đó, điểm O gọi là tâm đối xứng của hai hình H và H′.

b) Định lí: Nếu điểm A và A′, B và B′, C và C′ đối xứng với nhau qua tâm O thì:

* Đoạn thẳng AB đối xứng với đoạn thẳng A′B′ qua tâm O và AB = A′B′.

* $\widehat{ABC}$, $\widehat{A'B'C'}$ đối xứng với nhau qua tâm O và $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

* ΔABC, $\Delta A'B'C'$ đối xứng với nhau qua tâm O và $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$

* Đường thẳng AB đối xứng với đường thẳng A′B′ qua O và AB//A′B′ (tính chất này sử dụng phải chứng minh, dựa vào tính chất của hình bình hành)

3. Hình có tâm đối xứng:

a) Định nghĩa: Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình H (hay hình H có tâm đối xứng là O) nếu mỗi điểm thuộc hình H có điểm đối xứng cũng thuộc hình H.

b) Định lí: Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.

Nhận xét: Từ định lí trên, ta suy ra rằng “Nếu có một đường thẳng đi tâm đối xứng của hình bình hành và cắt 2 cạnh đối diện của hình bình hành tại A, B thì A và B đối xứng với nhau qua tâm O.”

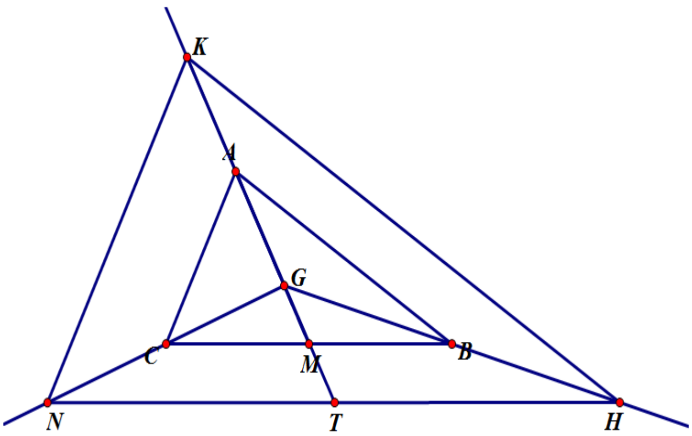
B. VÍ DỤ

Ví dụ: Cho tam giác ABC trung tuyến AM và G là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi K, H, N lần lượt là các điểm đối xứng của G qua A, B, C. Gọi T là giao điểm của tia KG với NH.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của GT.

b) Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác KNH.

Giải:



a) Dễ thấy A, B, C lần lượt là trung điểm của GK, KH, GN.

Xét tam giác NGH có BT là đường trung bình

$\Rightarrow$ BT// GN và BT = $\frac{1}{2}$GN hay BT//GC và BT = GC

Suy ra BTCG là hình bình hành.

M là giao điểm 2 đường chéo GT và BC nên M là trung điểm của GT.

b) Xét tam giác GNT có CM là đường trung bình nên CM = $\frac{1}{2}$NT

Tương tự, ta có BM = $\frac{1}{2}$HT.

Mà CM = BM nên NT = HT $\Rightarrow$ T là trung điểm NH.   (1)

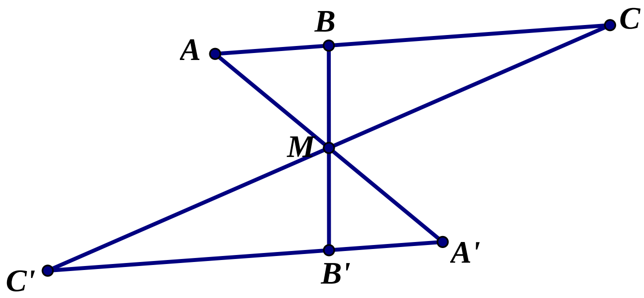
Ta lại có KA = AG = 2GM = GT, suy ra KG = 2GT hay KG = $\frac{2}{3}$KT. (2)

Từ (1) và (2) suy ra G là trọng tâm tam giác KNH.

B. RÈN LUYỆN KỸ NẰNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 51. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và điểm M không thuộc đường thẳng đó. Gọi A′, B′, C′ lần lượt là điểm đối xứng của A, B, C qua M. Chứng minh A′, B′, C′ thẳng hàng.

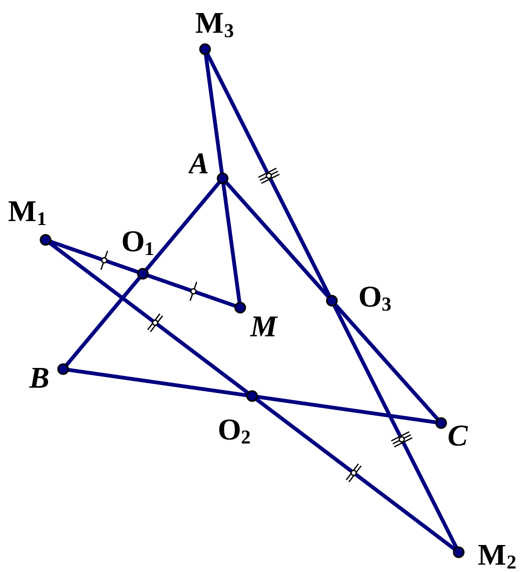
Bài giải:



Giả sử A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó, ta có AB + BC = AC (1).
Các đoạn thẳng A′B′, B′C′ và A′C′ lần lượt đối xứng với các đoạn thẳng AB, BC, AC qua điểm M nên ta có A′B′ = AB, B′C′ = BC, A′C′ = AC.
Kết hợp đẳng thức (1) ta được A′B′ + B′C′ = A′C′. Vậy A′, B′, C′ thẳng hàng.

Bài 52. Cho tam giác ABC. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. M là một điểm tùy ý không thuộc các cạnh của tam giác ABC. Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua O_1, M_2 là điểm đối xứng của M_1 qua O_2, M_3 là điểm đối xứng của M_2 qua O_3. Chứng M_3 đối xứng với M qua A.

Bài giải:

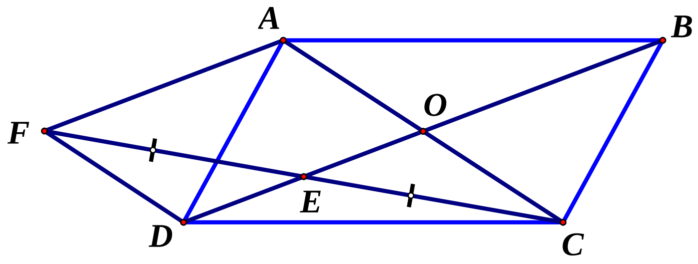


Dễ dàng chứng minh được các tứ giác $AMBM_1$, BM_2CM_1, CM_2AM_3 là các hình bình hành (dựa vào tính chất các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).
Từ đó ta có: $AM = M_1B = M_2C = M_3A$,
AM // M_1B // M_2C, AM_3 // M_2C
Từ đó $AM = AM_3$ và A, M, M_3 thẳng hàng.
Vậy A là trung điểm của MM_3, hay A và M_3 đối xứng nhau qua A.

Bài 53. Cho hình bình hành ABCD có tâm đối xứng O, E là điểm bất kỳ trên cạnh OD. Gọi F là điểm đối xứng của C qua E.
a) Chứng minh rằng AF // BD.
b) Điểm E ở vị trí nào trên OD để tứ giác ODFA là hình bình hành.

Bài giải:

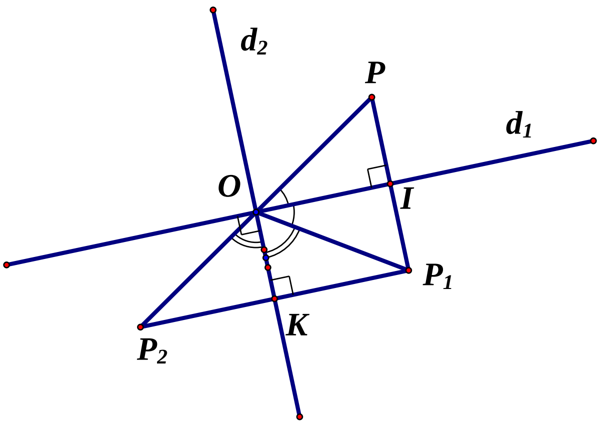
a) Ta có O là trung điểm AC và E là trung điểm CF nên OE là đường trung bình trong tam giác ACF, từ đó ta có AF // BC.



b) ODFA là hình bình hành khi và chỉ khi FD = AO và FD // AO, khi và chỉ khi FD = OC và FD // OC, hay OCDF là hình bình hành.
Vì E là trung điểm của CF, do đó OCDF là hình bình hành khi và chỉ khi E là trung điểm của OD.
Vậy ODFA là hình bình hành khi và chỉ khi E là trung điểm của DO.

Bài 54. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc nhau tại O và một điểm P không nằm trên d_1, d_2. Gọi P_1 là điểm đối xứng của P qua d_1, P_2 là điểm đối xứng của P_1 qua d_2. Chứng minh hai điểm P_1 và P_2 đối xứng nhau qua O.

Bài giải:



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của PP_1, P_1P_2.
Dễ dàng nhận thấy $OP = OP_1 = OP_2$ (1).

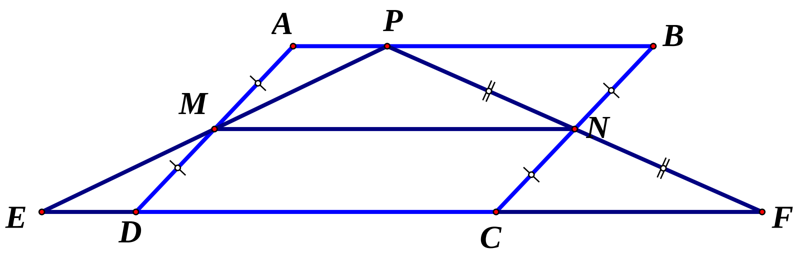
$$\widehat{POP_2} = \widehat{POP_1} + \widehat{P_1OP_2}$$

$$= 2\left(\widehat{IOP_1} + \widehat{P_1OK}\right) = 2\widehat{IOK} = 180^0 \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra O là trung điểm PP_1.
Vậy hai điểm P và P_1 đối xứng nhau qua O.

Bài 55. Cho hình bình hành ABCD, điểm P trên AB. Gọi M, N là các trung điểm của AD, BC; E, F lần lượt là điểm đối xứng của P qua M, N. Chứng minh rằng:
a) E, F thuộc đường thẳng CD.
b) EF = 2CD

Bài giải:



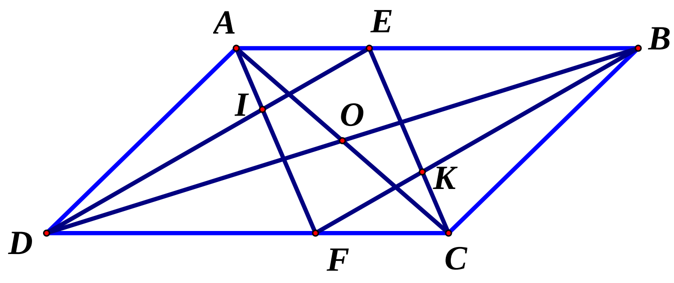
a) M là trung điểm của AD và PE suy ra tứ giác APDE là hình bình hành do đó DE // AP.
Tương tự BPCF là hình bình hành, suy ra FC // PB. Mặt khác CD // AB nên suy ra các điểm E, F nằm trên đường thẳng CD.
b) Trong tam giác PEF, MN là đường trung bình suy ra EF = 2MN = 2CD.

Bài 56. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm hai đường chéo. Lấy điểm E trên cạnh AB, F trên cạnh CD sao cho AE = CF. gọi I là giao điểm của AF và DE; K là giao điểm của BF và CE. Chứng minh I là điểm đối xứng của của K qua O.

Bài giải:

Ta có AE = CF và AE // CD nên AECF là hình bình hành. Tương tự, BEDC cũng là hình bình hành. Do đó ta có O là trung điểm của EF và IEKF là hình bình hành (hai cặp cạnh đối diện song song). Từ đó suy ra O là trung điểm của IK.

Vậy hai điểm I và K đối xứng nhau qua O.



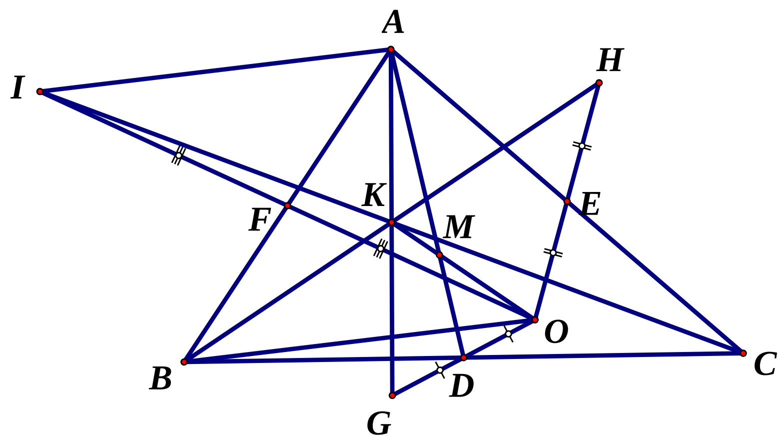
Bài 57*. Cho điểm O tùy ý nằm trong tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi G, H, I theo thứ tự là các điểm đối xứng với O qua D, qua E, qua F. Chứng minh rằng:

a) Ba đường AG, BH, CI đồng quy tại một điểm. (Gọi điểm đồng quy là K)

b) Khi O di chuyển trong tam giác ABC thì đường thẳng OK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải:

a) Ta có các tứ giác AIBO và BGCO là các hình bình hành (vì các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).



Suy ra AI = OB, AI // OB và CG = BO, CG // BO $\Rightarrow$ AI = CG, AI // CG. Ta được tứ giác AIGC cũng là hình bình hành, suy ra AG cắt CI tại trung điểm mỗi đoạn.

Chứng minh tương tự, ta cũng có AI cắt BH tại trung điểm mỗi đoạn.

Vậy AG, BH, CI đồng quy tại K, là trung điểm của mỗi đoạn.

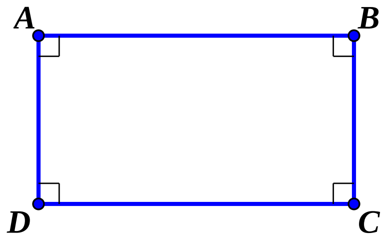
b) Trong tam giác AGO, AD và OK là hai đường trung tuyến. Gọi M là giao điểm của OK và AD thì M là trọng tâm tam giác AGO.

Ta có điểm M trên cạnh AD, thỏa mãn AM = 2MD, suy ra M là trọng tâm tam giác ABC, là điểm cố định.

Vậy khi O thay đổi, đường thẳng OK luôn đi qua trọng tâm tam giác ABC.

BÀI 9, 10. HÌNH CHỮ NHẬT – ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

A. LÝ THUYẾT



1) <u>Định nghĩa</u>: Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

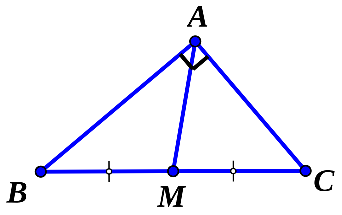
Nhận xét: Hình chữ nhật là hình bình hành đặc biệt (có các góc bằng 90^0) hoặc là hình thang cân đặc biệt (có số đo các góc đáy bằng nhau là 90^0

2) <u>Tính chất</u>:

- Từ nhận xét trên, ta suy ra hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành và hình thang cân.

- Tính chất đặc trưng của *hình chữ nhật* là: "*Hai đường chéo bằng nhau*" và "*hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường*".

3) <u>Hệ quả</u>:



a) Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với nữa cạnh huyền bằng nữa cạnh huyền.

Ví dụ . ΔABC vuông tại A và trung tuyến M thì ta có $AM = \frac{1}{2}BC$.

b) Nếu một tam giác có một trung tuyến ứng với một cạnh bằng nữa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông, và trung tuyến đó ứng với cạnh huyền.

4) <u>Dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật</u>:

a) Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.

b) Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.

c) Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.

d) Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

5) <u>Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song:</u>

Khoảng cách giữa hai đường thẳng <u>song song</u> là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của *đường thẳng này* lên *đường thẳng kia.*

6) <u>Tính chất của các điểm cách đều một đường thẳng cho trước:</u>

Tập hợp các điểm cách đường thẳng a một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với a và cách a một khoảng bằng h.

7) <u>Đường thẳng song song cách đều:</u>

a) <u>Định nghĩa</u>: Khi các đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và khoảng cách giữa các đường thẳng a và b, b và c, c và d bằng nhau thì ta gọi chúng là các *đường thẳng song song cách đều*.

b) <u>Định lý</u>:

* Nếu các *đường thẳng song song và cách đều cắt một đường thẳng* thì chúng chắn trên đường thẳng đó các *đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau*.

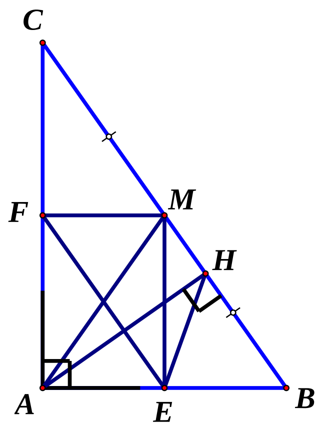
* Nếu các đường thẳng *song song cắt một đường thẳng* và chúng chắn trên đường thẳng đó các *đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau* thì chúng *song song cách đều.*

B. VÍ DỤ:

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), trung tuyến AM. E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC.

a) Chứng minh rằng AEMF là hình chữ nhật.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh EHMF là hình thang cân.



Giải:

a) Theo tính chất tam giác vuông, ta có AM = MC = MB.

Tam giác CMA cân tại M và F là trung điểm AC suy ra $MF \perp AC$.

Chứng minh tương tự: $ME \perp AB$.

Vậy AEMF là hình chữ nhật.

b) Ta có EF là đường trung bình trong tam giác ABC, suy ra EF // BC. Theo giả thiết, AB < AC suy ra HB < HA, do đó H thuộc đoạn MB. Vậy EHMF là hình thang.

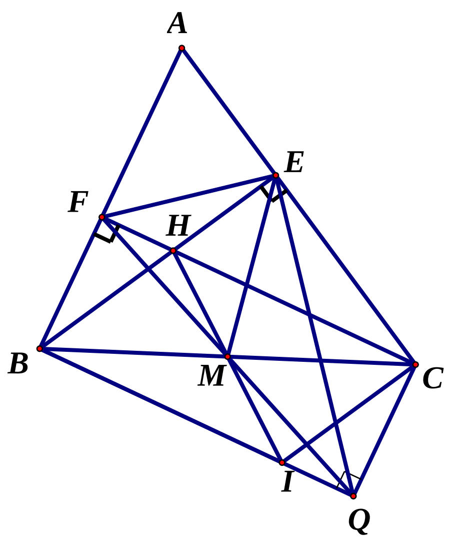
Tam giác HAB vuông tại H, ta có HE = EA = EB = MF, từ đó suy ra EHMF là hình thang cân.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BE và CF cắt nhau tại H. lấy M là trung điểm của BC và I là điểm đối xứng của H qua M.

a) Chứng minh rằng: IC = BH và $IB \perp AB$.

b) Chứng minh rằng ΔMEF là tam giác cân.

c) Vẽ $CQ \perp BI$ tại Q. Chứng minh rằng ΔFEQ là tam giác vuông.



Giải:

a) Tứ giác BHCI là hình bình hành (vì hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường). Từ đó suy ra IC = BH.

IB // CH, $CH \perp AB \Rightarrow IB \perp AB$.

b) Hai tam giác EBC và FBC là tam giác vuông tại E và F, suy ra EM = FM = $\frac{1}{2}$BC.

Vậy MEF là tam giác cân tại M.

c) $CQ \perp BI \Rightarrow CQ$ // BF, dễ dàng chứng minh được CQBF là hình chữ nhật, suy ra M là trung điểm của QF.

Theo trên thì EM = FM = MQ.

Trong tam giác EFQ, MF là đường trung tuyến và MF = $\frac{1}{2}$FQ. Do vậy tam giác EFQ vuông tại E.

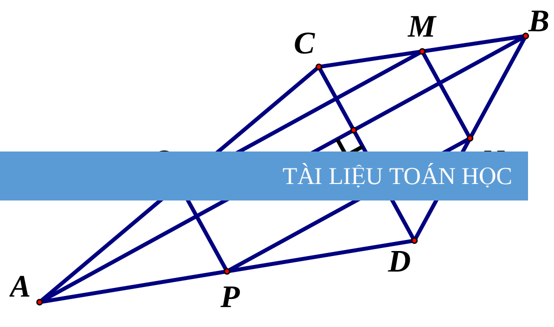
C.RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 58. Cho tứ giác ACBD có $AB \perp CD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, BD, AD, AC. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

b) Biết BC // AD, BC = 4cm, AD = 16cm. Tính MP.

Lời giải:

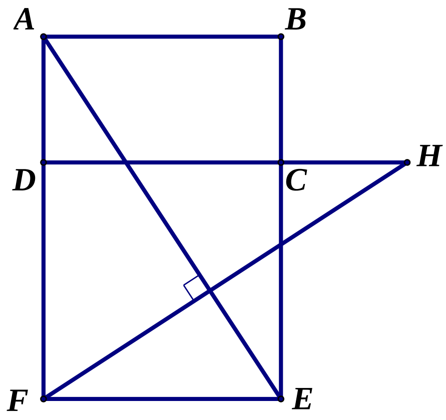


a) Trong tam giác ACD, PQ là đường trung bình, suy ra PQ // CD.
Tương tự, MN // CD, MQ // AB, NP // AB.
Từ đó ta có MN // PQ và NP // MQ
Suy ra MNPQ là hình bình hành.
Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MN \perp MQ$.
Vậy MNPQ là hình chữ nhật.
b) Ta có MP = NQ. Theo giả thiết thì BCAD là hình thang với hai đáy BC, AD và QN là đường trung bình nên MP = NQ = $\frac{1}{2}$(BC + AD) = 10cm.

Bài 59. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia CB và DA lấy lần lượt hai điểm E và F sao cho CE = DF = CD. Trên tia đối của tia CD lấy điểm H sao cho CH = CB. Chứng minh rằng:
a) Tứ giác CEFD là hình chữ nhật.
b) $AE \perp FH$.

Lời giải:

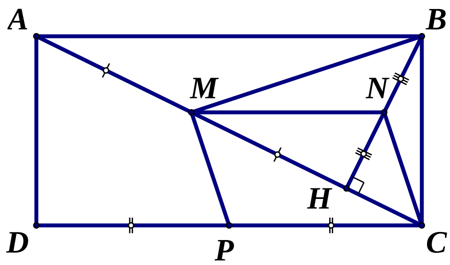
a) Theo giả thiết, DF = CE và DF // CE, suy ra tứ giác CDEF là hình bình hành.
Mặt khác, $\widehat{CDF} = 90^0$. Vậy CDFE là hình chữ nhât.



b) Ta có AF = AD + DF = CH + CD = DH.
Hai tam giác AFE và HDF có:
AF =HD, $\widehat{AFE} = \widehat{HDF} = 90^0$, FE = DF.
Do đó $\Delta AFE = \Delta HDF \Rightarrow \widehat{FAE} = \widehat{DHF}$.
Mặt khác $\widehat{DHF} + \widehat{DFH} = 90^0 \Rightarrow \widehat{FAE} + \widehat{DFH} = 90^0$
Vậy $AE \perp FH$.

Bài 60. Cho hình chữ nhật ABCD, $BH \perp AC$ tại H. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AH, BH, CD. Chứng minh rằng:
a) Tứ giác CNMP là hình bình hành.
b) $\widehat{BMP} = 90^0$.

Lời giải:



a) Trong tam giác ABH, MN là đường trung bình nên
MN = $\frac{1}{2}$AB và MN // AB.
$\Rightarrow$ MN = CP, MN // CP. Vậy MNCP là hình bình hành.
b) Xét tam giác BCM, $BH \perp CM$, $MN \perp BC$ (vì MN // PC, $PC \perp BC$), suy ra N là trực tâm tam giác BCM, do đó CN $\perp BM$.
Mặt khác, vì PM // CN nên $PM \perp BM$, hay $\widehat{BMP} = 90^0$.

Bài 61. Cho ABCD là hình bình hành có tâm O. Lấy E bất kì thuộc đoạn OD. Dựng F là điểm đối xứng của C qua E.

a) Chứng minh AFDE là hình thang.

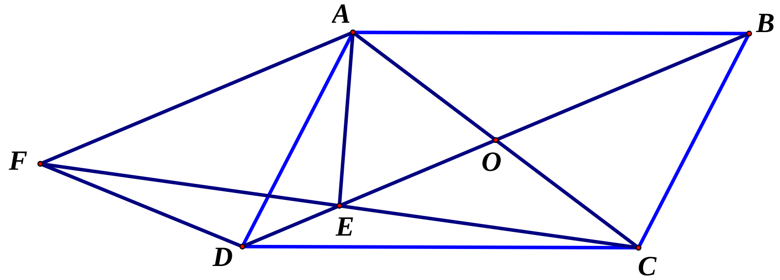
b) Tìm vị trí của E trên OD để AFDE là hình bình hành.

c) Nếu E là trung điểm của OD. Chứng minh AFDO là hình bình hành.

d) Tìm điều kiện của hình bình hành ABCD để AFDO là hình chữ nhật.

Giải:

a) Theo giả thiết thì E là trung điểm của CF, do đó OE là đường trung bình trong tam giác ACF, từ đó suy ra OE // AF, hay DE // AF. Vậy AFDE là hình thang.

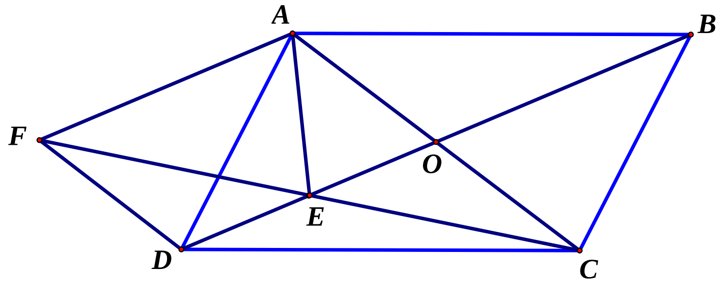


b) Theo trên thì AFDE là hình bình hành khi và chỉ khi AF = DE.

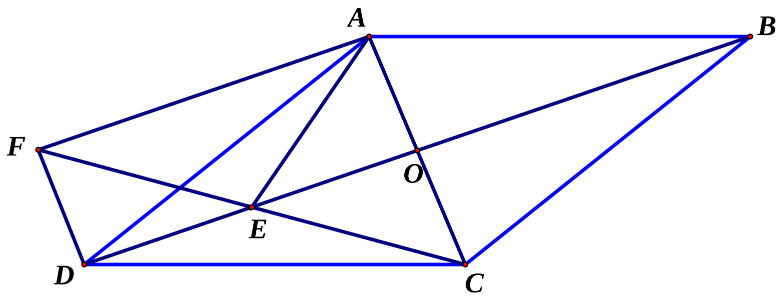
Mà AF = 2OE nên AFDE là hình bình hành khi và chỉ khi DE = 2OE, hay E là trọng tâm của tam giác ADC.

c) Trường hợp E là trung điểm của OD.

Ta có AF // OD và AF = 2OE = OD. Vậy nên AFDO là hình bình hành.



d) Trường hợp E là trung điểm của OD, tìm điều kiện của hình bình hành ABCD để AFDO là hình chữ nhật.

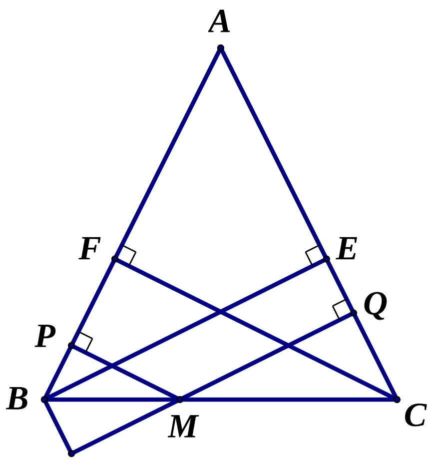


Theo câu trên thì AFDO đã là hình bình hành, nên AFDO là hình chữ nhật khi và chỉ khi $AO \perp DO$, hay ABCD là hình thoi.

Bài 62. Cho tam giác ABC cân tại A (AB > BC) có hai đường cao BE, CF và điểm M bất kỳ trên cạnh BC. Vẽ MP $\perp$ AB tại P, MQ $\perp$ AC tại Q. Trên tia đối của tia MQ lấy điểm N sao cho MN = MP. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác BEQN là hình chữ nhật.

b) MP + MQ = CF.



Lời giải:

a) Ta có $\widehat{PMB} + \widehat{PBM} = 90^0$, $\widehat{QMC} + \widehat{QCM} = 90^0$.

Vì $\widehat{PBM} = \widehat{QCM} \Rightarrow \widehat{PMB} = \widehat{QMC}$. Do đó ta có $\widehat{PMB} = \widehat{NMB}$. Kết hợp giả thiết MP = MN, suy ra P và N đối xứng nhau qua đường thẳng BM.

$\widehat{NBM} = \widehat{PBM} = \widehat{QCM} \Rightarrow$ BN // QC (góc so le trong bằng nhau).

Mặt khác, BE // NQ (cùng vuông với AC), suy ra BNQE là hình bình hành.

Vì hình bình hành BNQE có một góc vuông nên BNQE là hình chữ nhật.

b) Ta có MP + MQ = MN + MQ = NQ = BE.

Dễ dàng chứng minh được $\Delta ECB = \Delta FBC \Rightarrow BE = CF$.

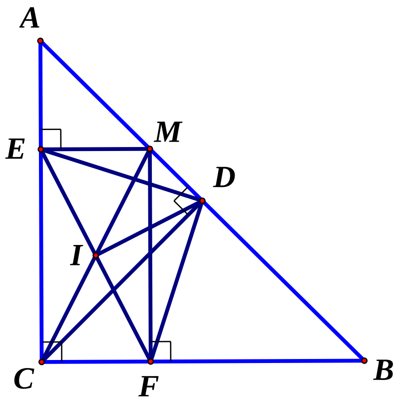
Vậy MP + MQ = CF.

Bài 63. Cho tam giác ABC vuông cân tại C, M là điểm bất kỳ trên cạnh AB. Vẽ $ME \perp AC$ tại E, $MF \perp BC$ tại F. Gọi D là trung điểm của AB.Chứng minh rằng:

a) Tứ giác CFME là hình chữ nhật.

b) Δ DEF vuông cân.

Lời giải:



a) Theo giả thiết thì tứ giác CFME có $\widehat{C} = \widehat{F} = \widehat{E} = 90^0$

Do đó MECF là hình chữ nhật.

b) Gọi I là giao điểm của EF và CM, I là trung điểm của EF và CM.

Vì tam giác ABC vuông cân tại C nên $CD \perp AB$. Xét tam giác DCM vuông tại D, có DI là trung tuyến nên:

$DI = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{2}EF$. Mà DI cũng là trung tuyến trong tam giác DEF, do vậy tam giác DEF vuông tại D.

Trong tứ giác CEDF có

$\widehat{CED} + \widehat{CFD} = 180^0 \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{BFD}$ (1).

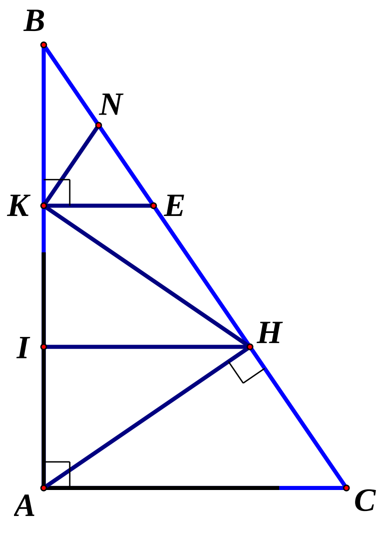
Dễ thấy $\widehat{ECD} = \widehat{FBD} = 45^0$ (2) và EC = MF = BF (3) (tam giác BFM vuông cân tại F).

Từ (1), (2), (3) suy ra hai tam giác CED và BFD bằng nhau (g-c-g).

Từ đó, DE = DF. Vậy tam giác DEF vuông cân tại D.

Bài 64. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC). Kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Gọi E là điểm đối xứng của C qua H, vẽ EK vuông góc với AB tại K. Gọi I là trung điểm AK, N là trung điểm của BE. Chứng minh rằng: KE // IH và HK vuông góc KN.

Giải:



* Ta có $EK \perp AB \Rightarrow$ EK // AC, tứ giác EKAC là hình thang vuông tại K và A.

Lại có H là trung điểm EC, I là trung điểm AK nên HI là đường trung bình của hình thang EKAC. Từ đó ta có EK // HI.

* $HI \perp AK$, I là trung điểm AK, nên tam giác HKA cân tại H.

Do đó $\widehat{HKA} = \widehat{HAK}$ (1)

Tam giác BEK vuông tại K, có KN là trung tuyến nên KN = NB = NE. Tam giác KBN cân tại N, do đó $\widehat{BKN} = \widehat{KBN}$ (2).

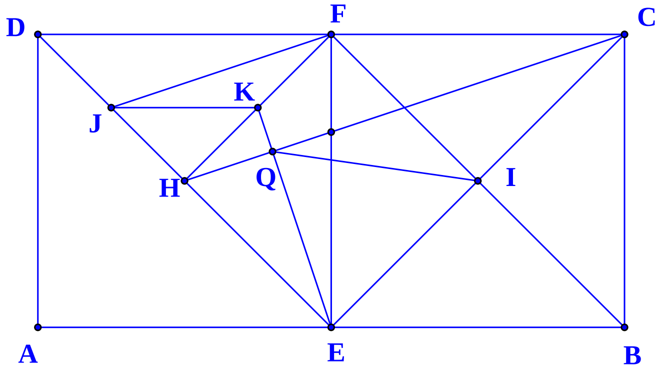
(1), (2) suy ra $\widehat{BKN} + \widehat{AKH} = \widehat{KBN} + \widehat{KAH} = 90^0$.

Vậy $\widehat{NKH} = 90^0$.

Bài 65. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2BC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD. H, K lần lượt là trung điểm của DE, HF; I là trung điểm của BF và Q là giao điểm của CH và EK.

a) Chứng minh $CH \perp EK$ tại Q.

b) Chứng minh QI = IE = IC = IB.



Giải:

a) Gọi J là trung điểm HD.

Ta có JK // DF nên $JK \perp EF$.

$FK \perp DE$ (vì ADFE là hình vuông)

K là trực tâm tam giác EFJ

Suy ra $EK \perp FJ$, mà FJ // CH nên $EK \perp CH$.

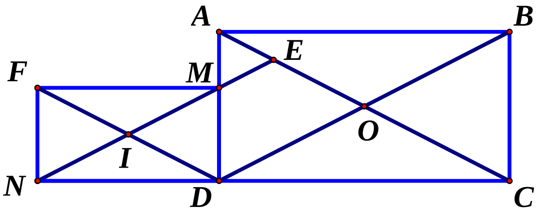
b) Theo trên, tam giác CQE vuông tại Q, từ đó suy ra QI = IE = IC = IB.

Bài 66. Cho hình chữ nhật ABCD, $E \in AC$. Đường thẳng qua E và song song với BD cắt các đường thẳng AD, CD lần lượt lại M, N. vẽ hình chữ nhật DMFN. Gọi O, I lần lượt là giao điểm của 2 đường chéo của hai hình chữ nhật ABCD, DMFN. Chứng minh:

a) Tứ giác EIDO là hình bình hành.

b) E là trung điểm của BF.

Lời giải:



a) Ta có $\widehat{EAM} = \widehat{ADO} = \widehat{EMA}$ (1).

Vì DMFN là hình chữ nhật nên

$\widehat{IDM} = \widehat{IMD} = \widehat{AME}$ (1)

(1), (2) $\Rightarrow \widehat{EAM} = \widehat{IDM} \Rightarrow OE$ // DI.

Mặt khác theo giả thiết thì EI // DO. Vậy EIDO là hình bình hành.

b) Ta có O, I lần lượt là trung điểm của BD và FD. Theo trên, AC // DF, NE // BD.

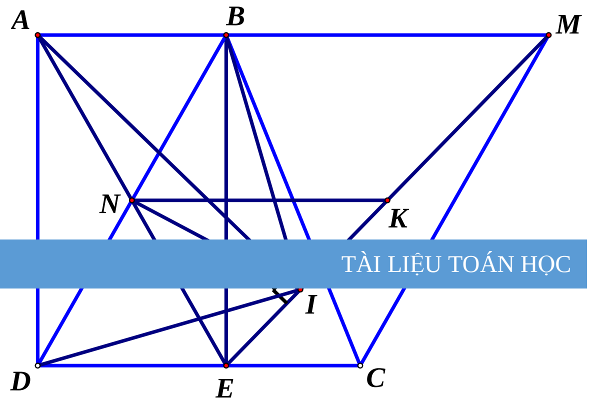
Xét tam giác DFB, đường thẳng AC và NE lần lượt là hai đường trung bình, suy ra AC và NE cùng đi qua trung điểm của BF.

Vì E là giao điểm của AC và NE nên E là trung điểm của BF.

Bài 67. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$) (AB < CD). Vẽ BE vuông góc CD tại E. trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho BM = CD. Gọi N là giao điểm của AE và BD, K là trung điểm của EM. Vẽ AI vuông góc ME tại I. Chứng minh rằng NK // AM và $\widehat{BID} = 90^0$.

Giải:

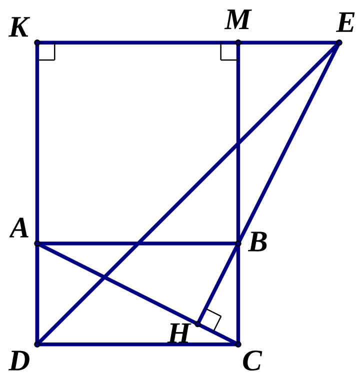
Trong tam giác AEM, NK là đường trung bình, do đó NK // AM.



Dễ thấy tứ giác ABED là hình chữ nhật, do đó N là trung điểm của AE và BD và AE = BD.
Tam giác IAE vuông tại I, có IN là đường trung tuyến, do đó:
IN = NA = NE = NB = ND.
Tam giác IBD có IN là trung tuyến thỏa mãn IN = IB = ID, do đó BID là tam giác vuông tại I.

Bài 68. Cho hình nhữ nhật ABCD, vẽ BH vuông góc AC tại H. Trên tia đối của tia BH lấy điểm E sao cho BE = AC. Vẽ EK vuông góc với đường thẳng AD tại K, EK cắt đường thẳng BC tại M. Chứng minh rằng góc ADE bằng 45^0.

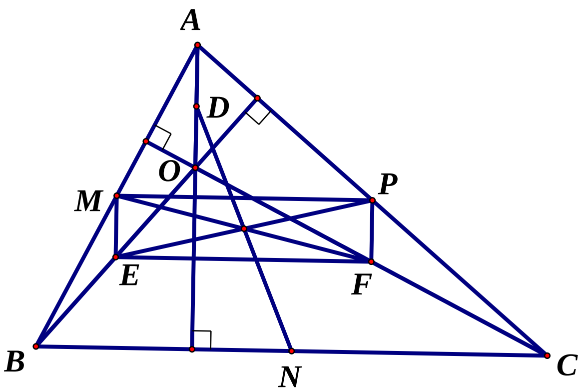
Lời giải:



$\widehat{BAC} = \widehat{CBH} = \widehat{EBM}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABH}$).
Tam giác ABC và BME là hai tam giác vuông có AC = BE và $\widehat{BAC} = \widehat{MBE}$ suy ra $\Delta ABC = \Delta BME \Rightarrow ME = BC$.
Dễ dàng chứng minh được ABMK là hình chữ nhật, suy ra AK = BM = AB= KM.
KD = KA + AD = KM + ME = KE. Do vậy tam giác KFE vuông cân tại K.
Vậy $\widehat{ADE} = 45^0$.

Bài 69. Các đường cao của tam giác ABC gặp nhau tại O. Gọi M, N, P, D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA, OA, OB, OC. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng DN, MF, EF đồng quy và cùng độ dài.

Lời giải:

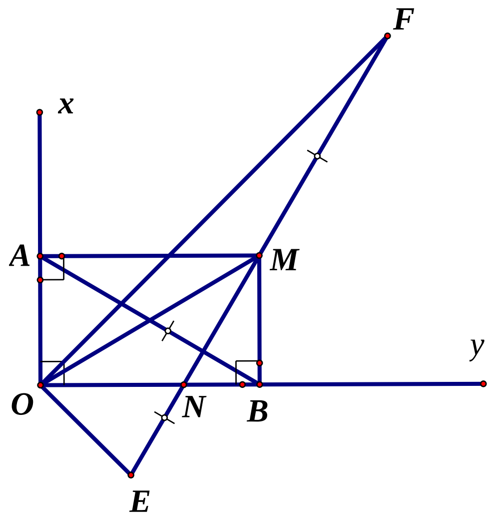


MP và EF lần lượt là đường trung bình trong tam giác ABC và OBC.
Ta có MP // EF và MP = EF (vì cùng bằng $\frac{1}{2}$BC và cùng song song BC), suy ra MPFE là hình bình hành.
ME // AO, EF // BC và AO$\perp$BC, suy ra ME$\perp$EF, ta được tứ giác MPEF là hình chữ nhật. Do đó MF = PE và MF cắt PE tại trung điểm mỗi đoạn.
Chứng minh tương tự, DN = PE và DN cắt PE tại trung điểm mỗi đoạn.
Vậy ba đoạn DN, MF, PE đồng quy và cùng độ dài.

Bài 70. Cho góc $\widehat{xOy} = 90^0$, M nằm trong góc đó. Vẽ MA$\perp$Ox tại A, MB$\perp$Oy tại B. Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB, lấy các điểm E, F sao cho ME = MF = AB. Chứng minh rằng:
a) $\widehat{EOF} = 90^0$, $\widehat{MOA} = \widehat{EMA}$, $\widehat{MOA} + \widehat{FMA} = 180^0$.

b) $\widehat{EOy} = \widehat{OMA} + \widehat{MOF}$, $\widehat{BOF} = \widehat{OMA} + \widehat{MOF}$. Từ đó suy ra Oy là tia phân giác của góc $\widehat{EOF}$.

Lời giải:



a) Dễ dàng chứng minh được OAMB là hình chữ nhật. Ta có M là trung điểm của EF.

ME = MF = AB = MO, từ đó suy ra tam giác EOF vuông tại O.

$\widehat{EMA} + \widehat{MAB} = 90^0$, $\widehat{MOA} + \widehat{MAB} = 90^0$, suy ra $\widehat{EMA} = \widehat{MOA}$.

$\widehat{MOA} + \widehat{FMA} = \widehat{EMA} + \widehat{FMA} = 180^0$.

b) Tam giác OMF cân tại M nên $\widehat{MOF} = \widehat{MFO}$.

EF cắt Oy tại N, $\widehat{ONE} = \widehat{MNB}$, suy ra

$\widehat{OMA} + \widehat{ONE} = \widehat{BMN} + \widehat{MNB} = 90^0$.

Vì tam giác OEF vuông tại O nên $\widehat{MFO} + \widehat{OEN} = 90^0$.

$\widehat{OMA} + \widehat{MOF} + \widehat{ONE} + \widehat{OEN} = \widehat{OMA} + \widehat{ONE} + \widehat{MFO} + \widehat{OEN} = 180^0$.

Do đó $\widehat{OEy} = \widehat{OMA} + \widehat{MOF}$; $\widehat{BOF} = \widehat{BOM} + \widehat{MOF} = \widehat{OMA} + \widehat{MOF}$

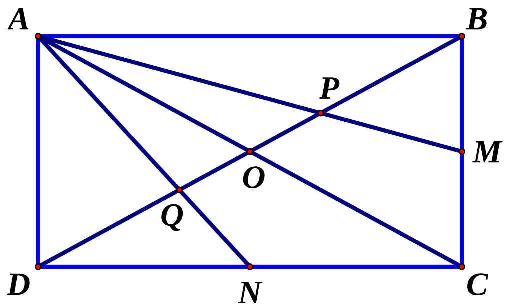
Từ đây suy ra $\widehat{OEy} = \widehat{BOF}$. Vậy Oy là phân giác góc $\widehat{EOF}$.

Bài 71. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Gọi giao điểm của AM, AN với BD lần lượt là P, Q. Gọi AC cắt BD tại O. Chứng minh rằng:

a) $AP = \frac{2}{3}AM$, $AQ = \frac{2}{3}AN$.

b) BP = PQ = QD = 2.OP.

Lời giải:



a) Ta có O là trung điểm của AC và BD.

Trong tam giác ABC, AM và BO là hai đường trung tuyến, do đó P là trọng tâm tam giác ABC.

Từ đó ta có $AP = \frac{2}{3}AM$.

Chứng minh tương tự, ta có $AQ = \frac{2}{3}AN$.

b) Ta có: $BP = \frac{2}{3}BO = \frac{1}{3}BD$; tương tự, $DQ = \frac{1}{3}BD$, suy ra $PQ = \frac{1}{3}BD$.

Mặt khác $OP = OQ = \frac{1}{3}OB$, do đó O là trung điểm PQ.

Vậy BP = PQ = QD = 2OP.

Bài 72. Cho hình bình hành ABCD, tia phân giác góc $\widehat{A}$ cắt tia phân giác góc $\widehat{B}$ và tia phân giác góc $\widehat{D}$ lần lượt tại P, Q.

a) Chứng minh rằng: BP // DQ và $AP \perp BP$, $AQ \perp DQ$.

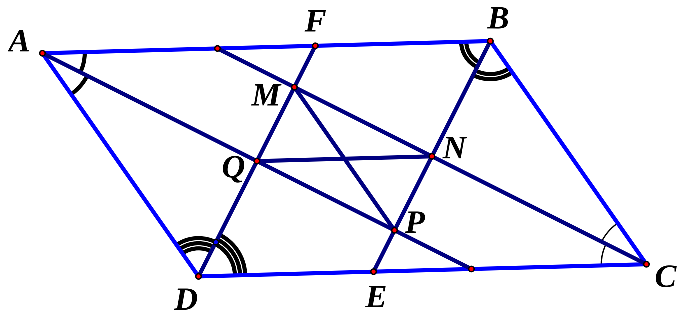
b) Tia phân giác góc $\hat{C}$ cắt BP, DQ lần lượt tại N và M. Tứ giác MNPQ là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh rằng: NQ // AB, MP // AD.

d) Giả sử AB > AD. Chứng minh rằng MP = NQ = AB − AD.

e) Chứng minh rằng AC, BD, EF, MP, NQ đồng quy.

Lời giải:



a) Chứng minh BP // DQ.

Gọi E là giao điểm của BP và CD, F là giao điểm của DQ và AB. Ta có:

$\widehat{ABE} = \widehat{BEC}$ (so le trong)

và $\widehat{FDC} = \widehat{ABE} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}$.

Suy ra $\widehat{FDE} = \widehat{BEC} \Rightarrow$ BP // DQ (hai góc đồng vị bằng nhau).

* Chứng minh $AP \perp BP$, $AQ \perp DQ$.

$\widehat{AFD} = \widehat{FDC} = \widehat{FDA}$, suy ra tam giác AFD cân tại A. AQ là đường phân giác cũng là đường cao nên $AQ \perp DQ$. Vì theo trên, BP // DQ nên suy ra $AP \perp BP$.

b) Chứng minh tương tự như trên, ta có $CN \perp BN$, $CM \perp DM$. tứ giác MNPQ có bốn góc vuông nên MNPQ là hình chữ nhật.

c) Tứ giác BEDF là hình bình hành (hai cặp cạnh đối song song).

Theo chứng minh trên thì Q là trung điểm của DF, chứng minh tương tự, N là trung điểm của BE. Từ đó suy ra NQ // BF, hay NQ // AB.

Vì NQ // AB $\Rightarrow \widehat{BAQ} = \widehat{NQP}$.

Lại có $\widehat{BAQ} = \widehat{BCM} = \dfrac{1}{2}\widehat{BCD}$ và $\widehat{NQP} = \widehat{NMP}$ (vì MNPQ là hình chữ nhật).

Từ đó suy ra $\widehat{NMP} = \widehat{BCM} \Rightarrow$ MN // BC (hai góc so le trong bằng nhau).

d) Vì AB >AD nên F thuộc canh AB, E thuộc cạnh CD.

Theo chứng minh trên, BEDF là hình bình hành và Q, N lần lượt là trung điểm của DF, BE, suy ra QN = BF = DE = AB – AF

Vì tam giác ADF cân tại A nên AB – AF = AB – AD $\Rightarrow$ QN = AB – AD.

Lại có MNPQ là hình chữ nhật nên QN = MP.

Vậy NQ = MP = AB – AD.

e) ABCD là hình bình hành nên AC cắt BD tại trung điểm mỗi đoạn.

BEDF là hình bình hành nên BD cắt EF tại trung điểm mỗi đoạn.

MNPQ là hình bình hành nên MP cắt NQ tại trung điểm mỗi đoạn.

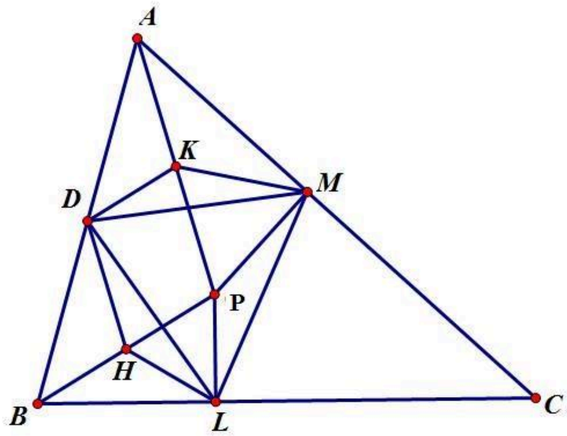
Q, N lần lượt là trung điểm của DF và BE nên dễ thấy BNDQ cũng là hình bình hành. Suy ra BD cắt NQ tại trung điểm của mỗi đoạn.

Từ đó ta có kết luận AC, BD, EF, MP, NQ đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

Bài 73. Cho tam giác ABC nhọn. Gọi B là một điểm thuộc miền trong của tam giác sao cho: $\widehat{PAC} = \widehat{PBC}$. Gọi L và M là chân đường vuông góc vẽ từ P đến BC và AC. Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh tam giác DLM cân.

Giải:

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AP và BP theo tính chất song song của đường trung bình ta có tứ giác DHPK là hình bình hành.



Dẫn đến DK = $\frac{BP}{2}$ = HL

Tương tự KM = $\frac{AP}{2}$ = DH

Ta chứng minh hai góc DKM và DHL bằng nhau như sau :

$\widehat{DKM} = \widehat{DKP} + \widehat{PKM} = \widehat{DKP} + 2.\widehat{PAC}$

Do hình bình hành DHPK nên $\widehat{DKP} = \widehat{DHP}$, còn $\widehat{PAC} = \widehat{PBC}$ (giải thiết)

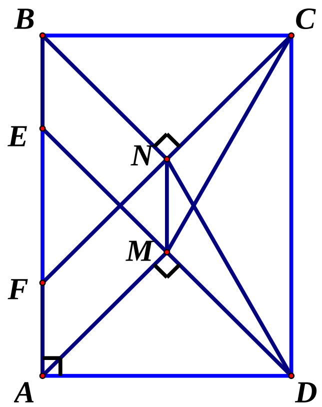
suy ra $\widehat{DKM} = \widehat{DHL}$,

Vậy ta đã tìm đủ 3 yếu tố để cho hai tam giác DKM và tam giác DHL bằng nhau.

suy ra DM = DL (điều phải chứng minh)

Bài 74. Cho hình chữ nhật ABCD. Tia phân giác góc $\widehat{A}$ cắt tia phân giác góc $\widehat{D}$ tại M, tia phân giác góc $\widehat{B}$ cắt tia phân giác góc $\widehat{C}$ tại N. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của DM, CN với AB. Chứng minh rằng:
a) AM = DM = BN = CN = ME = NF.
b) Tứ giác DMNC là hình thang cân.
c) AF = BE.
d) AC, BD, MN đồng quy.

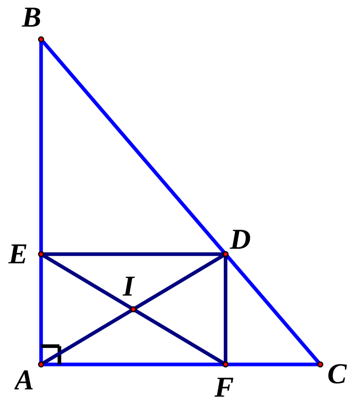
Lời giải:



a) Dễ thấy các tam giác ADM, BCN, AME, BNF là các tam giác vuông cân với các đỉnh lần lượt là M, N, M, N.
do đó AM = DM = EM và BN = CN = FN.
Mặt khác, vì AD = BC nên $\Delta AMD = \Delta CNB \Rightarrow AM = BN$.
Vậy AM = DM = EM = BN = CN = FN.
b) Tam giác ADE vuông tại A có ADE=$45^0 \Rightarrow \widehat{AED} = 45^0$. Lại có $\widehat{ABN} = 45^0$, do đó BN // EM.
Theo trên BN = EM, do vậy BNME là hình bình hành, suy ra MN // BE // CD.
Mặt khác CN = DM. Vậy CDMN là hình thang cân.
c) Chứng minh tương tự như trên, ta có AFNM cũng là hình bình hành.
Từ đó suy ra AF = BE = MN.
d) Theo chứng minh trên ta có BN // MD và BN = MD, do đó BNDM là hình bình hành, suy ra BD và MN cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn. Mặt khác BD và AC cũng cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.
Vậy AC, BD, MN đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.

Bài 75. Cho tam giác ABC vuông tại A, D thuộc cạnh BC. Vẽ DE$\perp$AB tại E, DF$\perp$AC tại F.

a) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh rằng A, I, D thẳng hàng.
b) Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì EF có độ dài ngắn nhất? Vì sao?
c) Dựng điểm D trên cạnh BC sao cho $\widehat{CFE} = 150^0$.

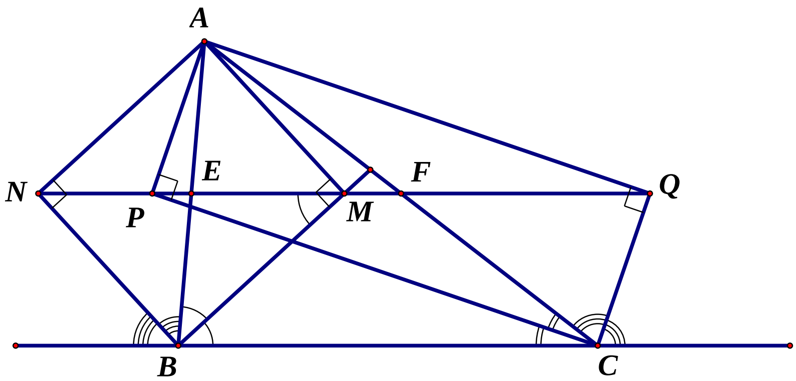


Lời giải:

a) Tứ giác AEDF có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^0$, do đó AEDF là hình chữ nhật. Suy ra I là trung điểm EF, cũng là trung điểm của AD.
b) Ta có EF = AD. EF nhỏ nhất khi AD nhỏ nhất, hay điểm D là hình chiếu vuông góc của A lên BC.
c) $\widehat{CFE} = 150^0 \Rightarrow \widehat{EFA} = \widehat{DAC} = 30^0$.

Bài 76. Cho ΔABC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của A lên hai đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$. Chứng minh rằng:
a) Các tứ giác AMBN, APCQ là các hình chữ nhật.
b) M, N, P, Q, E, F thẳng hàng.

Lời giải:



a) Ta có đường phân giác trong và ngoài của một góc trong tam giác thì vuông góc với nhau nên $\widehat{NBM} = 90^0$.
Trong tứ giác ANBM có $\widehat{B} = \widehat{N} = \widehat{M} = 90^0$ nên ANBM là hình chữ nhật.
Chứng minh tương tự, ta cũng có APCQ là hình chữ nhật.
b) Vì ANBM là hình chữ nhật nên ta có $\widehat{NMB} = \widehat{ABM} = \widehat{MBC}$, suy ra NM // BC (hai góc so le trong bằng nhau).
ANBM là hình chữ nhật suy ra E là trung điểm của AB, cũng là trung điểm của NM.
NM qua E, song song với BC nên NM là đường trung bình trong tam giác ABC, do đó NM đi qua F.
Chứng minh tương tự, PQ là đường trung bình trong tam giác ABC.
Vậy các điểm M, N, P, Q, E, F thẳng hàng.

Bài 77. Cho Δ ABC ($\widehat{A} = 90^0$) có AB < AC. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ MD vuông góc với AB tại D và ME vuông góc với AC tại E. Vẽ đường cao AH của Δ ABC.

a) Chứng minh ADME là hình chữ nhật.

b) Chứng minh CMDE là hình bình hành.

c) Chứng minh MHDE là hình thang cân.

d) Qua A kẻ đường thẳng song song với DH cắt DE tại K. Chứng minh HK vuông góc với AC.

Giải:

a) Tứ giác ADME có:

$\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^0$ nên ADME là hình chữ nhật.

b) $MD \perp AB$, $AC \perp AB$, suy ra MD // AC.

Vì M là trung điểm cảu BC nên MD là đường trung bình của Δ ABC.

Tương tự, ME cũng là đường trung bình của Δ ABC. Từ đó ta có A, E lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Suy ra MD // CE và DE // MC. Vậy CMDE là hình chữ nhật.

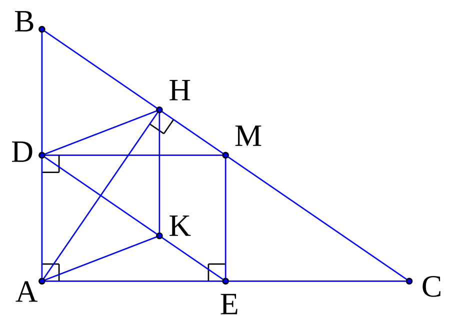
c) Theo trên thì DE // HM (1).

Xét tam giác ABH vuông tại H, có HD là trung tuyến nên $HD = \frac{1}{2}AB$.

Mặt khác, trong tam giác ABC, ME là đường trung bình nên $ME = \frac{1}{2}AB$.

Suy ra HD = ME (2).

Từ (1) và (2) suy ra MHDE là hình thang cân.



d) Xét hai tam giác ADK và DBH, có:

DE // BC $\Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{DBH}$ (Hai góc đồng vị).

AD = DB (vì D là trung điểm của AB)

DH // AK $\Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{BDH}$ (Hai góc đồng vị).

Suy ra $\Delta ADK = \Delta DBH \Rightarrow AK = DH$.

Lại có AK // DH, do đó ADHK là hình bình hành, suy ra HK // DA.

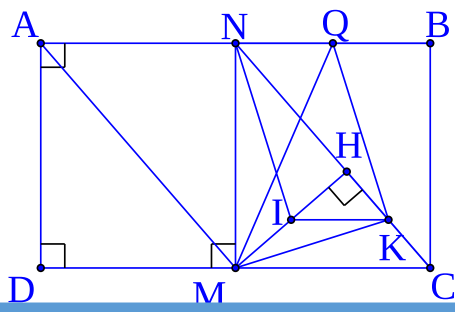
Vì $DA \perp AC$ nên $HK \perp AC$.

Bài 78. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh DC. Từ M vẽ đường thẳng vuông góc với DC và cắt cạnh AB tại N.

a) Chứng minh ADMN là hình chữ nhật.

b) Chứng minh AMCN là hình bình hành.

c) VẼ MH vuông góc với NC tại H; Gọi Q và K lần lượt là trung điểm của NB và HC. Chứng minh QK vuông góc với MK.



Giải:

a) Tứ giác ADMN có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{M} = 90^0$, do đó ADMN là hình chữ nhật.

b) Vì ADMN là hình chữ nhật nên:

AN = DM = MC.

Lại có AN // MC, do đó AMCN là hình bình hành.

c) Trong tứ giác BCMN, $\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{M} = 90^0$ nên BCMN là hình chữ nhật.

Ta có NQ // CM và NQ = $\frac{1}{2}$CM (1).

Gọi I là trung điểm của MH, thì KI là đường trung bình trong tam giác HCM.

Do đó: KI // CM và KI = $\frac{1}{2}$CM (2).

Từ (1) và (2) suy ra NQ = KI và NQ // KI, hay NQKI là hình bình hành.

Xét tam giác MNC có: $MH \perp NC$; $KI \perp MN$ (vì KI // CM và $CM \perp MN$).

Suy ra I là trực tâm tam giác MNC, do đó $NI \perp MK$ (3).

Theo trên NQKI là hình bình hành nên NI // QK (4).

(3) và (4) suy ra $MK \perp QK$.

Bài 79. Cho Δ ABC vuông tại A (AB < AC). Gọi I, M, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA.

a) Chứng minh AIMK là hình chữ nhật.

b) Trên tia MI lấy điểm E sao cho I là trung điểm của ME, trên tia MK lấy điểm F sao cho K là trung điểm của MF. Chứng minh IF // EF và EF = 2IK.

c) Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Chứng minh tứ giác IKMH là hình thang cân.

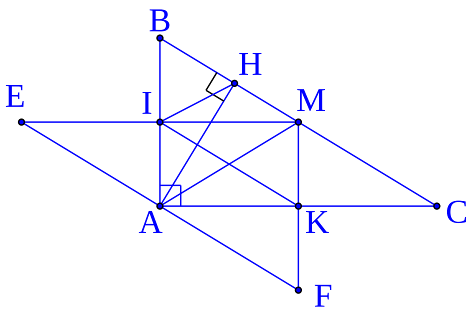
d) Cho IK = 2MH. Tính $\widehat{ABC}$.

Giải:

a) Ta có MI là đường trung bình trong tam giác ABC nên MI // AC, do đó $MI \perp AB$.

Tương tự, $MK \perp AC$.

Tứ giác AIMK có $\widehat{A} = \widehat{I} = \widehat{K} = 90^0$ nên AIMK là hình chữ nhật.



b) Vì I, K lần lượt là trung điểm của ME, MF nên IK là đường trung bình trong tam giác MEF, từ đó ta có IK // EF và EF = 2IK.

c) Theo trên, IK // HM (a).

Vì MK là đường trung bình trong tam giác ABC nên MK = $\frac{1}{2}$AB (1).

Xét tam giác ABH vuông tại H, có HI là đường trung tuyến nên HI = $\frac{1}{2}$AB (2).

Từ (1) và (2) suy ra MK = HI (b).

Từ (a) và (b) suy ra IKMH là hình thang cân với hai đáy IK, HM.

d) Giả sử IK = 2HM. Vì AIMK là hình chữ nhật nên IK = AM.

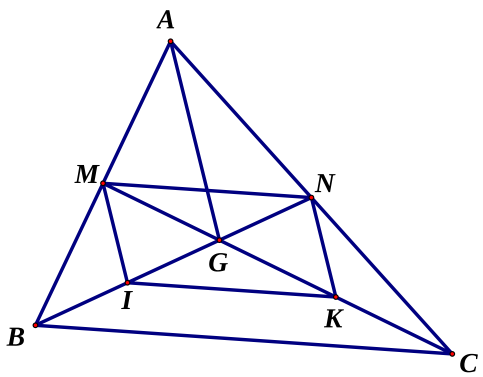
Mà AM là trung tuyến trong tam giác vuông ABC nên AM = MB. Từ đó suy ra MB = 2HM.

Theo giả thiết AB < AC nên H nằm giữa M và B, do vậy H là trung điểm của MB.

Trong tam giác ABM có AH là đường cao và là trung tuyến nên tam giác ABM cân tại A. Như vậy ta có AB = AM = MB, hay Δ ABM là tam giác đều.

Vậy $\widehat{ABC} = 60^0$.

Bài 80. Cho Δ ABC nhọn, các đường trung tuyến BN và CM cắt nhau tại G. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BG và CG.
a) Chứng minh tứ giác MNCB là hình thang.
b) Chứng minh tứ giác MNKI là hình bình hành.
c) Δ ABC cần thêm điều kiện gì để tứ giác MNKI là hình chữ nhật.
d) Tính diện tích Δ ABC biết diện tích của Δ ABN bằng 5cm².



Giải:

a) M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC, nên MN là đường trung bình trong tam giác ABC, suy ra MN // BC. Vậy MNCB là hình thang.

b) Trong Δ BCG, IK là đường trung bình, suy ra IK = $\frac{1}{2}$ BC và IK // BC (1).

Theo trên: MN = $\frac{1}{2}$BC và MN // BC (1).

Từ (1) và (2) suy ra MN = IK và MN // IK. Vậy MNKI là hình bình hành.
c) MNKI là hình chữ nhật khi và chỉ khi MI $\perp$ IK.
Vì IK // BC nên MI $\perp$ IK $\Leftrightarrow$ MI $\perp$ BC.
Trong Δ ABG, MI là đường trung bình nên MI // AG. Do đó MI $\perp$ BC $\Leftrightarrow$ AG $\perp$ BC.
Vì AG là đường trung tuyến trong Δ ABC nên AG $\perp$ BC khi Δ ABC cân tại A.
Như vậy MNKI là hình chữ nhật khi và chỉ khi Δ ABC cân tại A.
d) Gọi h là khoảng cách từ đỉnh B lên AC. Khi đó ta có:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}h.AC$ và $S_{ABN} = \frac{1}{2}h.AN = \frac{1}{2}h.\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}S_{ABC}$.

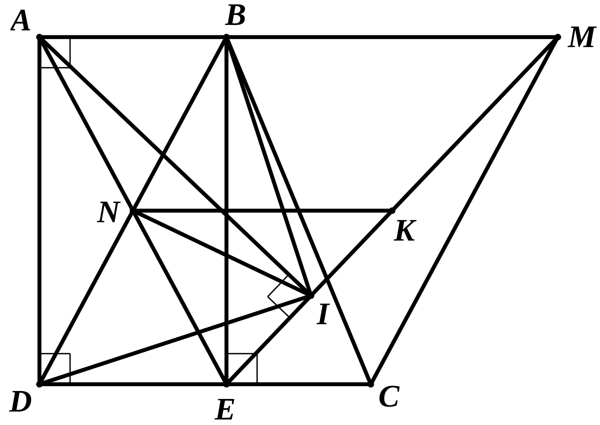
Như vậy $S_{ABC} = 2.S_{ABN}$.
Theo giả thiết S_{ABN} = 5cm² nên S_{ABC} = 10cm².

Bài 81. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$, AB < CD). Vẽ BE vuông góc CD tại E. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho BM = DC.
a) Chứng minh rằng tứ giác ABED là hình chữ nhật.
b) Chứng minh rằng AE = MC.
c) Gọi N là giao điểm của AE và BD, K là trung điểm của EM.

Chứng minh rằng NK = $\frac{1}{2}$AM.

d) Vẽ AI vuông góc với ME tại I. Chứng minh rằng BI $\perp$ ID.

Giải:



a) Tứ giác ABED có:

$\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^0$ nên ABED là hình chữ nhật.

b) Theo giả thiết ta có:

BM = DC và BM // DC.

Do đó BMCD là hình bình hành, suy ra MC = BD.

Mặt khác, vì ABED là hình chữ nhật nên BD = AE.

Từ đó ta có: AE = MC.

c) Ta có N là trung điểm của AE và BD.

Trong tam giác AME, NK là đường trung bình. Do đó NK = $\frac{1}{2}$AM.

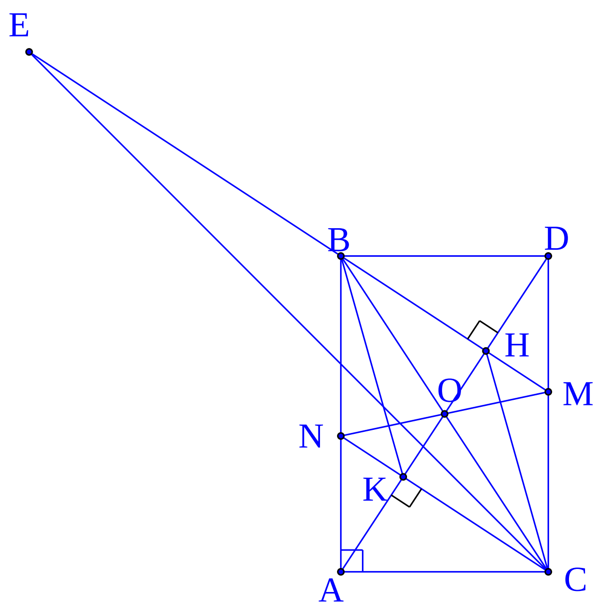
d) Xét tam giác AIE vuông tại I, có IN là trung tuyến nên IN = $\frac{1}{2}$AE.

Vì AE = BD nên IN = $\frac{1}{2}$BD.

Xét tam giác BDI có IN là đường trung tuyến và IN = $\frac{1}{2}$BD, do đó ΔBDI vuông tại I.

Vậy BI $\perp$ ID.

Bài 82. Cho ΔABC vuông tại A (AB > AC). Đường trung tuyến AO. Trên tia đối của tia OA lấy điểm D sao cho OD = OA. Từ B kẻ BH vuông góc với AD tại H. Từ C kẻ CK vuông góc với AD tại K. Tia BH cắt CD ở M, tia CK cắt AB ở N.



a) Chứng minh ABDC là hình chữ nhật.

b) Chứng minh BH = CK và BK // CH.

c) Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng.

d) Trên tia đối của tia BH lấy điểm E sao cho BE = AD. Chứng minh $\widehat{DCE} = 45^0$.

Giải:

a) Theo giả thiết, O là trung điểm của BC và AD. Tứ giác ABDC có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn nên ABCD là hình bình hành. Hơn nữa $\widehat{A} = 90^0$ nên ABCD là hình chữ nhật.

b) Xét hai tam giác ACK là DBH lần lượt vuông tại K và H, có AC = BD; $\widehat{KAC} = \widehat{HDB}$ (vì ABDC là hình chữ nhật).

Suy ra $\Delta ACK = \Delta DBH$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow CK = BH$.

Ta có BH // CK (vì cùng vuông góc với AD) và BH = CK (theo trên).

Do đó BHCK là hình bình hành, suy ra BK // CH.

c) BM // CN, BN // CM, do đó BMCN là hình bình hành. Vì O là trung điểm của BC nên O cũng là trung điểm của MN, suy ra điều phải chứng minh.

d) Vì ABDC là hình chữ nhật nên ta có AD = BC = BE, suy ra tam giác BEC cân tại B, nên $\widehat{BEC} = \widehat{BCE}$.

Lại có BM // CN nên $\widehat{BEC} = \widehat{NCE}$ (so le trong). Suy ra $\widehat{BCE} = \widehat{NCE}$ (1).

Theo trên ABDC là hình chữ nhật nên dễ dàng suy ra $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$

Suy ra $\widehat{ACN} = \widehat{DCB}$ (2) (hai góc cùng phụ với góc $\widehat{CAD}$, $\widehat{CBD}$).

Từ (1) và (2) cho ta $\widehat{CAN} + \widehat{NCE} = \widehat{DCB} + \widehat{BCE}$, suy ra $\widehat{ACE} = \widehat{DCE}$.

CE là tia phân giác của góc vuông $\widehat{DCA}$ nên $\widehat{DCE} = 45^0$.

Bài 83. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E là điểm đối xứng của B qua C. Vẽ BH vuông góc với AE tại H. Gọi I là trung điểm của HE.

a) Chứng minh tứ giác ACED là hình bình hành.

b) Gọi K là trực tâm của ABI. Chứng minh K là trung điểm của HB.

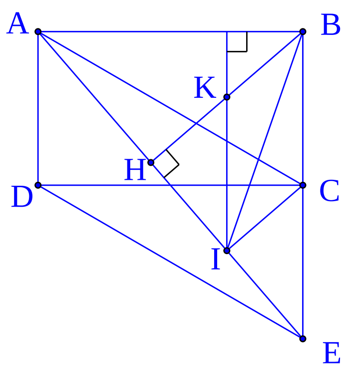
c) Chứng minh tứ giác BCIK là hình bình hành.

d) Chứng minh AC, BD và đường trung trực của IC đồng qui tại một điểm.

Giải:

a) Ta có AD // CE và AD = BC = CE. Do vậy ADEC là hình bình hành.

b) K là giao điểm của BH và đường thẳng qua I, vuông góc với AB.



$EB \perp AB$, $IK \perp AB \Rightarrow IK // EB$.

Mà I là trung điểm của EH nên IK là đường trung bình trong tam giác BHE. Vậy K là trung điểm của BH.

c) IK // BC; IK = BC (cùng bằng $\frac{1}{2}$BE) $\Rightarrow$ BCIK là hình bình hành.

d) BCIK là hình bình hành $\Rightarrow$ CI // BK $\Rightarrow CI \perp AE$. Tam giác ACI vuông tại I nên đường trung trực của CI cũng là đường trung bình của tam giác ACI. Do vậy đường trung trực của CI đi qua trung điểm của AC.

Mặt khác vì ABCD là hình chữ nhật nên AC cắt BD tại trung điểm của mỗi đoạn. từ đó ta có AC, BD, CI đồng qui tại trung điểm của AC.

Bài 84. Cho hình chữ nhật ABCD, E thuộc đường chéo BD. Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho CE = EF. Vẽ $FG\perp AB$ tại G, $FH\perp AD$ tại H.

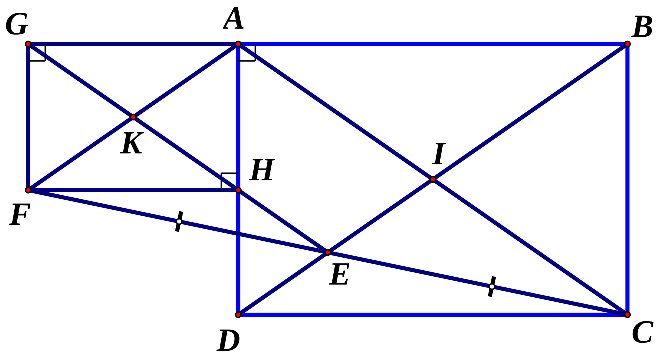
a) Chứng minh rằng tứ giác AHFG là hình chữ nhật.

b) AF // BD.

c) * E, G, H thẳng hàng.

Lời giải:

a) Tứ giác AHFG có $\widehat{A}=\widehat{H}=\widehat{G}=90^0$ nên AHFG là hình chữ nhật.



b) Gọi I là giao điểm của AC và BD, ta có I là trung điểm của AC. Theo giả thiết thì E là trung điểm của CF. do đó đường thẳng BD là đường trung bình trong tam giác ACF. Vậy AF // BD.

c) Gọi K là giao điểm của AF và GH, suy ra K là trung điểm của AF.

Dễ thấy AIEK là hình bình hành, suy ra KE // AC. Ta sẽ chứng minh GH // AI.

Vì AHFG là hình chữ nhật nên $\widehat{AGH}=\widehat{GAF}$ (1).

Vì AF // BD nên $\widehat{GAF}=\widehat{ABD}$ (2).

Vì ABCD là hình chữ nhật nên $\widehat{ABD}=\widehat{BAC}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{AGH}=\widehat{BAC}$. Do đó GH // AC (hai góc so le trong bằng nhau).

Vì GH qua K nên hai đường thẳng GH và KE trùng nhau. Vậy ba điểm G, H, E thẳng hàng.

Bài 85. Cho Δ ABC vuông tại A có AB =4cm, AC = 3cm. Gọi O là trung điểm của BC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O.

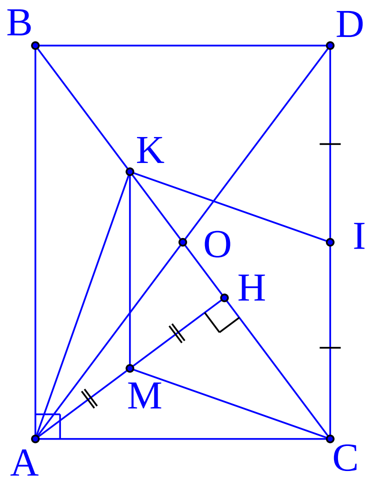
a) Tính BC, AO.

b) Chứng minh ABDC là hình chữ nhật.

c) Vẽ $AH\perp BC$ (H thuộc BC). Gọi M, K, I lần lượt là trung điểm của AH, BH, CD. Chứng minh CM = IK.

d) Chứng minh Δ AKI vuông.

Giải:



a) Trong tam giác vuông ABC, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow BC = 5(cm)$.

Vì AO là trung tuyến trong tam giác vuông ABC nên AO = $\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}$ (cm).

b) Tứ giác ABDC có hai đường chéo BC và AD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn, nên ta có ABDC là hình bình hành. Mà $\widehat{BAC}=90^0$ nên ABDC là hình chữ nhật.

c) Dễ thấy KM là đường trung bình trong tam giác ABH nên KM // AB và KM = $\frac{1}{2}$AB.

Lại có CI // AB và CA=$\frac{1}{2}$CD = $\frac{1}{2}$AB.

Như vậy ta có KM = CI và KM //CI, nên KMCI là hình bình hành $\Rightarrow$ CM = IK.

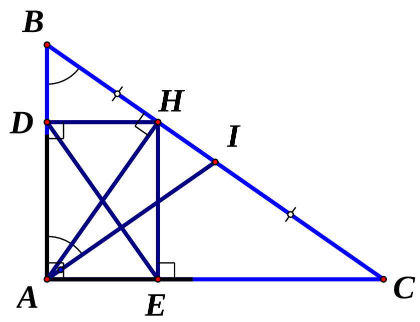
d) Theo trên, KM // AB nên KM$\perp$AC. Lại có AM$\perp$KC, nên M là trực tâm tam giác ACK. Do đó CM$\perp$AK (1).

Mà KMCI là hình bình hành nên IK // CM (2).

(1), (2) $\Rightarrow$AK$\perp$IK, hay Δ AKI vuông.

Bài 86*. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, I là trung điểm BC. Vẽ HD$\perp$AB tại D, HE$\perp$AC tại E. Chứng minh AI$\perp$DE.

Lời giải:



Vì tam giác ABC vuông tại A nên AI = IB = IC.
Do đó $\widehat{ABI} = \widehat{DAI}$ (1).
Dễ thấy ADHE là hình chữ nhật ($\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = 90^0$). Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{AHE} = \widehat{BHD}$ (cùng phụ với $\widehat{AHD}$) (2)
Mặt khác $\widehat{ABI} + \widehat{DHB} = 90^0$ (3).
(1), (2), (3) suy ra $\widehat{ADE} + \widehat{DAI} = 90^0$. Vậy AI$\perp$DE.

Bài 87 . Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$; AB < CD). Vẽ BE vuông góc với CD tại E. Trên tia đối tia BA lấy điểm M sao cho BM = DC. Gọi N là giao điểm của AE và BD; Gọi K là trung điểm của EM. Vẽ AI vuông góc với ME tại I.

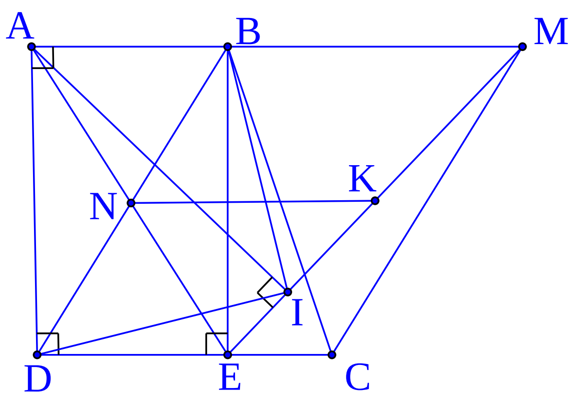
a) Chứng minh ABED là hình chữ nhật.

b) Chứng minh BMCD là hình bình hành.

c) Chứng minh NK song song AM.

d) Chứng minh Δ BID vuông.

Giải:



a) Tứ giác ABED có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^0$ nên ABED là hình chữ nhật.

b) Theo giả thiết thì BM = CD. Vì ABCD là hình thang nên CD // BM. Do đó ta có BMCD là hình bình hành.

c) Vì ABED là hình chữ nhật có N là giao điểm hai đường chéo nên N là trung điểm của AE và BD. Xét tam giác EAM có NK là đường trung bình nên NK // AM.

d) Tam giác AIE có IN là trung tuyến nên $IN = \frac{1}{2}AE$. Mà AE = BD nên ta được $IN = \frac{1}{2}BD$. Trong tam giác IBD có IN là trung tuyến và $IN = \frac{1}{2}BD$ nên ΔBID vuông tại I.

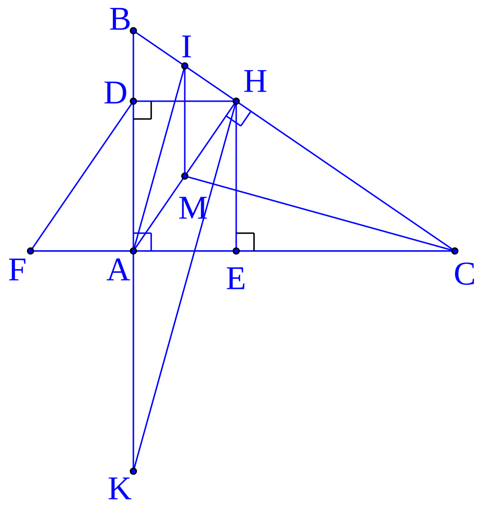
Bài 88. Cho ΔABC vuông tại A có AH là đường cao. Từ H vẽ HD vuông góc với cạnh AB tại D; vẽ HE vuông góc với cạnh AC tại E. Biết AB = 15cm; BC = 25cm.

a) Tính độ dài cạnh AC và diện tích ΔABC.

b) Chứng minh ADHE là hình chữ nhật.

c) Trên tia đối của tia AC lấy điểm F sao cho AF = AE. Chứng minh tứ giác AFDH là hình bình hành.

d) Gọi K là điểm đối xứng của B qua A. Gọi M là trung điểm của AH. Chứng minh CM vuông góc với HK.



Giải:

a) Áp dụng định lí Pytago trong tam giác ABC vuông tại A, có:

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 25^2 - 15^2 = 400$. Suy ra AC = 20(cm).

Diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2}AB.\,AC = \frac{1}{2}.\,15.\,20 = 150$ (cm^2).

b) Tứ giác ADEH có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = 90^0$ nên ADEH là hình chữ nhật.

c) Ta có AF // DH và AF = DH (vì cùng bằng AE), nên AFDH là hình bình hành.

d) Gọi I là trung điểm của HB. IM là đường trung bình trong ΔABH nên IM // AB, do đó $IM \perp AC$. Lại có $AM \perp IC$ nên suy ra M là trực tâm của ΔACI, do đó ta có $CM \perp AI$ (1).

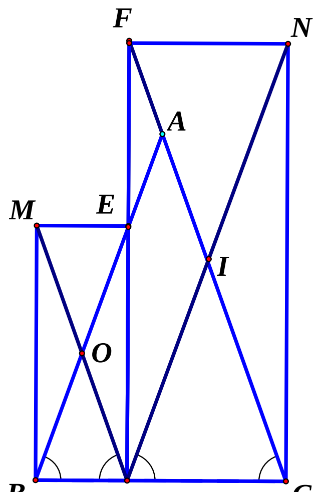
Xét ΔBKH có AI là đường trung bình nên AI // KH (2).

Từ (1) và (2) cho ta $CM \perp KH$.

Bài 89*. Cho tam giác ABC cân tại A. từ một điểm D trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại E, F. Vẽ các hình chữ nhật BDEM, CDFN có tâm lần lượt là O, I. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AODI là hình bình hành.

b) A là trung điểm của MN.



Lời giải:

a) Vì tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (1).

Các tứ giác BDEM và CDFN là hình chữ nhật nên ta có:

$\widehat{EBD} = \widehat{MDB}$ (2) và $\widehat{NDC} = \widehat{FCD}$ (3).

(1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{MDB} \Rightarrow$ DO // IA (hai góc đồng vị bằng nhau).
(1) và (3) $\Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{ABC} \Rightarrow$ AO // ID (hai góc đồng vị bằng nhau).
Từ đó suy ra AODI là hình bình hành.
b) Ta có IA // OM và IA = OD = OM, suy ra AIOM là hình bình hành $\Rightarrow$ AM = IO và AM // IO (4).
AO // NI và AO = ID = NI, suy ra AOIN là hình bình hành $\Rightarrow$ AN = IO và AN // IO (5).
Từ (4) và (5) $\Rightarrow$ M, N, A thẳng hàng và AM = AN. Hay A là trung điểm của MN.
Bài 90 . Cho Δ ABC vuông tại A (AB < AC). Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Vẽ MD vuông góc AB tại D; Vẽ ME vuông góc AC tại E.

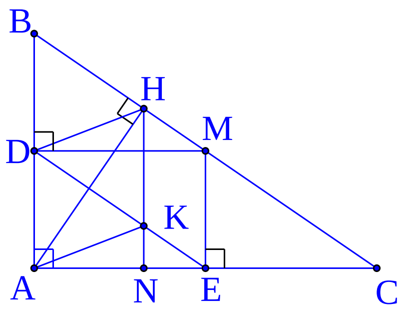
a) Chứng minh rằng tứ giác ADME là hình chữ nhật.

b) Chứng minh CMDE là hình bình hành.

c) Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Tứ giác MHDE là hình gì? Vì sao?

d) Qua A vẽ đường thẳng song song với DH cắt DE tại K, đường thẳng HK cắt AC tại N. Chứng minh rằng $HN^2 = NA.CN$.

Giải:



a) Tứ giác ADME có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^0$ do đó ADME là hình chữ nhật.

b) Ta có MD // AC, ME // AB và M là trung điểm của BC nên D và E lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Vì ADME là hình chữ nhật, ta có MD // EC và MD = AE = EC, do đó CMDE là hình bình hành.

c) Vì AB < AC nên H nằm giữa B và M.

DE là đường trung bình trong tam giác ABC nên DE // BC.

Ta có MH // ED (1).

$ME = AD = \frac{1}{2}AB$ (2).

Trong tam giác ABH vuông tại H có HD là trung tuyến nên $HD = \frac{1}{2}AB$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra MHDE là hình thang cân.

d) DE // BC $\Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{KDA}$ (hai góc so le trong);

BD = DA;

DH // AK $\Rightarrow \widehat{BDH} = \widehat{DAK}$

Từ đó ta có $\Delta HBD = \Delta KDA \Rightarrow DH = AK$, suy ra DHKA là hình bình hành.

Do đó HN // AB $\Rightarrow HN \perp AC$.

Tam giác HAN vuông tại N có: $HN^2 = HA^2 - NA^2$.

Tam giác HCN vuông tại N có: $HN^2 = HC^2 - NC^2$

Suy ra $2HN^2 = \left(HA^2 + HC^2\right) - \left(NA^2 + NC^2\right)$ (4)

Tam giác HAC vuông tại H có: $HA^2 + HC^2 = AC^2$ (5)

$NA^2 + NC^2 = \left(NA + NC\right)^2 - 2NA.NC = AC^2 - 2NA.NC$ (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra $2HN^2 = AC^2 - \left(AC^2 - 2NA.NC\right) = 2NA.NC$

Vậy $HN^2 = NA.NC$.

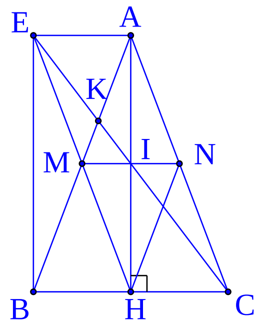
Bài 91. Cho Δ ABC cân tại A, đường cao AH. Gọi M là trung điểm của AB và E là điểm đối xứng của H qua M.

a) Chứng minh AHBE là hình chữ nhật.

b) Chứng minh ACHE là hình bình hành.

c) Gọi N là trung điểm của AC. Chứng minh ba đường thẳng AH, CE, MN đồng qui.

d) CE cắt AB tại K. Chứng minh AB = 3AK.



Giải:

a) Theo giả thiết thì M là trung điểm của AB và HE. Tứ giác AHBE có hai đường chéo AB và HE cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn nên AHBE là hình bình hành.

Mặt khác $\widehat{AHB} = 90^0$ nên AHBE là hình chữ nhật.

b) Vì tam giác ABC cân tại A nên H là trung điểm của BC. Suy ra BH = CH.

Ta có AE // CH và AE = BH = CH nên ACHE là hình bình hành.

c) HN là đường trung bình trong tam giác ABC, ta có HN // AM và HN = AM nên AMHN là hình bình hành.

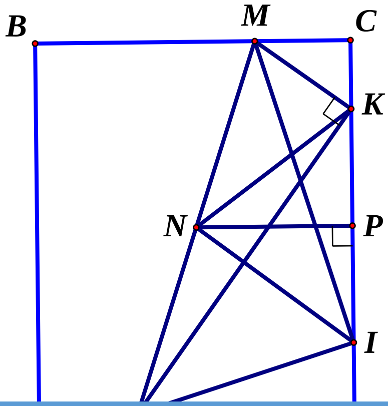
AEHC và AMHN là hai hình bình hành nên AH, CE, MN đồng qui tại trung điểm I của mỗi đoạn.

d) Trong tam giác AEH có AM và EI là hai đường trung tuyến, do đó K là trọng tâm tam giác AEH. Suy ra $AK = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{1}{3}AB$.

Vậy AB = 3AK.

Bài 92*. Cho hình chữ nhật ABCD. Hai điểm I, K trên cạnh CD sao cho DI = CK, E là điểm bất kỳ trên cạnh AD. Đường thẳng vuông góc với EK tại K cắt BC ở M. Tính $\widehat{EIM}$.

Lời giải:

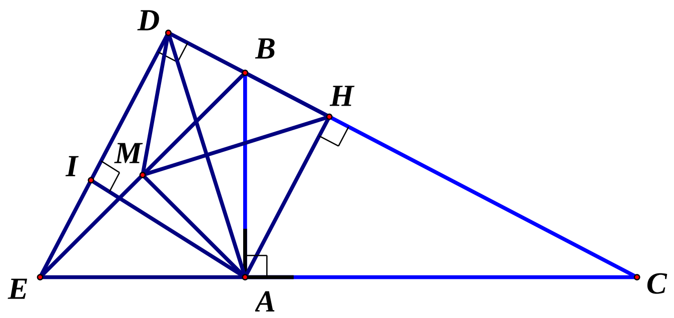


Gọi N, P lần lượt là trung điểm của ME và CD, suy ra NP là đường trung bình trong hình thang vuông CMED. Do đó ta có $NP \perp CD$.
Mặt khác, theo giả thiết DI = CK, suy ra PK = PI.
Trong tam giác NIK có NP là đường cao và trung tuyến, do đó NIK cân tại N.
Khi đó ta có IN = NK = NM = NE.
Tam giác IME có IN là trung tuyến và IN = NM = NE nên tam giác MIE vuông tại I.
Vậy $\widehat{EIM} = 90^0$.

Bài 93*. Cho tam giác ABC vuông tại A (AC > AB), đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm D so cho HD = HA, đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.
a) Chứng minh rằng AE = AB.
b) Gọi M là trung điểm của BE. Tính $\widehat{AHM}$.

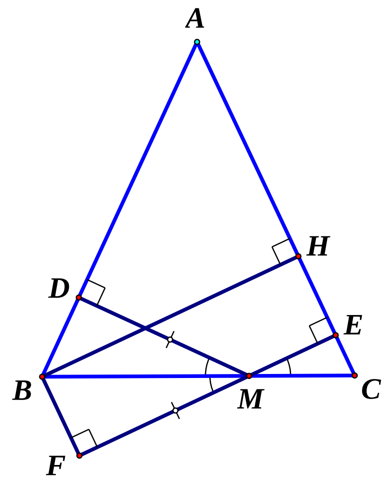
Lời giải:

a) Dựng $AI \perp DE$, I thuộc DE. Ta có AHDI là hình chữ nhật.
Suy ra AI = HD = AH.



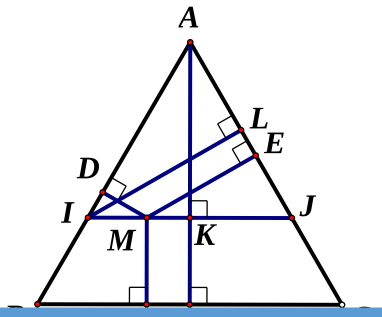
Hai tam giác vuông AIE và AHB có:
$\widehat{EAI} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ với góc $\widehat{IAB}$), AI = AH.
Do đó $\Delta AIE = \Delta AHB$, suy ra AE = AB.
b) Ta có tam giác DBE vuông tại D, tam giác ABE vuông tại A. Vì M là trung điểm của BE nên AM = DM = $\frac{1}{2}$BE. Từ đó dễ dàng thấy được $\Delta AMH = \Delta DMH$ (c-c-c).
suy ra $\widehat{MHA} = \widehat{MHD} = 45^0$.

Bài 94*. Cho ΔABC cân tại A có đường cao BH, M thuộc cạnh BC. Vẽ $MD \perp AB$ tại D và $ME \perp AC$ tại E. Trên tia đối của tia ME lấy điểm F sao cho MF = MD. Chứng minh rằng: MD + ME = BH.



Lời giải:

Ta có:
$$\begin{cases} \widehat{DMB} + \widehat{DBM} = 90^0 \\ \widehat{EMC} + \widehat{ECM} = 90^0 \\ \widehat{DBM} = \widehat{ECM} \end{cases} \Rightarrow \widehat{DMB} = \widehat{EMC} = \widehat{FMB}.$$
Mặt khác, theo giả thiết DM = FM, từ đó ta chứng minh được D và F đối xứng nhau qua BC.
Suy ra $\widehat{BFM} = 90^0$.
MD + ME = MF + ME = EF.
Tứ giác BHEF có $\hat{H} = \hat{E} = \hat{F} = 90^0$, do đó BHEF là hình chữ nhật, suy ra BH = EF.
Vậy ta có MD + ME = BH.



Bài 95*. Cho tam giác ABC đều có đường cao AH, M nằm trong ΔABC (M có thể thuộc các cạnh của tam giác). Vẽ

$MD \perp AB$ tại D, $ME \perp AC$ tại E, $MF \perp BC$ tại F. Chứng minh rằng: MD + ME + MF = AH.

Lời giải:

Đường thẳng qua M, song song với BC, cắt AB, AC, AH lần lượt tại I, J , K. Vì M nằm trong tam giác ABC nên M thuộc đoạn IJ và K thuộc đoạn AH.

Tứ giác MFHK có $\widehat{F} = \widehat{H} = \widehat{K} = 90^0$, suy ra MFHK là hình chữ nhật. Ta có MF = KH.

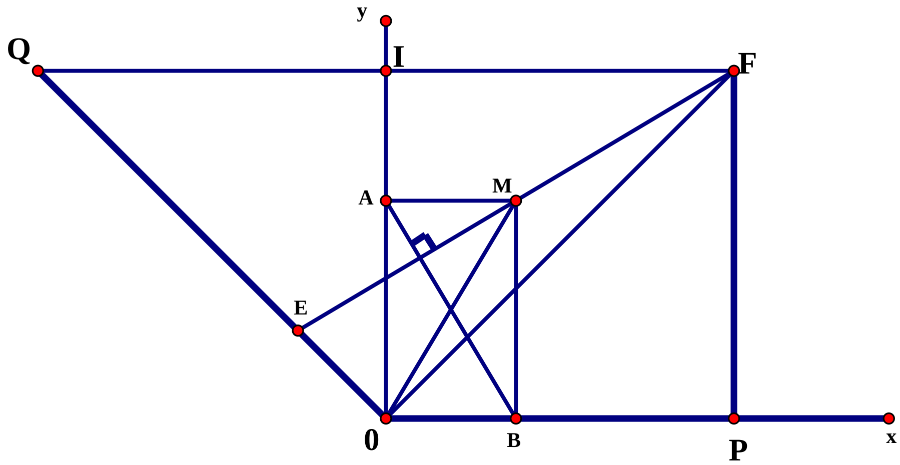
Dễ thấy tam giác AIJ đều. Dựng $IL \perp AJ$, L thuộc AJ, ta có IL = AK.

Theo bài tập 68, MD + ME = IL = AK.

Từ đó: MD + ME + MF = AK + KH = AH.

Bài 96. Cho góc $\widehat{xOy} = 90^0$ và một điểm M nằm trong góc đó. Vẽ MA vuông góc với Ox tại A; MB vuông góc với Oy tại B. trên đường thẳng đi qua M và vuông góc với AB, lấy điểm E và F sao cho ME = MF = AB. Chứng minh Oy là tia phân giác của góc $\widehat{EOF}$.

Giải:



Ta có tứ giác AMBO là hình chữ nhật

Suy ra AB=OM

Xét tam giác EOF ta có

AB=OM=$\frac{1}{2}$EF

Suy ra tam giác EFO là tam giác vuông tại O

Suy ra $\widehat{EOA} + \widehat{AOF} = 90^0$

Mà $\widehat{xOy} = 90^0$ suy ra

$\widehat{AOF} + \widehat{FOX} = 90^0$

Suy ra $\widehat{EOA} = \widehat{FOX}$

Qua F dựng đường thẳng vuông góc với OI cắt OE tại Q

Xét hai tam giác vuông QOI và FOP ta có $\widehat{IOQ} = \widehat{FOP}$ và OI=PF

Suy ra $\Delta QOI = \Delta FOP$

Suy ra OQ=OF $\Rightarrow \Delta QOF$ cân tại O

Mà $OI \perp QF$ $\Rightarrow$ OI là đường cao của tam giác QOF

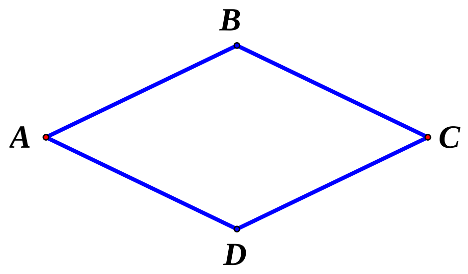
Trong tam giác cân đường cao cũng là đường phân giác

Vậy Oy là tia phân giác của góc $\widehat{EOF}$.

BÀI 11. HÌNH THOI

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:



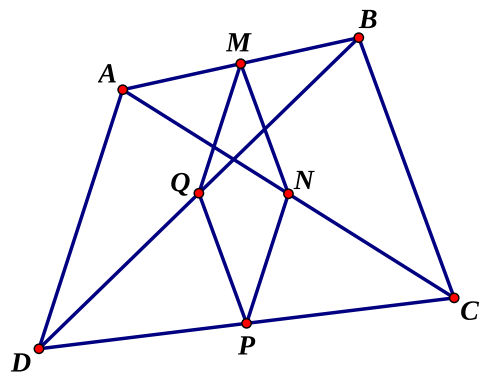
Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
AB = BC = CD = DA ⇔ Tứ giác ABCD là hình thoi.

2. Tính chất:
Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành, ngoài ra còn có:
a) Hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường.
b) Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết hình thoi
a) Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
b) Tứ giác có 2 đường chéo vuông góc nhau tại trung điểm mỗi đường.
c) Hình bình hành có 2 cạnh kề bằng nhau.
d) Hình bình hành có một đường chéo là phân giác một góc.

B. BÀI TẬP

Bài 97. Cho tứ giác ABCD có AD = BC. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình thoi



Lời giải:

Trong tam giác ABD, MQ là đường trung bình nên $MQ = \frac{1}{2}AD$ và MQ // AD (1).

Trong tam giác ACD, NP là đường trung bình nên $NP = \frac{1}{2}AD$ và NP // AD (1).

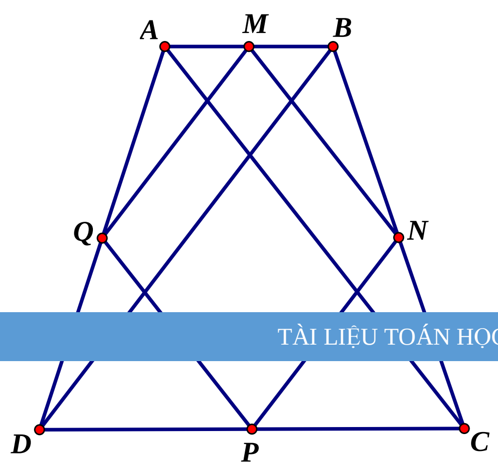
Từ (1) và (2) suy ra MQ = NP và MQ // NP. Do đó MNPQ là hình bình hành.

Lại có: trong tam giác ABC, MN là đường trung bình, ta có $MN = \frac{1}{2}BC$. Theo giả thiết, AD = BC nên $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = MQ$.

Tứ giác MNPQ là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau nên MNPQ là hình thoi.

Bài 98. Cho hình thang cân ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình thoi.

Lời giải:



Trong tam giác ABC, MN là đường trung bình nên ta có $MN = \frac{1}{2}AC$ và MN // AC (1).

Tương tự trong tam giác ACD, $PQ = \frac{1}{2}AC$ và PQ // AC (2)

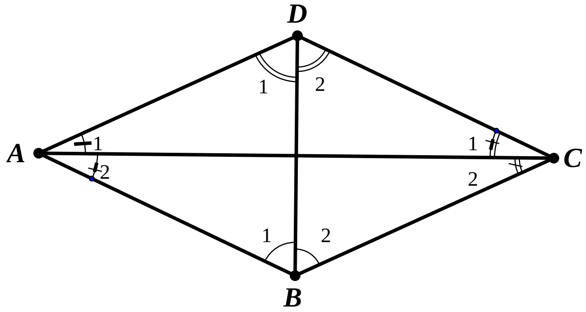
Từ (1) và (2) suy ra MN = PQ và MN // PQ, do vậy MNPQ là hình bình hành (3).

Lại xét tam giác ABD, MQ là đường trung bình, suy ra $MQ = \frac{1}{2}BD$.

Vì ABCD là hình thang cân nên AC = BD, từ đó suy ra MN = MQ (2).
Từ (1) và (2) suy ra MNPQ là thoi.

Bài 99. Cho tứ giác ABCD. Biết AC là đường phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$; BD là đường phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{D}$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình thoi.

Lời giải:



Ta có: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^0$.

Từ giả thuyết suy ra: $\widehat{A_1}+\widehat{B_1}+\widehat{C_1}+\widehat{D_1}=180^0$ (1) và

Mặt khác trong tam giác ACD, ta có:

$\widehat{A_1}+\widehat{C_1}+\widehat{D_1}+\widehat{D_2}=180^0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{B_1}=\widehat{D_2} \Rightarrow$ AB // CD (so le trong)

$\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$, $\widehat{D_1}=\widehat{D_2}$ suy ra $\widehat{B_2}=\widehat{D_1} \Rightarrow$ AD // BC (so le trong)

Suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành

ABCD có đường chéo là phân giác một góc nên ABCD là hình thoi.

Bài 100. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ AE $\perp$ BC tại E, DF $\perp$ AB tại F. Biết AE = DF. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình thoi.

Lời giải:

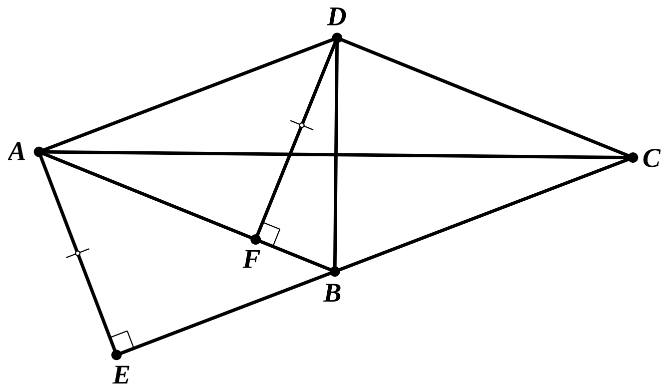
Xét hai tam giác EAB và FDA có:

$\hat{E} = \hat{F} = 90^0$, EA = FD (theo giả thiết),

$\widehat{EBA} = \widehat{FAD}$ (so le trong)

Do đó hai tam giác EAB và FDA bằng nhau, suy ra AB = DA.

ABCD là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau nên ABCD là hình thoi.



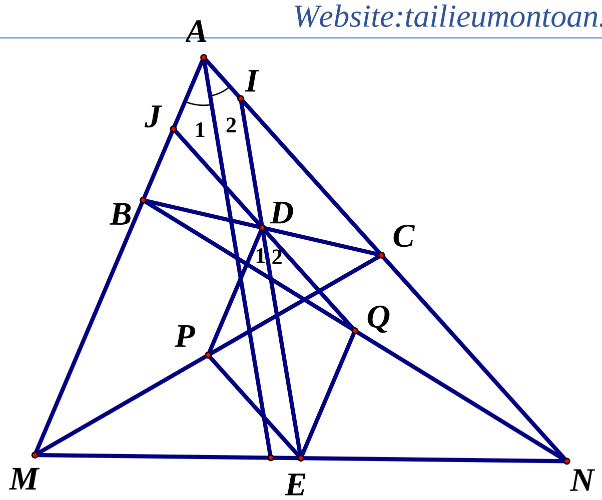
Bài 101. Cho tam giác ABC (AB < AC). Trên tia đối của tia BA lấy điểm M, trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho BM = CN. Gọi D, E, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, MN, MC, NB.

a) DQ cắt AM tại J. Chứng minh rằng $\widehat{PEQ} = \widehat{MJQ}$

b) DE cắt AN tại I. Chứng minh rằng DE song song với đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$

Lời giải:

a) Tam giác BNM có QE là đường trung bình nên ta có: QE // BM .
Tương tự DP // BM, QD // CN, PE //CN.
Từ đó QE // DP và PE // DQ, suy ra DPEQ là hình bình hành.



$\Rightarrow \widehat{PEQ} = \widehat{PDQ}$.

Mặt khác $\widehat{PDQ} = \widehat{MJQ}$ (so le trong)

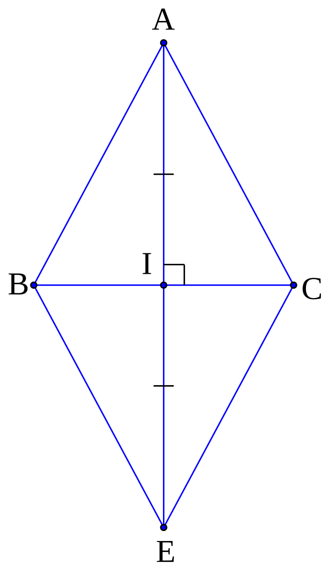
Vậy $\widehat{PEQ} = \widehat{MJQ}$.

b) Gọi Ax là đường phân giác góc $\widehat{BAC}$.

Ta có: $DP = \frac{1}{2}BM$ và $PE = \frac{1}{2}CN$.

Theo giả thiết, BM = CN $\Rightarrow$ DP = PE. Do đó DPEQ là hình thoi, suy ra DE là tia phân giác góc $\widehat{PDQ}$ đồng thời $\widehat{PDQ}$ = $\widehat{PEQ} = \widehat{MJQ} = \widehat{BAC}$ (góc đồng vị).

Từ đó suy ra $\widehat{A_2} = \widehat{D_2} = \widehat{DIC}$ (góc đồng vị) $\Rightarrow$ DE // Ax (hai góc đồng vị bằng nhau).



Bài 102. Cho tam giác ABC (AB = AC). Gọi E là điểm đối xứng với A qua cạnh BC. Chứng minh rằng ABEC là hình thoi.

Giải:

Gọi I là trung điểm của AE, thì I thuộc BC và $AI \perp BC$.

Theo giả thiết, tam giác ABC cân tại A nên I là trung điểm của BC.

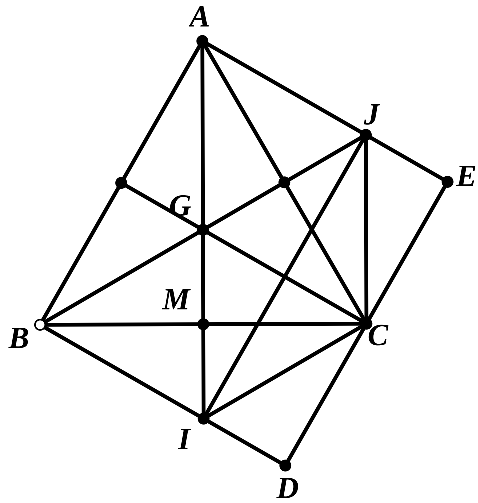
Tứ giác ABEC có hai đường chéo AI và BC vuông góc nhau tại trung điểm của mỗi đoạn nên tứ giác ABEC là hình thoi.

Bài 89. Cho tam giác ABC đều có trọng tâm G. Vẽ hình chữ nhật ABDE sao cho C thuộc đoạn thẳng DE. Tia AG cắt BD tại I, tia AE cắt BG tại J. Chứng minh rằng:

a) I và J đối xứng nhau qua CG

b) Các tứ giác CGBI, GICJ, CJAG là hình thoi.

Lời giải:



a) Dễ thấy hai tam giác ABJ là BAI bằng nhau (g-c-g), nên AI = BJ.

Do đó ABIJ là hình thang cân có hai đáy AJ và BI.

Vì hình thang cân ABIJ có một góc vuông nên suy ra ABIJ là hình chữ nhật, tâm G. Mặt khác, $GC \perp AB$ nên GC là đường trung trực cạnh IJ. Vậy IJ đối xứng nhau qua đường thẳng CG.

b) Ta có $\widehat{ABI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{GBC} = \widehat{IBC} = 30^0$.

Gọi M là trung điểm của BC, trong tam giác BGI, BM là đường cao và là đường phân giác nên M là trung điểm của GI.

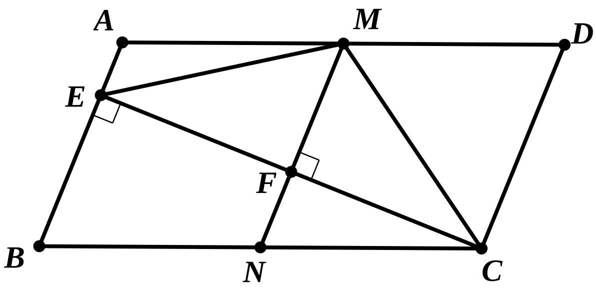
Tứ giác CGBI có hai đường chéo BC và GI vuông góc nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, do đó CGBI là hình thoi.

Chứng minh tương tự như trên, ta có CGAI là hình thoi.
Vì I, J đối xứng nhau qua đường thẳng CG nên CI = CJ và GI = GJ (1).
Dễ thấy tam giác BGI là tam giác đều, suy ra CI = BG = GI (2).
(1) và (2) suy ra tứ giác GICJ có bốn cạnh bằng nhau, vậy GICJ là hình thoi.

Bài 103. Cho hình bình hành ABCD có AD = 2AB. Gọi M là trung điểm của AD, CE $\perp$ AB tại E, MF $\perp$ CE tại F, MF cắt BC tại N. Chứng minh rằng
a) MNCD là hình thoi
b) Tam giác EMC cân
c) $\widehat{BAD} = 2\widehat{AEM}$

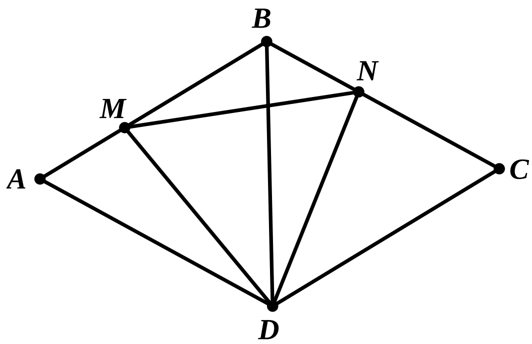
Lời giải:

a) MF $\perp$CE, AE $\perp$ CE do đó MN // // AE // CD (1)
Lại có MD // NC và MD $=\dfrac{1}{2}$ AD= CD (2)



Từ (1) và (2) suy ra MNCD là hình thoi.
b) Ta có ADCE là hình thang với hai đáy AE và CD.
Vì M là trung điểm AD nên MF là đường trung bình của hình thang ADCE, suy ra F là trung điểm của CE.
Tam giác EMC có MF là đường cao và là trung tuyến nên EHC cân tại M.
c) MNCD là hình thoi nên $\widehat{NMD} = 2\widehat{NMC}$
Ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{NMD} = 2\widehat{NMC} = 2\widehat{EMF}$ (1).
Lại có $\widehat{AEM} = \widehat{EMF}$ (2) (vì cùng phụ với góc $\widehat{MEF}$).
(1) và (2) suy ra $\widehat{BAD} = 2\widehat{AEM}$.

Bài 104. Cho hình thoi ABCD cạnh a có $\widehat{A} = 60^o$.
Đường thẳng d cắt 2 cạnh AB, BC lần lượt tại M, N sao cho MB + NB = CD. Chứng minh rằng tam giác DMN đều.



Lời giải:

Theo đề: MB + NB = CD = AB suy ra MA = NB.
Góc $\widehat{A} = 60^0$ suy ra góc $\widehat{ABC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{NBD} = 60^0$
Tam giác ABD đều nên AD = BD
Xét hai tam giác MAD và NBD, có:
MA = NB, $\widehat{MAD} = \widehat{NBD} = 60^0$, AD = BD
Do đó $\Delta MAD = \Delta NBD$ (c-g-c).
Từ đó: MD = ND và $\widehat{ADM} = \widehat{BDN}$.
$\widehat{MDN} = \widehat{MDB} + \widehat{BDN} = \widehat{MDB} + \widehat{ADM} = \widehat{ADB} = 60^0$ (Vì tam giác ABD đều)
Tam giác MND có MD = ND và góc $\widehat{D}$ bằng 60^0. Vậy tam giác MND đều.

Bài 105. Cho tam giác ABC cân tại A có BC = 6cm. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.

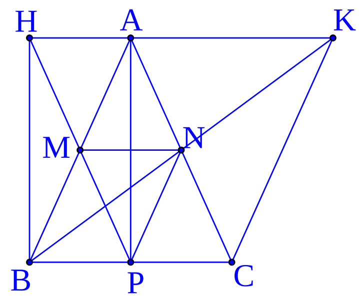
a) Tính độ dài MN? Chứng minh MBNC là hình thang cân.

b) Gọi K là điểm đối xứng của B qua N. Chứng minh tứ giác ABCK là hình bình hành.

c) Gọi H là điểm đối xứng của P qua M. Chứng minh AHBP là hình chữ nhật.

d) Chứng minh AMPN là hình thoi.

Giải:



a) MN là đường trung bình trong tam giác ABC. Ta có MN // BC và MN = $\frac{1}{2}$BC.

Từ đó ta có MN = 3cm và BMNC là hình thang.

Ta giác ABC cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Ta được BMNC là hình thang cân.

b) Theo đề thì N là trung điểm của AC và BK. Tứ giác ABCK có hai đường chéo AC và BK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn nên ABCK là hình bình hành.

c) M là trung điểm của AB và HP nên AHBP là hình bình hành.

Lại có tam giác ABC cân tại A và P là trung điểm của BC nên AP$\perp$BC.

Hình bình hành AHBP có một góc vuông nên AHBP là hình chữ nhật.

d) MP là đường trung bình trong tam giác ABC nên MP // AC và MP = $\frac{1}{2}$AC. Suy ra MP = AN và MP // AN. Như vậy AMPN là hình bình hành.

Mặt khác, AM = $\frac{1}{2}$AB, AN = $\frac{1}{2}$AC và AB = AC nên AM = AN.

Hình bình hành AMPN có hai cạnh kề AM và AN bằng nhau nên AMPN là hình thoi.

Bài 106. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC.

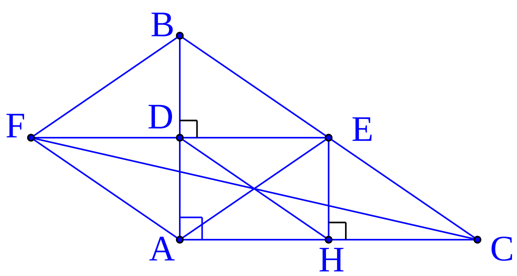
a) Chứng minh tứ giác ACED là hình thang vuông.

b) Gọi F là điểm đối xứng của E qua D. Chứng minh ACEF là hình bình hành.

c) Chứng minh AEBF là hình thoi.

d) Gọi H là hình chiếu của điểm E trên AC. Chứng minh ba đường thẳng AE, CF, DH đồng qui.

Giải:



a) DE là đường trung bình trong tam giác ABC nên DE // AC, do đó tứ giác ACED là hình thang. Mặt khác tứ giác ACED có $\widehat{A} = 90^0$ nên ACED là hình thang vuông.

b) Ta có EF // AC (1).

F là điểm đối xứng của E qua D lên D là trung điểm của EF, do đó EF = 2ED.

Mặt khác, theo trên thì ED = $\frac{1}{2}$AC. Do đó ta có EF = AC (2).

(1) và (2) suy ra ACEF là hình bình hành.

c) Theo giả thiết thì D là trung điểm của AB và EF. Tứ giác AEBF có hai đường chéo AB và EF vuông góc nhau tại trung điểm của mỗi đoạn, nên AEBF là hình thoi.

d) Theo trên, ACEF là hình bình hành nên AE cắt CF tại trung điểm mỗi đoạn.

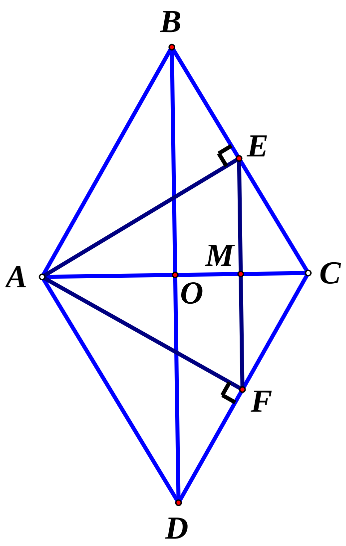
Tứ giác ADEH có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = 90^0$ nên ADEH là hình chữ nhật, do đó AE và DH cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Từ đó ta có AE, CF, DH đồng qui tại trung điểm của mỗi đoạn.

Bài 107. Cho hình thoi ABCD, 2 đường chéo cắt nhau tại O. Vẽ AE vuông góc BC tại E, AF vuông góc CD tại F. Biết EF = $\frac{1}{2}$BD

a) Chứng minh rằng EF là đường trung bình của tam giác BCD

b) Tính các góc của hình thoi ABCD.



Lời giải:

a) Ta có hai tam giác ABC và ADC bằng nhau và AE, AF lần lượt là đường cao, do đó AE = AF.

Gọi M là giao điểm của EF và AC. Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BAE} + \widehat{ABE} = 90^0 \\ \widehat{DAF} + \widehat{ADF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{DAF} \\ \widehat{ABE} = \widehat{ADF} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\widehat{EAM} = \widehat{FAM}$. Tam giác cân AEF có AM là đường phân giác nên AM là đường cao. Vậy EF // BD.

Mặt khác, EF = $\frac{1}{2}$BD = DO, suy ra EFDO là hình bình hành

$\Rightarrow$ OE // DF // AB $\Rightarrow$ E là trung điểm của BC. Vậy EF là đường trung bình trong tam giác BCD.

b) E là trung điểm của BC nên tam giác ABC cân tại A.

Vì ABCD là hình thoi nên suy ra tam giác ABC đều, từ đó ta được góc $\widehat{B} = 60^0$.

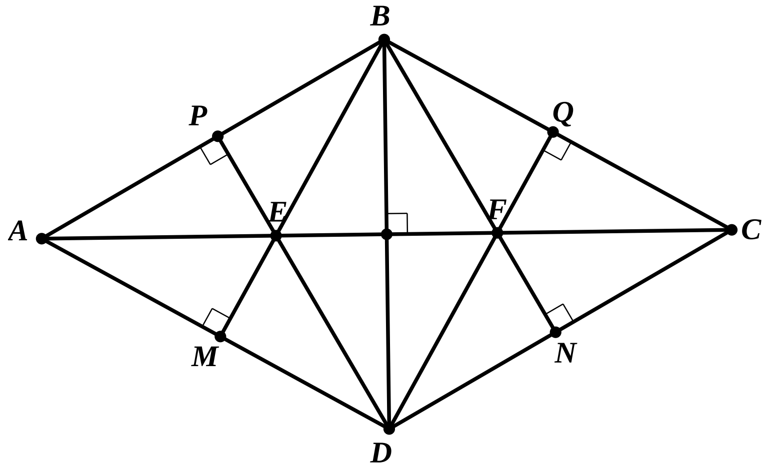
Vậy ta có: $\widehat{A} = \widehat{C} = 120^0$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 60^0$.

Bài 108. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{B} > 90^o$. Vẽ BM vuông góc AD tại M, BN vuông góc CD tại N, DP vuông góc AB tại P, DQ vuông góc BC tại Q; BM cắt DP tại E, BN cắt DQ tại F. Chứng minh rằng BFDE là hình thoi.

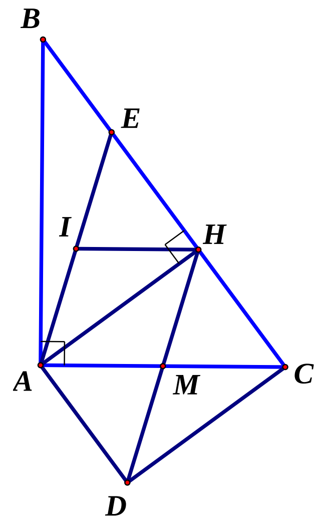
Lời giải:

Theo giả thiết: BF $\perp$ CD, DE $\perp$ AB, vì AB // CD nên BF // DE.

Chứng minh tương tự ta có BE // DF. Do đó tứ giác BFED là hình bình hành.
Ta chứng minh $EF \perp BD$. Thật vậy,
Trong tam giác ABD, BE và DE là đường cao nên AE cũng là đường cao,
suy ra $AE \perp BD$.
Tương tự, $CE \perp BD$.
Vì $AC \perp BD$ suy ra bốn điểm A, C, E, F thẳng hàng và $EF \perp BC$.
Tứ giác BFDE là hình bình hành và có hai đường chéo vuông góc, suy ra BFDE là hình thoi.



Bài 109 . Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC). Kẻ đường cao AH ($H \in BC$), gọi M là trung điểm của AC. Lấy điểm D đối xứng với H qua M.
a) Chứng minh tứ giác ADCH là hình chữ nhật.
b) Trên tia đối của tia HC lấy điểm E sao cho HE = HC. Chứng minh ADHE là hình bình hành.
c) Gọi I là trung điểm của AE. Chứng minh AIHM là hình thoi.

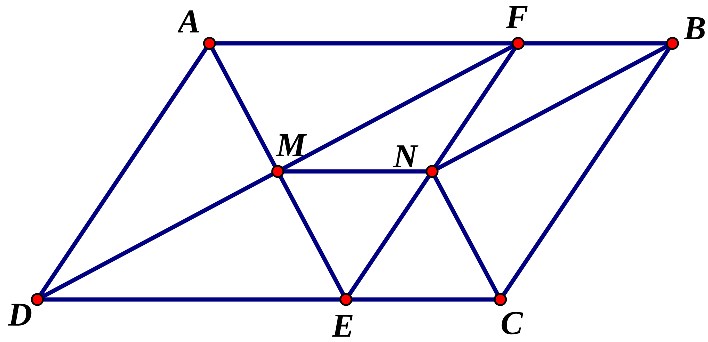


Giải:

a) Ta có M là trung điểm của AC và HD.
Tứ giác ADCH có hai đường chéo AC và HD cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đoạn nên ADCH là hình bình hành.
Lại có $\widehat{AHC} = 90^0$ nên ADCH là hình chữ nhật.
b) Theo trên ta suy ra AD // BC hay AD // HE, và AD = HC = HE.
Từ đó suy ra ADHE là hình bình hành.
c) Theo giả thiết thì H, I lần lượt là trung điểm của EC và EA.
Trong Δ EAC có HI là đường trung bình nên HI // AC và HI = $\frac{1}{2}$AC.
Suy ra HI // AM và HI = AM. Do vậy AIHM là hình bình hành.
Mặt khác, vì ADCH là hình chữ nhật có tâm M nên MA = MH.
Hình bình hành AIHM có hai cạnh kề bằng nhau nên AIHM là hình thoi.

Bài 110. Cho hình bình hành ABCD, AB = $\frac{3}{2}$AD. Đường phân giác góc $\widehat{A}$ cắt CD tại E, đường phân giác góc $\widehat{D}$ cắt AB tại F; hai đường phân giác đó cắt nhau tại M.
a) Chứng minh rằng ADEF là hình thoi.
b) Gọi N là giao điểm của phân giác góc $\widehat{ABC}$ và phân giác góc $\widehat{BCD}$. Chứng minh rằng N là trung điểm của EF.
c) Giả sử $\widehat{A} = 120^0$. Chứng minh rằng lúc này, tứ giác MNCE là hình thoi.

Lời giải:



a)

$$\widehat{MAD}+\widehat{MDA}=\frac{1}{2}\left(\widehat{FAD}+\widehat{EDA}\right) = 90^0$$

$\Rightarrow AM \perp DF$. Từ đó ta được tam giác ADF cân tại A, suy ra M là trung điểm của DF.

Chứng minh tương tự, M là trung điểm của AE.

Tứ giác ADEF có hai đường chéo vuông góc nhau tại trung điểm mỗi đường, do vậy ADEF là hình thoi.

b) Dễ dàng chứng minh $\widehat{BNC}=90^0$.

EF // AD // BC $\Rightarrow \widehat{AFE}=\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{MFE}=\widehat{NBC}$.

Lại có EF // BC. Từ đó ta có hai tam giác vuông MEF và NCB bằng nhau.

$\Rightarrow$ MF = NB. Mặt khác $\widehat{AFD}=\widehat{ABN} \Rightarrow$ MF // BN.

Vậy MFBN là hình bình hành. Suy ra MN // BF // DE.

Vì M là trung điểm của DF nên N là trung điểm của EF.

c) Theo chứng minh trên ta có ME = NC. Dễ dàng chứng minh ME // NC. Do đó MNCE là hình bình hành.

$\widehat{MEN}=\widehat{DAM}=60^0$; $\widehat{NEC}=\widehat{ADE}=60^0 \Rightarrow$ EN là phân giác của góc $\widehat{MEC}$.

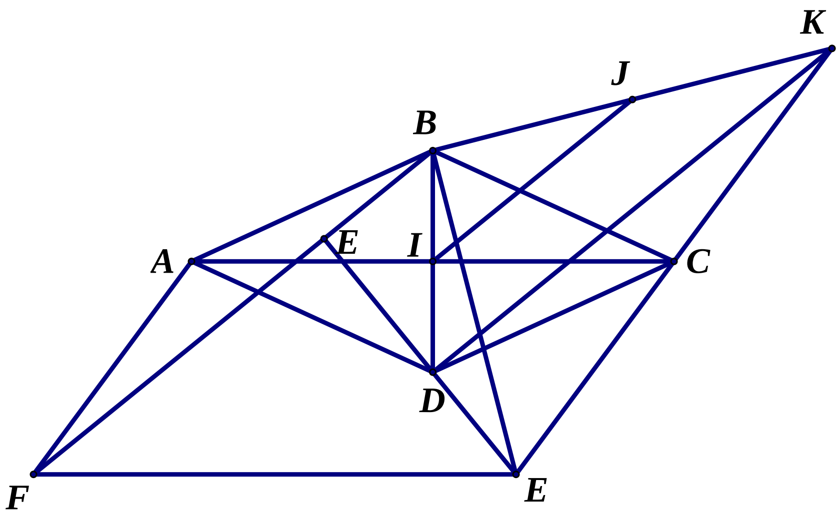
Tứ giác MNCE là hình bình hành có đường chéo là đường phân giác của một góc nên MNCE là hình thoi.

Bài 111. Cho hình thoi ABCD. Vẽ hình bình hành ACEF có CE = AD. Gọi K là điểm đối xứng của E qua C (K không trùng với D). Chứng minh rằng:

a) FK, BD, AC cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

b) * Một trong bốn điểm B, D, E, F là trực tâm của tam giác có ba đỉnh là ba điểm còn lại.

Lời giải:



a) Gọi I là giao điểm của AC và BD, suy ra I là trung điểm của AC và BC.

Ta có AF // CE // CK và AF = CE = CK nên AFCK là hình bình hành. Do đó trung điểm I của AC cũng là trung điểm của KF.

Vậy ba đường đoạn thẳng FK, BD, AC đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.

b) Giả sử E, F nằm cùng phía với D so với đường thẳng AC.

Ta chứng minh D là trực tam tam giác BEF.

Vì BD $\perp$ AC và EF // AC nên BD $\perp$ EF (1).

Gọi J là trung điểm của BK. IJ là đường trung bình trong tam giác BFK nên IJ // BF.

Mặt khác IJ là đường trung bình trong tam giác BDK nên IJ // DK.

Như vậy DK // BF (a).
Trong tam giác DKE, có DC là trung tuyến, đồng thời DC = CE = CK nên tam giác DKE vuông tại D, suy ra DE $\perp$DK(b)
(a) và (b) suy ra ED$\perp$BF (2).
(1) và (2) suy ra D là trực tâm tam giác BEF.
Trường hợp nằm khác phía so với đường thẳng AC, ta chúng minh được B là trực tâm tam giác DEF.
Bài 112. Cho Δ ABC cân tại A, AH là đường cao. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và AC. Biết AH = 16cm và BC = 12cm.

a) Tính diện tích tam giác ABC và độ dài cạnh MN.

b) Gọi E là điểm đối xứng của H qua M. Chứng minh tứ giác AHBE là hình chữ nhật.

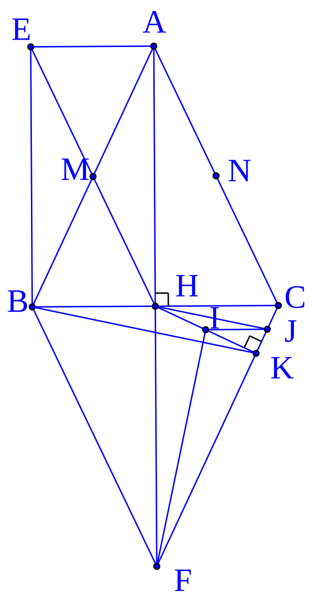
c) Gọi F là điểm đối xứng của A qua H. Chứng minh tứ giác ABFC là hình thoi.

d) Gọi K là hình chiếu của H lên cạnh FC. Gọi I là trung điểm của HK. Chứng minh BK vuông góc IF.

Giải:

a) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{1}{2}16.\ 12 = 96\ (cm^2)$.

b) Theo giả thiết, M là trung điểm của AB và HE, do đó tứ giác AHBE là hình bình hành (vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).



Lại có AH$\perp$BC. Hình bình hành AHBE có một góc vuông nên AHBE là hình chữ nhật.

c) Vì Δ ABC cân tại A nên H là trung điểm của BC, và H là trung điểm của AF.

Tứ giác ABFC có hai đường chéo BC và AF vuông góc nhau tại trung điểm của mỗi đoạn nên ABFC là hình thoi.

d) Gọi J là trung điểm của CK, tam giác CHK có IJ là đường trung bình nên IJ // CH, do đó IJ$\perp$FH.

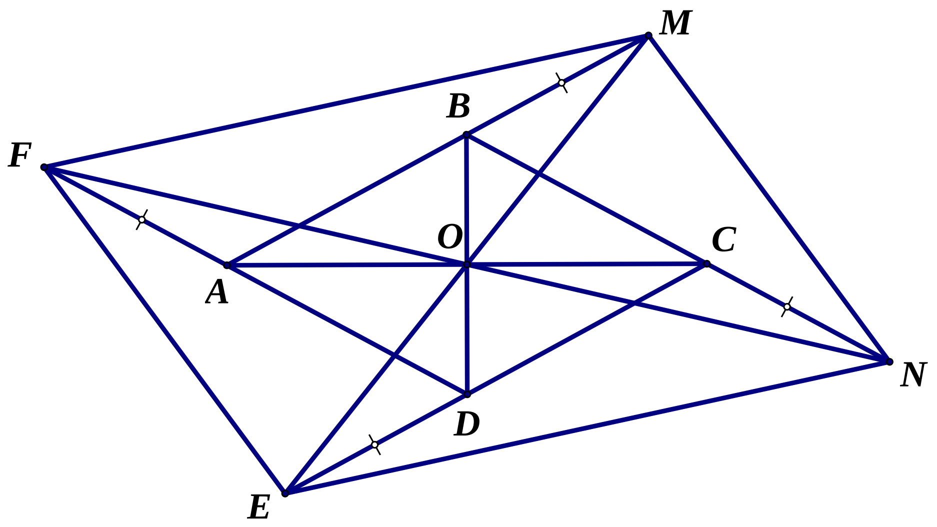
Trong tam giác HFJ, HI và JI là hai đường cao nên I là trực tâm của ΔHFJ, suy ra FI$\perp$HJ (1).

Xét tam giác BCK, HJ là đường trung bình nên HJ // BK (2).

Từ (1) và (2) suy ra FI$\perp$BK.

Bài 113. Cho hình thoi ABCD. Trên các tía đối của tia BA, CB, DC, AD lấy các điểm M, N, E, F sao cho BM = CN = DE = AF. Chứng minh rằng:
a) $\Delta FAM = \Delta NCE$.
b) MNEF là hình bình hành.
c) AC, BD, ME, NF đồng quy.

Lời giải:



a) $\widehat{FAM}+\widehat{BAD}=180^0$, $\widehat{NCE}+\widehat{DCB}=180^0$. Mặt khác $\widehat{BAD}=\widehat{DCB}$ nên $\widehat{FAM}=\widehat{NCE}$

Lại có: FA = NC và MA = MB + BA = ED + DC = EC.

Do đó $\Delta FAM=\Delta NCE$ (c-g-c).

b) Theo trên ta có FM = NE (1).

Chứng minh tương tự câu a, hai tam giác MBN và EDF bằng nhau. Suy ra MN = EF(2).

(1), (2) suy ra MNEF là hình bình hành.

c) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có O là trung điểm của AC và BD.

ED // MB và ED = MB nên MBED là hình bình hành, suy ra O là trung điểm của ME.

Chứng minh tương tự, NCFA là hình bình hành, do đó O cũng là trung điểm của NF.

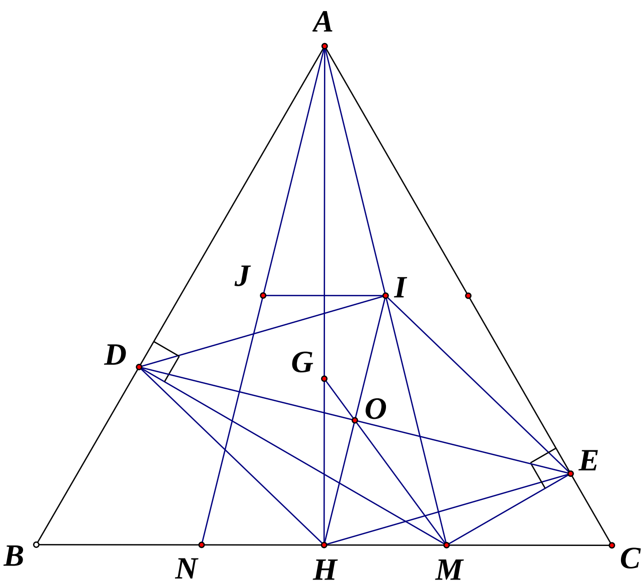
Vậy bốn đoạn thẳng AC, BD, ME, NF đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.

Bài 114*. Cho Δ ABC đều có G là trọng tâm, đường cao AH. Lấy điểm M bất kì trên cạnh BC, I là trung điểm của AM. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB và AC.

a) Tứ giác DIEH là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng IH, DE, MG đồng quy.

Lời giải:



a) Giả sử M nằm giữa C và H.

Tam giác AHM vuông tại H, HI là trung tuyến nên HI = IM = IA.

Tam giác AME vuông tại E có EI là trung tuyến nên EI = IM = IA.

$\Rightarrow$ HI = EI (a).

Tam giác AHI cân tại I nên: $\widehat{AHI}=\widehat{HAI}$

$\widehat{HIM}=\widehat{AHI}+\widehat{HAI}=2\widehat{HAM}$.

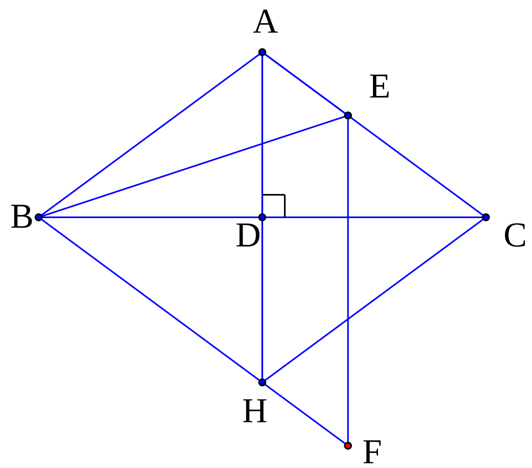
Tương tự ta có $\widehat{EIM}=2\widehat{CAM}$

Suy ra:

$\widehat{HIE}=\widehat{HIM}+\widehat{EIM}=2\left(\widehat{HAM}+\widehat{CAM}\right)=60^0$ (b)

(a), (b) suy ra tam giác IEH đều (1).
Tam giác DMA vuông tại D, có DI là trung tuyến nên DI = IA = IM = IH (c).
Tương tự như trên ta cũng có $\widehat{DIM} = 2\widehat{DAM}$
$\widehat{DIH} = \widehat{DIM} - \widehat{HIM} = 2\left(\widehat{DAM} - \widehat{HAM}\right) = 2\widehat{DAH} = 60^0$ (d).
(c), (d) suy ra ta giác DIH đều (2).
(1), (2) suy ra tứ giác DIEH là hình thoi.
b) Gọi N là điểm đối xứng của M qua H và J là trung điểm của AN.
Trong tam giác AMN, IJ là đường trung bình, nên IJ // MH và IJ = MH. Từ đó suy ra IJHM là hình bình hành.
Gọi O là trung điểm của IH thì O cũng là trung điểm của JM.
Mặt khác, H là trung điểm của MN và AG = $\frac{2}{3}$AM nên G là trọng tâm tam giác AMN. Do đó M, J, G thẳng hàng.
Vì DIEH là hình thoi nên O cũng là trng điểm của DE.
Vậy ba đường thẳng DE, IH, MG đồng quy tại O.
Bài 115*.Cho ΔABC cân tại A có hai đường trung phân giác AD và BE thỏa mãn BE = 2. AD. Tính $\widehat{BAC}$.

Giải:



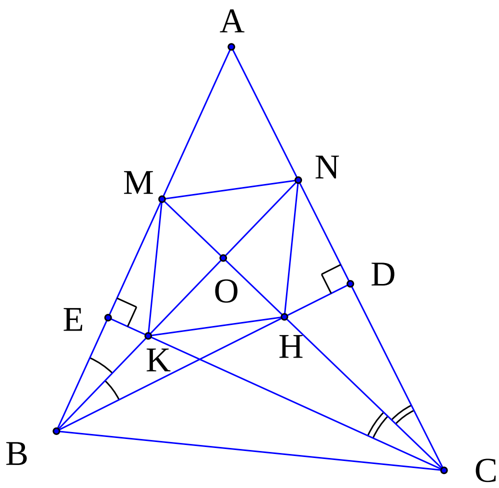
Ta có D là trung điểm của BC và AD ⊥ BC
Gọi H là điểm đối xứng của A qua D, dễ dàng chứng minh được ABHC là hình thoi.
Dựng hình bình hành EAHF.
HF // AE, BH // AC ⇒ B, H, F thẳng hàng.
Đồng thời ta có EF = AH = 2AD = BE.
Suy ra tam giác BEF cân tại E $\Rightarrow \widehat{EFB} = \widehat{EBF}$
Vì ABHC là hình thoi nên $\widehat{HBC} = \widehat{ABC}$.
Ta có: $\widehat{EAD} = \widehat{EFH} = \widehat{EBH} = \widehat{EBC} + \widehat{HBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \widehat{ABC} = \frac{3}{2}\widehat{ABC}$
Suy ra $\widehat{CAB} = 3\widehat{ABC} = 3\widehat{ACB}$.
Lại có: $\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^0 \Rightarrow \widehat{CAB} + \frac{1}{3}\widehat{CAB} + \frac{1}{3}\widehat{CAB} = 180^0$
$$\Rightarrow \frac{5}{3}\widehat{CAB} = 180^0 \Rightarrow \widehat{CAB} = 108^0.$$
Bài 116*. Cho Δ ABC nhọn, các đường cao BD, CE. Tia phân giác của góc ABD và ACE cắt nhau tại O, cắt AC và AB lần lượt tại N và M. Tia BN cắt CE tại K, tia CM cắt BD tại H. Chứng minh MNHK là hình thoi.

Giải:

Ta có $\widehat{ABD}+\widehat{BAC}=90^0$ và $\widehat{ACE}+\widehat{BAC}=90^0$.

Suy ra $\frac{1}{2}\left(\widehat{ABD}+\widehat{BAC}\right)+\frac{1}{2}\left(\widehat{ACE}+\widehat{BAC}\right)=90^0$

$\Rightarrow \widehat{ABN}+\widehat{BAC}+\widehat{ACM}=90^0$ (1)



Xét tam giác ABN có $\widehat{ABN}+\widehat{BAC}=\widehat{BNC}$ (góc ngoài của tam giác) (2).

(1), (2) suy ra $\widehat{NCO}+\widehat{CNO}=90^0$

Do đó $CO \perp NK$.

Lại có CO là phân giác góc NCK từ đó ta có O là trung điểm NK.

Chứng minh tương tự, O là trung điểm của MH.

Tứ giác MNHK có hai đường chéo vuông góc nhau tại trung điểm mỗi đường nên MNHK là hình thoi.

BÀI 12. HÌNH VUÔNG

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Hình vuông là tứ giác có 4 cạnh bằng nhau và 4 góc bằng nhau.

Như vậy, hình vuông vừa là hình thoi, vừa là hình chữ nhật.

$$\left.\begin{array}{l} AB = BC = CD = DA \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{Tứ giác ABCD là hình vuông.}$$

2. Tính chất: Hình vuông có tất cả tính chất của hình thoi và hình chữ nhật.

3. Dấu hiệu nhật biết hình vuông:

a) Hình chữ nhật có 2 cạnh kề bằng nhau.

b) Hình chữ nhật có 2 đường chéo vuông góc nhau.

c) Hình chữ nhật có 1 đường chéo là phân giác một góc của nó

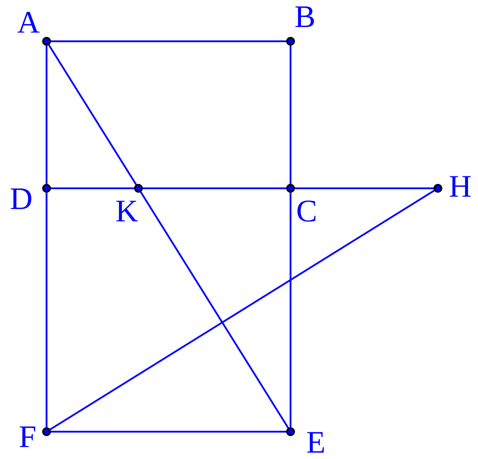
d) Hình thoi có 1 góc vuông

e) Hình thoi có 2 đường chéo bằng nhau.

B. BÀI TẬP

4) Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia CB và DA lấy lần lượt hai điểm E và F sao cho CE = DF = CD. Trên tia đối của tia CD lấy điểm H sao cho CH = CB. Chứng minh AE vuông góc với FH.

Giải:



Tứ giác CDFE có DF = CE = CD, DF // CE, $\widehat{D} = 90^0$ nên CDFE là hình vuông.

Ta có: $AF = HD$, $\widehat{HDF} = \widehat{AFE} = 90^0$, $FE = DF$.

Do vậy $\Delta AFE = \Delta HDF \Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{FHD}$.

Gọi K là giao điểm của AE và CD.

$\widehat{AKD} = \widehat{HKE}$, $\widehat{AKD} + \widehat{FAE} = 90^0$

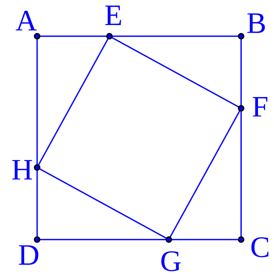
$\Rightarrow \widehat{HKE} + \widehat{FAE} = 90^0$

Mà $\widehat{EAF} = \widehat{FHD}$ nên $\widehat{HKE} + \widehat{FHD} = 90^0$.

Vậy AE vuông góc HF.

Bài 117 . Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB, BC, CD, DA, lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho AE = BF = CG = DH. Chứng minh EFGH là hình vuông.

Giải:



Dễ thấy AH = BE = CF = DG. Từ đó suy ra:

$\Delta AEH = \Delta BFE = \Delta CGF = \Delta DHG$ (c-g-c).

Do đó EH = FE = GF = HG (1).

Mặt khác, vì $\Delta AEH = \Delta BFE \Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{AHE}$

Suy ra $\widehat{AEH}+\widehat{BEF}=90^0 \Rightarrow \widehat{FEH}=90^0$ (2).

(1), (2) suy ra EFGH là hình vuông.

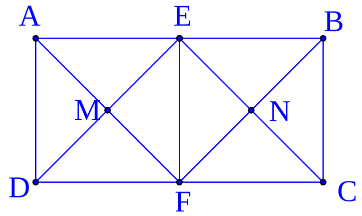
Bài 118. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

a) Tứ giác ADFE là hình gì? Vì sao?

b) Tứ giác EMFN là hình gì? Vì sao?

Giải:

a) E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD nên ta có EF // AD // BC, do đó dễ thấy ADFE là hình chữ nhật.



Mặt khác $AD = AE = \frac{1}{2}AB$. Vậy ADFE là hình vuông.

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có BCFE cũng là hình vuông. Do đó hai tam giác MEF và NEF là hai tam giác vuông cân tại M, N. từ đó suy ra EMFN là hình vuông.

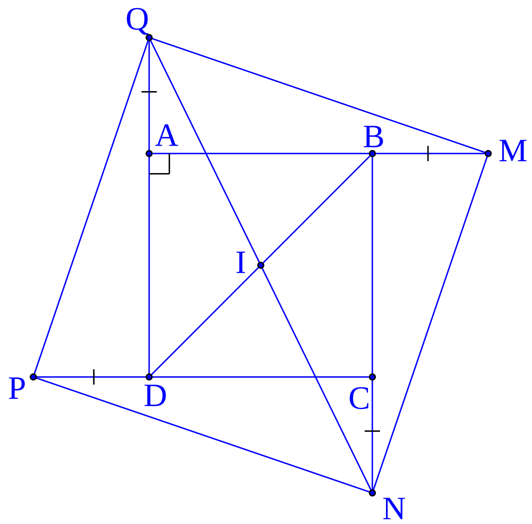
Bài 119. Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA ta lấy một điểm M, trên tia đối của tia CB ta lấy điểm N, trên tia đối của tia DC ta lấy một điểm P và trên tia đối của tia AD ta lấy điểm Q sao cho AQ = BM = CN = DP. Chứng minh:

a) Các tam giác vuông AQM, BMN, CNP, DPQ bằng nhau.

b) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình vuông.

c) Hai hình vuông MNPQ là ABCD có chung một tâm đối xứng.

Giải:



a) Dễ thấy AM = BN = CP = DQ, do đó các tam giác vuông AQM, BMN, CNP, DPQ bằng nhau (c-g-c).

b) $\Delta AQM = \Delta BMN = \Delta CNP = \Delta DPQ$ suy ra QM = MN = NP = PQ (1).

Mặt khác $\Delta AQM = \Delta BMN \Rightarrow \widehat{AMQ} = \widehat{BNM}$.

Và $\widehat{BNM}+\widehat{BMN}=90^0$, do đó ta có $\widehat{AMQ}+\widehat{BMN}=90^0$, hay $\widehat{QMN}=90^0$ (2).

Từ (1), (2) suy ra MNPQ là hình vuông.

c) Xét tứ giác BNDQ có BN // DQ và BN = DQ nên BNDQ là hình bình hành. Gọi I là giao điểm của BD và NQ, thì I là trung điểm của BD và NQ. Do đó I là tâm của hai hình vuông ABCD và MNPQ.

Vậy hai hình vuông ABCD và MNPQ có chung tâm đối xứng I.

Bài 120 . Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh AN = DM và AN $\perp$ DM.

b) Chứng minh rằng các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành một hình vuông.

c) Gọi E là giao điểm của DM và AN. Chứng minh CE = CD.

Giải:

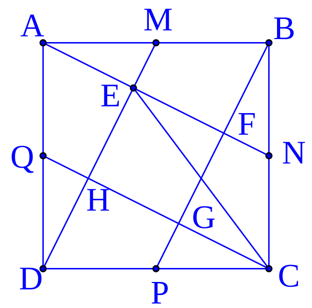
a) Xét hai tam giác ABN và DAM vuông tại B và A, có AB = AD và BN = AM, do đó $\Delta ABN = \Delta DAM$

suy ra AN = DM và $\widehat{BAN} = \widehat{ADM}$.

Mà $\widehat{BAN} + \widehat{DAN} = 90^0$, do đó $\widehat{ADM} + \widehat{DAN} = 90^0$, hay $\widehat{AED} = 90^0$.

Vậy ta có AN = DM và AN $\perp$ DM.

b) Giả sử các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành tứ giác EFGH.



MB // DP và MB = DP $\Rightarrow$ MBPD là hình bình hành.

Suy ra BP // DM $\Rightarrow$ AN $\perp$ BP.

Tương tự ta cũng có CQ $\perp$ DM.

Như vậy tứ giác EFGH có $\hat{E} = \hat{F} = \hat{H} = 90^0$.

* Ta chứng minh EF = EH:

Dễ thấy EM là đường trung bình trong tam giác ABF, E là trung điểm của AF.

Tương tự H là trung điểm của DE.

Xét hai tam giác ABF và DAE vuông tại F là E, có:

AB = DA; $\widehat{BAF} = \widehat{ADE}$ (vì $\Delta ABN = \Delta DAM$). Suy ra $\Delta ABF = \Delta DAE \Rightarrow$ AF = DE.

Từ đó ta có EF = EH. Vậy EFGH là hình vuông.

c) H là trung điểm của DE và CH $\perp$ DE, do đó ta suy ra Δ CDE cân tại C, hay là CE = CD.

Bài 121. Cho hình vuông ABCD. Từ điểm M thuộc đường chéo BD kẻ ME $\perp$ AB và MF $\perp$ AD. Chứng minh rằng:

a) CF = DE và CF $\perp$ DE.

b) Ba đường thẳng CM, BF và FE đồng qui.

Giải:

a) Tứ giác MEAF có $\hat{A} = \hat{E} = \hat{F} = 90^0$ nên MEAF là hình chữ nhật. Mặt khác, dễ thấy Δ MEB vuông cân tại E.

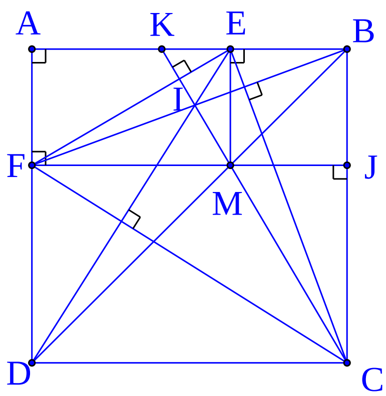
Do đó AF = EM = EB $\Rightarrow$ DF = AE.

Từ đó ta có $\Delta DAE = \Delta CDF$ (c-g-c).

$\Rightarrow$ CF = DE và $\widehat{FCD} = \widehat{EDA}$.

Vì $\widehat{FCD} + \widehat{CFD} = 90^0$ nên $\widehat{EDA} + \widehat{CFD} = 90^0$.

Hay CF $\perp$ DE.



b) Chứng minh tương tự như trên, ta có:

$\Delta ABF = \Delta CBE$, suy ra BF $\perp$ CE.

* Ta chứng minh CM $\perp$ EF:

Giả sử FM cắt BC tại J; CM cắt EF, AB lần lượt tại I, K. Ta có $\widehat{MJC} = 90^0$.

Dễ thấy BEMJ là hình vuông nên MJ = FA và CJ = EA.

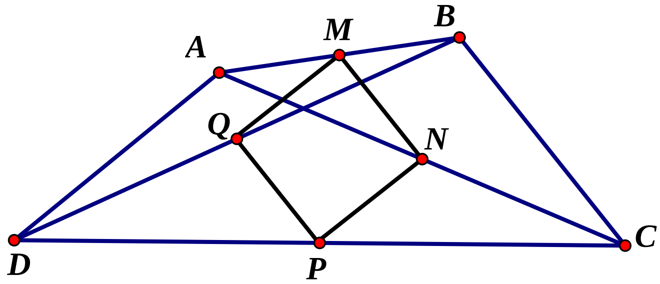
Suy ra $\Delta CJM = \Delta EAF$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{JCM} = \widehat{AEF}$.

Vì $\widehat{JCM} + \widehat{EKI} = 90^0$ nên $\widehat{AEF} + \widehat{EKI} = 90^0$, hay $\widehat{KIE} = 90^0$.

Xét tam giác EFC có ED $\perp$ FC, FB $\perp$ CE, CM $\perp$ EF, do đó ED, FB, CM là ba đường cao trong tam giác EFC. Vậy ED, FB, CM đồng qui.

Bài 122. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{ADC} + \widehat{BCD} = 90^o$ và AD = BC. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

Lời giải:



Trong tam giác ABC, MN là đường trung bình nên MN = $\frac{1}{2}$ BC.

Lập luận tương tự, ta có PQ = $\frac{1}{2}$ BC, MQ = $\frac{1}{2}$ AD, NP = $\frac{1}{2}$ AD.

Theo giả thiết, AD = BC suy ra MN = QP = MQ = NP. Vậy MNPQ là hình thoi (1).

Mặt khác ta có:

$\widehat{DPQ} = \widehat{DCB}$, $\widehat{NPC} = \widehat{ADC}$ (góc đồng vị). theo giả thiết $\widehat{DCB} + \widehat{ADC} = 90^0$, suy ra

$\widehat{DPQ} + \widehat{NPC} = 90^0$. Do vậy ta được góc $\widehat{QPN} = 90^0$ (2).

Từ (1) và (2) cho ta MNPQ là hình vuông.

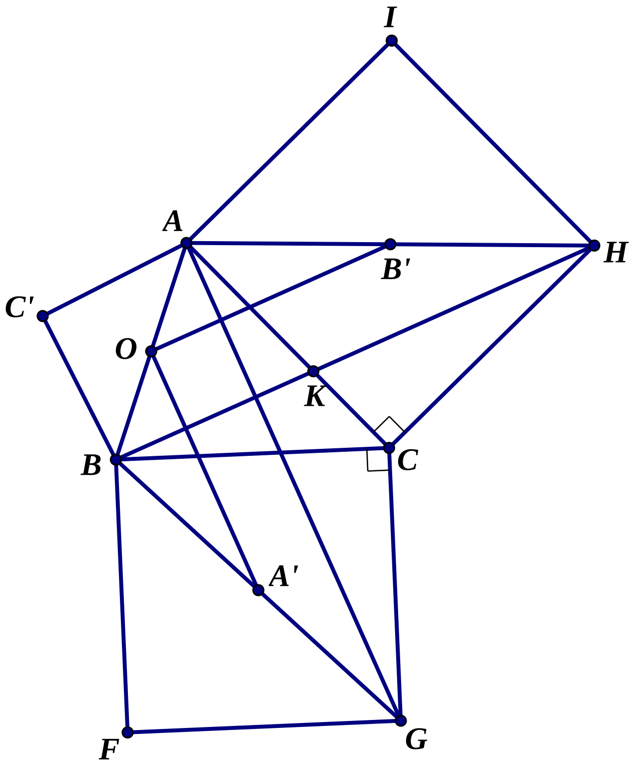
Bài 123. Cho tam giác ABC. Phía ngoài tam giác ABC dựng hình vuông BCGF, ACHI và tam giác ABC′ vuông cân tại C′. Gọi O, A′, B′ lần lượt là trung điểm của AB, BG, AH. Chứng minh rằng:

a) AG = BH

b) AG ⊥ BH

c) Tam giác OA′B′ vuông cân

Lời giải:



a) Xét hai tam giác BCH và GCA có:

BC = GC (hai cạnh của hình vuông BCGF).

$\widehat{BCH} = \widehat{GCA}$ (Vì cùng bằng góc $\widehat{ACB} + 90^0$).

CH = CA (hai cạnh trong hình vuông ACHI).

Suy ra hai tam giác BCH và GCA bằng nhau (c-g-c).

Vậy AG = BH.

b) Gọi K là giao điểm của BH và AH,

$\widehat{CKH} = \widehat{AKB}$ (góc đối đỉnh) (1).

Theo chứng minh trên: $\widehat{CHK} = \widehat{CAG}$ (2) (vì hai tam giác BCH và GCA bằng nhau).

Mặt khác: $\widehat{CHK} + \widehat{CKH} = 90^0$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\widehat{CAG} + \widehat{AKB} = 90^0$.

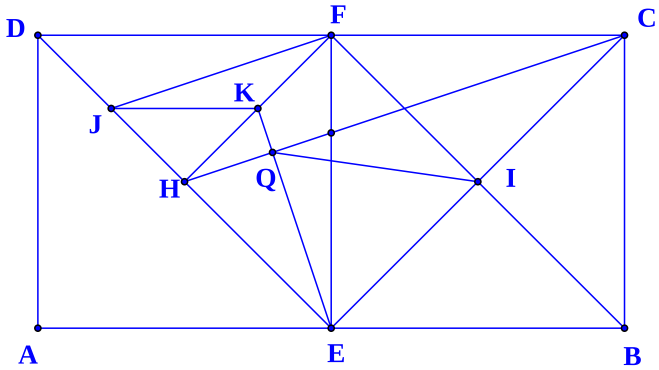
Vậy AG ⊥ BH.

c) Trong tam giác ABG, OA′ là đường trung bình, do đó OA′ // AG và OA′ = $\frac{1}{2}$AG (1).

Trong tam giác ABH, OB′ là đường trung bình, do đó OB′ // BH và OB′ = $\frac{1}{2}$BH (2).

Theo hai câu trên, AG = BH và AG ⊥ BH, kết hợp với (1) và (2) suy ra OA′ = OB′ và OA′ ⊥ OB′. Vậy tam giác OA′B′ vuông cân tại O.

Bài 124. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2BC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD. H, K lần lượt là trung điểm của DE, HF; I là trung điểm của BF và Q là giao điểm của CH và EK.



a) Chứng minh CH ⊥ EK tại Q.

b) Chứng minh QI = IE = IC = IB.

Giải:

a) Gọi J là trung điểm HD.

Ta có JK // DF nên JK ⊥ EF.

FK ⊥ DE (vì ADFE là hình vuông)

K là trực tâm tam giác EFJ

Suy ra EK ⊥ FJ, mà FJ // CH nên EK ⊥ CH.

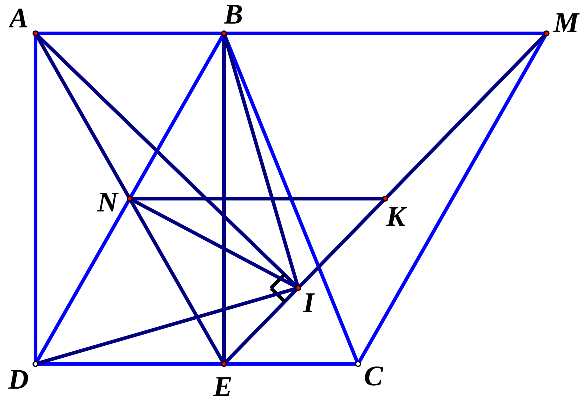
b)

Dễ thấy BCFE là hình vuông, I là trung điểm của FB nên I là trung điểm của BC

Theo trên, tam giác CQE vuông tại Q.từ đó suy ra QI = IE = IC = IB.

Bài 125. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$) (AB < CD). Vẽ BE vuông góc CD tại E. trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho BM = CD. Gọi N là giao điểm của AE và BD, K là trung điểm của EM. Vẽ AI vuông góc ME tại I. Chứng minh rằng NK // AM và $\widehat{BID} = 90^0$.

Giải:



Trong tam giác AEM, NK là đường trung bình, do đó NK // AM.

Dễ thấy tứ giác ABED là hình chữ nhật, do đó N là trung điểm của AE và BD và AE = BD.

Tam giác IAE vuông tại I, có IN là đường trung tuyến, do đó:

IN = NA = NE = NB = ND.

Tam giác IBD có IN là trung tuyến thỏa mãn IN = IB = ID, do đó BID là tam giác vuông tại I.

Bài 126. Cho tam giác ABC. Phía ngoài tam giác ABC dựng hình vuông ACPG, ABDE. Gọi H, K, L, M, N lần lượt là trung điểm của BE, BC, CG, AB, AC. Chứng minh rằng

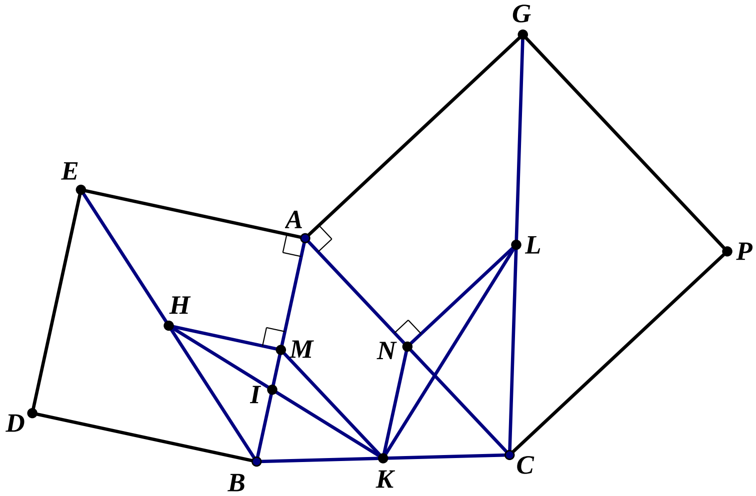
a) $\Delta KNL = \Delta HMK$

b) $HK \perp KL$

Lời giải:

a)

* Trong tam giác ABE, HM là đường trung bình, do đó HM // EA và HM = $\frac{1}{2}$ EA (1).



Trong tam giác ABC, KN là đường trung bình, do đó KN = $\frac{1}{2}$ AB (2).

Mặt khác, vì ABDE là hình vuông nên EA = AB. Kết hợp (1) và (2) suy ra HM = KN.

* Lập luận tương tự, ta có MK = $\frac{1}{2}$AC = $\frac{1}{2}$AG = NL.

* Ta có HM // EA $\Rightarrow$ HM $\perp$ AB, suy ra $\widehat{HMK} = 90^0 + \widehat{BMK}$ (3).

Chứng minh tương tự, $\widehat{LNK} = 90^0 + \widehat{CNK}$ (4).

Vì MK // AC nên $\widehat{BMK} = \widehat{BAC}$ (góc đồng vị).

Vì NK // AB nên $\widehat{CNK} = \widehat{CAB}$ (góc đồng vị).

Từ đó suy ra $\widehat{BMK} = \widehat{CNK}$. Kết hợp (3) và (4), ta được $\widehat{HMK} = \widehat{LNK}$.

* Xét hai tam giác KNL và HMK có:

KN = HM, $\widehat{HMK} = \widehat{LNK}$, NL = MK.

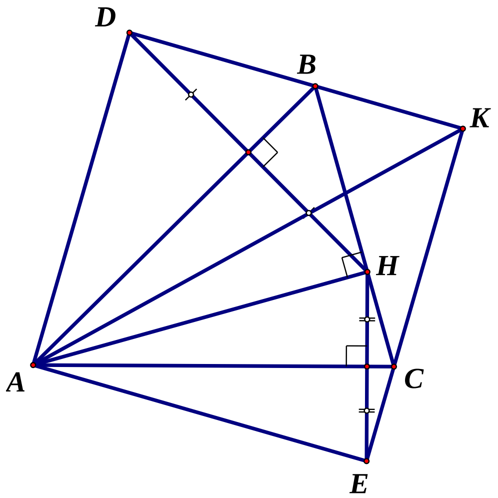
Suy ra hai tam giác KNL và HMK bằng nhau (c-g-c) (Chứng minh xong).

Bài 127. Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{A} = 45^0$, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng của H qua AB, E là điểm đối xứng của H qua AC, K là giao điểm của DB và EC.

a) Chứng minh tứ giác ADKE là hình vuông.

b) ΔABC có thêm điều kiện gì thì A, H, K thẳng hàng.

Lời giải:



a) Vì tam giác ABC nhọn nên H thuộc cạnh BC.

Vì D và E lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC nên ta có:

$\widehat{BAH} = \widehat{BAD};\ \widehat{CAH} = \widehat{CAE}$.

Do đó : $\widehat{DAE} = 2\left(\widehat{BAH} + \widehat{CAH}\right) = 2\widehat{BAC} = 90^0$.

Mặt khác $\widehat{ADB} = \widehat{AHB} = 90^0,\ \widehat{AEC} = \widehat{AHC} = 90^0$.

Tứ giác ADKE có ba góc vuông nên ADKE là hình chữ nhật.

Lại có AD = AE = AH.

Vậy ADKE là hình vuông.

b) Vì ADKE là hình vuông nên AK là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

A, H, K thẳng hành khi và chỉ khi AH là đường phân giác góc $\widehat{BAC}$, hay $\widehat{DAH} = \widehat{EAH}$.

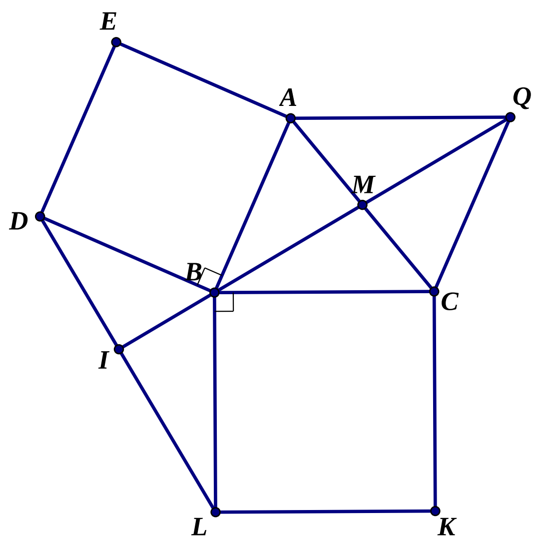
Theo trên, $\widehat{BAH} = \widehat{BAD};\ \widehat{CAH} = \widehat{CAE}$, do đó $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$.

Như vậy A, H, K thẳng hàng khi AH là đường phân giác góc $\widehat{BAC}$, hay tam giác ABC cân tại A.

Bài 128. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của AC. Phía ngoài tam giác ABC dựng hình vuông BCKL, ABDE. Lấy điểm Q trên tia đối của tia MB sao cho MB = MQ. Chứng minh:

a) DL = BQ.

b) $DL \perp BM$



Lời giải:

a) Ta chứng minh hai tam giác DBL và BAQ bằng nhau.

Dễ dàng nhận thấy M là trung điểm của QB, vì M là trung điểm AC suy ra tứ giác ABCQ là hình bình hành.

BD = BA (vì ABDE là hình vuông).

BL = AQ (cùng bằng cạnh BC).

Ta có:

$\widehat{DBL} + \widehat{ABC} + 2.90^0 = 360^0 \Rightarrow \widehat{DBL} + \widehat{ABC} = 180^0$.

Lại có ABCQ là hình bình hành nên $\widehat{BAQ} + \widehat{ABC} = 180^0$.

Từ đây suy ra $\widehat{DBL} = \widehat{BAQ}$.

Vậy hai tam giác DBL và BAQ bằng nhau (c-g-c), từ đó suy ra DL = BQ.

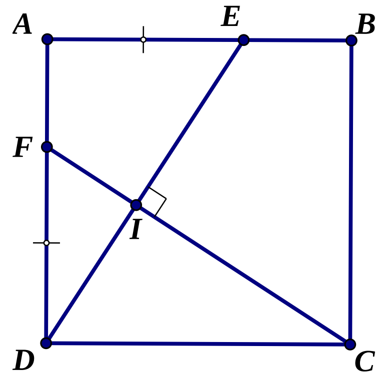
b) Theo trên ta có $\widehat{DLB} = \widehat{QBC}$ (5). Gọi I là giao điểm của BQ và DL.

Ta có $\widehat{IBL} + \widehat{QBC} = 180^0 - \widehat{LBC} = 90^0$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{IBL} + \widehat{ILB} = 90^0$. Vậy $\widehat{BIL} = 90^0$ (chứng minh xong).

Bài 129. Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F lần lượt trên cạnh AB, AD sao cho AE = DF. Chứng minh rằng DE = CF và DE $\perp$ CF.

Lời giải:



Gọi I là giao điểm của DE và CF.

Xét hai tam giác ADE và DCF có:

AD = DC (vì ABCD là hình vuông).

$\widehat{EAD} = \widehat{FDC} = 90^0$.

AE = DF (theo giả thiết)

Vậy hai tam giác ADE và DCF bằng nhau, khi đó ta có:

DE = CF và $\widehat{ADE} = \widehat{DCF}$.

Mặt khác $\widehat{DCF} + \widehat{DFC} = 90^0$, suy ra

$\widehat{ADE} + \widehat{DFC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{DIF} = 90^0$. Vậy $DE \perp CF$.

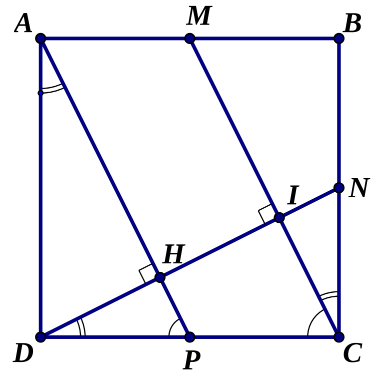
Bài 130. Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.

a) Chứng minh rằng CM = DN và CM $\perp$ DN.

b) Vẽ AH $\perp$ DN tại H, AH cắt CD tại P. Chứng minh rằng P là trung điểm của CD

c) CM cắt DN tại I. Chứng minh rằng AI = AB.

Lời giải:



a) Dễ dàng nhận thấy hai tam giác BCM và CDN bằng nhau (c-g-c), suy ra CM = DN và $\widehat{BCM} = \widehat{CDN}$.

Mặt khác: $\widehat{CND} + \widehat{CDN} = 90^0$, suy ra $\widehat{BCM} + \widehat{CND} = 90^0$.

Vậy $CM \perp DN$.

b) AP // MC suy ra $\widehat{APD} = \widehat{DCM}$ (đồng vị)

suy ra $\widehat{DAP} = \widehat{BCM}$ (cùng phụ với góc $\widehat{APD}$).

Do đó hai tam giác ADP và CBM bằng nhau (g-c-g) $\Rightarrow DP = BM = \frac{1}{2}AB$.

Vì P thuộc đoạn CD, do vậy P là trung điểm của CD.

c) Trong tam giác CDI, PH // CI và P là trung điểm của CD, suy ra H là trung điểm của DI. Tam giác ADI có AH là đường cao và là trung tuyến, suy ra tam giác ADI cân tại A. Vậy AI = AD = AB (chứng minh xong).

Bài 131. Cho hình vuông ABCD. Từ điểm M tùy ý trên cạnh BC, vẽ đường thẳng cắt cạnh CD tại K sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{AMK}$, AH $\perp$ MK tại H. Chứng minh rằng

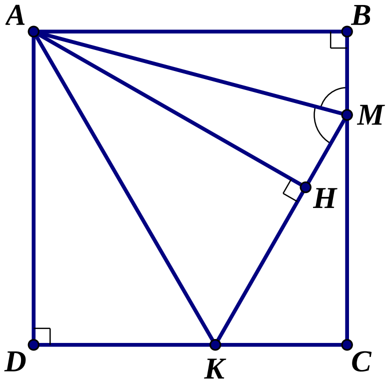
a) $\Delta AMH = \Delta AMB$

b) $\widehat{KAM} = 45^o$

Lời giải:

a) Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BAM} + \widehat{BMA} = 90^0 \\ \widehat{HAM} + \widehat{HMA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{HAM} \\ \widehat{BAM} = \widehat{HMA} \end{cases}$$



Hai tam giác AMH và AMB có:

$\widehat{HMA} = \widehat{BAM}$, AM chung, $\widehat{HAM} = \widehat{BAM}$, do đó $\Delta AMH = \Delta AMB$ (g-c-g)

b) Xét hai tam giác ADK và AHK lần lượt vuông tại D và H, có cạnh huyền AK chung, đồng thời AH = AD (vì cùng bằng AB). Vậy

$\Delta ADK = \Delta AHK \Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{HAK}$.

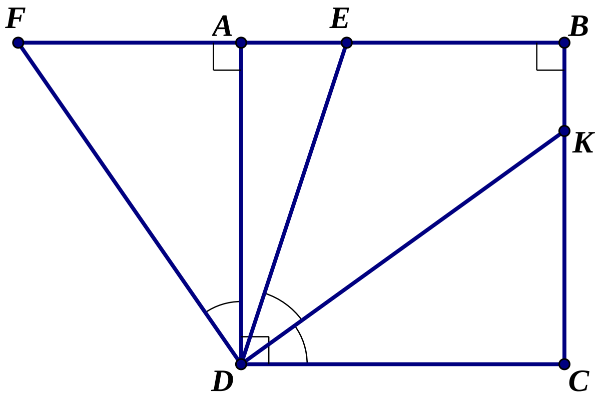
$\widehat{KAM} = \widehat{HAK} + \widehat{HAM} = \frac{1}{2}\left(\widehat{HAD} + \widehat{HAB}\right) = \frac{1}{2}\widehat{BAD} = 45^0$ (chứng minh xong).

Bài 132. Cho hình vuông ABCD, E thuộc cạnh AB. Phân giác $\widehat{CDE}$ cắt BC tại K. Trên tai đối của tia AB, lấy điểm F sao cho AF = CK. Chứng minh rằng

a) Tam giác DEF cân

b) AE + CK = DE

Lời giải:



a) Từ giả thiết dễ dàng thấy được hai tam giác ADF và CDK bằng nhau (c-g-c).

Suy ra $\widehat{ADF} = \widehat{CDK} = \widehat{EDK}$.

Từ đó ta có:

$\widehat{KDF} = \widehat{ADF} + \widehat{KDA} = \widehat{CDK} + \widehat{KDA} = 90^0$ (1).

$\widehat{AFD} + \widehat{ADF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AFD} + \widehat{KDE} = 90^0$ (2).

Từ (1) và (2), $\widehat{EFD} = \widehat{EDF}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{EDK}$).

Vậy tam giác DEF cân tại E.

b) AE + CK = AE + AF = EF (F nằm trên tia đối tia AB nên A nằm giữa EF)

Theo câu trên thì EF = ED. Vậy AE + CK = DE.

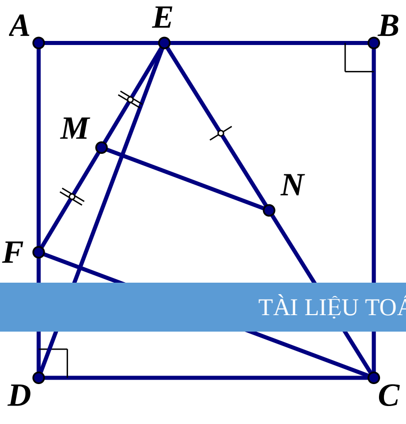
Bài 133. Cho hình vuông ABCD, E thuộc AB, F thuộc AD sao cho AE = DF. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF, CE. Chứng minh rằng $MN \perp DE$ và MN = $\frac{1}{2}$DE.

Lời giải:

Theo chứng minh bài 90. Thì ta có DE = CF và $DE \perp CF$ (1).

Trong tam giác EFC, MN là đường trung bình nên

$MN // CF$ và $MN = \frac{1}{2}CF$ (2).

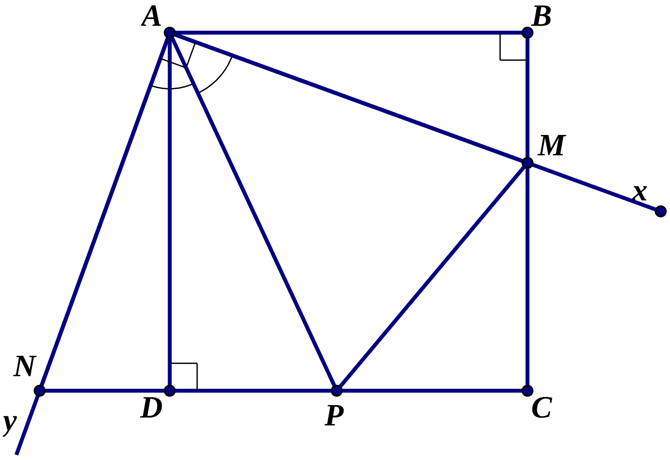


Từ (1) và (2) suy ra MN // DE và MN = $\frac{1}{2}$DE .

(CM xong).

Bài 134. Cho hình vuông ABCD. Một góc vuông $\widehat{xAy}$ quay xung quanh đỉnh A thỏa mãn Ax cắt cạnh BC tại M, Ay cắt CD tại N. Phân giác $\widehat{xAy}$ cắt CD tại P. Chứng minh rằng khi $\widehat{xAy}$ quay quanh đỉnh A thì chu vi tam giác CMP bằng 2AB.

Lời giải:



Ta có: $\widehat{MAB} = \widehat{NAD}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{MAD}$)

Từ đó dễ thấy $\Delta ABM = \Delta ADN$ (g-c-g).

Suy ra AM = AN và BM = BN.

Vì AM = AN và AP là đường phân giác góc $\widehat{MAN}$ nên M và N đối xứng nhau qua AP, từ đó PM = PN.

Điểm M thuộc cạnh BC nên điểm N nằm trên tia đối của tia DC và P nằm trên cạnh CD.

Gọi T là chu vi tam giác PCM, ta có:

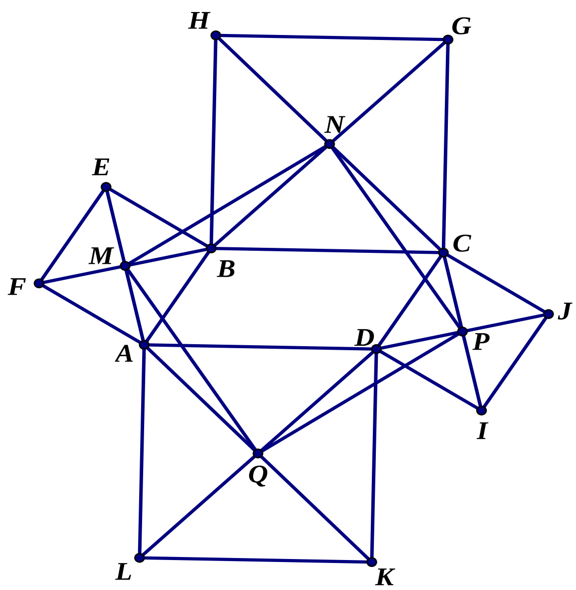
T = CP + PM + MC = CP + PN + MC = CN + MC = CD + DN + MC

= CD + BM + MC = CD + BC = 2AB.

Vậy khi $\widehat{xAy}$ quay quanh đỉnh A thì chu vi tam giác CMP không đổi bằng 2AB.

Bài 135. Cho hình bình hành ABCD. Bên ngoài hình bình hành dựng các hình vuông ABEF, BCGH, CDIJ, ADKL. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tâm của 4 hình vuông đó. Chứng minh rằng MNPQ là hình vuông.

Bài giải:



Dễ dàng nhận thấy $CP = BM = AM = DP$ và $CN = BN = AQ = DQ$ (1)

Trong bình hành ABCD, đặt $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = x$

Ta có: $\widehat{PCN} = \widehat{PCD} + \widehat{DCB} + \widehat{BCN} = 45^0 + x + 45^0 = x + 90^0$.

Chứng minh tương tự, ta được:

$\widehat{PCN} = \widehat{MBN} = \widehat{MAQ} = \widehat{PDQ} = x + 90^0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\Delta PCN = \Delta MBN = \Delta MAQ = \Delta PDQ$

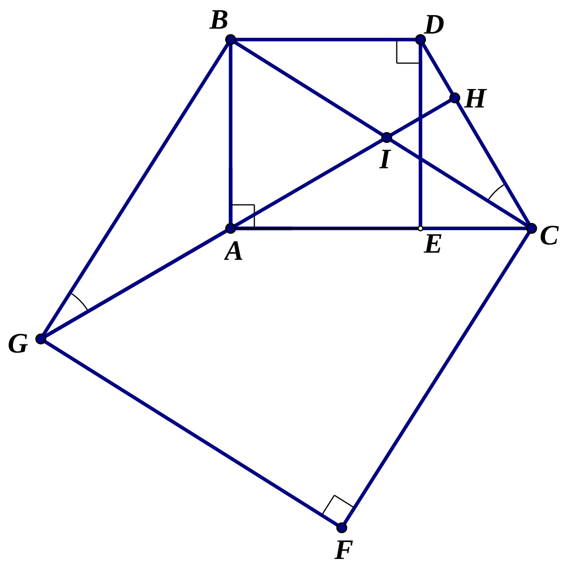
Suy ra $PN = MN = MQ = PQ$, hay tứ giác MNPQ là hình thoi.

Lại có: $\begin{cases} \widehat{BMN} = \widehat{AMQ} \\ \widehat{BMQ} + \widehat{AMQ} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{BMN} + \widehat{BMQ} = 90^0 \Rightarrow \widehat{NMQ} = 90^0$.

Vậy MNPQ là hình vuông.

Bài 136. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ các hình vuông ABDE, BCFG sao cho C, D ở cùng một phía của cạnh AB; A, G ở cùng một phía của cạnh BC. Chứng minh $AG = CD$ và $AG \perp CD$.

Lời giải:



Vì A và G nằm cùng phía so với đường thẳng BC, $\widehat{CBA}$ nhọn nên tia BA nằm trong góc $\widehat{CBG}$.

Tương tự tia BC nằm trong góc $\widehat{ABD}$.

Ta có $\widehat{ABG} = \widehat{DBC}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$).

Xét hai tam giác ABG và DBC có:

$AB = DB$, $\widehat{ABG} = \widehat{DBC}$, $BG = BC$, suy ra hai tam giác ABG và DBC bằng nhau (c-g-c).

Do đó, $AG = CD$ và $\widehat{BGA} = \widehat{BCD}$.

Đường thẳng GA cắt BC tại I, cắt CD tại H. Ta có: $\widehat{BIG} = \widehat{HIC}$ (góc đối đỉnh)

$\widehat{BGI} + \widehat{BIG} = 90^0$.

Kết hợp $\widehat{BGA} = \widehat{BCD}$ cho ta $\widehat{HIC} + \widehat{BCD} = 90^0$.

Do đó $\widehat{GHC} = 90^0$.

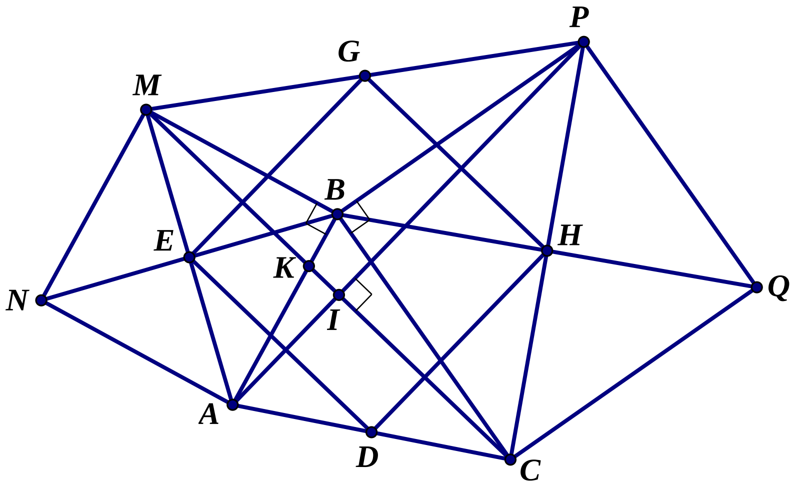
Tóm lại ta có: $AG = CD$ và $AG \perp CD$.

Bài 137. Cho tam giác ABC, bên ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông ABMN và BCQP. Gọi D, E, G, H lần lượt là trung điểm của AC, BN, MP, BQ. Chứng minh:

a) $AP = CM$ và $AP \perp CM$

b) Tứ giác DEGH là hình vuông

Lời giải:



a) Chứng minh AP = CM và AP $\perp$ CM

Ta chứng minh tam giác ABP và MBC bằng nhau. Thật vậy:

AB = MB (ABMN là hình vuông), $\widehat{ABP} = \widehat{MBC} = \widehat{ABC} + 90^0$, BP = BC (BCQP là hình vuông).

Vậy $\Delta ABP = \Delta MBC$ (c-g-c). Suy ra AP = CM và $\widehat{BAP} = \widehat{BMC}$.

Gọi I là giao điểm của AP và CM, K là giao điểm của AB và CM.

Hai tam giác BMK và IAK có: $\widehat{M} = \widehat{A}$ (vì $\widehat{BAP} = \widehat{BMC}$), góc K đối đỉnh. Vì tổng ba góc trong một tam giác cùng bằng 180^0, do đó $\widehat{KIA} = \widehat{KBM} = 90^0$.

Vậy AP = CM và AP $\perp$ CM.

b) Chứng minh tứ giác DEGH là hình vuông.

Vì ABMN và BCQP là hình vuông, do đó E là H lần lượt là trung điểm của AM và CP.

EG là đường trung bình trong tam giác MAP, suy ra EG // AP và EG = $\frac{1}{2}$AP (1).

Tương tự, DH // AP, DH = $\frac{1}{2}$AP, ED // CM, ED = $\frac{1}{2}$CM, GH // CM và ED = $\frac{1}{2}$CM.

Kết hợp kết quả ở câu a), suy ra DEGH là hình vuông.

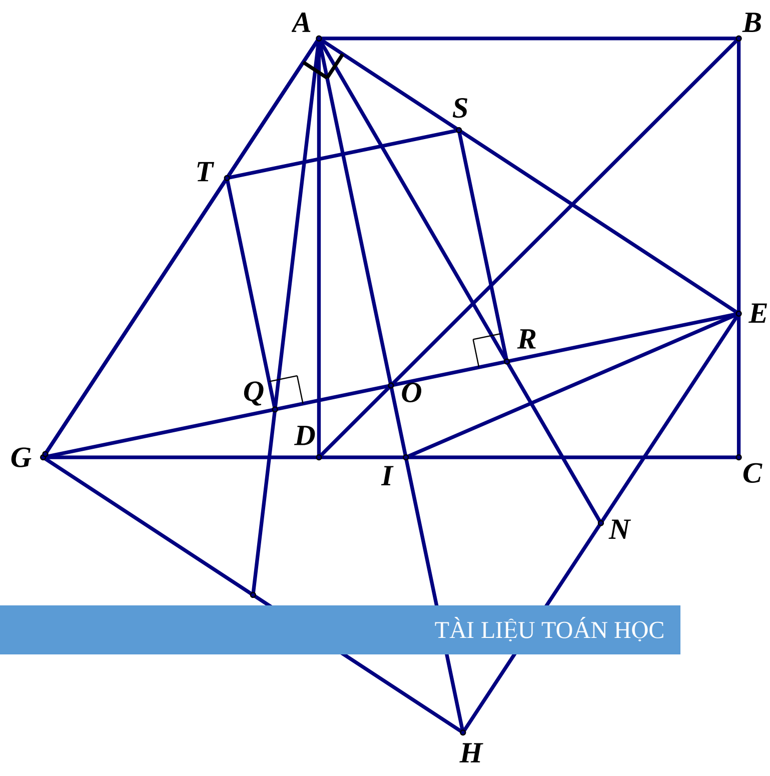
Bài 138. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm E tùy ý trên cạnh BC. Kẻ tia Ax $\perp$ AE; tia Ax cắt đường thẳng CD tại G. Gọi H là đỉnh thứ tư của hình bình hành EAGH và O là giao điểm của hai đường chéo.

a) Chứng minh ΔAEG vuông cân.

b) Chứng minh D, O, B thẳng hàng.

c) M, N lần lượt là trung điểm của GH, EH, AM, AN cắt GE lần lượt tại Q, R. qua Q và R kẻ các đường vuông góc với GE, chúng cắt AG và AE lần lượt tại T và S. Chứng minh tứ giác TSRQ là hình vuông.

d) AO cắt CD ở I. Chứng minh chu vi ΔEIC bằng 2AB.



Lời giải:

a) Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{DAG}$ (cùng phụ với góc $\widehat{DAE}$).

Hai ΔBAE và ΔDAG có $\widehat{BAE} = \widehat{DAG}$; BA = DA; $\widehat{EBA} = \widehat{GDA} = 90^0$.

Do đó: $\Delta BAE = \Delta DAG$ (g-c-g) $\Rightarrow$ AE = AG.

Vì $\widehat{EAG} = 90^0$ nên ΔEAG vuông cân tại A.

b) Tam giác BOE có $\widehat{BOE} + \widehat{OBE} + \widehat{OEB} = 180^0$.

$\widehat{OBE} = \widehat{OEA} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BOE} + \widehat{AEB} = 90^0$ (1)

Tam giác GOD có $\widehat{GOD} + \widehat{OGD} = 45^0$ (vì $\widehat{GDO} = 135^0$) $\Rightarrow \widehat{GOD} + \widehat{AGD} = 90^0$ (2)

Lại có $\widehat{AEB} = \widehat{AGD}$ (vì $\Delta BAE = \Delta DAG$), kết hợp (1) và (2) suy ra $\widehat{BOE} = \widehat{DOG}$.

Vì G, O, E thẳng hàng nên hai góc $\widehat{BOE}, \widehat{DOG}$ đối đỉnh. Vậy B, O, D thẳng hàng.

c) Ta có Q, R lần lượt là trọng tâm hai tam giác AGH và AEH.

Do đó QO = $\frac{1}{3}$GO = $\frac{1}{3}$EO = RO. Từ đó dễ dàng suy ra GQ = QR = RE (3).

Δ GQT vuông cân tại Q nên QT = GQ; tương tự, RS = RE (4).

(3), (4) suy ra QT = RS. Mặt khác QT // RS (cùng vuông góc GE).

Như vậy tứ giác TSRQ có: TQ = QR = RS, TQ // RS, $\widehat{Q} = 90^0$. Do đó TSRQ là hình vuông.

d) Vì O là trung điểm GE và IO $\perp$ GE nên tam giác IGE cân tại I $\Rightarrow$ IE = IG.

Gọi l là chu vi tam giác EIC.

l = IE + IC + CE = IG + IC +CE = GC + CE = GD + DC + CE.

Mặt khác, do $\Delta BAE = \Delta DAG$ nên GD = EB. Từ đó:

l = BE + CE + DC = BC + DC = 2AB.

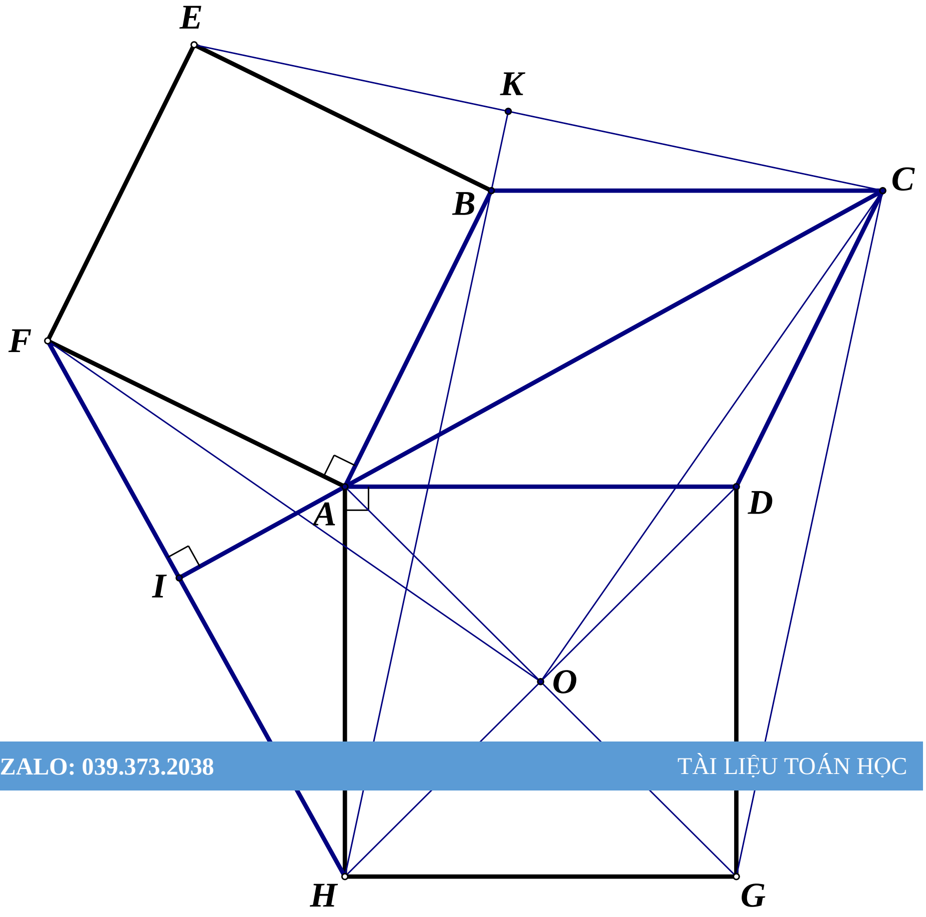
Bài 139. Cho hình bình hành ABCD. Ở phía ngoài hình bình hành, vẽ các hình vuông ABEF và ADGH.

a) Chứng minh AC = FH và AC $\perp$ FH.

b) Gọi O là tâm đối xứng của hình vuông ADGH. Chứng minh OF $\perp$ OC và BH $\perp$ CE.

c) Chứng minh ΔECG vuông cân.

Lời giải:



a) Hai tam giác ADC và HAF có:

AD = HA; $\widehat{ADC} = \widehat{HAF}$ (cùng bù với góc $\widehat{BAD}$); DC = AF (cùng bằng AB).

Do đó: $\Delta ADC = \Delta HAF$, suy ra AC = HF và $\widehat{DAC} = \widehat{AHF}$ (1).

Gọi I là giao điểm của AC và HF. Ta có:

$\widehat{DAC} + \widehat{HAI} + \widehat{HAD} = 180^0 \Rightarrow \widehat{DAC} + \widehat{HAI} = 90^0$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow \widehat{AHF} + \widehat{HAI} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HIA} = 90^0$. Vậy AC $\perp$ HF.

b) $\widehat{OAF} = \widehat{OAH} + \widehat{HAF} = 45^0 + \widehat{HAF} = 45^0 + \widehat{CAD} = \widehat{ODC}$.

Hai tam giác OAF và ODC có:

OA = OD; $\widehat{OAF} = \widehat{ODC}$; AF = DC (cùng bằng AB).

Suy ra $\Delta OAF = \Delta ODC \Rightarrow \widehat{AOF} = \widehat{DOC}$.

$\widehat{COF} = \widehat{COA} + \widehat{AOF} = \widehat{COA} + \widehat{DOC} = \widehat{DOA} = 90^0 \Rightarrow$ FO $\perp$ OC.

$\widehat{BAH} = \widehat{BAD} + 90^0$; $\widehat{EBC} = 360^0 - \left(90^0 + \widehat{ABC}\right) = 270^0 - \widehat{ABC} = 90^0 + \widehat{BAD}$

Suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{EBC}$. Từ đó dễ dàng chứng minh được $\Delta BAH = \Delta EBC$.

Gọi K là giao điểm của BH và CE.

$\Delta BAH = \Delta EBC \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{BEK}$.

Lại có $\widehat{ABH} + \widehat{EBK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{BEK} + \widehat{EBK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EKB} = 90^0$.

Vậy OF $\perp$ OC và BH $\perp$ CE.

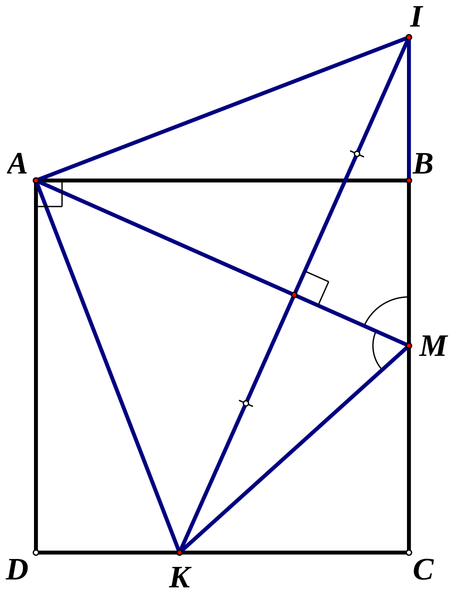
c) Dễ thấy tứ giác BCGH là hình bình hành, do đó CG // BH và CG = BH.

Theo chứng minh trên thì BH $\perp$ CE và BH = CE (vì $\Delta BAH = \Delta EBC$).

Từ đó suy ra CG = CE và CG $\perp$ CE, hay Δ ECG vuông cân tại C.

Bài 140. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh BC. Từ M, vẽ một đường thẳng cắt cạnh CD tại K sao cho: $\widehat{AMB} = \widehat{AMK}$. Chứng minh $\widehat{KAM} = 45^0$.

Lời giải:



MA là phân giác góc BMK nên MA là trục đối xứng của hai đường thẳng MK và MB.

Gọi I là điểm đối xứng của K qua MA, suy ra I thuộc đường thẳng BC.

Ta có AI = AK, AB = AD.

Hai tam giác vuông ABI và ADK có hai cạnh bằng nhau nên $\Delta ABI = \Delta ADK$.

Từ đó ta có $\widehat{IAB} = \widehat{KAD}$.

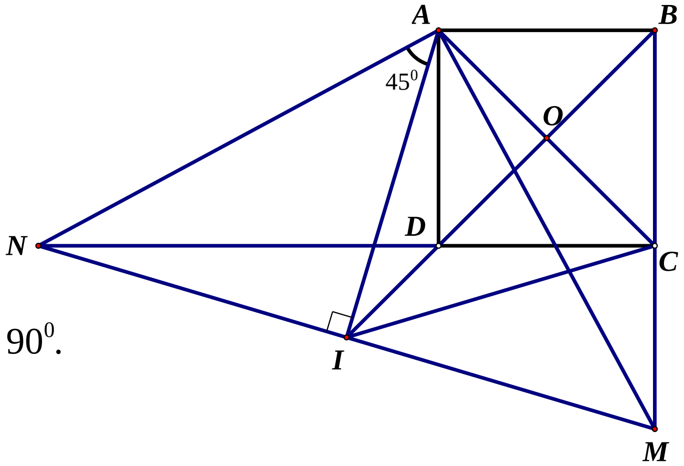
$\widehat{IAK} = \widehat{IAB} + \widehat{BAK} = \widehat{KAD} + \widehat{BAK} = 90^0$. Vậy ta có:

$\widehat{MAK} = \frac{1}{2}\widehat{IAK} = 45^0$.

Bài 141. a) Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M, trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho DN = BM. Vẽ tia AI sao cho $\widehat{NAI} = 45^0$ (I ∈ NM). Gọi O là trung điểm của AC. Chứng minh B, O, D, I thẳng hàng.

b) Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm E bất kì trên cạnh AB. Tia phân giác của $\widehat{CDE}$ cắt cạnh BC tại K. Chứng minh rằng AE + KC = DE.

Lời giải:



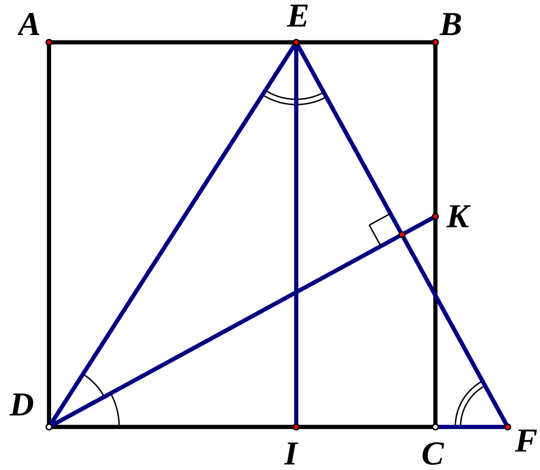
a) Xét hai tam giác ABM và ADN có:
AB = AD;
$\widehat{ABM} = \widehat{AND} = 90^0$
BM = DN (giả thiết).
Suy ra $\Delta ABM = \Delta ADN$ (c-g-c) $\Rightarrow$ AN = AM và $\widehat{BAM} = \widehat{DAN}$.
$\widehat{MAN} = \widehat{MAD} + \widehat{DAN} = \widehat{MAD} + \widehat{BAM} = 90^0$.

Như vậy tam giác MAN vuông cân tại A.

Do đó AI là đường cao và trung tuyến trong tam giác MAN. Ta được AI = $\frac{1}{2}$MN.

Trong tam giác MCN vuông tại C, CI là trung tuyến, do đó CI = $\frac{1}{2}$MN.

Từ đó ta có tam giác IAC cân tại I.
Vì O là trung điểm AC nên IO $\perp$ AC. Mặt khác DB vuông góc AC tại O.
Vậy bốn điểm I, O, D, B thẳng hàng.
b) Gọi F là điểm đối xứng của E qua đường thẳng DK. Vì DK là đường phân giác góc $\widehat{CDE}$ nên DK là trục đối xứng của hai đường thẳng DE và DC, do đó F thuộc đường thẳng CD.

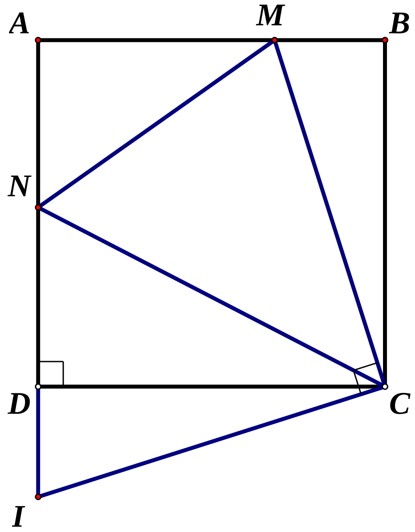


Ta có DE = DF.
Gọi I là hình chiếu của E lên CD, AEID là hình chữ nhật nên AE = DI.
Vậy ta sẽ chứng minh CK = IF.
$\widehat{CDK} + \widehat{DFE} = 90^0$, $\widehat{IEF} + \widehat{IFE} = 90^0$
$\Rightarrow \widehat{CDK} = \widehat{IEF}$.
Xét hai tam giác vuông CDK và IEF, có:
CD = IE, $\widehat{CDK} = \widehat{IEF}$.
Do đó ta suy ra được $\Delta CDK = \Delta IEF$ (g-c-g)
Vậy: AE + KC = DI + IF = DF = DE.

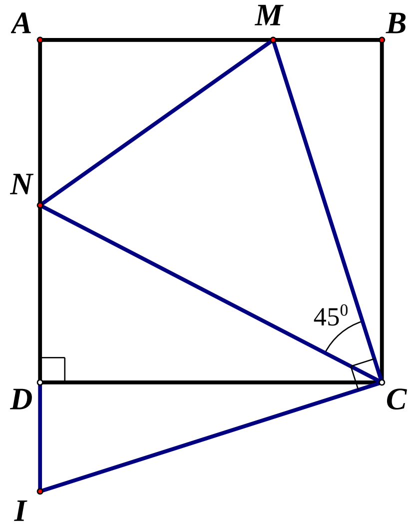
Bài 142.
a) Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Gọi M và N là hai điểm lần lượt trên các cạnh AB, AD sao cho chu vi Δ AMN bằng 2. Chứng minh $\widehat{MCN} = 45^0$.
b) Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AB, AD sao cho $\widehat{MCN} = 45^0$. Chứng minh Δ AMN có chu vi bằng 2.

c) Cho hình vuông ABCD. Gọi N là trung điểm của AD và M thuộc cạnh AB sao cho AM = $\frac{2}{3}$AB. Chứng minh MC là phân giác của góc $\widehat{BMN}$.

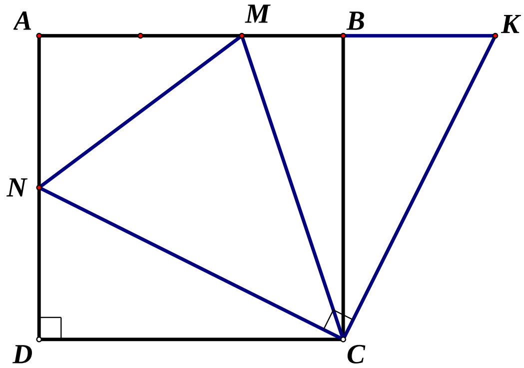
Lời giải:



a) Theo giả thiết:
2 = AM + AN + MN = (AB – BM) + (AD – DN) +MN = 2 – (BM + DN) + MN
Suy ra $MN = BM + DN$.
Trên tia đối của tia DN lấy điểm I thỏa mãn DI = BM.
Hai tam giác vuông CBM và CDI bằng nhau vì có:
$CB = CD,\ \widehat{CBM} = \widehat{CDI} = 90^0$; BM = DI.
Suy ra $CM = CI$ và $\widehat{BCM} = \widehat{DCI}$.
$\widehat{MCI} = \widehat{MCD} + \widehat{DCI} = \widehat{MCD} + \widehat{BCM} = 90^0$.
Theo trên ta có MN = BM + DN = ID + DN = IN.
Xét hai tam giác CMN và CIN có: CM = CI; MN = IN; CN chung.
Suy ra $\Delta CMN = \Delta CIN \Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{ICN}$.
Mà $\widehat{MCN} + \widehat{ICN} = \widehat{MCI} = 90^0$. Vậy $\widehat{MCN} = 45^0$.



b) Giả sử $\widehat{MCN} = 45^0$. Chứng minh chu vi tam giác AMN bằng 2.
Đường thẳng qua C, vuông góc với CM cắt AD tại I. Vì
$\widehat{MCN} = 45^0$ nên $\widehat{ICN} = \widehat{MCN} = 45^0$.
$\widehat{BCM} = \widehat{DIC}$ (cùng phụ với $\widehat{MCD}$)
BC = DC.
Do đó hai tam giác vuông BCM và DCI bằng nhau. Suy ra CM = CI.
Từ đó ta chứng minh được $\Delta MCN = \Delta ICN$ (c-g-c).
$\Rightarrow$ MN = NI.
Từ đây, tương tự như trên ta chứng minh được tam giác AMN có chu vi bằng 2
c) Đường thẳng qua C, vuông góc với CN, cắt AM tại K.
$\widehat{BCK} = \widehat{DCN}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{NCB}$)



Do đó dễ dàng chứng minh được hai tam giác vuông BCK và DCN bằng nhau (g-c-g).
Suy ra CK = CN và BK = DN.
MK = MB + BK

$$= MB + DN = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{3}AB = \frac{5}{6}AB.$$

Theo định lí Pitago:

$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{\frac{4AB^2}{9} + \frac{AB^2}{4}} = \frac{5AB}{6}$. Ta được MK = MN.

Từ đó suy ra $\widehat{CKM} = \widehat{CNM}$ (c-c-c).

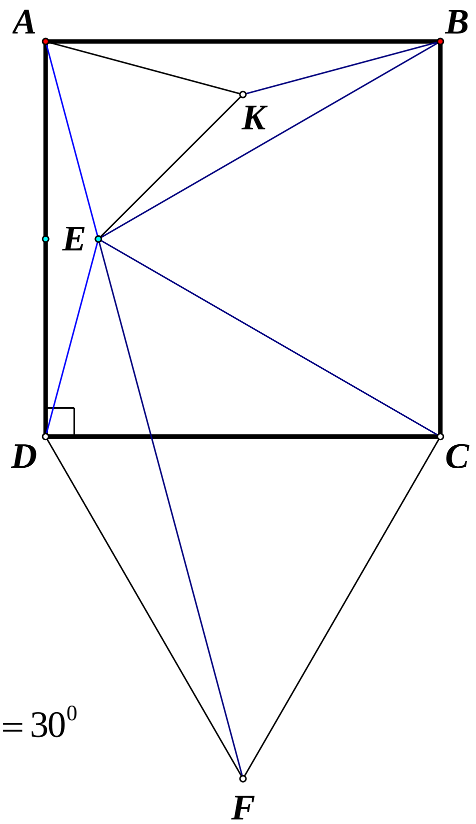
Vậy $\widehat{CMK} = \widehat{CMN}$, hay MC là phân giác góc $\widehat{BMN}$.

Bài 143. Ở phía trong hình vuông ABCD, vẽ Δ ADE cân ở E có góc đáy bằng 15^0.

a) Chứng minh Δ BEC đều.

b) Ở phía ngoài hình vuông ABCD, vẽ Δ ADF đều. Chứng minh A, E, F thẳng hàng.

Lời giải:



a) $\widehat{BAE} = 90^0 - \widehat{DAE} = 75^0$;

Tương tự, $\widehat{CDE} = 75^0$.

Dễ thấy $\Delta ABE = \Delta DCE$ (c-g-c)

Suy ra EB = EC.

Bên trong tam giác ABE, dựng tam giác đều AEK.

$\widehat{BAK} = \widehat{BAE} - \widehat{KAE} = 75^0 - 60^0 = 15^0$.

Do đó $\Delta AKB = \Delta AED$ (c-g-c)

Δ ABK cân tại K, có góc đáy bằng 15^0, suy ra:

$\widehat{AKB} = 150^0$. $\widehat{EKB} = 360^0 - \left(60^0 + 150^0\right) = 150^0$.

Δ ABK và Δ EBK có AK = EK; $\widehat{AKB} = \widehat{EKB} = 150^0$, BK chung.

Suy ra $\Delta ABK = \Delta EBK$ (c-g-c) $\Rightarrow$ EB = AB.

Vậy ta có EB = EC = BC, nên Δ BCE đều.

b) Tam giác ADF cân tại D nên $\widehat{AFD} = 15^0$.

$\widehat{DEF} = 180^0 - \left(\widehat{EDF} + \widehat{EFD}\right) = 180^0 - \left(60^0 + 75^0 + 15^0\right) = 30^0$

$\widehat{DEF} + \widehat{DEA} = 30^0 + 150^0 = 180^0$. Vậy A, E, F thẳng hàng.

Bài 144. Cho hình vuông ABCD, lấy điểm M trên BD. Vẽ ME ⊥ AB tại E và MF ⊥ AD tại F. Chứng minh rằng:

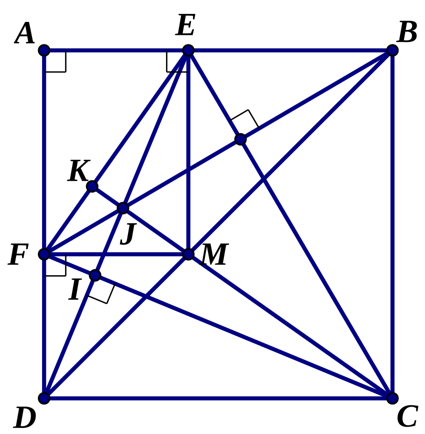
a) CF = DE; CF ⊥ DE

b) CM = EF; CM ⊥ EF

c) BF = CE; BF ⊥ CE

d) CM, BF, DE đồng quy

Lời giải



a) Chứng minh CF = DE; CF ⊥ DE

Ta có AEMF là hình chữ nhật (vì $\hat{A} = \hat{E} = \hat{F} = 90^0$)

$\Rightarrow$ AE = MF.

Mặt khác $\widehat{FMD} = \widehat{ABD} = 45^0$ (so le trong), suy ra MF = DF.

Từ đó ta suy ra hai tam giác AED và DFC bằng nhau (c-g-c).

Do đó CF = DE và $\widehat{ADE} = \widehat{DCF}$.

Gọi I là giao điểm của CF và DE, ta có:

$\begin{cases} \widehat{IFD} + \widehat{DCF} = 90^0 \\ \widehat{ADE} = \widehat{DCF} \end{cases} \Rightarrow \widehat{IFD} + \widehat{ADE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{FID} = 90^0$. Vậy CF ⊥ DE.

b) Chứng minh CM = EF; CM ⊥ EF

$\begin{cases} MF = FD \\ \widehat{MFC} = \widehat{FDE} \left(\text{vì } \widehat{MFC} + \widehat{IFD} = \widehat{FDE} + \widehat{IFD} = 90^0\right) \\ FC = DE \end{cases} \Rightarrow \Delta MFC = \Delta FDE \Rightarrow CM = EF$.

Lại có: $\begin{cases} \widehat{FCK} = \widehat{DEK} \\ \widehat{DEK} + \widehat{EFC} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{FCK} + \widehat{DEK} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EKJ} = 90^0$.

Vậy CM = EF; CM ⊥ EF.

c) BF = CE; BF ⊥ CE

Ta dễ dàng chứng minh $\Delta ABF = \Delta BCE$, suy ra BF = CE và

$\widehat{ABF} + \widehat{BEC} = \widehat{ECF} + \widehat{BEC} = 90^0$, suy ra BF = CE và BF ⊥ CE.

d) Theo kết quả ba câu trên thì CM, FB, ED là ba đường cao trong tam giác CEF. Theo tính chất ba đường cao trong một tam giác đồng quy, ta suy ra CM, BF, DE đồng quy.

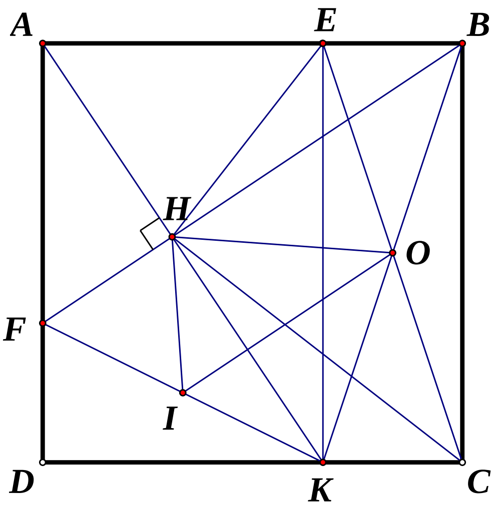
Bài 145. Cho hình vuông ABCD, lấy các điểm E, F, K lần lượt trên cạnh AB, AD, DC sao cho: AE = AF = DK.

a) Chứng minh AK ⊥ BF tại giao điểm H.

b) Chứng minh $\widehat{EHC} = 90^0$.

c) Cho AB = 3, AE = 2. Gọi I là trung điểm FK, O là trung điểm EC. Chứng minh chu vi ΔHIO bằng $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}\right)$.

Lời giải:



a) Chứng minh AK ⊥ BF tại giao điểm H.

Ta có $\Delta ABF = \Delta DAK$ (c-g-c)

Suy ra $\widehat{ABF} = \widehat{DAK}$ (1).

Mặt khác $\widehat{DAK} + \widehat{BAH} = 90^0$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \widehat{ABF} + \widehat{BAH} = 90^0$.

Vậy AK ⊥ BF.

b) Chứng minh $\widehat{EHC} = 90^0$.

Dễ thấy BEKC là hình chữ nhật, O là trung điểm của EC cũng là trung điểm của BK.

ΔBHK vuông tại H có HO là đường trung tuyến nên HO = OB = OK.

Suy ra HO = OC = OE. Mà OH là trung tuyến trong ΔHEC nên ta được ΔHEC vuông tại H. Vậy $\widehat{EHC} = 90^0$.

c) Cho AB = 3, AE = 2.

Theo trên ta có HO = $\frac{1}{2}$BK = $\frac{1}{2}\sqrt{BE^2+EK^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+9}=\frac{1}{2}\sqrt{10}$.

HI là đường trung tuyến trong tam giác vuông HFK

Do đó: HI = $\frac{1}{2}$FK = $\frac{1}{2}\sqrt{FD^2+DK^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+4}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Trong ΔFBK, OI là đường trung bình, do đó:

OI = $\frac{1}{2}$BF = $\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+AF^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9+4}=\frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Vậy chu vi tam giác OIH bằng: OI + OH + HI = $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}\right)$.

Bài 146. Cho đoạn thẳng AG và điểm D nằm giữa A và G. Trên cùng nữa mặt phẳng bờ AG vẽ các hình vuông ABCD, DEFG. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AG, EC. Gọi I, K lần lượt là tâm đối xứng của các hình vuông ABCD, DEFG.

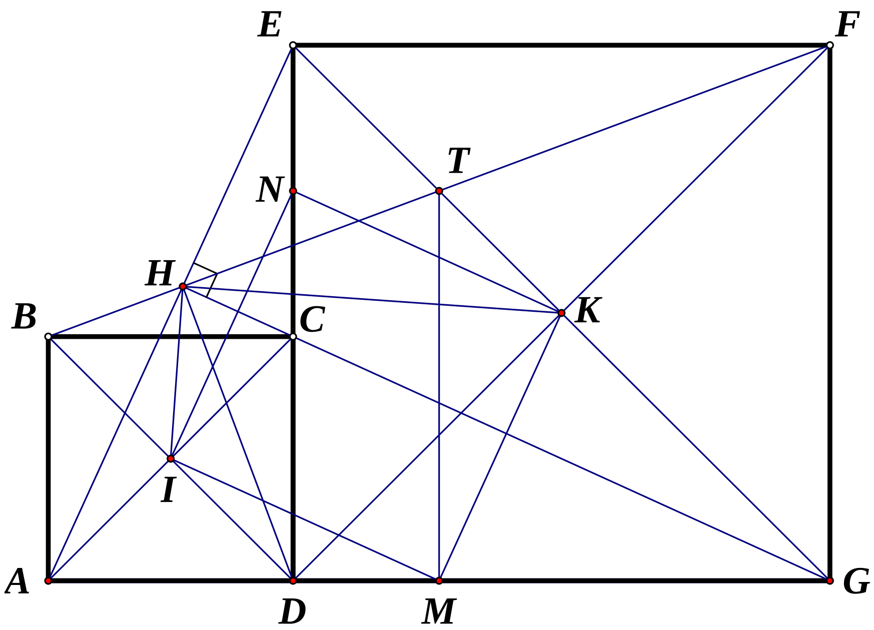
a) Chứng minh AE = CG và AE ⊥ CG tại H.

b) Chứng minh IMKN là hình vuông.

c) Chứng minh B, H, F thẳng hàng.

d) Gọi T là giao điểm của BF và EG. Chứng minh rằng độ dài TM không đổi khi D di động trên đoan thẳng AG cố định.

Lời giải:



a) Ta có: AD = CD, DE = DG, suy ra: $\Delta ADE=\Delta CDG$ (c-g-c) $\Rightarrow$ AE = CG.

$\widehat{AED}=\widehat{CGD},\ \widehat{ECH}=\widehat{GCD}\Rightarrow\widehat{AED}+\widehat{ECH}=\widehat{CGD}+\widehat{GCD}=90^0\Rightarrow\widehat{EHG}=90^0$.

Vậy AE = CG và AE ⊥ CG.

b) Chứng minh IMKN là hình vuông.

IN là đường trung bình trong tam giác ADE, IN = $\frac{1}{2}$AE và IN // AE.

KM là đường trung bình trong tam giác AGE, suy ra KM = $\frac{1}{2}$AE và KM // AE.

Từ đó suy ra IN = KM = $\frac{1}{2}$AE và IN // KM // AE.

Tương tự, IM, KN lần lượt là đường trung bình trong hai tam giác ACG và ECG.

Nên IM = KN = $\frac{1}{2}$CG và IM // KN // CG.

Lại có AE = CG và AE $\perp$ CG. Từ đó ta được IMKN là hình vuông.

c) Chứng minh B, H, F thẳng hàng.

Tam giác HAC vuông tại H, có HI là trung tuyến nên HI = IA = IC

Suy ra HI = IB = ID. Mà HI là trung tuyến của ΔHBD, do đó ΔHBD vuông tại H.

Tương tự, HK = KE = KG = KD = KF, suy ra ΔHDF vuông tại H.

Như vậy ta có BH $\perp$ DH và FH $\perp$ DH. Vậy B, H, F thẳng hàng.

d) $\widehat{ADB} = \widehat{AGE} = 45^0 \Rightarrow$ BD // GE.

K là trung điểm của DF nên KT là đường trung bình trong tam giác BDF, hay T là trung điểm của BF.

Tứ giác ABFG là hình thang hai đáy AB và FG, có TM là đường trung bình. Như vậy ta có:

$TM = \dfrac{AB + GF}{2} = \dfrac{AD + DG}{2} = \dfrac{AG}{2}$ (không đổi).

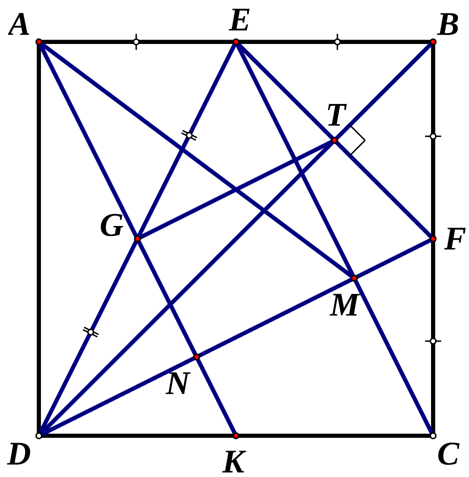
Bài 147. Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AB, BC, DE. Vẽ BT $\perp$ EF tại T.

a) Chứng minh ΔAGT cân.

b) Chứng minh CE $\perp$ GT.

c) Gọi M là giao điểm của CE và DF. Chứng minh AM = AB.

Lời giải:



a) ΔBEF cân tại B nên BT là phân giác góc $\widehat{ABC}$, do vậy BT đi qua D.

ΔTED vuông tại T có TG là trung tuyến nên TG = $\frac{1}{2}$DE.

ΔAED vuông tại A có AG là trung tuyến nên AG = $\frac{1}{2}$DE.

Vậy AG = TG, hay ΔAGT cân tại G.

b) Gọi K là trung điểm của CD, ta có AEKD là hình chữ nhật nên G là trung điểm của AK.

Dễ thấy tứ giác AECK là hình bình hành. Ta có CE // AG (1).

ΔADG cân tại G $\Rightarrow \widehat{ADG} = \widehat{DAG} = \frac{1}{2}\widehat{AGE}$. Tương tự, $\widehat{TDG} = \widehat{DTG} = \frac{1}{2}\widehat{TGE}$

$\Rightarrow \widehat{AGT} = \widehat{AGE} + \widehat{TGE} = 2\left(\widehat{ADG} + \widehat{TDG}\right) = 2\widehat{ADB} = 90^0$

$\Rightarrow$ AG $\perp$ GT (2).

(1) và (2) suy ra CE $\perp$ GT.

c) Gọi N là giao điểm của AK và DM, ta có AK // CE và K là trung điểm của DC nên N là trung điểm của DM.

Dễ thấy $\Delta BCE = \Delta CDF$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{CDF}$.

$\widehat{MCD} + \widehat{MDC} = \widehat{MCD} + \widehat{MCB} = 90^0$. Từ đó suy ra $CE \perp DF$.

Theo trên, AK // CE hay AN // CE, suy ra $AN \perp DF$.

Trong tam giác ADM, N là trung điểm DM và $AN \perp DM$ nên ΔADM cân tại A.

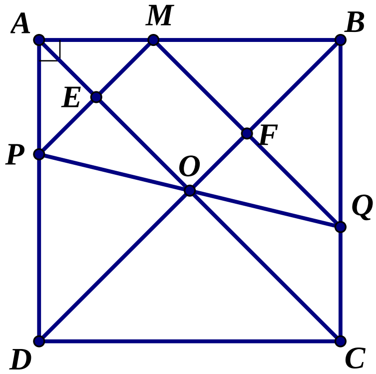
Vậy ta có AM = AD = AB.

Bài 148. Cho hình vuông ABCD có giao điểm của 2 đường chéo là O. Đường thẳng qua O cắt cạnh AD tại P, BC tại Q.

a) Chứng minh rằng AP = CQ

b) Vẽ $Px \perp AC$, $Qy \perp BD$; Px cắt Qy tại M, Px cắt OA tại E, Qy cắt OB tại F. Hỏi tứ giác OFME là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh rằng M nằm trên cạnh AB.



Lời giải:

a) Chứng minh AP = CQ. Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{OAP} = \widehat{OCQ} = 45^0 \\ OA = OC \\ \widehat{AOP} = \widehat{COQ} \end{cases} \Rightarrow \Delta OAP = \Delta OCQ \Rightarrow AP = CQ.$$

b) Theo chứng minh trên, O là trung điểm của PQ. Vì OF // PM (cùng vuông góc với AC) suy ra OF là đường trung bình trong tam giác PQM, do đó F là trung điểm của MQ.

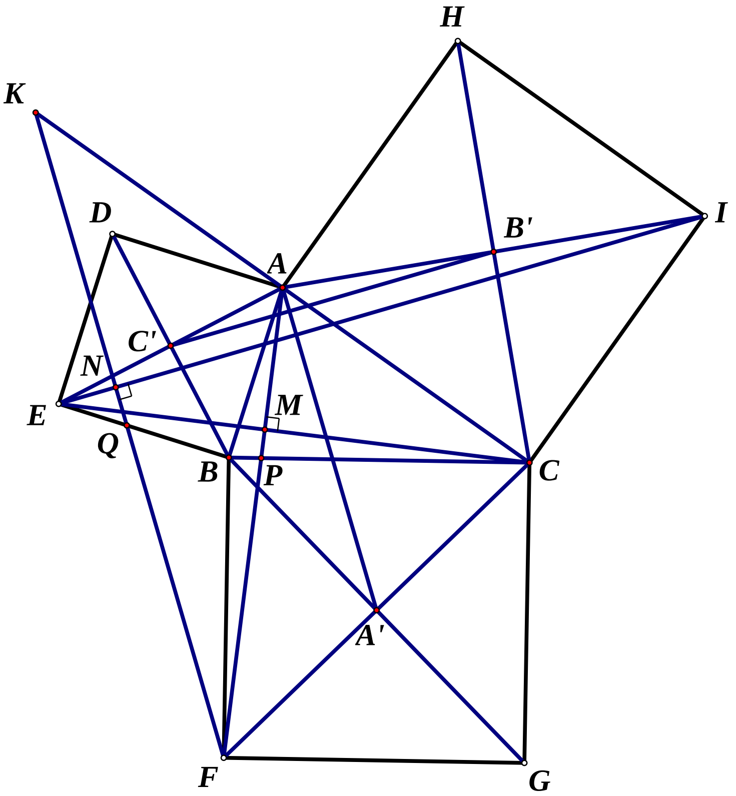
Vậy M và Q đối xứng nhau qua đường thẳng BD. Mặt khác, cạnh AB và cạnh AC đối xứng nhau qua đường thẳng BD và Q thuộc cạnh AC, suy ra M thuộc cạnh AB.

Bài 149.** Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Phía ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông ABED, BCGF, ACHI có tâm lần lượt là C′, A′, B′. Chứng minh:

a) AA′, BB′, CC′ là 3 cạnh của một tam giác.

b) Tam giác ABC và tam giác A′B′C′ có cùng trọng tâm.

c) Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là trung điểm của B′C′, AC, AA′, AB. Chứng minh rằng tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.



Giải:

a) Chứng minh AA′, BB′, CC′ là 3 cạnh của một tam giác.

* Ta chứng minh: AF = EC và AF ⊥ EC, BH = CD và BH ⊥ CD.

$\widehat{ABH} = \widehat{EBC} = 90^0 + \widehat{ABC} \Rightarrow \Delta ABF = \Delta EBC \Rightarrow AF = CE$.

AF cắt CE tại M, cắt BC tại P. $\widehat{MCP} + \widehat{MPC} = \widehat{PAF} + \widehat{BPF} = 90^0 \Rightarrow AF \perp CE$.

Chứng minh tương tự, ta được AF = EC và AF ⊥ EC, BH = CD và BH ⊥ CD.

* Gọi K là điểm đối xứng của C qua A.

Ta có: $\widehat{KAF} + \widehat{FAC} = 180^0$. Vì AF ⊥ EC nên $\widehat{FAC} + \widehat{ECA} = 90^0$. Suy ra:

$\widehat{KAF} = 180^0 - \left(90^0 - \widehat{ECA}\right) = 90^0 + \widehat{ECA} = \widehat{ECI}$.

Từ đó suy ra hai tam giác KAF và ICE bằng nhau(c-g-c) ⇒ KF = IE.

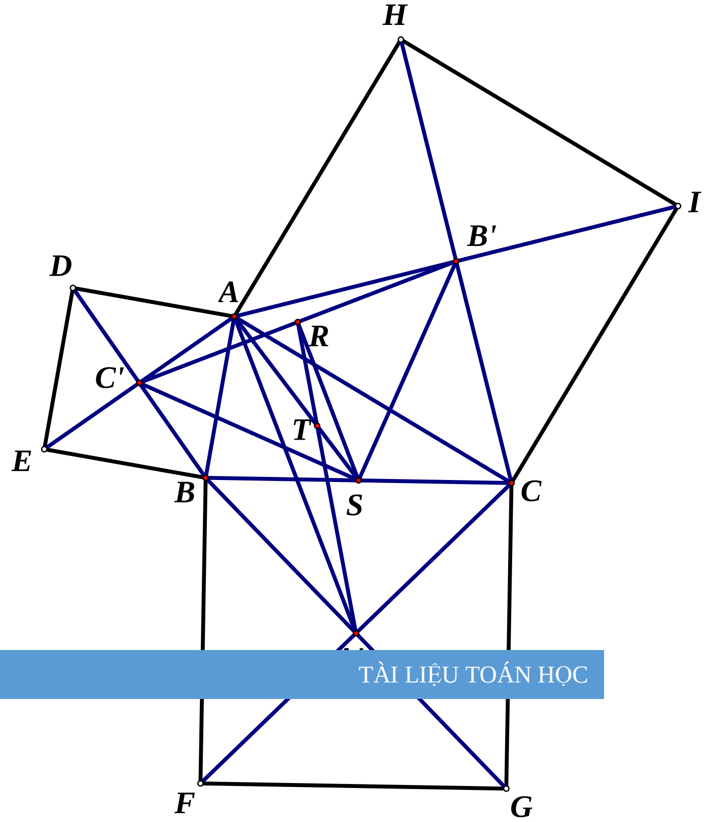
Mặt khác AA′ và B′C′ lần lượt là đường trung bình trong hai tam giác KFC và EAI.

$AA' = \frac{1}{2}KF,\ B'C' = \frac{1}{2}EI,\ KF = IE \Rightarrow AA' = B'C'$.

Tương tự ta có BB′ = A′C′, CC′ = A′B′. Vậy AA′, BB′, CC′ là độ dài ba cạnh của tam giác A′B′C′.

b) Chứng minh ABC và A′B′C′ có cùng trọng tâm.

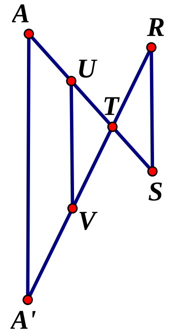
* Chứng minh KF ⊥ IE. Gọi N, Q lần lượt là giao điểm của KF với IE và CE.



$\widehat{NEC} + \widehat{NQE} = \widehat{MFQ} + \widehat{MQF} = 90^0$. Vậy $KF \perp IE$.

* Gọi S là trung điểm của BC $\Rightarrow C'S = \dfrac{1}{2}DC$, C′S // DC và $B'S = \dfrac{1}{2}BH$, B′S // BH. Theo trên ta có: $DC = BH$ và $DC \perp BH \Rightarrow \Delta C'SB'$ vuông cân tại S.

Gọi R là trung điểm C′B′ $\Rightarrow SR \perp C'B'$ và $SR = \dfrac{1}{2}C'B'$.

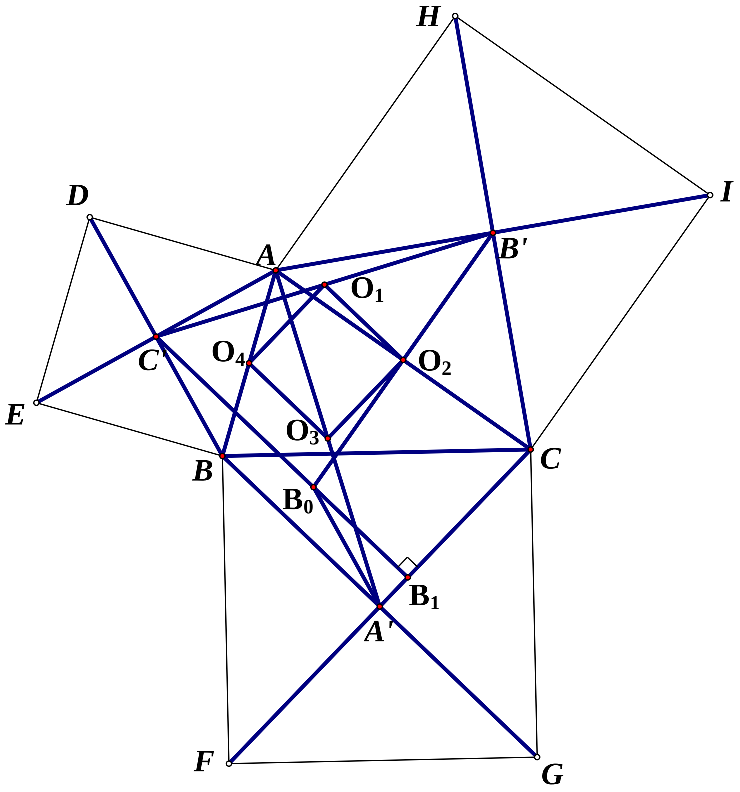


Theo chứng minh trên, $KF \perp EI$ suy ra $AA' \perp C'B' \Rightarrow$ SR // AA′, SR= $\dfrac{1}{2}AA'$.

Gọi T là giao điểm của AS và A′R. U, V lần lượt là trung điểm của AT và A′T. Dễ thấy SRUV là hình bình hành, suy ra UT= ST, VT = RT. Như vậy: AT = 2ST, A′T = 2RT.
Vậy T là trọng tâm của hai tam giác ABC và A′B′C′.
c) Chứng minh $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

Ta có O_2O_3 //CA′, $O_2O_3 = \dfrac{1}{2}CA'$và O_3O_4 // BA′, $O_3O_4 = \dfrac{1}{2}BA'$.

Vì $CA' = BA'$ và $CA' \perp BA' \Rightarrow O_2O_3 = O_3O_4$ và $O_2O_3 \perp O_3O_4$(*).
Gọi B_0 là điểm đối xứng của B qua O_2. Ta có $AB'CB_0$ là hình vuông.



Vì $AA' \perp B'C'$ nên $\widehat{C'B'C} = \widehat{A'AB'}$ (hai góc cùng phụ với góc $\widehat{AB'C'}$)

$\widehat{C'B'B_0} = \widehat{C'B'C} - 45^0$

$= \widehat{A'A'B'} - 45^0 = \widehat{A'AC}$.

Do vậy $\Delta C'B'B_0 = \Delta A'AC$ (c-g-c) $\Rightarrow C'B_0 = A'C = BA'$ (1) và $\widehat{C'B_0B'} = \widehat{A'CA}$.

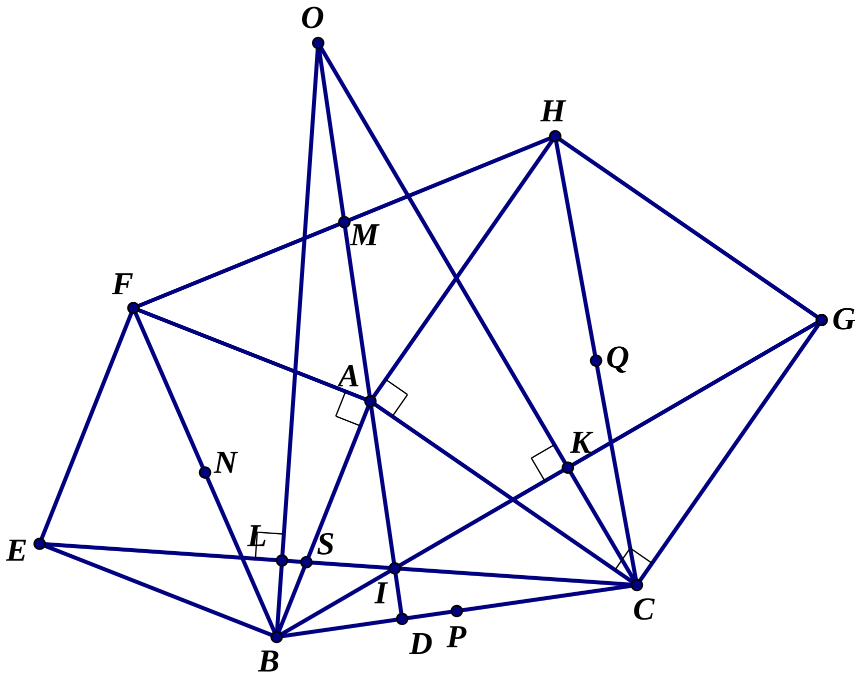
Gọi B_1 là giao điểm của $C'B_0$ và CA′

$\Rightarrow \widehat{B'B_0B_1} + \widehat{A'CA} = 180^0 \Rightarrow \widehat{B_0B_1C} = 90^0$

$C'B_0$ vuông góc CA′, suy ra $C'B_0$ // BA′(2).
Từ (1) và (2) suy ra $C'BA'B_0$ là hình bình hành, suy ra $C'B_0 = BA'$ và $C'B_0$ //BA′. Từ đó dễ dàng chứng minh được $O_1O_2 = O_3O_4$ và O_1O_2 // O_3O_4(**).
Từ (*) và (**) ta được $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

Bài 150.* Cho tam giác ABC. Phía ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông ABEF, ACGH, $AD \perp BC$ tại D.
a) Chứng minh rằng AD, BG, CE đồng quy.
b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của FH, BF, BC, CH. Chứng minh rằng MNPQ là hình vuông.

Lời giải:



a) Trên tia đối của tia AD lấy điểm O sao cho AO = BC, OC cắt BG tại K, cắt CE tại L. Ta chứng minh $CE \perp OB$ và $BG \perp OC$.

$\widehat{ABC} = \widehat{OAF}$ (cùng phụ với góc $\widehat{BAD}$) $\Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{BAO}$.

Từ đó suy ra $\Delta EBC = \Delta BAO$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{ABO}$.

Gọi S là giao điểm của EC và AB, ta có $\widehat{ABO} + \widehat{ESB} = \widehat{BEC} + \widehat{ESB} = 90^0$.

Vậy $CE \perp OB$.

Chứng minh tương tự, $BG \perp OC$. Như vậy CE, BG và OD là ba đường cao trong tam giác OBC. Do đó CE, BG và AC đồng quy.

b) Chứng minh tương tự bài 87, ta được FC = BH và $FC \perp BH$ (1).

Ta có MQ và NP lần lượt là đường trung bình trong tam giác FHC và FBC, do đó:

$$\begin{cases} MQ = \dfrac{1}{2}FC,\ MQ \,//\, FC\ (2) \\ NP = \dfrac{1}{2}FC,\ NP \,//\, FC \end{cases} \Rightarrow MQ = NP$$

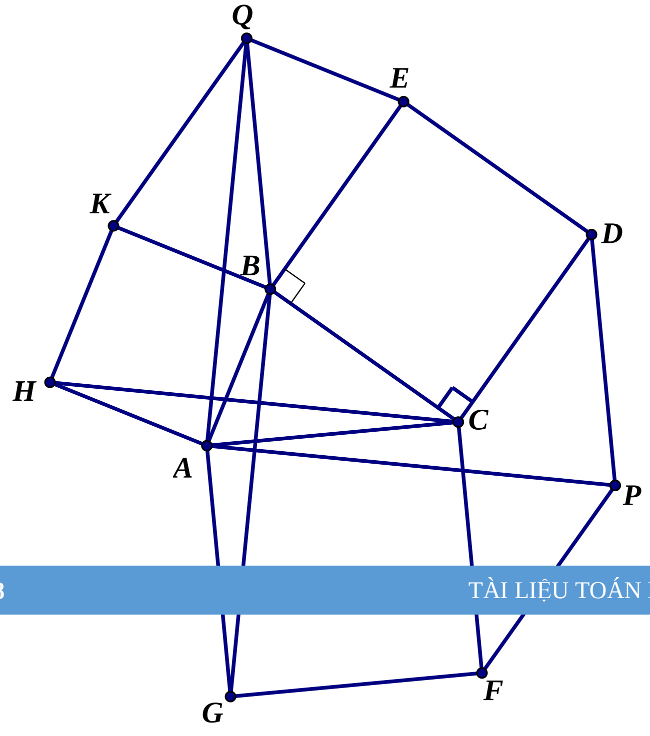
. Suy ra MNPQ là hình bình hành.

Lại có PQ // BH và $PQ = \dfrac{1}{2}BH$. Kết hợp với (1) và (2), ta được PQ = MQ và $PQ \perp MQ$.

Vậy MNPQ là hình vuông.

Bài 151.* Cho tam giác ABC. Phía ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông BCDE, ACFG, ABKH rồi vẽ tiếp các hình bình hành BEQK, CDPF. Chứng minh rằng tam giác APQ vuông cân.

Lời giải:



Xét hai tam giác ABC và BQK

Ta có: AB = BK; KQ = BE = AB, $\widehat{BKQ} = \widehat{ABC}$ (cùng bằng $180^0 - \widehat{KBE}$)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta BKQ \Rightarrow BQ = AC = AG$ và $\widehat{KBQ} = \widehat{CAB} \Rightarrow \widehat{ABQ} = \widehat{BAG}$

Suy ra BQ//AG (hai góc so le trong bằng nhau). Vậy AQBG là hình bình hành.

Ta có AQ = BG và AQ // BG

Chứng minh tương tự, AHCP là hình bình hành, suy ra AP = CH và AP // CH.

Mặt khác, ta chứng minh được $\Delta ABG = \Delta AHC$, từ đó suy ra BG = CH và BG $\perp$ CH.

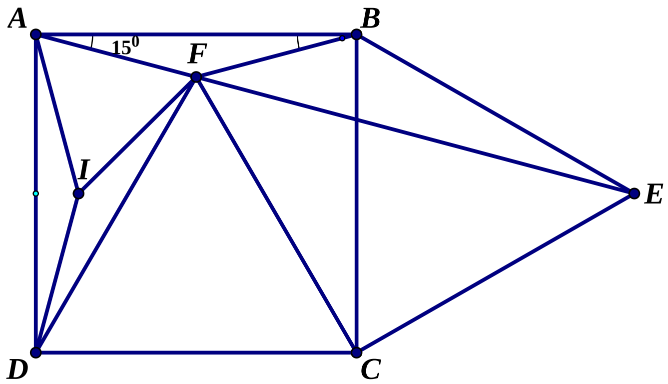
Do đó AP = AQ và AP $\perp$ AQ suy ra tam giác APQ vuông cân tại A.

Bài 152.* Cho hình vuông ABCD, bên trong ta dựng tam giác FAB cân tại F có $\widehat{FAB} = 15^o$; E là 1 điểm nằm ngoài hình vuông sao cho $\widehat{EBC} = \widehat{ECB} = 60^o$. Chứng minh rằng:

a) Tam giác FCD đều

b) A, F, E thẳng hàng.

Lời giải:



Dễ dàng nhận thấy hai tam giác DAF và CBF bằng nhau (c-g-c), suy ra DF = CF, hay tam giác CDF cân tại F.

Dựng tam giác đều AFI bên trong hình vuông ABCD.

$\widehat{DAI} = 90^0 - \left(15^0 + 60^0\right) = 15^0 = \widehat{FAB}$.

Hai tam giác DAI và FAB có:

$\begin{cases} DA = AB \\ \widehat{AID} = \widehat{FAB} = 15^0 \Rightarrow \Delta DAI = \Delta BAF \Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{AFB} = 150^0. \\ AI = AF \end{cases}$

Do đó ta chứng minh được $\Delta DAI = \Delta FDI$ (c-g-c) $\Rightarrow FD = AD = CD$.

Vậy tam giác CDF là tam giác đều.

b) Chứng minh A, E, F thẳng hàng

Tam giác FCB cân tại C, do đó $\widehat{FCB} = 180^0 - 2\widehat{FBC} = 180^0 - 2.75^0 = 30^0$.

Suy ra $\widehat{FCE} = \widehat{FCB} + \widehat{BCE} = 30^0 + 60^0 = 90^0$.

Dễ dàng chứng minh được tam giác CEF vuông cân tại C.

$\widehat{AFD} + \widehat{DFE} = \widehat{AFI} + \widehat{IFD} + \widehat{DFC} + \widehat{CFE} = 60^0 + 15^0 + 60^0 + 45^0 = 180^0$.

Vậy A, F, E thẳng hàng.

CHƯƠNG II ĐA GIÁC, DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

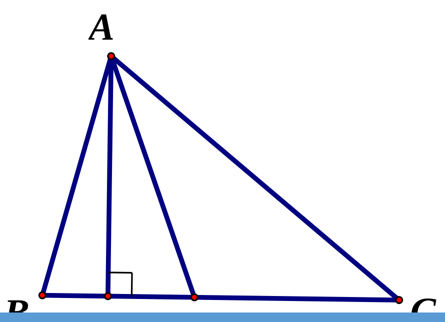
A. LÝ THUYẾT:

1. Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác.
2. Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và các góc ở đỉnh bằng nhau.
3. Cho đa giác n cạnh, số đường chéo xuất phát từ một đỉnh là n – 3 và số tam giác được tạo thành là n – 2 ; tổng số đo các góc của đa giác là $(n-2)180^0$; tổng số đường chéo là
$\dfrac{n(n-3)}{2}$
4. Diện tích đa giác có các tính chất sau:
- Hai tam giác bằng nhau thì diện tích của chúng bằng nhau.
- Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích những đa giác đó.
- Nếu chọn hình vuông có cạnh bằng 1cm, 1dm, 1m, ... làm đơn vị đo diện tích thì đơn vị diện tích tương ứng là $1cm^2$, $1dm^2$, $1m^2$,….

5) Diện tích của đa giác ABCDE thường được kí hiệu là S_{ABCDE}
6) Công thức tính diện tích hình chữ nhật (có 2 kích thước a, b) là:
$S = a.b$
7) Công thức tính diện tích hình vuông (có độ dài cạnh: a) là:
$S = a^2$
8) Công thức tính diện tích tam giác vuông (2 cạnh góc vuông: a, b) là:
$S = \dfrac{1}{2}a.b$
9) Công thức tính diện tích tam giác (cạnh đáy: a và chiều cao tương ứng: h) là:
$S = \dfrac{1}{2}a.h$
10) Công thức tính diện tích hình thang (2 đáy: a, b và chiều cao: h) là:
$S = \dfrac{1}{2}(a+b).h$
11) Công thức tính diện tích hình bình hành (có độ dài cạnh a và chiều cao tương ứng h_1 hay có độ dài cạnh b và chiều cao tương ứng h_2) là:
$S = a.h_1 = b.h_2$
12) Công thức tính diện tích hình thoi hay tứ giác có hai đường chéo vuông góc (có độ dài hai đường chéo d_1, d_2) là:
$S = \dfrac{1}{2}d_1.d_2$

B. BÀI TẬP:

Bài 153. Cho tam giác ABC, trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ. Chứng minh: $\dfrac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \dfrac{BM}{CM}$



Lời giải:

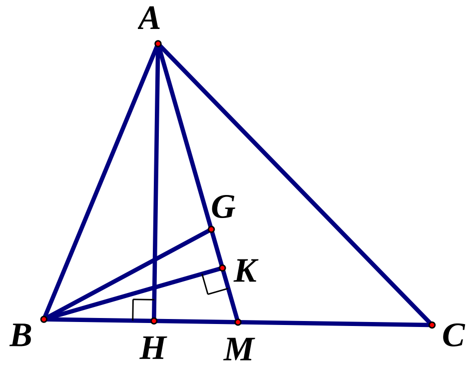
Dựng $AH \perp BC$, H thuộc BC.

Ta có: $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}AH.BM$, $S_{ACM} = \dfrac{1}{2}AH.CM$.

Do đó $\dfrac{S_{ABM}}{S_{ACM}}=\dfrac{\frac{1}{2}AH.BM}{\frac{1}{2}AH.CM}=\dfrac{BM}{CM}$.

Bài 154. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM, trọng tâm G.
Chứng minh rằng $S_{ABC} = 6S_{BMG}$

Lời giải:



Dựng $AH\perp BC$ (H thuộc BC) và $BK\perp AM$ (K thuộc AM).
Ta có:

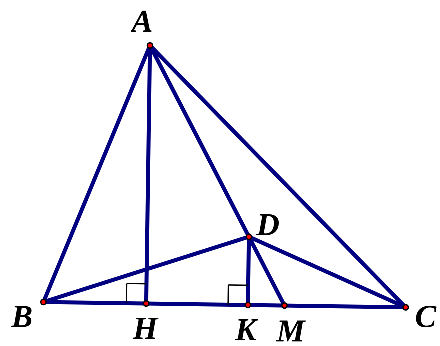
$\dfrac{S_{ABC}}{S_{ABM}}=\dfrac{\frac{1}{2}AH.BC}{\frac{1}{2}AH.BM}=2$, $\dfrac{S_{ABM}}{S_{AGM}}=\dfrac{\frac{1}{2}BK.AM}{\frac{1}{2}BK.GM}=\dfrac{AM}{GM}=3$.

Từ đó suy ra $S_{ABC}=6S_{BMG}$.

Bài 155. Cho tam giác ABC. Trên BC lấy điểm M bất kỳ. Trên đoạn thẳng AM lấy một điểm D bất kỳ. Chứng minh $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\dfrac{BM}{CM}$

Lời giải:

Dựng AH, DK vuông góc với BC (H, K thuộc BC).
Ta có:



$$\dfrac{S_{ABM}}{S_{ACM}}=\dfrac{\frac{1}{2}AH.BM}{\frac{1}{2}AH.CM}=\dfrac{BM}{CM}.$$

$$\dfrac{S_{DBM}}{S_{DCM}}=\dfrac{\frac{1}{2}DK.BM}{\frac{1}{2}DK.CM}=\dfrac{BM}{CM}.$$

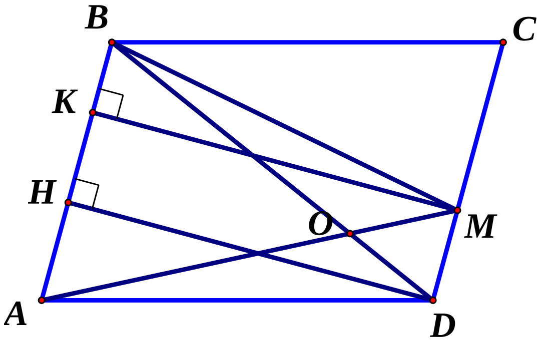
$$\Rightarrow \dfrac{S_{ABM}}{S_{ACM}}=\dfrac{S_{DBM}}{S_{DCM}}=\dfrac{BM}{CM}.$$

Như vậy ta có: $\dfrac{S_{ABM}}{S_{ACM}}=\dfrac{S_{DBM}}{S_{DCM}}=\dfrac{BM}{CM}$. Áp dụng tỷ lệ thức: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a-c}{b-d}$, ta suy ra:

$$\dfrac{S_{ABM}}{S_{ACM}}=\dfrac{S_{DBM}}{S_{DCM}}=\dfrac{S_{ABM}-S_{DBM}}{S_{ACM}-S_{DCM}}=\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\dfrac{BM}{CM}.$$

Bài 156. Cho hình bình hành ABCD. Lấy M tùy ý trên cạnh DC. Gọi O là giao điểm của AM và BD
a) Chứng minh rằng $S_{ABCD} = 2S_{MAB}$
b) Chứng minh rằng $S_{ABO} = S_{MOD} + S_{BMC}$

Lời giải:



a) Dựng DH, MK vuông góc với AB (H, K thuộc AB).
Tứ giác DMKH có HK // DM, DH // MK,
$\widehat{H} = 90^0$. Do đó DMKH là hình chữ nhật, suy ra DH = MK.

$S_{ABCD} = DH.AB,\ S_{MAB} = \frac{1}{2}MK.AB$.

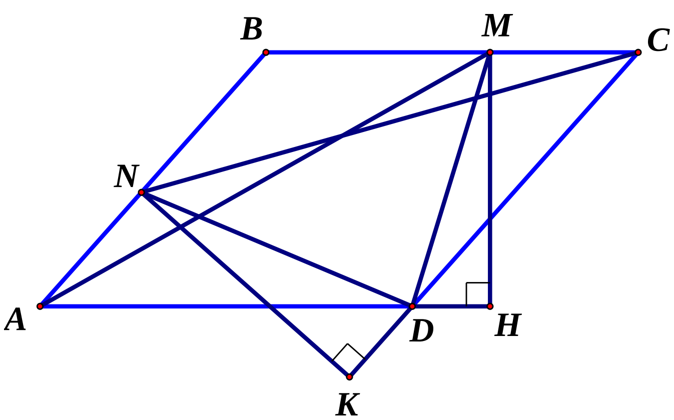
Từ đó suy ra $S_{ABCD} = 2S_{MAB}$.

b) Vì M thuộc cạnh CD nên O thuộc cạnh AM và BD.
Theo câu a) ta có:

$S_{MAB} = S_{BCD} \Rightarrow S_{ABO} + S_{BOM} = S_{BCM} + S_{BOM} + S_{MOD} \Rightarrow S_{ABO} = S_{BCM} + S_{MOD}$.

Bài 157. Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm M trên BC và điểm N trên AB sao cho AM = CN. Chứng minh rằng $S_{DAM} = S_{DCN}$, từ đó suy ra: đỉnh D của hình bình hành cách đều hai đường thẳng AM, CN.

Lời giải:



Dựng MH vuông góc AD tại H, NK vuông góc với CD tại K.
MH là đường cao của hình bình hành ABCD ứng với cạnh AD, suy ra: S_{ABCD} = MH.AD.
Lập luận tương tự, S_{ABCD} = NK.CD.
Do đó MH.AD = NK.CD (1)

Mặt khác, $S_{DAM} = \frac{1}{2}$MH.AD, $S_{DCN} = \frac{1}{2}$NK.CD. (2)

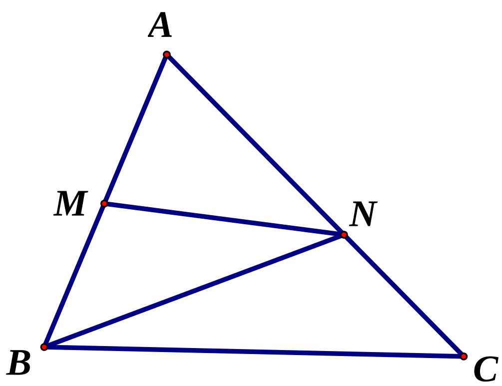
Từ (1), (2) suy ra $S_{DAM} = S_{DCN}$.
Gọi h_1, h_2 lần lượt là khoảng cách từ D đến AM, CN. Ta có:

$S_{DAM} = \frac{1}{2}h_1.AM$, $S_{DCN} = \frac{1}{2}h_2.CN$. Vì $S_{DAM} = S_{DCN}$ và AM = CN nên suy ra $h_1 = h_2$.

Bài 158. Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N. Chứng minh

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM.AN}{AB.AC}$$

Lời giải:



Chứng minh tương tự bài tập 105, ta được:

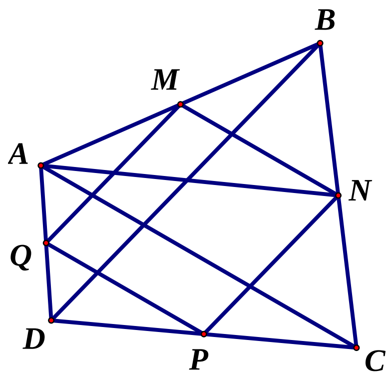
$\frac{S_{NAM}}{S_{NAB}} = \frac{AM}{AB}$ và $\frac{S_{BAN}}{S_{BAC}} = \frac{AN}{AC}$.

Suy ra:

$$\frac{S_{NAM}}{S_{NAB}}.\frac{S_{BAN}}{S_{BAC}} = \frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM.AN}{AB.AC}$$

Bài 159. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng: $S_{AMN} = \frac{1}{4}S_{ABC}$; $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Lời giải:



* Chứng minh $S_{AMN} = \frac{1}{4}S_{ABC}$

M là trung điểm AB suy ra $S_{NAM} = \frac{1}{2}S_{NAB}$

N là trung điểm BC nên $S_{NAB} = \frac{1}{2}S_{CAB}$.

Từ đó suy ra $S_{AMN} = \frac{1}{4}S_{ABC}$.

* Chứng minh $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Ta có: $S_{MNPQ} = S_{ABCD} - (S_{AMQ} + S_{BMN} + S_{CNP} + S_{DPQ})$.

Theo bài tập 110, thì ta có:

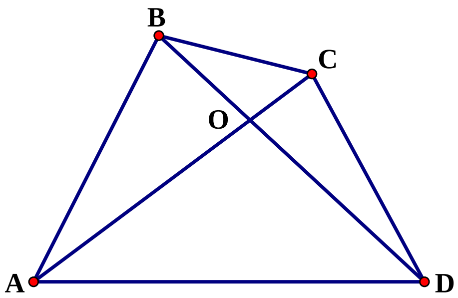
$\frac{S_{AMQ}}{S_{ABD}} = \frac{S_{BMN}}{S_{BAC}} = \frac{S_{CNP}}{S_{CBD}} = \frac{S_{DPQ}}{S_{DAC}} = \frac{1}{4}$. Suy ra

$S_{MNPQ} = S_{ABCD} - \frac{1}{4}(S_{ABD} + S_{BAC} + S_{CBD} + S_{DAC}) = S_{ABCD} - \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

Bài 160. Cho tứ giác ABCD có giao điểm hai đường chéo là O. Chứng minh rằng nếu $S_{OAB} = S_{BOC} = S_{COD}$ thì ABCD là hình bình hành.

Giải:



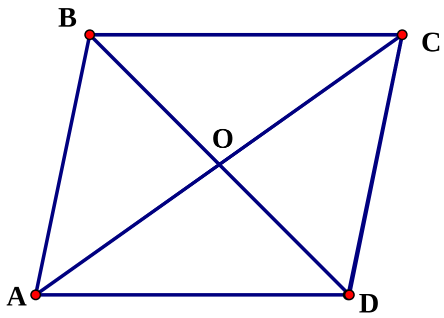
Xét hai tam giác OAB và ΔOBC .

Có chung đường cao hạ từ B .Gọi h_1 là độ dài của đường cao này.

Khi đó $S_{OAB}=\frac{1}{2}h_1.AO$ và $S_{OBC}=\frac{1}{2}.h_1.OC$

Mà $S_{OAB}=S_{OBC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}h_1.AO = \frac{1}{2}.h_1.OC \Leftrightarrow OA = OC$

Suy ra O là trung điểm AC



Xét hai tam giác S_{COD} và ΔS_{COB}

Có chung đường cao hạ từ C.Gọi h_2 là độ dài của đườngcao này.

Khi đó $S_{COD}=\frac{1}{2}h_2.OB = \frac{1}{2}h_2.OD \Rightarrow OB = OD$

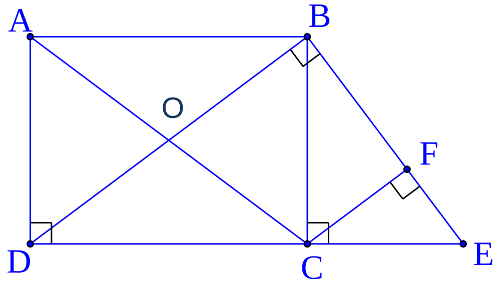
Suy ra O là trung điểm BD

Tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên tứ giác này là hình bình hành

Bài 161. Cho hình chữ nhật ABCD có AB=8cm, BC=6cm và hai đường chéo cắt nhau tại O. Qua B kẻ đường thẳng a vuông góc với BD, a cắt DC kéo dài tại E.

a) Tính tỉ số diện tích: $\dfrac{S_{BCE}}{S_{DBE}}$.

b) Kẻ đường cao CF của tam giác BCE. Chứng minh AC.EF =EB.CF.



Giải:

a) Ta có $\widehat{CBE} = \widehat{CDB}$ (cùng phụ với góc $\widehat{CBD}$).

$\widehat{BCD} = \widehat{ECB} = 90^0$. Do đó $\Delta CEB \sim \Delta CBD$

Suy ra: $\dfrac{EC}{BC} = \dfrac{BC}{CD} \Rightarrow EC = \dfrac{BC^2}{CD} = \dfrac{36}{8} = \dfrac{9}{2}(cm)$

$$\Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{EC}{EC+CD} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{2}+8} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{S_{BCE}}{S_{DBE}} = \frac{EC}{ED} = \frac{9}{25}.$$

b) Ta có: $\widehat{CEF} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với góc $\widehat{CDB}$) và $\widehat{CFE} = \widehat{ABC} = 90^0$.

Do đó: $\Delta CEF \sim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{EF}{CB} = \dfrac{CE}{AC} \Rightarrow AC.EF = CE.CB$ (1).

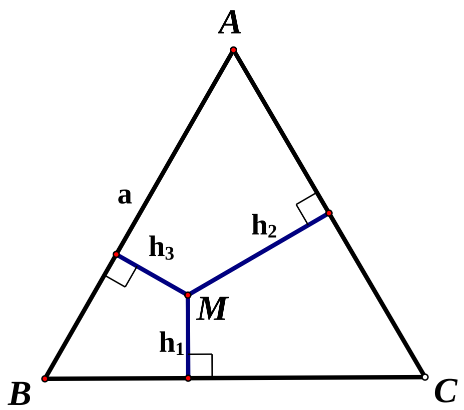
Mặt khác, dễ thấy: $\Delta BCF \sim \Delta BEC \Rightarrow \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{CF}{EC} \Rightarrow CB.CE = CF.BE$ (2).

(1), (2) suy ra: AC.EF = EB.CF.

Bài 162.* Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm bất kì trong tam giác đều đến các cạnh không phụ thuộc vào vị trí của điểm ấy.

Giải:

Giả sử tam giác ABC đều và M là một điểm bên trong tam giác.
Gọi a là cạnh của tam giác đều; h_1, h_2, h_3 lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.



Ta có: $S_{MBC} = \dfrac{1}{2}h_1.a$, $S_{MCA} = \dfrac{1}{2}h_2.a$, $S_{MAB} = \dfrac{1}{2}h_3.a$.

Do đó: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3)$.

Mặt khác $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a.h$, với h là chiều cao của tam giác đều ABC. Từ đó ta có:

$\dfrac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3) = \dfrac{1}{2}a.h \Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 = h$ (không đổi).

Vậy khoảng cách từ một điểm bất kì trong tam giác đều đến các cạnh không phụ thuộc vào vị trí của điểm ấy.

Bài 163.* Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC. Lấy điểm O sao cho B, C cùng phía so với bờ AO. Gọi B′, M′, C′ lần lượt là hình chiếu của B, M, C lên đường thẳng OA. Chứng minh rằng $S_{OAB} + S_{OAC} = 2S_{OAM}$

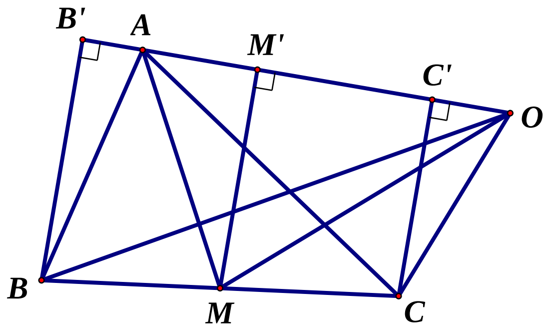
(Mở rộng: Xét trường hợp điểm O sao cho B, C khác phía với bờ AO. Chứng minh rằng $2S_{OAM} = |S_{OAC} - S_{OAB}|$).

Lời giải:

Ta có BB′ // CC′ // MM′ (vì cùng vuông góc với OA)

BCC′B′ là hình thang với hai đáy BB′ và CC′ và MM′ là đường trung bình của hình thang.

Ta có 2MM′ = BB′ + CC′(1)



$S_{OAB} = \frac{1}{2}BB'.OA$, $S_{OAC} = \frac{1}{2}CC'.OA$

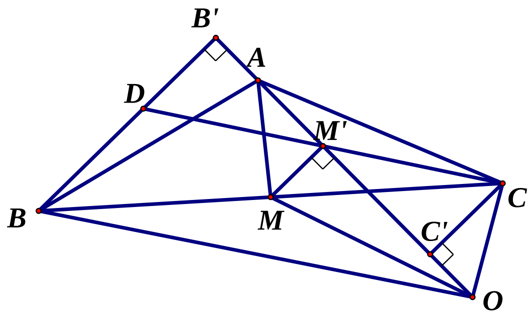
$S_{OAB} + S_{OAC} = \frac{1}{2}(BB' + CC').OA$ (2)

$S_{OAM} = \frac{1}{2}MM'.OA$ (3)

(1), (2), (3) suy ra $S_{OAB} + S_{OAC} = 2S_{OAM}$

* Mở rộng trường hợp B và C nằm khác phía so với đường thẳng OA.

Giả sử BB′ ≥ CC′. Gọi D là giao điểm của CM′ với đường thẳng B′B.



MM′ // BB′, M là trung điểm BC nên MM′ là đường trung bình trong tam giác BCD, suy ra M′ là trung điểm của CD.

Dễ dàng chứng minh được ΔM’B’D = ΔM’C’C (g-c-g), suy ra CC′ = B′D.

Vì M′, B′ thuộc đường thẳng AO nên D nằm trên tia B′B. Mặt khác B′D = CC′ ≤ B′B, do đó D thuộc đoạn B′B.

$MM' = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}(BB' - CC') \Rightarrow \frac{1}{2}MM'.OA = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(BB' - CC')OA$

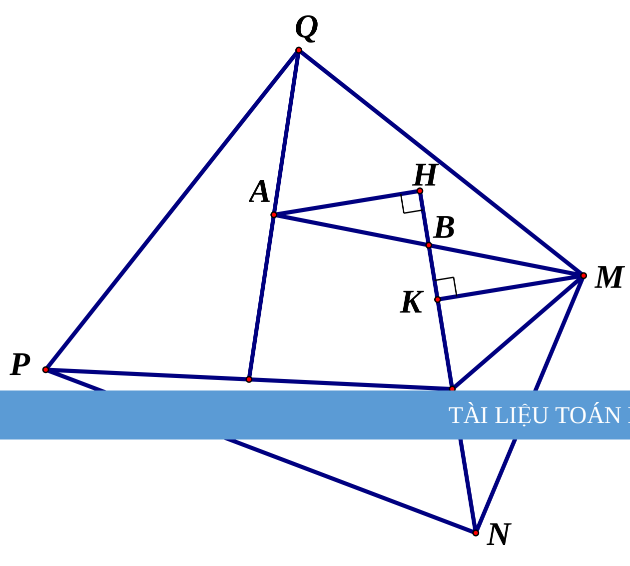
Hay $2S_{OAM} = S_{OAB} - S_{OAC}$.

Trường hợp CC′ ≥ BB′ chứng minh tương tự.

Bài 164.* Cho tứ giác ABCD. Kéo dài AB một đoạn BM = AB, kéo dài BC một đoạn CN = BC, kéo dài CD một đoạn DP = CD và kéo dài DA một đoạn AQ = DA. Chứng minh rằng $S_{MNPQ} = 5S_{ABCD}$

Lời giải:

* Ta chứng minh $S_{MBC} = S_{ABC}$. Thật vậy: Dựng MK, AH vuông góc với BC (K, H thuộc đường thẳng BC). Vì B là trung điểm của AM, ta chứng minh được hai tam giác AHB và MKB bằng nhau (g-c-g), suy ra MK = AH. Từ đó:



$S_{MBC} = \frac{1}{2}MK.BC = \frac{1}{2}AH.BC = S_{ABC}$

* Mặt khác, vì C là trung điểm của BN nên $S_{MBN} = 2S_{MBC} = 2S_{ABC}$.

Chứng minh tương tự, ta được:

$S_{MBN} = 2S_{ABC}$, $S_{NCP} = 2S_{BCD}$, $S_{PDQ} = 2S_{CDA}$, $S_{QAM} = 2S_{DAB}$

* $S_{MNPQ} = S_{ABCD} + S_{MBN} + S_{NCP} + S_{PDQ} + S_{QAM}$

$= S_{ABCD} + 2(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB})$

$= S_{ABCD} + 2(S_{ABC} + S_{CDA} + S_{BCD} + S_{DAB})$

$= S_{ABCD} + 2(S_{ABCD} + S_{ABCD})$

$= 5S_{ABCD}$

HÌNH HỌC – HỌC KÌ 2

Chương 3. ĐỊNH LÝ THALES TRONG TAM GIÁC. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Bài 1,2. ĐỊNH LÝ THALES TRONG TAM GIÁC. ĐỊNH LÝ ĐẢO, HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ THALES

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1) Đoạn thẳng tỉ lệ

a) Tỉ số của hai đoạn thẳng

Tỉ số của hai đoạn thẳng AB và CD, ký hiệu $\frac{AB}{CD}$, là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

Chú ý: Tỉ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào các chọn đơn vị đo.

b) Đoạn thẳng tỉ lệ

Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D' nếu có tỉ lệ thức:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'} \quad hay \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{CD}{C'D'}$$

c) Một số tính chất của tỉ lệ thức

$$i)\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}\Rightarrow AB.C'D'=A'B'.CD$$

$$ii)\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB+A'B'}{CD+C'D'}=\frac{AB-A'B'}{CD-C'D'}$$

$$iii)\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{AB\pm CD}{CD}=\dfrac{A'B'\pm C'D'}{C'D'}\\ \dfrac{AB}{CD\pm AB}=\dfrac{A'B'}{C'D'\pm A'B'}\end{cases}$$

d) Điểm chia một đoạn thẳng theo một tỉ số cho trước

* Cho đoạn thẳng AB. Một điểm C thuộc đoạn thẳng AB (hoặc thuộc đường thẳng AB) được gọi là chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{a}{b}$, nếu có $\frac{CA}{CB}=\frac{a}{b}$

* Nếu C chia AB theo tỉ số $\frac{a}{b} \neq 0$ thì C chia BA theo tỉ số là $\frac{b}{a}$

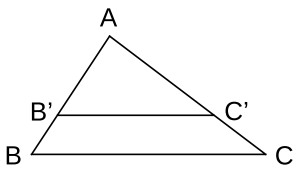
* Nếu C chia AB theo tỉ số $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow AC = CB$

2) Định lý thales (Talet) trong tam giác

a) Định lý Talet thuận

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Ví dụ 1. Cho hình vẽ



$$\text{Ta có } \left.\begin{matrix} B'C' \parallel BC \\ B' \in AB; C' \in AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} \\ \dfrac{AB'}{B'B} = \dfrac{AC'}{C'C} \\ \dfrac{AB}{B'B} = \dfrac{AC}{C'C} \end{cases}$$

b) Định lý Talet đảo

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

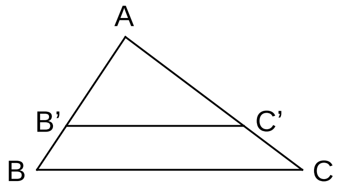
Ví dụ 2.

$$\left.\begin{matrix} B' \in AB; C' \in AC \\ \dfrac{AB'}{B'B} = \dfrac{AC'}{C'C}\left(hay\, \dfrac{AB}{B'B} = \dfrac{AC}{C'C} hay....\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow B'C' \parallel BC$$

c) Hệ quả của định lý Talet

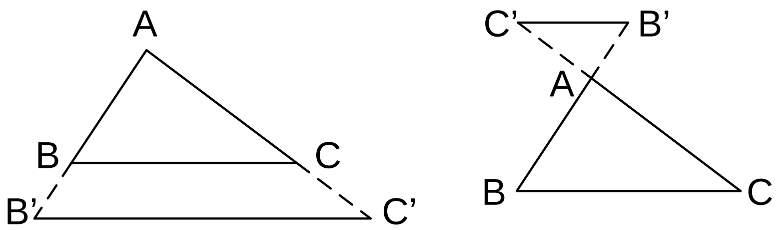
Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Ví dụ 3.



$$B'C' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

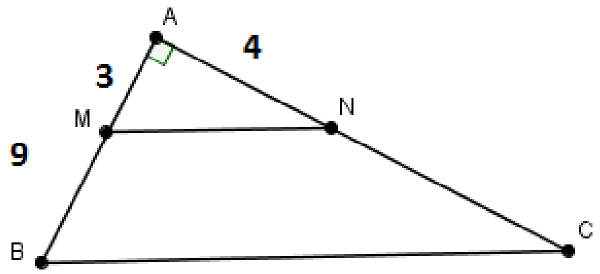
Chú ý: Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng song song với một cạnh và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.



$B'C' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, MN//BC ($M \in AB; N \in AC$), AB=9cm; AM = 3cm; AN = 4cm. Tính độ dài các đoạn thẳng NC, MN, BC

Bài giải



MB = AB – AM = 6cm. Vì MN//BC

nên theo hệ quả định lí Talet ta có

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AC - AN} \Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{4}{NC} = \frac{1}{2}$$

Suy ra NC = 8cm

Xét tam giác vuông AMN có góc A bằng 1 vuông, ta có

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 = 25$$
$$MN = 5cm$$

Vì MN//BC nên theo hệ quả định lí Talet ta có

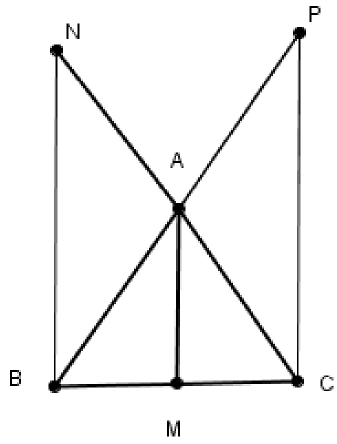
$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow \frac{3}{9} = \frac{5}{BC}$ Suy ra BC = 15cm

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC, M là một điểm bất kì trên BC. Các đường song song với AM vẽ từ B và C cắt AC, AB tại N và P. Chứng minh $\frac{1}{AM} = \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP}$

Bài giải

Áp dụng hệ quả của định lí Talet cho tam giác BNC và tam giác CPB, ta có



$\frac{AM}{BN} = \frac{MC}{CB}$ (1) và $\frac{AM}{CP} = \frac{BM}{BC}$ (2)

Lấy (1) + (2) ta được $\frac{AM}{BN} + \frac{AM}{CP} = \frac{MC + BM}{CB} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} = \frac{1}{AM}$

Bài 2. Cho hình thang ABCD (AB// CD), M là trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm BM và AC.

a) Chứng minh IK//AB

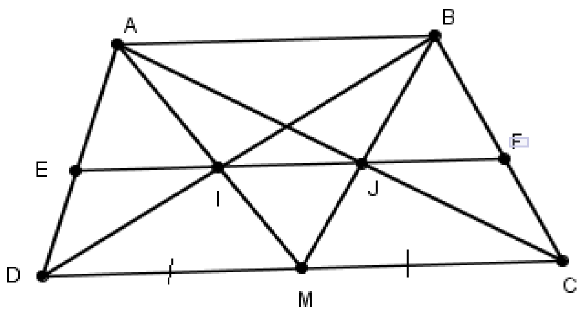
b) Đường thẳng IK cắt AD, BC theo lần lượt E, F. Chứng minh EI = IK = KF

Bài giải

a) Theo giải thiết AB//CD nên theo định lý Talet ta có

$$\frac{IM}{IA} = \frac{DM}{AB};\frac{KM}{KB} = \frac{MC}{AB}$$

Mà CM = DM nên



$\frac{IM}{IA} = \frac{KM}{KB} \Rightarrow IK\,//\,AB$

(theo định lí Talet đảo)

b) Theo chứng minh câu a ta có IE//CD

$\Rightarrow \frac{EI}{DM} = \frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC} = \frac{KF}{MC} \Rightarrow \frac{EI}{DM} = \frac{KF}{MC}$

Mà DM = MC$\Rightarrow IE = KF$

Chứng minh tương tự IK = KF

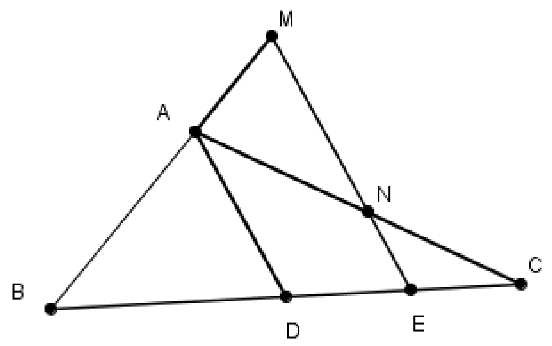
Vậy IE = IK = KF

Bài 3. Cho tam giác ABC và trung tuyến AD. Một đường thẳng bất kỳ song song với AD cắt cạnh BC, đường thẳng CA, AB lần lượt tại E, N, M.

Chứng minh $\frac{EM}{AD}+\frac{EN}{AD}=2$

Bài giải

Trong tam giác ADC có EN//AD



Nên $\frac{EN}{AD}=\frac{EC}{CD}$

Trong tam giác BME có AD//ME

Nên $\frac{EM}{AD}=\frac{BE}{BD}$

Mà BD = DC (AM là trung tuyến)

Do đó $\frac{EN}{AD}+\frac{EM}{AD}=\frac{CE}{CD}+\frac{BE}{CD}$

$$=\frac{CE+BE}{CD}=\frac{EC+BD+DE}{CD}=\frac{2BD}{CD}=2 \text{ (vì BD = CD)}$$

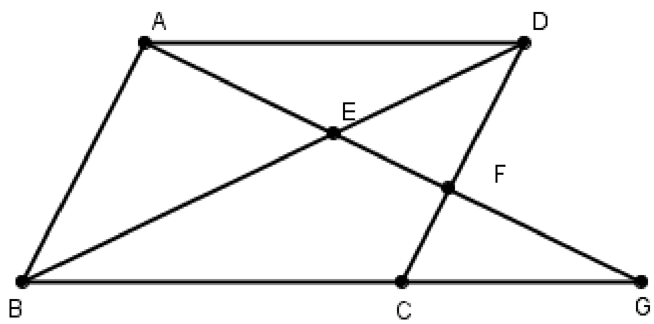
Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng bất kỳ qua A cắt đoạn BD, đường thẳng CD và BC lần lượt tai E, F và G. Chứng minh rằng

a) $AE^2=\mathrm{EF}.EG$

b) $\frac{1}{\mathrm{AF}}+\frac{1}{AG}=\frac{1}{AE}$

c) Khi đường thẳng qua A thay đổi thì tích BK.DG có giá trị khôn đổi

Bài giải



a) Ta có DF//AB. Theo hệ quả của định lí Talet ta có $\frac{\mathrm{EF}}{AE}=\frac{ED}{EB}$ (1)

Lại có AD//BG nên $\frac{ED}{EB}=\frac{AE}{EG}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{\text{EF}}{EA}=\frac{AE}{EG}$

$\Rightarrow AE^2=\text{EF}.EG$

b) Đẳng thức phải chứng minh tương đương với $\frac{AE}{\text{AF}}+\frac{AE}{AG}=1$

Từ $\frac{AE}{\text{EF}}=\frac{BE}{ED}\Rightarrow\frac{AE}{\text{AF}}=\frac{DE}{DB}$ và $\frac{AE}{AG}=\frac{DE}{EB}\Rightarrow\frac{AE}{\text{AG}}=\frac{BE}{DB}$

Do đó $\frac{AE}{\text{AF}}+\frac{AE}{AG}=\frac{BE}{DB}+\frac{DE}{BD}=\frac{BD}{BD}=1$

Vậy $\frac{1}{\text{AF}}+\frac{1}{AG}=\frac{1}{AE}$

c) Đặt AB = a, AD = b thì

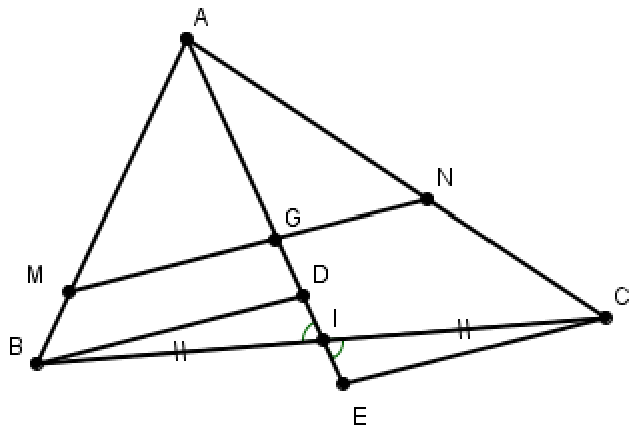
do AB//CF nên $\frac{CF}{a}=\frac{CG}{BG}$ (1) AD//BG nên $\frac{DF}{CF}=\frac{b}{CG}$ (2)

Nhân (1) và (2) vế theo vế ta được $\frac{DF}{a}=\frac{b}{CG}\Rightarrow DF.CG=a.b$ không đổi

Bài 5. Cho tam giác ABC. Với G là trọng tâm. Một đường thẳng bất kì qua G cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M, N

Chứng minh $\frac{AC}{AN}+\frac{AB}{AM}=3$

Bài giải



Gọi AI là trung tuyến của tam giác ABC, vẽ BD//MN, CE//MM ($D,E \in AG$).

Ta có BD//CE

Xét ΔIBD và ΔICE có

$\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ (đối đỉnh)

BI = IC (AI là trung tuyến)

$D\hat{B}I = E\hat{C}I$ (so lê trong)

Do đó $\Delta IBD = \Delta ICE$ (c.g.c)

nên BD = CE, DI = IE

Trong tam giác AMG có MG//BD nên $\frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AG}$ (hệ quả định lí Talet)

Trong tam giác ANG có NG//EC nên $\frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AG}$ (hệ quả định lí Talet)

Do đó $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{AD+AE}{AG} = \frac{AI-DI+AI+IE}{AG} = \frac{2AI}{\frac{2}{3}AI} = 3$

Vì DI = IE (cmt); GA=$\frac{2}{3}$AI (G là trong tâm)

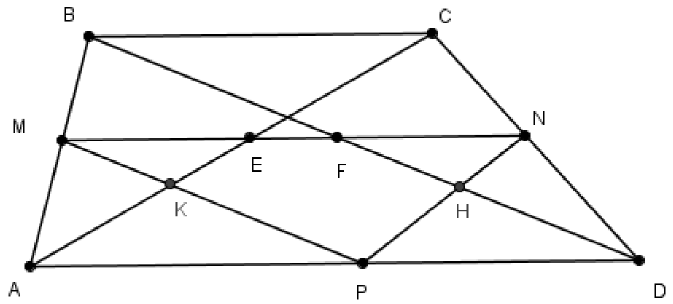
Vậy $\frac{AC}{AN} + \frac{AB}{AM} = 3$

Bài 6. Cho hình thang ABCD có hai đáy BC và AD (BC khác AD). Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên cạnh AB, CD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$. Đường thẳng MN cắt AC, BD tương ứng tại E và F. Vẽ MP//BD $(P \in AD)$

a) Chứng minh rằng PN//AC

b) Chứng minh ME = NF

Bài giải



a) Ta có MP//BD nên $\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{AM}{AB}$ (định lí Talet)

Mà $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{CN}{CD}$ (1) suy ra $\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{CN}{CD}$

Suy ra PN//AC (định lí Talet)

b) Ta có FN//BC nên $\dfrac{FN}{BC}=\dfrac{CN}{CD}$ (1)

ME//BC nên $\dfrac{ME}{BC}=\dfrac{AM}{AB}$ (2)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{ME}{BC}=\dfrac{FN}{BC}\Rightarrow ME=FN$

Bài 7. Cho tam giác ABC. Kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB ở D và cắt AC tại E. Qua C kẻ Cx song song với AB, cắt DE ở G. Gọi H là giao điểm của AC và BG. Kẻ HI song song với AB $\left(I\in BC\right)$. Chứng minh rằng

a) AD.EG = BD.DE

b) $HC^2=HE.HA$

c) $\dfrac{1}{HI}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{CG}$

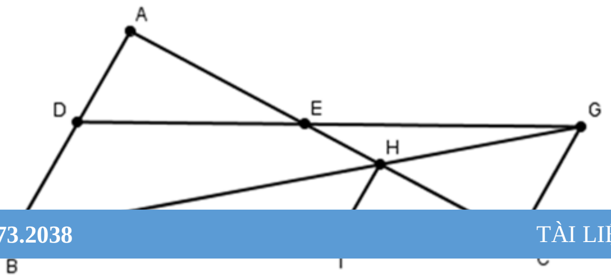
Bài giải

a) Tứ giác DGCB có DG//BC; CG//DB nên tứ giác DGCB là hình bình hành

$\Rightarrow$ BD = CG (1)

Trong tam giác AD//CG nên

$\dfrac{DE}{EG}=\dfrac{DA}{GC}$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DE}{EG}=\frac{DA}{BD}$

$\Rightarrow$ DE.BD = DA.EG (đpcm)

b) Ta có BC//EG $\Rightarrow \frac{HE}{HC}=\frac{HG}{HB}$ (định lí Talet)

Ta lại có AB//CG $\Rightarrow \frac{HC}{HA}=\frac{HG}{HB}$

Suy ra $\frac{HE}{HC}=\frac{HC}{HA}$

$\Rightarrow HC^2=HA.HE$ (đpcm)

c) Ta có AB//IH $\Rightarrow \frac{HI}{AB}=\frac{IC}{BC}$ (định lí Talet) (3)

IH//CG $\Rightarrow \frac{IH}{CG}=\frac{IB}{BC}$ (định lí Talet) (4)

Lấy (3) +(4) vế theo vế ta được $\Rightarrow \frac{IH}{CG}+\frac{HI}{AB}=\frac{IB}{BC}+\frac{IC}{BC}=\frac{IB+IC}{BC}=1$

Hay $\frac{IH}{CG}+\frac{HI}{AB}=1 \Rightarrow \frac{1}{CG}+\frac{1}{AB}=\frac{1}{IH}$ (đpcm)

Bài 8. Cho 3 tia Ox. Oy, Oz tạo thành $x\hat{O}y=y\hat{O}z=60^0$. Chứng minh nếu A, B, C là 3 điểm thẳng hàng trên Ox, Oy, Oz thì ta có $\frac{1}{BD}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}$

Bài giải

Qua B vẽ BD//Ox, D$\in$Oz. Và DE//Oz, E $\in$Ox

Ta có tứ giác ODBE là hình bình hành mà OB là tia phân giác của góc AOC, nên ODBE là hình thoi.

Suy ra DB = BE

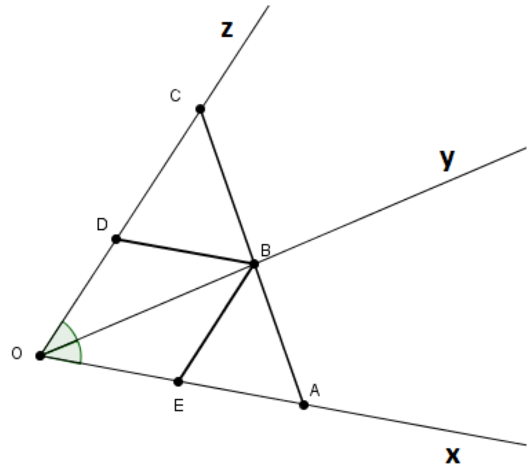
Tam giác AOC có BD//OA nên $\frac{BD}{OA}=\frac{CB}{AC}$(hệ quả định lí Talet)

Tam giác AOC có EB//OC nên $\frac{BE}{OC}=\frac{AB}{AC}$ (hệ quả định lí Talet)

Do đó $\frac{BD}{OA}+\frac{BE}{OC}=\frac{CB+AB}{AC}=1$

Hay $\frac{BD}{OA}+\frac{BD}{OC}=1$ vì BD = BE (cmt)

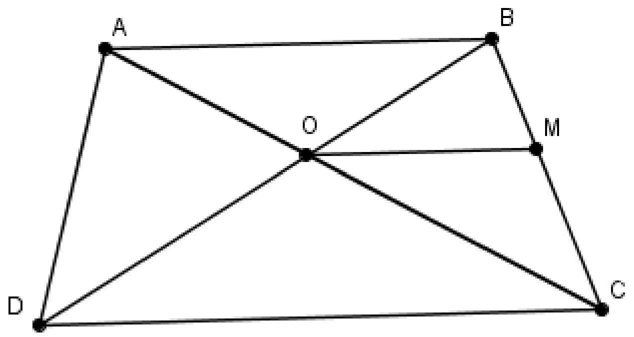
Nên $\frac{1}{BD}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}$



Bài 9. Cho hình thang ABCD (AB//CD). Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo. Qua O ta kẻ một đường thẳng song song với CD cắt BC tại M.

Chứng minh $\frac{1}{OM}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$

Bài giải



Trong tam giác ABC có OM//AB $\Rightarrow \frac{OM}{AB}=\frac{MC}{BC}$ (1)

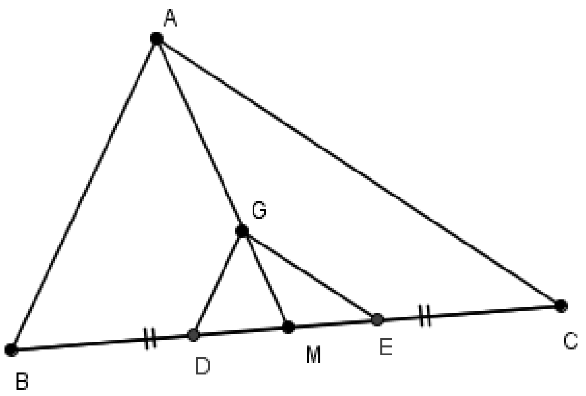
Trong tam giác DCB có OM//DC $\Rightarrow \frac{OM}{CD}=\frac{MB}{BC}$ (2)

Do đó $\frac{OM}{AB}+\frac{OM}{CD}=\frac{MC}{BC}+\frac{BM}{BC}=1$

Hay $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{OM}$

Bài 10. Cho tam giác ABC, G là trong tâm. Qua G kẻ đường thẳng song song với AB nó cắt BC tại D, kẻ đường thẳng song song với AC, nó cắt BC tại E. So sánh tỉ số $\frac{BD}{BC};\frac{EC}{BC}$

Bài giải



Vì G là trong tâm tam giác ABC nên ta có $\frac{AG}{AM}=\frac{2}{3}$

áp dụng định lí Talet vào tam giác MAB với DG//BA ta có

$$\frac{BD}{BM}=\frac{AG}{AM}=\frac{2}{3}$$

Suy ra $\frac{BD}{2.BM}=\frac{2}{2.3}$ Hay $\frac{BD}{BC}=\frac{1}{3}$ (1)

áp dụng định lí Talet vào tam giác MAC với GE//AC ta có

$\frac{EC}{MC}=\frac{AG}{AM}=\frac{2}{3}$ suy ra $\frac{EC}{2.MC}=\frac{2}{2.3}=\frac{1}{3}$ hay $\frac{EC}{BC}=\frac{1}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BD}{BC}=\frac{EC}{BC}=\frac{1}{3}$

Bài 11. Hình thang ABCD đáy nhỏ CD. Qua D vẽ đường thẳng song song với BC cắt AC tại M. Qua C vẽ đường thẳng AD cắt AB tại F . Qua F lại kẻ đường thẳng song song AC cắt BC tại P. Chứng minh rằng

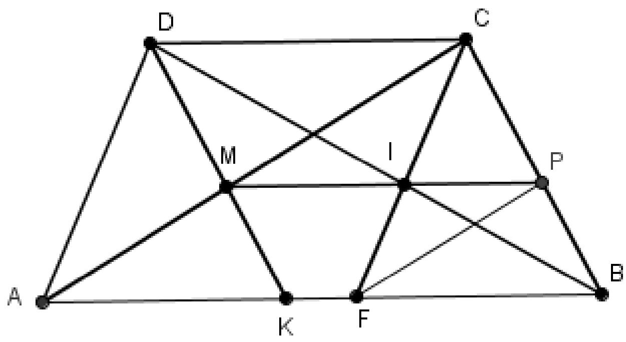
a) MP//AB

b) Ba đường thẳng MP, CF, BD đồng qui.

Bài giải

a) Trong tam giác ABC có FP//AC $\Rightarrow \frac{CP}{BP}=\frac{\text{AF}}{FB}$ (1)

Trong tam giác DMC có AK//DC



$\Rightarrow \dfrac{CM}{MA} = \dfrac{DC}{AK}$ (2)

Các tứ giác AFCD; DCBK là các hình bình hành suy ra

AF = DC; DC = KB; $\Rightarrow FB = AK$ (3)

Kết hợp (1) (2) và (3) ta có $\dfrac{CP}{PB} = \dfrac{CM}{MA}$

Áp dụng định lí đảo Talet ta có MP//AB

b) Gọi I là giao điểm của BD và CF . Theo câu a ta có

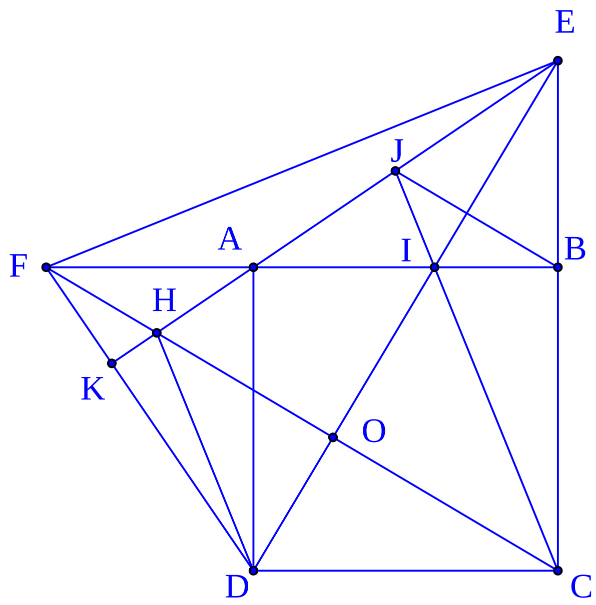
$\dfrac{CP}{PB} = \dfrac{CM}{AM} = \dfrac{DC}{AK} = \dfrac{DC}{FB}$ mà $\dfrac{DC}{FB} = \dfrac{DI}{IB}$ do FB//DC

Rút ra $\dfrac{CP}{PB} = \dfrac{DI}{IB}$ từ đó PI//DC (//AB)

Theo a) ta cũng có PM//AM. Theo tiên đề Oclit về đường thẳng song song thì ba điêm P, I, M thẳng hàng, nói cách khác, MP phải đi qua giao điểm I của BD và CF

Bài 12. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm I. Gọi E là giao điểm của DI và CB. Gọi J là giao điểm của AE và CI. Chứng minh BJ vuông góc DE.

Giải:



Trên tia đối của tia AB lấy điểm F sao cho AF = BE. CF cắt EA, ED lần lượt tại H, O, EA cắt DF tại K.

Ta có $\Delta ABE = \Delta DAF$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{BEA}$ (1), $AE = DF$ (2),

Vì $\widehat{FAK} = \widehat{BAE}$ và $\widehat{BAE} + \widehat{BEA} = 90^0$ (3)

(1), (3) suy ra $\widehat{AFD} + \widehat{FAK} = 90^0$, hay EA $\perp$ DF.

$\widehat{ADF} = \widehat{BAE} \Rightarrow \widehat{CDF} = \widehat{DAE}$, kết hợp với (2), ta được:

$\Delta CDF = \Delta DAE$ (c-g-c), suy ra $\widehat{DCF} = \widehat{ADE}$ (4).

Mặt khác $\widehat{CDO}+\widehat{ADE}=90^0$ nên $\widehat{CDO}+\widehat{DCF}=90^0$, như vậy ta có $ED\perp CF$.

Từ đây suy ra I là trực tâm tam giác CEF và H là trực tâm tam giác DEF, suy ra $CI\perp EF$, $DH\perp EF\Rightarrow DH\ //\ CI$.

Theo định lí Talet thì: $\dfrac{EJ}{EH}=\dfrac{EI}{ED}=\dfrac{EB}{EC}$, do vậy BJ // CH.

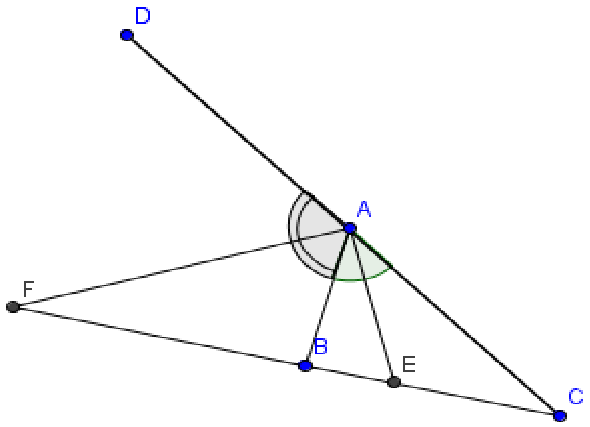
Theo trên $CH\perp ED$, vậy $BJ\perp ED$.

Bài 3. TÍNH CHẤT CỦA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG TAM GIÁC

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1) Định lí

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với 2 cạnh kề đoạn thẳng ấy.



AE là phân giác trong của góc A

$$\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

Ví dụ: Cho tam giác ABC, đường phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại D.

a) Tính tỉ số $\frac{BD}{DC}$ biết AB = 3cm; AC = 5cm

b) Tính độ dài DC, biết BD = 1,5cm

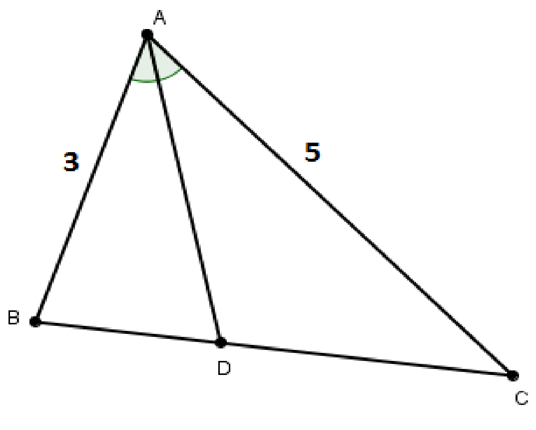
Bài giải:

a) AD là phân giác của $B\hat{A}C$, ta có

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$. Vậy $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow DC = \frac{5}{3}BD$

hay $DC = \frac{5}{3}1,5 = 2,5cm$



2) Lưu ý

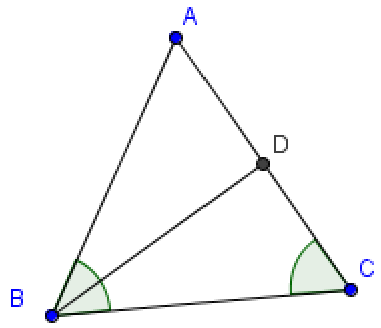
Định lí vẫn đúng với phân giác của góc ngoài của tam giác

AE là phân giác ngoài của góc A $\Rightarrow \dfrac{FB}{FC} = \dfrac{AB}{AC}$

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 13. Cho tam giác ABC cân ở A, phân giác trong BD, BC = 10cm, AB = 15cm.Tính AD, DC.

Bài giải:



BD là phân giác trong của góc B nên

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$$

Theo tính chất của tỉ lệ thức, ta có

$$\frac{DA + DC}{DC} = \frac{BA + BC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{15 + 10}{10}$$

$$\Rightarrow DC = \frac{10.AC}{25} = \frac{10.15}{25} = 6 \text{ (cm)}$$

Ta có DA + DC = AC $\Rightarrow AD = AC - DC = 15 - 6 = 9$ (cm)

Bài 14. Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Phân giác trong của góc A cắt BC tại D, phân giác ngoài góc A cắt BC tại E. Tính BD, DC, EB,EC theo a, b, c.

Bài giải:

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ABC ta có

- $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{BD + DC}{DC} = \dfrac{AB + AC}{AC}$ (tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

$$\Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{AB + AC}{AC} \Rightarrow DC = \frac{BC.AC}{AB + AC} = \frac{a.b}{c + b}$$

$$\Rightarrow BD = a - \frac{ab}{c + b} = a\left(1 - \frac{b}{b + c}\right)$$

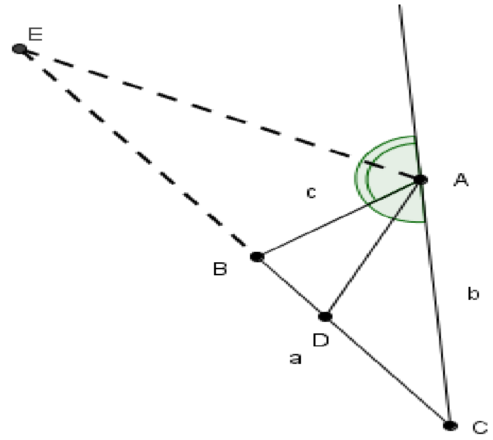
- $\dfrac{EC}{EB}=\dfrac{AC}{AB}\Rightarrow\dfrac{EC-EB}{EB}=\dfrac{AC-AB}{AB}$

$$\Rightarrow\frac{BC}{EB}=\frac{AC-AB}{AB}$$

$$\Rightarrow EB=\frac{BC.AB}{AC-AB}=\frac{a.c}{b-c}$$

$$EC=EB+BC=\frac{a.c}{b-c}+a$$

$$=a\left(\frac{c}{b-c}+1\right)$$



Bài 15. Cho tam giác ABC có 3 phân giác trong AM, BN, CP cắt nhau tại I. Chứng minh a) $\dfrac{\text{AP}}{AP}.\dfrac{BM}{BC}.\dfrac{CN}{CA}=1$

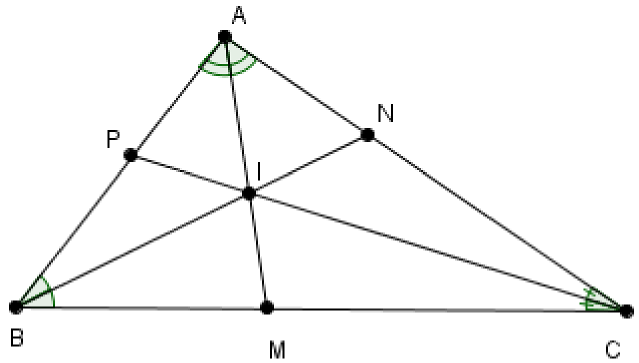
b) $\dfrac{MI}{MA}+\dfrac{NI}{NB}+\dfrac{PI}{PC}=1$

Bài giải

a) Ta có AM là phân giác của góc A

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác, ta có

$$\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$$



Tương tự đối với các đường phân giác BN, CP ta có

$$\frac{NC}{NA}=\frac{BC}{BA};\frac{PA}{PB}=\frac{CA}{CB}$$

Do đó $\dfrac{MB}{MC}\cdot\dfrac{NC}{NA}\cdot\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{BC}{BA}\cdot\dfrac{CA}{CB}=1$

Vậy $\dfrac{\text{AP}}{AP}.\dfrac{BM}{BC}.\dfrac{CN}{CA}=1$

b) Gọi a, b, c lần lượt là độ dài của các cạnh BC, CA, AB

Trong ΔABM thì BI là phân giác ứng với cạnh AM nên

$$\frac{MI}{IA}=\frac{BM}{BA}=\frac{BM}{c}\Rightarrow\frac{MI}{MI+IA}=\frac{BM}{BM+c}\Rightarrow\frac{MI}{MA}=\frac{BM}{BM+c}\qquad(1)$$

Trong ΔACM thì CI là phân giác ứng với cạnh AM nên

$$\frac{MI}{IA}=\frac{CM}{CA}=\frac{CM}{b}\Rightarrow\frac{MI}{MI+IA}=\frac{CM}{CM+b}\Rightarrow\frac{MI}{MA}=\frac{CM}{CM+b}$$

Mà CM = BC – BM = a – BM . Nên $\dfrac{MI}{MA}=\dfrac{a-BM}{a-BM+b}$ (2)

So sánh (1) và (2) ta có $\dfrac{MI}{MA}=\dfrac{BM}{BM+c}=\dfrac{a-BM}{a-BM+b}=\dfrac{BM+a-BM}{BM+c+a-BM+b}$

$$\Rightarrow\frac{MI}{MA}=\frac{a}{a+b+c}$$

Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{NI}{BN}=\dfrac{b}{a+b+c}$

$$\frac{PI}{CP}=\frac{c}{a+b+c}$$

Suy ra $\dfrac{MI}{MA}+\dfrac{NI}{BN}+\dfrac{PI}{CP}=\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{a+b+c}+\dfrac{c}{a+b+c}=\dfrac{a+b+c}{a+b+c}=1$

Vậy $\dfrac{MI}{MA}+\dfrac{NI}{NB}+\dfrac{PI}{PC}=1$

Bài 16. Cho tam giác ABC, phân giác trong AD. Phân giác giác $\widehat{ADC}$ cắt AC tại F, phân giác $\widehat{ADB}$ cắt AB tại E. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{AF}{AE}.\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{AB}{AC}$

b) AF.BE.CD = AE.BD.CF

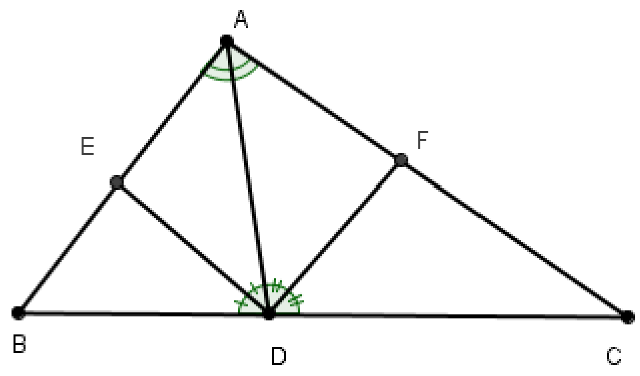
Bài giải

a) Áp dụng tính chất đường phân giác

ta có

$$\frac{BE}{AE}=\frac{BD}{AD} \quad (1)$$

$$\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{DC} \quad (2)$$



Nhân (1) với (2) vế theo vế ta được

$$\frac{AF}{FC}\cdot\frac{BE}{AE}=\frac{AD}{DC}.\frac{BD}{AD}=\frac{BD}{DC}$$

Do AD là phân giác góc A nên $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$

Vậy $\frac{AF}{AE}.\frac{BE}{CF}=\frac{AB}{AC}$

b) Nhân (1) với (2) vế theo vế ta được

$$\frac{AF}{FC}\cdot\frac{BE}{AE}=\frac{AD}{DC}.\frac{BD}{AD}\Rightarrow\frac{AF}{FC}\cdot\frac{BE}{AE}\cdot\frac{DC}{BD}=\frac{AD}{DC}.\frac{BD}{AD}\cdot\frac{DC}{BD}=1$$

Hay $\frac{AF}{FC}\cdot\frac{BE}{AE}\cdot\frac{DC}{BD}=1$

Vậy AF.BE.CD = AE.BD.CF

Bài 17. Cho tam giác ABC, phân giác trong BD, CE. Chứng minh rằng

a) Nếu DE//BC thì tam giác ABC cân tại A.

b) Nếu tam giác ABC cân tại A thì DE//BC.

Bài giải

a) Giả sử DE//BC thì ta có $\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}$ (1)

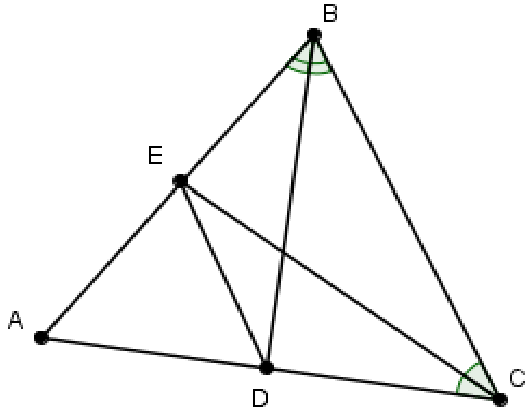
Mặt khác, BD là phân giác góc B nên ta có $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$ và CE là phân giác góc C nên ta có $\frac{AE}{EB}=\frac{AC}{BC}$

Suy ra $\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow AC=AB$

Nên ΔABC cân tại A

b) Giả sử ΔABC cân tại A $\Rightarrow AC=AB$

Ta có BD là phân giác góc B



nên ta có $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$ và CE là phân giác góc C nên ta có $\frac{AE}{EB}=\frac{AC}{BC}$

Mặt khác $AC=AB$

Suy ra $\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}\Rightarrow$ DE//BC

Bài 18. Cho hình bình hành ABCD $(AB>AD,\hat{A}>90^0)$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $\widehat{DBC}=\widehat{CBE}$. Đường thẳng BE cắt đường thẳng AD tại M. Đường thẳng CM cắt AB tại F, BD tại K. Chứng minh rằng

a) $CK^2=KF.KM$

b) $\frac{1}{CK}=\frac{1}{CF}+\frac{1}{CM}$

c) $\frac{BF}{FA}=\frac{BE}{BD}$

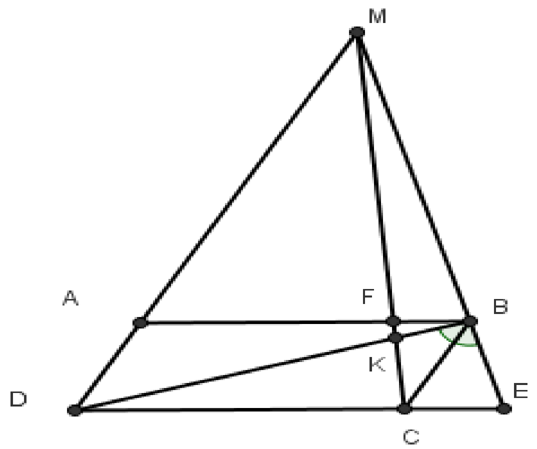
Bài giải

c) Ta có BC//DM $\Rightarrow\frac{CK}{KM}=\frac{KB}{KD}$

Ta lại có FB//DC $\Rightarrow\frac{FK}{KC}=\frac{KB}{KD}$

Suy ra $\frac{FK}{KC}=\frac{KC}{KM}\Rightarrow CK^2=KF.KM$

d) Ta có BC//DM



$$\Rightarrow \frac{CK}{CM} = \frac{KB}{BD} \ (1)$$

Ta lại có FB//DC

$$\Rightarrow \frac{CK}{CF} = \frac{KD}{BD} \ (2)$$

Lấy (1) cộng (2) vế theo vế ta được

$$\frac{CK}{CF} + \frac{CK}{CM} = \frac{KD}{BD} + \frac{KB}{BD} = \frac{BD}{BD} = 1$$

Vậy $\frac{1}{CF} + \frac{1}{CM} = \frac{1}{CK}$

c) Ta có $\widehat{DBC} = \widehat{CBE}$ suy ra BC là phân giác góc B

Theo tính chất phân giác ta có $\frac{CE}{DC} = \frac{BE}{BD}$ (3)

Mặt khác, ta có FB//CE $\Rightarrow \frac{FB}{CE} = \frac{MF}{FC}$

AF//DC $\Rightarrow \frac{FA}{CD} = \frac{MF}{FC}$

Suy ra $\frac{FA}{CD} = \frac{BF}{CE} \Rightarrow CD.BF = FA.CE \Rightarrow \frac{BF}{FA} = \frac{CE}{CD}$ (4)

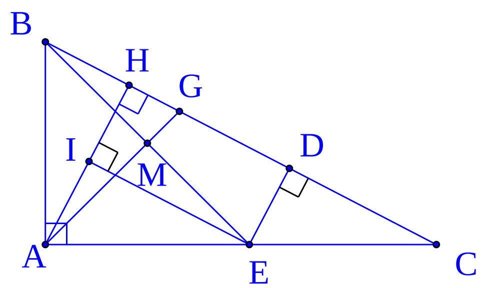
Từ (3) và (4) suy ra $\frac{BF}{FA} = \frac{BE}{BD}$

Bài 19. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), vẽ đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm D sao cho HD = AH. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại E. Gọi M là trung điểm của BE, tia AM cắt BC tại G. Chứng minh: $\frac{BG}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$.

Giải:

$$\frac{BG}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BG} = \frac{AH + HC}{HD} = 1 + \frac{HC}{HD}$$



$$\Rightarrow \frac{BC}{BG} - 1 = \frac{HC}{HD} \Rightarrow \frac{BC - BG}{BG} = \frac{HC}{HD} \Rightarrow \frac{GC}{GB} = \frac{HC}{HD}$$

Ta chứng minh: $\frac{HC}{HD} = \frac{GC}{GB}$. Ta có: DE // AH $\Rightarrow \frac{HC}{HD} = \frac{AC}{AE}$.

Dựng đường thẳng qua E vuông góc AH tại I, suy ra HIED là hình chữ nhật.

IE = HD = HA; $\widehat{IAE} = \widehat{HBA}$ do đó hai tam giác vuông IEA và HBA bằng nhau.

$$\Rightarrow AE = AB \Rightarrow \frac{HC}{HD} = \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{AB}.$$

Vì M là trung điểm BE, tam giác ABE cân tại A nên AM là tia phân giác góc $\widehat{BAC}$ hay G là chân đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ trong tam giác ABC. Từ đó ta có:

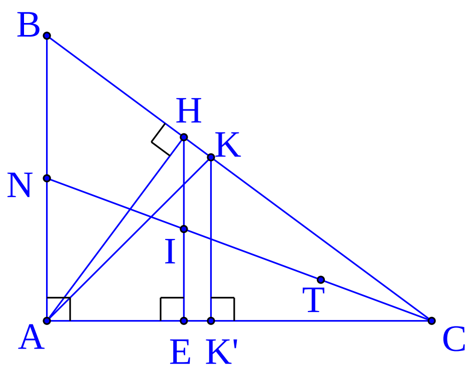
$\frac{GC}{GB} = \frac{AC}{AB}$. Vậy $\Rightarrow \frac{HC}{HD} = \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{AB} = \frac{GC}{GB}$. Chứng minh xong!

Bài 20. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao (H thuộc BC), N là trung điểm của AB. Biết AB=6cm, AC=8cm.

a) Vẽ AK là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ (K thuộc BC). Tính AK?

b) Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên AC và T là điểm đối xứng của N qua I với I là giao điểm của CN và HE. Chứng minh tứ giác NETH là hình bình hành.

Giải:



a) Theo tính chất chân đường phân giác trong ta có:

$$\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{CK}{CB} = \frac{4}{7}.$$

Gọi K' là hình chiếu vuông góc của K lên AC, suy ra KK' // AB. Theo định lí Talet ta có:

$$\frac{KK'}{AB} = \frac{CK}{CB} = \frac{4}{7} \Rightarrow KK' = \frac{4}{7}.AB = \frac{4}{7}.6 = \frac{24}{7}(cm)$$

.

Mặt khác, tam giác AKK' vuông cân tại K' nên:

$$AK = KK'.\sqrt{2} = \frac{24}{7}\sqrt{2}(cm).$$

b) Ta chứng minh I là trung điểm của HE.

Vì HE $\perp$ AC nên HE // BA. Theo định lí Talet ta có: $\frac{IE}{NA} = \frac{CI}{CN} = \frac{IH}{NB}$.

Vì NA = NB nên IE = IH. Do đó I là trung điểm của HE.

Theo giả thiết thì I là trung điểm của NT.

Tứ giác NETH có hai đường chéo NT và EH có chung trung điểm I nên NETH là hình bình hành.

Bài 4, 5, 6. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG.
CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA HAI TAM GIÁC
(CẠNH – CẠNH – CẠNH, CẠNH – GÓC – CẠNH, GÓC - GÓC)

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1) Định nghĩa

Hai tam giác gọi là đồng dạng với nhau nếu chúng có 3 cặp góc bằng nhau đôi một và 3 cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.

Ví dụ 1. ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A'};\hat{B}=\hat{B'};\hat{C}=\hat{C'}\\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \Delta ABC\backsim \Delta A'B'C'$$

- Các góc bằng nhau gọi là các góc tương ứng.
- Các đỉnh của các góc bằng nhau gọi là các đỉnh tương ứng.
- Các cạnh đối diện với góc bằng nhau gọi là các cạnh tương ứng
- Khi dùng ký hiệu $\Delta ABC\backsim\Delta ABC$ thì **phải** ghi **đúng thứ tự** cặp **đỉnh tương ứng**
- Tỉ số của hai cạnh tương ứng k gọi là tỉ số đồng dạng.

2) Tính chất

a) Phản xạ $\Delta ABC\backsim\Delta ABC$

b) Đối xứng

$\Delta ABC\backsim\Delta A'B'C'$ theo tỉ số k thì $\Delta A'B'C'\backsim\Delta ABC$ theo tỉ số $\dfrac{1}{k}$

c) Bắc cầu

$\Delta A_1B_1C_1\backsim\Delta A_2B_2C_2$

$\Delta A_2B_2C_2\backsim\Delta A_3B_3C_3$

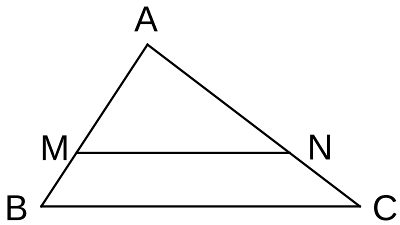
$\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1\backsim\Delta A_3B_3C_3$

Lưu ý. Nếu $\Delta A_1B_1C_1$ và $\Delta A_2B_2C_2$ đồng dạng theo tỉ số k_1, $\Delta A_2B_2C_2$ và $\Delta A_3B_3C_3$ đồng dạng theo tỉ số k_2 thì $\Delta A_1B_1C_1$ và $\Delta A_3B_3C_3$ đồng dạng theo tỉ số là k_1k_2

3) Định lí

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác đồng dạng với tam giác đã cho.

Ví dụ 2.

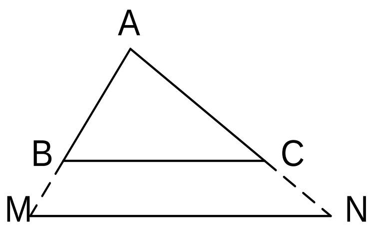


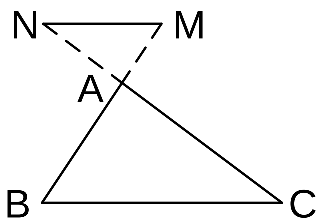
ΔABC có MN //BC $\left(M \in AB; N \in AC\right)$

$\Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ABC$

Lưu ý. Định lí trên cũng đúng trong trường hợp đường thẳng a cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.

Ví dụ 3.

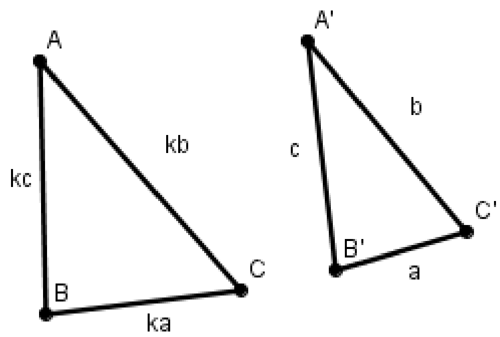
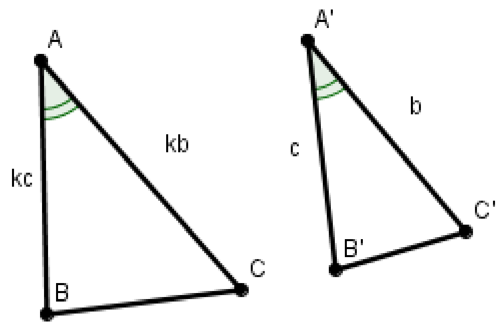


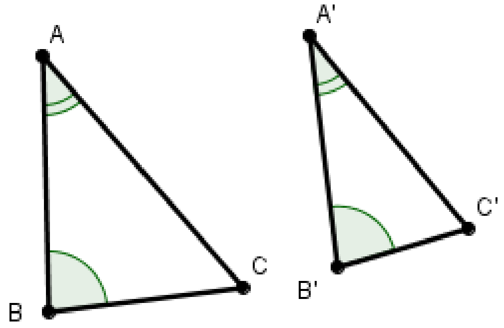


ΔABC có MN //BC

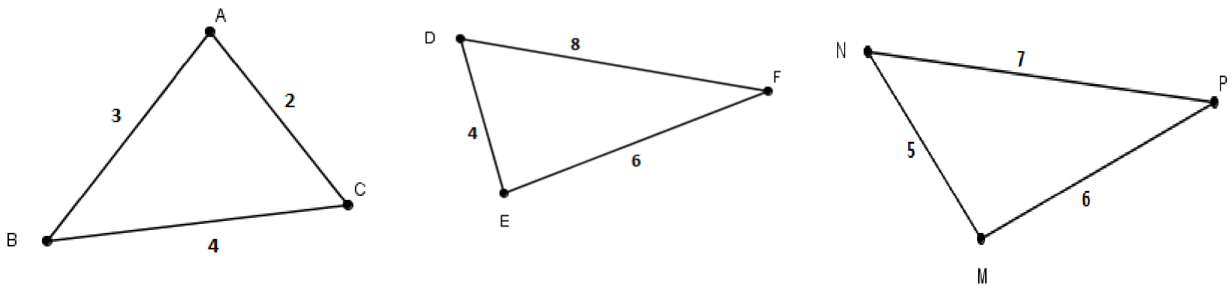
$\Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ABC$

4) Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác

<table>
<tr>
<td>a) Trường hợp 1
Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.</td>
<td>
</td>
<td>Xét $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$:
$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'} = k$
$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$
(c-c-c)</td>
</tr>
<tr>
<td>b) Trường hợp 2
Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng</td>
<td>
</td>
<td>Xét $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$:
$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{CA}{C'A'} = k \\ \hat{A} = \hat{A'} \end{array}\right\}$
$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$
(c-g-c)</td>
</tr>
</table>

nhau thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.		
c) Trường hợp 3 Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.		Xét $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$: $\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{B'}\\ \hat{A}=\hat{A'}\end{array}\right\}$ $\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ (g-g)

Ví dụ 4. Tìm các cặp tam giác đồng dạng trong các tam giác dưới đây



Bài giải

Xét ΔABC và ΔDEF, ta có

$$\frac{AB}{DE}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\frac{AC}{EF}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2};\frac{BC}{DF}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{EF}=\frac{BC}{DF}=\frac{1}{2}$$

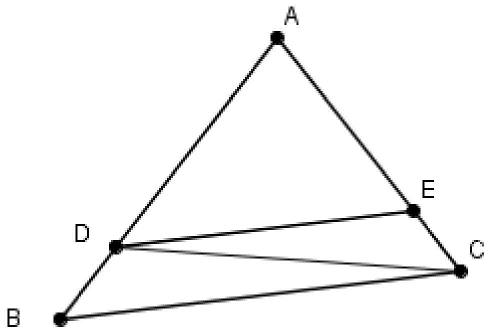
Vậy $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$,

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song BC cắt cạnh AB và AC tại D và E sao cho $DC^2 = BC.DE$. Chứng minh $\widehat{ECD} = \widehat{DBC}$

Bài giải

Ta có $DC^2 = BC.DE$

$\Rightarrow \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{DE}{DC}$



Xét hai tam giác DEC và CDB có

$\hat{EDC} = \hat{DCB}$ (so le trong)

Và $\dfrac{DC}{BC} = \dfrac{DE}{DC}$

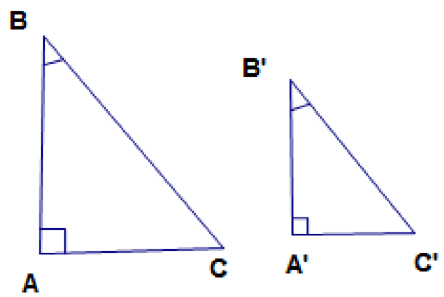
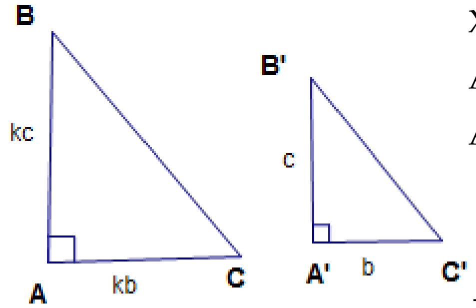
Nên Δ DEC $\backsim \Delta$ CDB

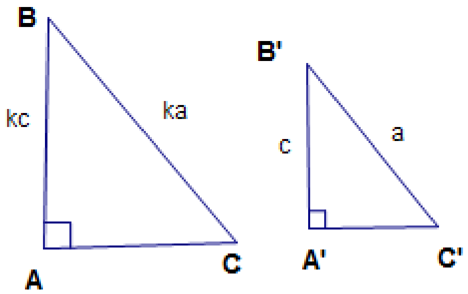
$\Rightarrow \hat{ECD} = \hat{DBC}$ (hai góc tương ứng)

Bài 7. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA HAI TAM GIÁC VUÔNG

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1) Các trường hợp đồng dạng đặc biệt của hai tam giác vuông

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Suy ra từ các trường hợp đồng dạng của hai tam giác</td>
<td>a) Trường hợp 1
Tam giác vuông này có 1 góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia.</td>
<td>
</td>
<td>Xét ΔABC vuông tại A, $\Delta A'B'C'$ vuông tại A′ có
$\hat{B} = \hat{B'}$
$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$
(g-g)</td>
</tr>
<tr>
<td>b) Trường hợp 2
Tam giác vuông này có 2 cạnh góc vuông tỉ lệ với 2 cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.</td>
<td>
</td>
<td>Xét ΔABC vuông tại A, $\Delta A'B'C'$ vuông tại A′ có
$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{CA}{C'A'} = k$
$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$
(c-g-c)</td>
</tr>
</table>

Định lí	**c) Trường hợp 3** Nếu cạnh huyền và 1 cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và 1 cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.		Xét ΔABC vuông tại A, $\Delta A'B'C'$ vuông tại A′ có $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=k$ $\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ (ch-cgv)

2) **Áp dụng**

a) ***Định lí 1***. Tỉ số hai đường cao tương ứng của 2 tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{AH}{A'H'}=\frac{AB}{A'B'}=k$ (k là tỉ số đồng dạng)

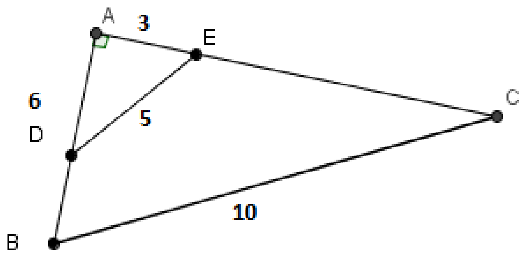
b) ***Định lí 2***. Tỉ số các diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}=k^2$ (S là diện tích ,k là tỉ số đồng dạng)

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 6cm; BC = 10cm. Lấy điểm D trên AB và E trên AC sao cho AE = 3cm; DE = 5cm. Chứng minh $\hat{ADE}=\hat{ACB}$

Bài giải

Xét hai tam giác vuông ABC và AED



Ta có $\frac{AE}{AB}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2};\frac{DE}{BC}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$

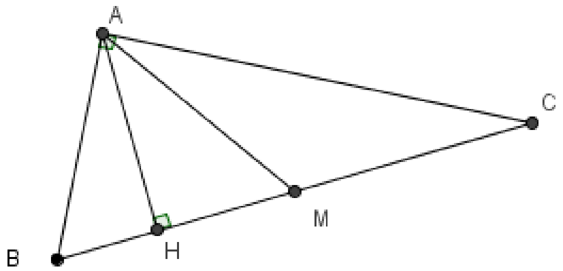
Suy ra Δ ABC $\backsim$ Δ AED

Vậy $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AH là đường cao và AM là đường trung tuyến. Tính diện tích tam giác AHM và tỉ số diện tích tam giác AHM và ABC, biết BH = 4cm; CH = 6cm.

Bài giải

Ta có hai tam giác vuông HAB và HCA đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{HA}{HC} = \dfrac{HB}{HA}$



$\Rightarrow AH^2 = BH.HC = 16.4 = 64$

$\Rightarrow AH = 8cm$

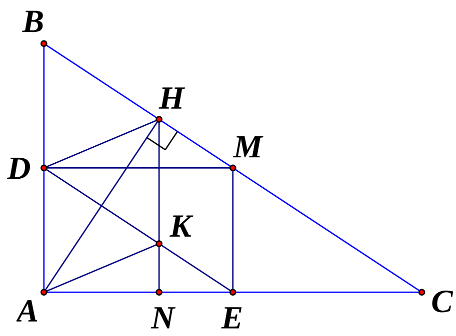
$BM = CM = \dfrac{1}{2}BC = 10cm$

Suy ra $HM = CH - MC = 6cm$

Nên $S_{AHM} = \dfrac{1}{2}AH.HM = 24cm^2$; $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC = 80cm^2$

Vậy $\dfrac{S_{AHM}}{S_{ABC}} = \dfrac{24}{80} = \dfrac{3}{10}$

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). M là trung điểm BC. Vẽ MD $\perp$ AB tại D, ME $\perp$ AC tại E, AH $\perp$ BC tại H. qua A kẻ đường thẳng song song DH cắt DE tại K. HK cắt AC tại N. Chứng minh HN² = AN.CN.



Giải:

MD $\perp$ AB $\Rightarrow$ MD // AC, do đó D là trung điểm AB. Tương tự E là trung điểm AC.

Ta có DE // BA.

Hai tam giác BDH và DAK có:

$\widehat{HBD} = \widehat{KDA}$ (góc đồng vị)

BD = DA

$\widehat{BDH} = \widehat{DAK}$

$\Delta BDH = \Delta DAK$ (g – c – g)

$\Rightarrow$ DH = AK $\Rightarrow$ ADHK là hình bình hành.

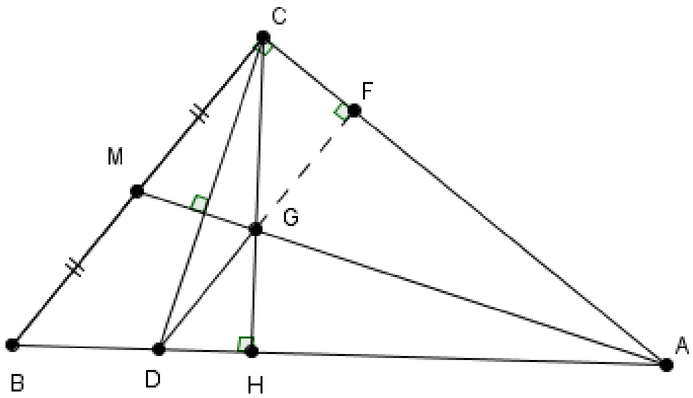
Ta có HK // DA $\Rightarrow$ HN $\perp$ AC.

$\Delta NAH \sim \Delta NHC \Rightarrow \dfrac{NA}{NH} = \dfrac{NH}{NC} \Leftrightarrow HN^2 = AN.AN$.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 21. Cho tam giác ABC vuông cân có $\hat{C} = 90^0$. Từ C kẻ 1 tia vuông góc với trung tuyến AM cắt AB ở D. Hãy tính tỉ số $\frac{BD}{DA}$

Bài giải



Kẻ CH $\perp AB$ tại H vì tam giác ABC vuông cân tại C nên đường cao CH đồng thời là đường trung tuyến.

Gọi G là giao điểm AH và AM

Suy ra G là trong tâm tam giác ABC $\Rightarrow \frac{AG}{GM} = 2$

Trong tam giác ACD có $\left.\begin{matrix} CH \perp AD \\ AG \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ H là trực tâm tam giác ADC

Suy ra $DG \perp AC$

Ta lại có $BC \perp AC$ nên BC//DG

Hay DG//BM $\Rightarrow \frac{AG}{MG} = \frac{AD}{BD}$ (định lí Talet)

Mà $\frac{AG}{GM} = 2$ do đó $\frac{AD}{BD} = 2$

Vậy $\frac{BD}{DA} = \frac{1}{2}$

Bài 22. Cho tam giác ABC có phân giác trong AD. Chứng minh rằng

$$AD^2 = AB.AC - BD.DC$$

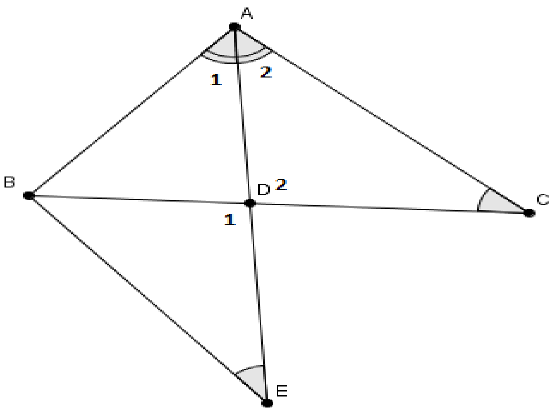
Bài giải

Trên tia AD lấy điểm E sao cho $\hat{AEB} = \hat{ACB}$

Xét ΔABE và ΔADC có $\hat{A_1} = \hat{A_2}$ (vì AD là phân giác)

$$\hat{AEB} = \hat{ACB}$$

do đó $\Delta ABE \backsim \Delta ADC$



$\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC}$

$\Rightarrow AB.AC = AE.AD$

$\Rightarrow AB.AC = (AD + DE)AD$

$\Rightarrow AB.AC = AD^2 + AD.DE$ (1)

Xét ΔBDE và ΔADC có

$\hat{AEB} = \hat{ACB}$

$\hat{D_1} = \hat{D_2}$ (đối đỉnh)

suy ra $\Delta BDE \backsim \Delta ADC$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{DE}{DC} \Rightarrow AD.AC = BD.DC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD^2 = AB.AC - BD.DC$

Bài 23. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi M là trung điểm cạnh BC, N là trung điểm cạnh AC. Các đường trung trực của cạnh BC và AC cắt nhau tại điểm O. H là trực tâm và G là trọng tâm.

a) Hai tam giác ABH và MNO đồng dạng?

b) Hai tam giác AHG và MOG đồng dạng?

c) Ba điểm H, G, O thẳng hàng.

Bài giải

a) Ta có AH//OM; AB//MN; BH//ON nên

$\hat{BAH} = \hat{OMN}; \hat{BAH} = \hat{ONM}$

Do đó $\Delta OMN \backsim \Delta HAB$

b) Xét hai tam giác OMG và HAG ta có

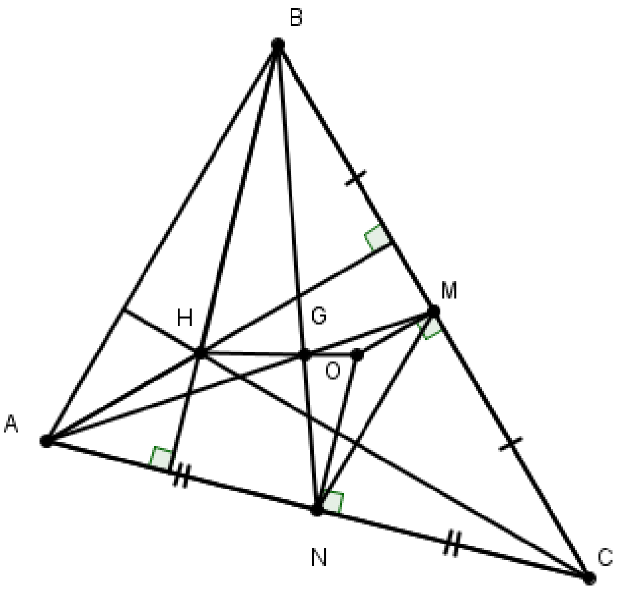
$\hat{HAG} = \hat{OMG}; \frac{OM}{AH} = \frac{MG}{AG} = \frac{1}{2}$

Nên $\Delta OMG \backsim \Delta HAG$

c) Từ câu b) suy ra $\hat{MGO} = \hat{AGH}$.

Ta có

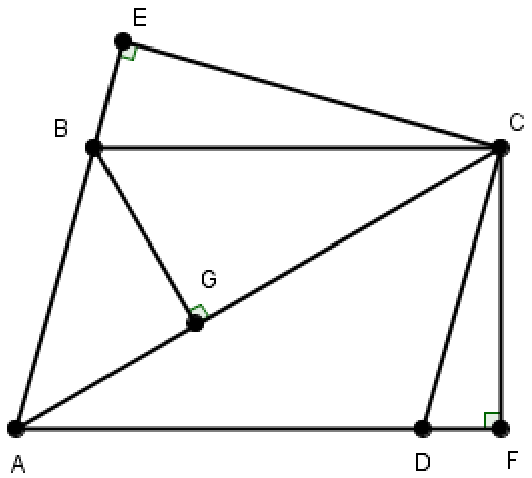
$\hat{MGO} + \hat{MGH} = \hat{AGH} + \hat{MGH} = 180^0$
suy ra H, G, O thẳng hàng



Bài 24. Giả sử AC là đường chéo lớn của hình bình hành ABCD. Từ C kẻ các đường thẳng CE, CF lần lượt vuông góc với AB, AD. Chứng minh rằng:

$AB.AE + AD.\mathrm{AF} = AC^2$

Bài giải



Vẽ BH $\perp AC (H \in AC)$

Xét ΔHAB và ΔEAC có

$\hat{H} = \hat{E} = 90^0$

$\hat{A}$ chung

Suy ra $\Delta HAB \backsim \Delta EAC$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AE} \Rightarrow AB.AE = AH.AC$ (1)

Xét ΔHBC và ΔFCA có

$\hat{H} = \hat{F} = 90^0$

$\hat{BCH} = \hat{CA}\mathrm{F}$ (BC//AF)

Suy ra $\Delta HBC \backsim \Delta FCA$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{HC}{AF} \Rightarrow BC.AF = HC.AC$ (2)

Mà AD = BC (vì ABCD là hình bình hành)

Lấy (1) cộng (2) vế theo vế ta được:

AH.AC + HC.AC = BC.AF + AB.AE

$\Leftrightarrow$ AC(AH+HC) = BC.AF + AB.AE

$\Leftrightarrow$ AC^2 = BC.AF + AB.AE (đpcm)

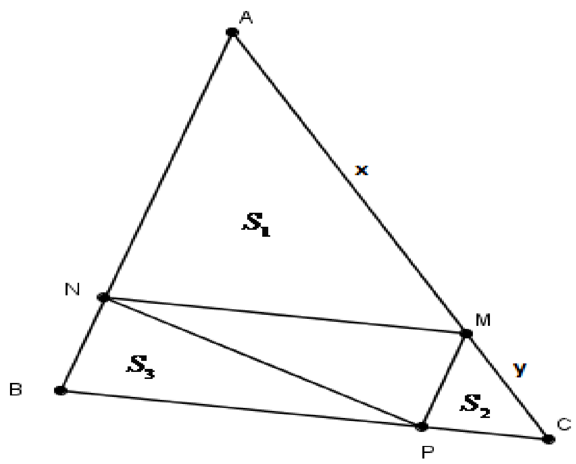
Bài 25. Cho tam giác ABC, điểm M thuộc cạnh CA. Vẽ MP song song với AB (P thuộc CB) và MN song song với CB (N thuộc AB). Biết $S_{\Delta AMN} = a^2, S_{\Delta PMC} = b^2$. Chứng minh rằng $S_{\Delta ABC} = (a+b)^2$

Bài giải

Gọi MA = x; MC = y (x, y >0)

Gọi $S_{\Delta AMN} = S_1, S_{\Delta PMC} = S_2$

$S_{\Delta BNP} = S_3; S_{\Delta ABC} = S$



Ta có MN//BC

$\Rightarrow \Delta AMN \backsim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S} = \left(\frac{AM}{AC}\right)^2 = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2$$

Ta có MP//BA $\Rightarrow \Delta CMP \backsim \Delta CAB$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{S} = \left(\frac{MC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{y}{x+y}\right)^2$$

Do đó $\dfrac{S_1+S_2}{S} = \left(\dfrac{x}{x+y}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{x+y}\right)^2$

Ta có $\dfrac{S-(S_1+S_2)}{S} = \dfrac{2xy}{(x+y)^2}$ (1)

Ta có BNMP là hình bình hành $S_{BNMP} = 2S_3$

Do đó từ (1) ta có thể viết $\dfrac{2S_3}{S} = \dfrac{2xy}{(x+y)^2}$

$$\Rightarrow \frac{S_3}{S} = \frac{x}{(x+y)} \cdot \frac{y}{(x+y)} \qquad (2)$$

Bình phương hai vế của (2) ta được

$$\left(\frac{S_3}{S}\right)^2 = \frac{S_1}{S}\cdot\frac{S_2}{S} \Rightarrow S_3^{\ 2} = S_1.S_2$$

Hay $S_3 = a.b$

Mặt khác $S_{\Delta ABC} = S_1 + S_2 + 2S_3 = a^2 + b^2 + 2ab$

Vậy $S_{\Delta ABC} = (a+b)^2$

Bài 26. Cho tam giác ABC, kẻ đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng AE.AB = AD.AC

b) Chứng minh rằng $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$

c) Chứng minh rằng CH.CE + HB.BD = BC^2

d) Giả sử góc A có số đo bằng 60^0 $S_{\Delta ABC} = 120cm^2$.Tính $S_{\Delta ADE}$

Bài giải

a) Xét ΔAEC và ΔADB có $\hat{D} = \hat{E} = 90^0$

$\hat{A}$ chung

Nên $\Delta AEC \backsim \Delta ADB$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AC}{AB}$

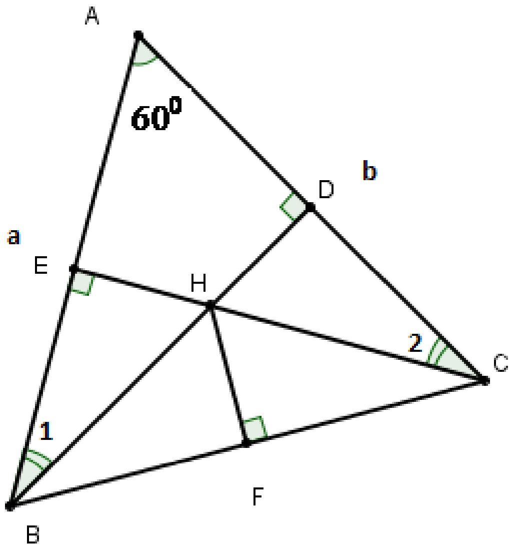
Vậy $AE.BA = AD.AC$ (đpcm)

b) Xét ΔADE và ΔABC có $\hat{A}$ chung

$\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AC}{AB}$ (cm câu a)

Nên $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$. Vậy $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$

c) Vẽ HF $\perp$ BC, $F \in BC$



Xét tam giác BFH và tam giác BDC có

$\hat{B}$ chung

$\hat{D} = \hat{F} = 90^0$

Nên Δ BFH $\backsim \Delta$ BDC

Suy ra $\dfrac{BF}{BD} = \dfrac{BH}{BC} \Rightarrow BH.BD = BF.BC$

Chứng minh tương tự ta có

$CH.CE = CF.BC$

Mà $CF.BC + BC.BF = BC(CF + BF) = BC^2$

Do đó CH.CE + HB.BD = BC^2 (đpcm)

d) Đặt AB = a

Trong tam giác vuông ADB ta có $\hat{A} = 60^0$ suy ra $\hat{B_1} = 30^0$

ΔADB là nữa tam giác đều cạnh AB = a nên đường cao $BD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AD = \dfrac{a}{2}$

Mặt khác, ta có $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (cm câu b)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$$

Vậy $\dfrac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\dfrac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\dfrac{a}{2} \div a\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ và $S_{\Delta ABC} = 120cm^2$

nên $S_{\Delta ADE} = \dfrac{1}{4} S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{4} \cdot 120 = 30cm^2$

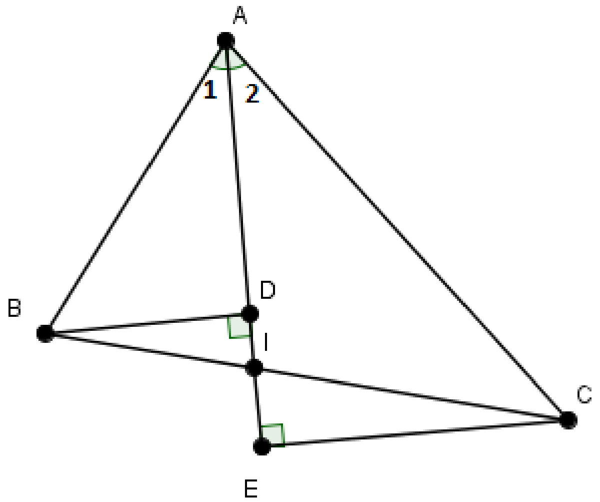
Bài 27. Cho tam giác, đường phân giác AI. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của B và C lên AI. Chứng minh $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{ID}{IE}$

Bài giải

Ta có AI là phân giác góc A.

Nên theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{BI}{IC}=\frac{AB}{AC}$ (1)

Ta lại có BD//EC (vì cùng vuông góc với AI) $\Rightarrow \frac{ID}{IE}=\frac{BI}{IC}$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow \frac{ID}{IE}=\frac{BA}{AC}$ (3)

Mặt khác, xét ΔADB và ΔAEC có

$\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (AI là phân giác góc A)

$\hat{D}=\hat{E}=90^0$

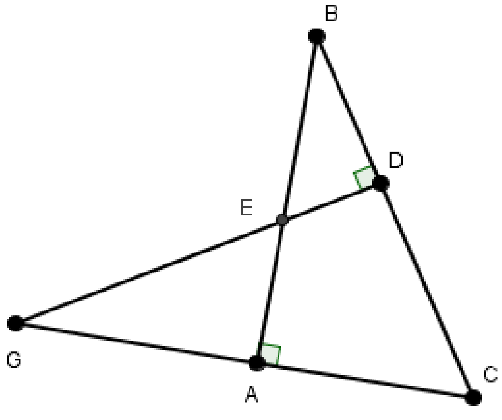
Suy ra $\Delta ADB \backsim \Delta AEC$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{BD}{EC}=\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{AD}{AE}=\frac{ID}{IE}$

Bài 28. Cho tam giác ABC vuông tại A. Qua điểm D trên đáy BC kẻ đường vuông góc với BC cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự ở E và G. Chứng minh DB.DC = DE.DG

Bài giải



Xét ΔDGC và ΔABC có $\hat{D}=\hat{A}=90^0$ và $\hat{C}$ chung

Suy ra $\Delta DGC \backsim \Delta ABC$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{DG}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow AB.DC = DG.AC \Rightarrow \frac{DG}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

Xét ΔABC và ΔDBE có $\hat{D} = \hat{A} = 90^0$ và $\hat{B}$ chung

Suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta DBE$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC} \Rightarrow AB.DE = DB.AC$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{DB} = \frac{AB}{AC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DE}{DB} = \frac{DC}{DG}$

Vậy DB.DC = DE.DG

Bài 29. Trong tam giác ABC có hai góc B và góc A thỏa mãn điều kiện $\hat{A} = 90^0 - \hat{B}$, kẻ đường cao CH. Chứng minh $CH^2 = BH.AH$

Bài giải

Trong tam giác vuông AHC ta có $\hat{C}_1 + \hat{A} = 90^0$ (1)

Trong tam giác vuông BHC ta có $\hat{C}_2 + \hat{B} = 90^0$ (2)

Mặt khác ta có $\hat{A} = 90^0 - \hat{B}$ thay vào (1)

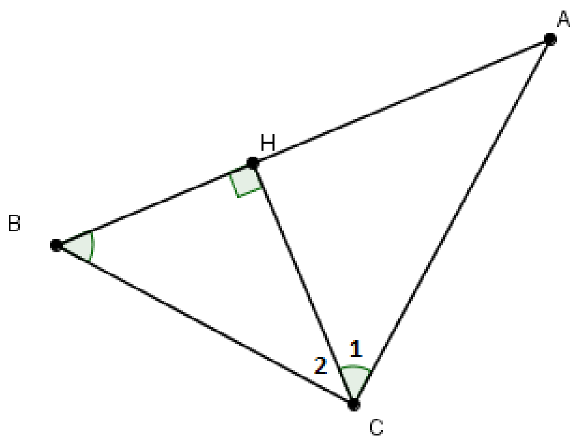
ta được $\hat{C}_1 = \hat{B}$

Vậy ta có $\hat{C}_1 = \hat{B}$

Xét ΔHBC vuông tại H và ΔHCA

vuông tại H có $\hat{C}_1 = \hat{B}$ (cmt)

Nên $\Delta HBC \backsim \Delta HCA$



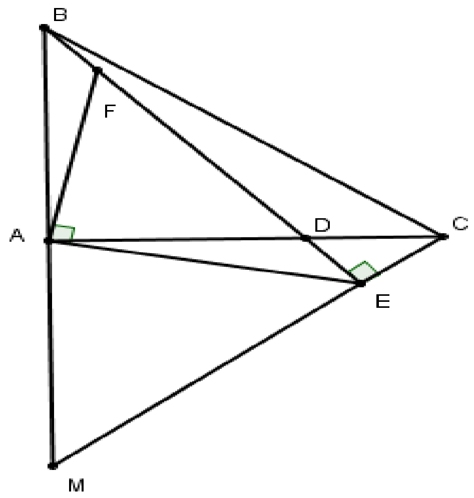
$$\frac{HB}{HC} = \frac{HC}{HA} \Rightarrow HC^2 = HB.HA$$

Bài 30. Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ một điểm D bất kỳ trên cạnh AC kẻ các đường CEvuông góc với DB tại E.

Chứng minh rằng BE.AC = AB.EC + AE.BC

Bài giải

Gọi M là giao điểm của AB và CE . Vẽ AF vuông góc với AE (Fthuộc BE).



Xét ΔMBE và ΔMCA có $\hat{E} = \hat{A} = 90^0$

$\hat{M}$ chung

Suy ra $\Delta MBE \backsim \Delta MCA$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{MB}{ME} = \frac{MC}{AM}; \widehat{MBE} = \widehat{MCA}$$

Xét ΔABF và ΔACE có

$\widehat{MBE} = \widehat{MCA}$ (cmt) và $\widehat{ABF} = \widehat{EAC}$ (cùng phụ với $\widehat{FED}$)

Suy ra $\Delta ABF \backsim \Delta ACE$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CE} \Rightarrow AB.CE = AC.BF \quad (1)$$

Mặt khác, ta có $\Delta ABD \backsim \Delta ECD$ (g-g) vì $\hat{E} = \hat{A} = 90^0$ và $\widehat{ADB} = \widehat{EDC}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \frac{DA}{DE} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{DE}{DC}$$

Ta lại có $\Delta ADE \backsim \Delta BDC$ vì có $\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{DC}$ (cmt) và $\widehat{ADE} = \widehat{BDC}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{DCB}$$

Nên $\Delta AEF \backsim \Delta ACB$ vì có $\widehat{AED} = \widehat{DCB}$ (cmt) và $\hat{E} = \hat{A} = 90^0$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{EF}{CB} \Rightarrow AE.CB = AC.EF \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được

$$AB.CE + AE.BC = AC.BF + AC.EF = AC(BF + \text{EF}) = AC.BE$$

Vậy BE.AC = AB.EC + AE.BC

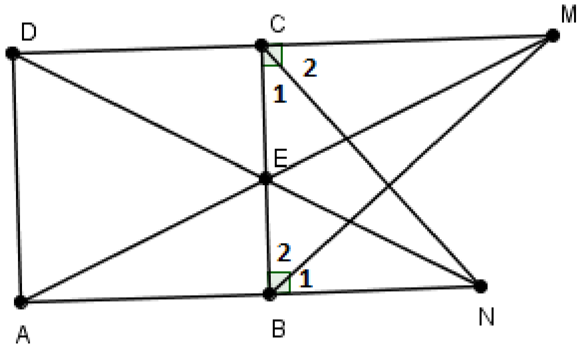
Bài 31. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E. Tia AE cắt đường thẳng CD tại M, tia DE cắt AB tại N. Chứng minh rằng:

a) $\Delta NBC \backsim \Delta BCM$

b) BM vuông với CN

Bài giải

a) Ta có AB//CM



$\Rightarrow \dfrac{AB}{CM}=\dfrac{BE}{CE}$ (1)

Và ta có CD//BN

$\Rightarrow \dfrac{BN}{CD}=\dfrac{BE}{CE}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{BN}{CD}=\dfrac{BA}{CE}$

$\Rightarrow BN.MC = CD.AB$ mà CD = AB = BC (do ABCD là hình thang vuông)

$\Rightarrow BN.MC = BC^2 \Leftrightarrow \dfrac{BN}{BC}=\dfrac{BC}{MC}$

Vậy $\Delta NBC \backsim \Delta BCM$

b) Ta có $\Delta NBC \backsim \Delta BCM$ (cm câu a)

Suy ra $\hat{B}_2 = \hat{N}$; $\hat{C}_2 = \hat{M}$

Mà $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^0 \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{N} = 90^0$

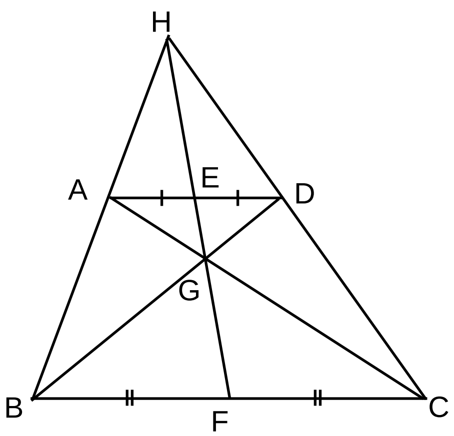
Vậy BM vuông với CN

Bài 32. Chứng minh rằng trung điểm hai đáy của một hình thang, giao điểm hai đường chéo và giao điểm hai cạnh bên kéo dài của hình thang đó thẳng hàng.

Bài giải

Trong hình vẽ bên ta phải chứng minh bốn điểm H, E, G, F thẳng hàng.

Nối EG, FG ta được



$\Delta ADG \backsim \Delta CBG$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{CB}=\dfrac{AG}{CG}$

Hay $\dfrac{2AE}{2CF}=\dfrac{AG}{CG} \Leftrightarrow \dfrac{AE}{CF}=\dfrac{AG}{CG}$ (1)

Ta lại có $\widehat{EAG} = \widehat{FCG}$ (so le trong) (2)

Tõ (1) vµ (2) $\Rightarrow \Delta AEG \backsim \Delta CFG$ (c.g.c)

Nªn $\hat{AGE} = \hat{CGF}$. Vậy E, G, F thẳng hàng (3)

Nèi EH, FH. Chứng minh tương tự trên ta được Δ AEH $\backsim \Delta BFH$

$\Rightarrow \hat{AHE} = \hat{BHF}$

Vậy H, E, F thẳng hàng (4)

Từ (3) và (4) ta kết luận H, E, G, F thẳng hàng

Bài 33. Tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). M là trung điểm BC. Vẽ $MD \perp AB$ tại D, ME $\perp AC$ tại E, $AH \perp BC$ tại H. qua A kẻ đường thẳng song song DH cắt DE tại K. HK cắt AC tại N. Chứng minh $HN^2 = AN.CN$.

Giải:

$MD \perp AB \Rightarrow MD \,//\, AC$, do đó D là trung điểm AB. Tương tự E là trung điểm AC.

Ta có DE // BA.

Hai tam giác BDH và DAK có:

$\widehat{HBD} = \widehat{KDA}$ (góc đồng vị)

BD = DA

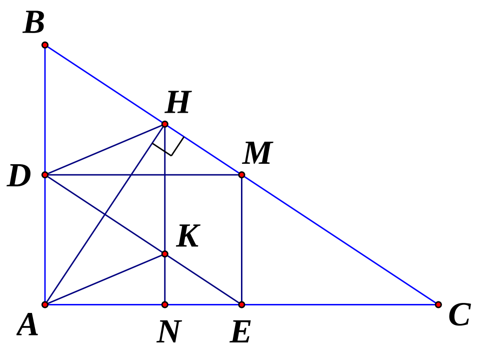
$\widehat{BDH} = \widehat{DAK}$

$\Delta BDH = \Delta DAK$ (g – c – g)

$\Rightarrow DH = AK \Rightarrow$ ADHK là hình bình hành.

Ta có HK // DA $\Rightarrow HN \perp AC$.

$\Delta NAH \approx \Delta NHC \Rightarrow \dfrac{NA}{NH} = \dfrac{NH}{NC} \Leftrightarrow HN^2 = AN.AN$.



Bài 34. Cho tam giác ABC vuông tai A, đường cao AH, từ H kẻ HI vuông góc với AB tại I, HK vuông góc với AC tại K

a) Chứng minh tam giác AKI đồng dạng với tam giác ABC suy ra AI.AB = AK.AC.

b) Chứng minh $\widehat{ABK} = \widehat{ACI}$.

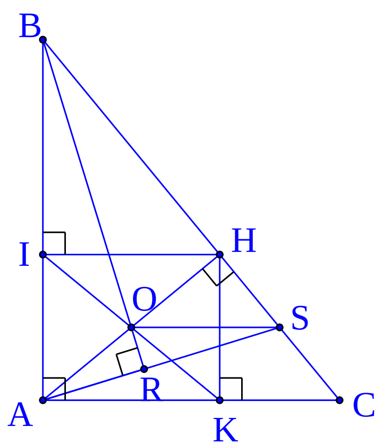
c) Gọi O là trung điểm của đoạn IK. Từ A vẽ đường thẳng vuông góc với đường thẳng BO tại R. Đường thẳng AR cắt cạnh BC tại S. Chứng minh S là trung điểm của đoạn thẳng HC.

Giải:

a) Tứ giác AKHI có $\hat{A} = \hat{K} = \hat{I} = 90^0$ nên AKHI là hình chữ nhật, ta có: $\widehat{AKI} = \widehat{AHI}$.

Lại có $\widehat{AHI} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với góc $\widehat{BHI}$). Suy ra $\widehat{AKI} = \widehat{ABC}$

Hai tam giác AKI và ABC có $\hat{A}$ chung, $\widehat{AKI} = \widehat{ABC}$ nên $\Delta AKI \sim \Delta ABC$.



b) Theo trên, $\Delta AKI \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{AK}{AB}=\dfrac{AI}{AC}$, và hai tam giác AKB và AIC có $\widehat{A}$ chung nên $\Delta AKB \sim \Delta AIC$. Từ đó ta có $\widehat{ABK}=\widehat{ACI}$.

c) Xét tam giác ABS có AH và BR là đường cao nên O là trực tâm tam giác ABS, do đó SO $\perp$ AB, suy ra SO // AC.

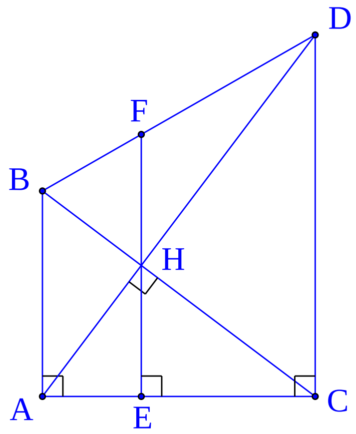
Mặt khác, theo trên thì tứ giác AKHI là hình chữ nhật nên O là trung điểm AH. Như vậy trong tam giác AHC, SO là đường trung bình. Từ đó ta có S là trung điểm của HC.

Bài 35. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB=3cm, AC=4cm,vẽ đường cao AH.

a) Vẽ đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt AH kéo dài tại D. Chứng minh $\Delta BAC \sim \Delta ACD$, rồi suy ra AC^2= AB. CD.

b) Chứng minh tứ giác ABDC là hình thang vuông. Tính diện tích của ABDC.

c) Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt AC tại E và cắt BD tại F. So sánh HE và HF?



Giải:

a) Ta có: $\widehat{ABC}=\widehat{CAD}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABH}$),

$\widehat{BAC}=\widehat{ACD}=90^0$. Do đó: $\Delta BAC \sim \Delta ACD$. Từ đó suy ra $\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{BA}{AC}\Rightarrow AC^2=AB.CD$

.

b) Vì AB và CD cùng vuông góc với AC nên AB // CD. Tứ giác ABDC có AB // CD và $\widehat{A}=90^0$ nên ABDC là hình thang vuông.

Theo trên $AC^2=AB.CD \Rightarrow CD=\dfrac{AC^2}{AB}=\dfrac{16}{9}(cm)$.

$$S_{ABDC}=\frac{1}{2}(AB+DC)AC=\frac{1}{2}\left(3+\frac{16}{9}\right)4=\frac{86}{9}(cm^2).$$

c) Dễ thấy: $\Delta ABH \sim \Delta DCH \Rightarrow \dfrac{BH}{CH}=\dfrac{AH}{DH}\Rightarrow \dfrac{BH}{BC}=\dfrac{AH}{AD}$ (1).

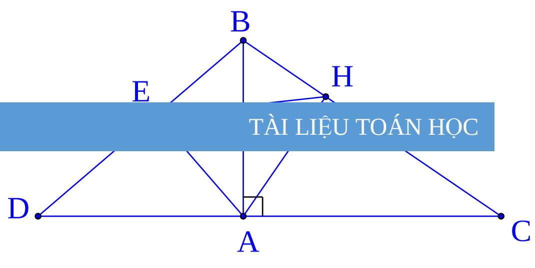
Mặt khác, EF // DC nên theo định lí Talet ta có: $\dfrac{HF}{CD}=\dfrac{BH}{BC}$ và $\dfrac{HE}{DC}=\dfrac{AH}{AD}$ (2).

(1) và (2)$\Rightarrow \dfrac{HF}{CD}=\dfrac{HE}{DC}\Rightarrow HE=HF$.

Bài 36. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao (H thuộc BC)

a) Trên tia đối của tia AC lấy điểm D, vẽ AE vuông góc với BD tại E. Chứng minh tam giác AEB đồng dạng tam giác DAB.

b) Chứng minh BE.BD = BH.BC.



c) Chứng minh $\widehat{BHE} = \widehat{BDC}$.

Giải:

a) Ta có: $\widehat{DBA} = \widehat{ABE}$ và $\widehat{AEB} = \widehat{DAB} = 90^0$ do đó $\Delta AEB \sim \Delta DAB$.

b) $\Delta AEB \sim \Delta DAB \Rightarrow \dfrac{BE}{BA} = \dfrac{BA}{BD} \Rightarrow BE.BD = BA^2$ (1).

Xét hai tam giác BAH và BCA có: $\widehat{ABH} = \widehat{CBA}$ và $\widehat{BHA} = \widehat{BAC} = 90^0$ nên $\Delta BAH \sim \Delta BCA$, suy ra $\dfrac{BH}{BA} = \dfrac{BA}{BC} \Rightarrow BH.BC = BA^2$ (2).

(1) và (2) suy ra BE.BD = BH.BC.

c) Theo trên thì $BE.BD = BH.BC \Rightarrow \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BH}{BD}$. Xét hai tam giác BEH và BCD có góc $\widehat{B}$ chung và $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BH}{BD}$ nên $\Delta BEH \sim \Delta BCD$. Từ đó ta có $\widehat{BHE} = \widehat{BDC}$.

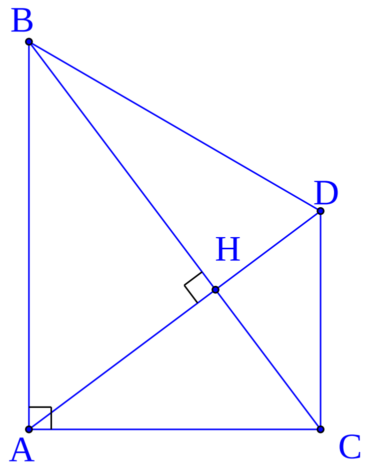
Bài 37. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 8cm, AC = 6cm, đường cao AH. Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt AH tại D.

a) Chứng minh $\Delta AHB \sim \Delta DHC$

b) Chứng minh $AC^2 = AB.DC$.

c) Tứ giác ABDC là hình gì? Vì sao? Tính diện tích của tứ giác ABDC.

Giải:



a) Ta có $\widehat{ABH} = \widehat{DCH}$ (so le trong) và $\widehat{AHB} = \widehat{DHC} = 90^0$ nên $\Delta AHB \sim \Delta DHC$.

b) $\widehat{ABC} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với góc $\widehat{BAH}$).

DC // AB nên $DC \perp AC \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 90^0$. Do đó $\Delta ABC \sim \Delta CAD$, từ đó suy ra:

$\dfrac{AB}{CA} = \dfrac{AC}{CD} \Rightarrow AB.CD = AC^2$.

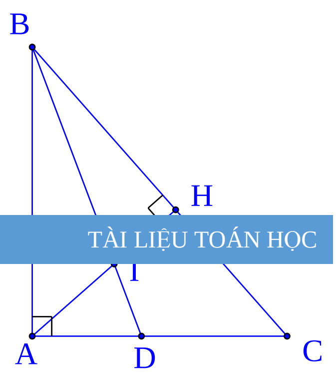
c) AB // CD và $\widehat{BAC} = 90^0$ nên ABDC là hình thang vuông.

$$AB.CD = AC^2 \Rightarrow CD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}(cm).$$

$$S_{ABDC} = \frac{1}{2}(AB + CD)AC = \frac{1}{2}\left(8 + \frac{9}{2}\right)6 = \frac{75}{2}(cm^2).$$

Bài 38. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Kẻ BD là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AH tại I. Chứng minh $AD^2 = IH.DC$.

Giải:



Ta sẽ chứng minh $\frac{AD}{DC}=\frac{IH}{AD}$.

Theo tính chất chân đường phân giác trong thì:

$\frac{AD}{CD}=\frac{BA}{BC}$ (1).

Dễ thấy hai tam giác BAC và BHA đồng dạng nên:

$\frac{BA}{BC}=\frac{BH}{BA}$ (2).

Xét hai tam giác BHI và BAD có: $\widehat{HBI}=\widehat{ABD}$ (vì BD là tia phân giác của $\widehat{ABC}$);

$\widehat{BHI}=\widehat{BAD}=90^0$. Do đó $\Delta BHI\sim\Delta BAD$, suy ra: $\frac{IH}{DA}=\frac{BH}{BA}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{AD}{CD}=\frac{IH}{DA}\Rightarrow AD^2=IH.CD$.

Bài 39. Cho đoạn thẳng AB. Trong một nữa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB, vẽ hai tia Ax va By vuông góc với AB tại A và B. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (khác A, B). Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), tia vuông góc MC tại M cắt By tại D.

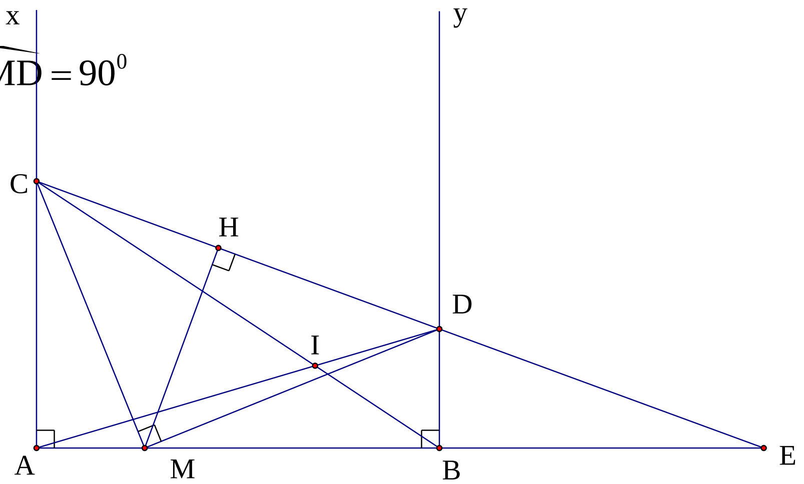
a) Chứng minh $\Delta AMC\sim\Delta BDM$.

b) Đường thẳng CD cắt AB tại E. Chứng minh rằng EC.BD = ED.AC.

c) Vẽ MH vuông góc với CD tại H. Chứng minh HM^2 = HC.HD

d) Gọi I là giao điểm của BC và AD. Chứng minh DE.IA = ID.EC.

Giải:



a) Ta có:

$\widehat{AMC}+\widehat{BMD}=90^0$, $\widehat{BDM}+\widehat{BMD}=90^0$

, suy ra $\widehat{AMC}=\widehat{BDM}$.

Lại có $\widehat{MAC}=\widehat{DBM}=90^0$, do đó $\Delta AMC\sim\Delta BDM$.

b) Vì BD // AC, theo định lí Talet ta có:

$\frac{ED}{EC}=\frac{BD}{AC}\Rightarrow EC.BD=ED.AC$

.

c) $\widehat{MCH}=\widehat{DMH}$ (cùng phụ với góc $\widehat{CMH}$); $\widehat{MHC}=\widehat{DHM}=90^0$, nên ta có:

$\Delta MCH\sim\Delta DMH\Rightarrow\frac{MH}{DH}=\frac{CH}{MH}\Rightarrow MH^2=CH.DH$.

d) Ta có: $\frac{ED}{EC}=\frac{BD}{AC}$. Mặt khác: BD // AC, ta suy ra $\Delta IDB\sim\Delta IAC$ nên $\frac{ID}{IA}=\frac{BD}{AC}$.

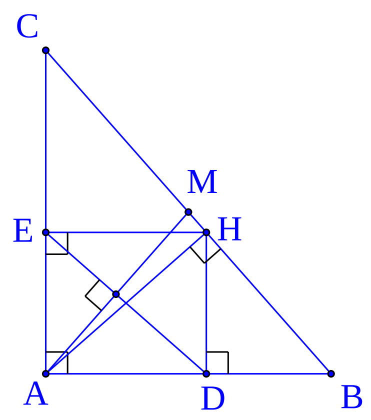
Từ đó ta có: $\frac{ED}{EC} = \frac{ID}{IA} \Rightarrow DE.IA = ID.EC$.

Bài 40. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 15cm, AC = 20 cm và đường cao AH. Vẽ HD vuông góc AB tại D và HE vuông góc AC tại E.

a) Vẽ tia Ax vuông góc DE cắt BC tại M. Chứng minh M là trung điểm BC .

b) Tính diện tích tam giác ADE.

Giải:



a) Tứ giác ADHE có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^0$ nên ADHE là hình chữ nhật.

$\widehat{MAB} = \widehat{EDH}$ (cùng phụ với góc $\widehat{EDA}$).

$\widehat{EDH} = \widehat{AHD}$ (ADHE là hình chữ nhật).

$\widehat{ABM} = \widehat{AHD}$ (cùng phụ với góc $\widehat{BHD}$).

Do đó: $\widehat{MAB} = \widehat{ABM}$. Từ đó suy ra được hai tam giác AMB và AMC cân tại M. Vậy M là trung điểm của BC.

b) $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 225 + 400 = 625 \Rightarrow BC = 25(cm)$.

Dễ thấy $\Delta HBA \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{HA}{AC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow AH.BC = AB.AC$

$\Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{15.20}{25} = 12(cm) \Rightarrow ED = AH = 12(cm)$.

$\widehat{ABC} + \widehat{HAD} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AED}$. Từ đó suy ra $\Delta ABC \sim \Delta AED$.

$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{12}{25} \Rightarrow AE = \frac{12}{25}.15 = \frac{36}{5}(cm),\ AD = \frac{12}{25}.20 = \frac{48}{5}(cm)$.

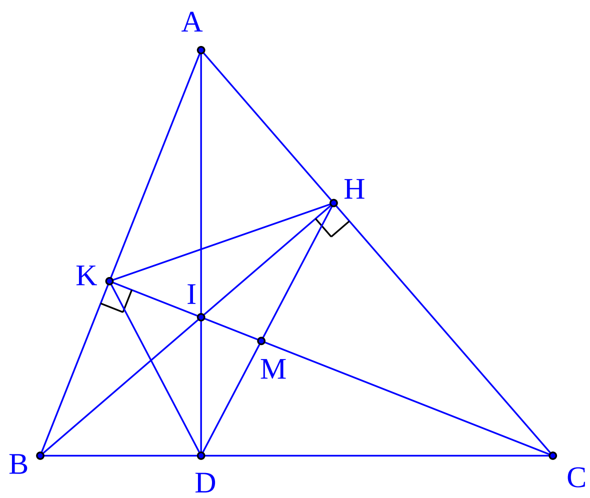
Vậy $S_{ADE} = \frac{1}{2}AE.AD = \frac{1}{2}.\frac{36}{5}.\frac{48}{5} = \frac{864}{25}(cm^2)$.

Bài 41. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD và BH cắt nhau tại I

a) Chứng minh HI.CB = CH.IA.

b) Tia CI cắt AB, DH lần lượt tại K, M. Chứng minh: IK.MC = KC.IM.

Giải:



a) Xét hai tam giác IHA và CHB có:

$\widehat{AIH} = \widehat{BCH}$ (cùng phụ với góc $\widehat{CAD}$).

$\widehat{IHA} = \widehat{CHB} = 90^0$.

Do đó $\Delta IHA \sim \Delta CHB$.

Suy ra $\dfrac{IH}{CH} = \dfrac{IA}{CB} \Rightarrow HI.CB = CH.IA$

b) Dễ thấy hai tam giác CDA và CHB đồng dạng, do đó: $\dfrac{CD}{CH} = \dfrac{CA}{CB}$.

Hai tam giác CDH và CAB có góc $\widehat{C}$ chung và $\dfrac{CD}{CH} = \dfrac{CA}{CB}$ nên $\Delta CDH \sim \Delta CAB$.

Chứng minh tương tự, ta có $\Delta AHK \sim \Delta ABC$, từ đó ta có $\Delta CDH \sim \Delta KAH$

Suy ra $\widehat{CHD} = \widehat{KHA} \Rightarrow \widehat{KHI} = \widehat{MHI}$, hay I là chân đường phân giác trong kẻ từ H của tam giác HKM. Vì $HC \perp HI$ nên C là chân đường phân giác ngoài kẻ từ H của tam giác HKM. Theo tính chất chân đường phân giác trong và ngoài thì:

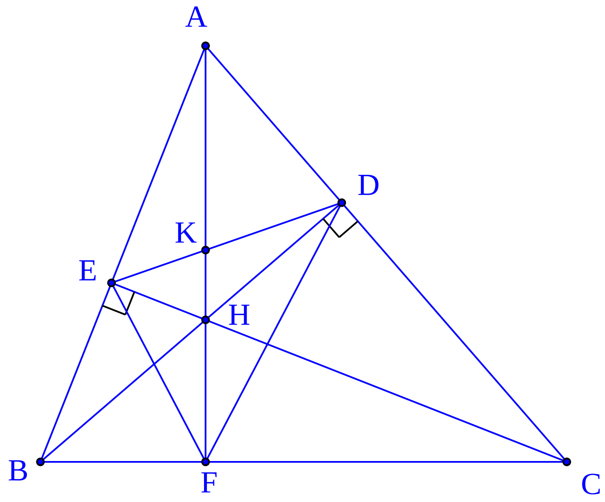
$\dfrac{KI}{MI} = \dfrac{KA}{MA} = \dfrac{KC}{MC} \Rightarrow KI.MC = KC.MI$.

(Chứng minh xong)

Bài 42. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc AC, E thuộc AB).

a) Chứng minh tam giác ADE và ABC đồng dạng tam giác ABC.

b) Gọi K, F lần lượt là giao điểm của AH với DE, BC. Chứng minh KH.AF = AK.HF



Giải:

a) Dễ thấy $\Delta ADB \sim \Delta AEC \Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$. Xét hai tam giác ADE và ABC có góc $\widehat{A}$ chung và $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$ nên $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

b) Chứng minh tương tự câu 1b.

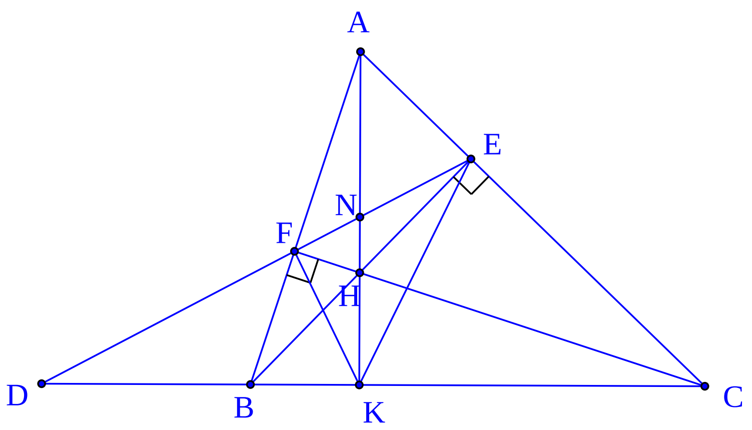
H và A lần lượt là chân đường phân giác trong và ngoài kẻ từ D của tam giác KDF, suy ra:

$\dfrac{KH}{FH} = \dfrac{KA}{FA} = \dfrac{KD}{FD} \Rightarrow KH.FA = KA.FH$.

Bài 43. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn (AB < AC). Kẻ đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

a) Gọi K là giao điểm của AH và BC. Chứng minh tam giác BKF đồng dạng tam giác BAC.

b)Tia EF cắt AK và BC lần lượt tại N, D. Chứng minh DE.FN = DF.NE



c) Gọi O, I lần lượt là trung điểm của BC và AH. Chứng minh ON vuông góc DI.

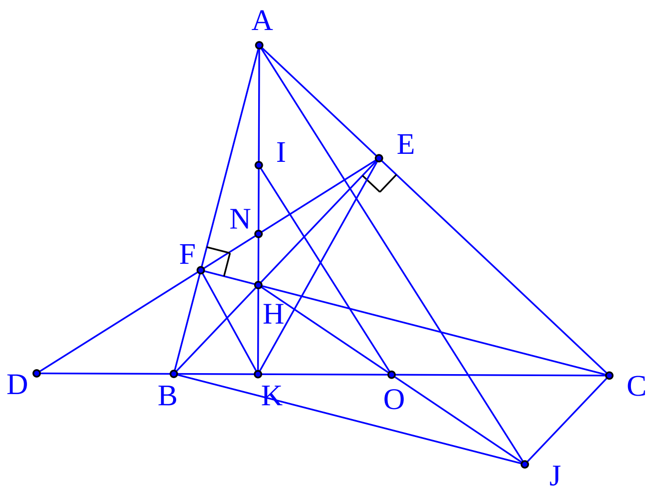
Giải:

a) Dễ thấy $\Delta BAK \sim \Delta BCF$, do đó:

$\frac{BA}{BC}=\frac{BK}{BF}$. Hai tam giác BKF và BAC có góc $\widehat{B}$ chung và $\frac{BK}{BF}=\frac{BA}{BC}$ nên $\Delta BKF \sim \Delta BAC$.

b) Ta chứng minh được KN là đường phân giác trong và KD là đường phân giác ngoài kẻ từ K của tam giác FKE. Theo tính chất chân đường phân giác trong và phân giác ngoài, ta có:

$$\frac{EN}{FN}=\frac{ED}{FD}=\frac{EK}{FK}\Rightarrow ED.FN=EN.FD.$$



c) Gọi J là điểm đối xứng của H qua O, ta có BHCJ là hình bình hành, từ đó suy ra $BJ\perp AB$, $CJ\perp AC$.

Dễ thấy :

$$\Delta BFH \sim \Delta CFA \Rightarrow \frac{BF}{CF}=\frac{BH}{CA}=\frac{CJ}{CA}.$$

Từ đó ta có $\Delta BFC \sim \Delta JCA$

$\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{AJC}$.

Mặt khác, tương tự câu a, ta chứng minh được $\Delta AEF \sim \Delta ABC$ suy ra $\widehat{ABC}=\widehat{AEF}$.

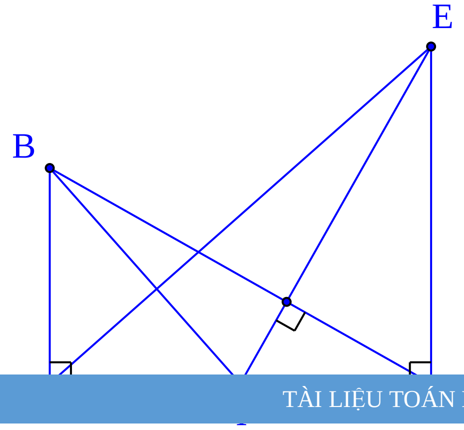
Từ đó ta có $\widehat{AEF}=\widehat{AJC}$. Mà $\widehat{AJC}+\widehat{JAC}=90^0$ nên $\widehat{AEF}+\widehat{JAC}=90^0$, hay $AJ\perp EF$.

Ta có IO là đường trung bình trong tam giác AHJ nên IO // AJ $\Rightarrow EF\perp IO$.

Xét tam giác IDO có $IN\perp DO$, $DN\perp IO$ nên N là trực tâm Δ IDO. Vậy $ON\perp DI$.

Bài 44. Cho tam giác ABC (góc $\widehat{A}=90$, AB < AC). Qua trung điểm I của AC vẽ đường thẳng vuông góc với BC và qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC, chúng cắt nhau tại E. Chứng minh AE vuông góc BI.

Giải:



Ta có: $\widehat{ACB} = \widehat{CEI}$ (cùng phụ với $\widehat{CIE}$).
Do đó: $\Delta ACB \sim \Delta CEI$.

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{CI}{CE} = \dfrac{AI}{CE} \Rightarrow \dfrac{AB}{AI} = \dfrac{CA}{CE}$

Vì $\widehat{BAI} = \widehat{ECA} = 90^0$ nên $\Delta ABI \sim \Delta CAE$

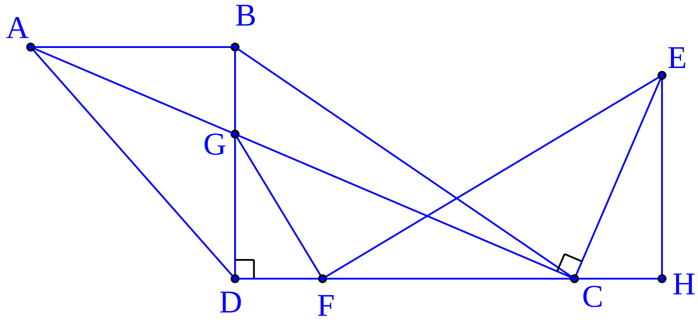
Do đó ta có $\widehat{ABI} = \widehat{CAE}$.

Mặt khác $\widehat{ABI} + \widehat{AIB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{CAE} + \widehat{AIB} = 90^0$

Vậy $EA \perp BI$.

Bài 45. Cho hình thang ABCD (CD > AB; AB//CD) có AB vuông góc BD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại G. Trên đường thẳng vuông góc với AC tại C lấy điểm E sao cho CE = AG và đoạn thẳng GE không cắt đường thẳng CD. Trên đoạn thẳng DC lấy điểm F sao cho DF = GB. Chứng minh GF vuông góc EF.

Giải:



Dựng đường thẳng qua E, vuông góc với CD, cắt đường thẳng CD tại H.

Ta có $\widehat{ECH} + \widehat{DCG} = 90^0$, $\widehat{DCG} + \widehat{DGC} = 90^0$, $\widehat{DGC} = \widehat{AGB}$.

Từ đó suy ra $\widehat{ECH} = \widehat{AGB}$.

Như vậy ta có $\Delta AGB = \Delta ECH$ (g-c-g) $\Rightarrow EH = AB,\ CH = BG = DF$.

Ta có $\Delta ABG \sim \Delta CDG \Rightarrow \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{BG}{DG} = \dfrac{DF}{DG}$.

Mà $EH = AB,\ HF = HC + CF = DF + CF = CD$ nên suy ra $\dfrac{DF}{DG} = \dfrac{HE}{HF}$ (1).

Lại có $\widehat{FDG} = \widehat{EHF} = 90^0$ (2).

(1), (2) suy ra $\Delta FDG \sim \Delta EHF \Rightarrow \widehat{DGF} = \widehat{HFE}$.

Mặt khác $\widehat{DGF} + \widehat{DFG} = 90^0$ nên $\widehat{HFE} + \widehat{DFG} = 90^0$. Vậy $\widehat{GFE} = 90^0$.

Chương 4. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

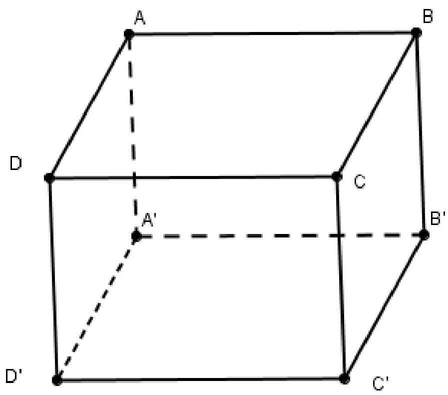
HÌNH CHÓP ĐỀU

Bài 1. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1) Hình hộp chữ nhật

- Hình hộp chữ nhật có 6 mặt, 8 đỉnh và 12 cạnh.
- Hai mặt của hình hộp chữ nhật không có cạnh chung gọi là hai mặt đối diện và có thể xem chúng là hai đáy của hình hộp chữ nhật, khi đó các mặt còn lại được xem là các mặt bên.
- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt là hình vuông.



Hình hộp chữ nhật

ABCD.A’B’C’D’

2) Mặt phẳng và đường thẳng

- Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’. Ta có thể xem:

- Các đỉnh:A, B, C, D, A’,... như là các điểm.
- Các cạnh AD, DC, CC’,… như là các đoạn thẳng.
- Mỗi mặt, chẳng hạn mặt ABCD, là một phần của mặt phẳng (ta hình dung mặt phẳng trái rộng về mọi phía).

- Đường thẳng qua hai điểm A, B của mặt phẳng (ABCD) thì nằm trọn trong mặt phẳng đó (tức là mọi điểm của nó đều thuộc mặt phẳng).

3) Hai đường thẳng song song trong không gian

- Trong không gian hai đường thẳng a và b gọi là song song với nhau nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.
- Với hai đường thẳng phân biệt trong không gian, chúng có thể:

- Cắt nhau

- Song song

- Không cùng nằm trong một mặt phẳng nào

- Hai đường thẳng phân biệt, cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

4) <u>Đường thẳng song song với mặt phẳng. Hai mặt phẳng song song</u>

- Khi AB không nằm trong mặt phẳng (A′B′C′D′) mà AB song song với một đường thẳng của mặt phẳng này, chẳng hạn AB//A′B′, thì ta nói AB song song với mặt phẳng (A′B′C′D′) và kí hiệu là AB//mp(A′B′C′D′).
- Xét hai mặt phẳng (ABCD) và (A′B′C′D′). Mặt phẳng (ABCD) chứa hai đường thẳng cắt nhau AB, AD và mặt phẳng (A′B′C′D′) chứa hai đường thẳng cắt nhau A′B′, A′D′, hơn nữa AB song song với A′B′ và AD song song với A′D′, khi đó ta nói mặt phẳng (ABCD) song song với mặt phẳng (A′B′C′D′) và kí hiệu mp(ABCD)//mp(A′B′C′D′)

Ví dụ 1: Cho hình lập phương ABCD.EFGH

a) Hãy kể tên các cạnh song song với mặt phẳng (EFGH)

b) Kể tên các mặt phẳng song song với nhau

Bài giải

a) * BC// FG mà FG nằm trong mặt phẳng (EFGH)

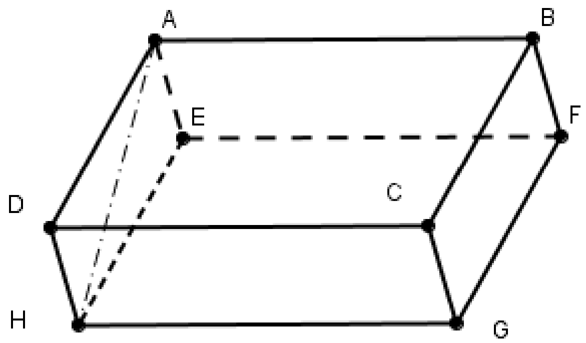
Vậy BC//mp (EFGH)

* CD//GH mà GH nằm trong mặt phẳng (EFGH).

Vậy GH//mp(EFGH)

* DA//HE mà HE nằm trong mặt phẳng (EFGH).

Vậy DA//mp(EFGH)



b) * mp(BCGF) // mp(ADHE) vì BF, BC cắt nhau nằm trong mp(BCGF); AE, AD cắt nhau nằm trong mp(ADHE) và BF//AE, BC//AD

* mp(ABCD) // mp(EFGH) vì AB, BC cắt nhau nằm trong mp(ABCD); EF, FG cắt nhau nằm trong mp(EFGH) và AB//EF, BC//FG

* mp(ABFE) // mp(DCGH) vì AB, AE cắt nhau nằm trong mp(EBFE); DC, DH cắt nhau nằm trong mp(DCGH) và AB//DC, AE//DH

5) <u>Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Hai mặt phẳng vuông góc</u>

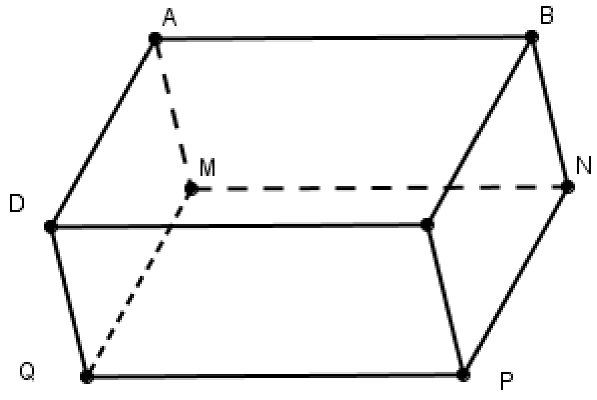
- Khi đường thẳng A’A vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AD và AB của mặt phẳng (ABCD) ta nói A’A vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại A và kí hiệu là $A'A \perp mp(ABCD)$
- **Nhận xét:** Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng tại điểm A thì nó vuông góc với mọi đường thẳng đi qua A và nằm trong mặt phẳng đó.
- Khi một trong hai mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại thì ta nói hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.MNPQ

a) Đường thẳng AD vuông góc với những mặt phẳng nào?

b) Hai mặt phẳng (AMQD) và (DQPC) có vuông góc với nhau không?

Bài giải



a)* AD vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AM và AB của mặt phẳng (AMNB) nên

$DA \perp mp(AMNB)$

* AD vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau DC và DQ của mặt phẳng (QDPC) nên

$AD \perp mp(DQPC)$

b) $mp(AMQD) \perp mp(DQPC)$ vì $AD \perp mp(DQPC)$ và AD nằm trong mặt phẳng (AMQD)

5) <u>Diện tích xung quanh - Thể tích của hình hộp chữ nhật</u>

- Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bằng tổng diện tích các mặt bên.

Ta có công thức $S_{xq} = 2ph$ (p là nữa chu vi đáy, h là chiều cao).

- Diện tích toàn phần của hình hình hộp chữ bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day}$$

- Nếu các kích thước của hình hộp chữ nhật là a, b, c (cùng đơn vị độ dài) thì thể tích của hình hộp chữ nhật đó là V=abc.
- Thể tích hình lập phương cạnh a là V = a^3.

Ví dụ 3: Tính các kích thước của hình hộp chữ nhật, biết rằng chúng tỉ lệ với 3, 4, 5 và thể tích của hình hộp này là $480cm^3$

Bài giải

Gọi các kích thước của hình hộp là a, b, c

Theo giả thiết ta có $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$ và V= abc = $480cm^3$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $k^3 = \frac{abc}{3.4.5} = \frac{480}{60} = 8$

$$\Rightarrow k = 2$$

Vậy các kích thước của hình hộp là a = 6cm, b = 8cm, c = 10cm.

Ví dụ 4: Diện tích toàn phần của một hình lập phương là $486cm^3$. Thể tích của nó là bao nhiêu?

Bài giải

Hình lập phương có 6 mặt là các hình vuông bằng nhau. Vậy diện tích một mặt hình vuông là $486:6 = 81\,cm^2$. Một cạnh hình lập phương dài bằng a=9cm. Thể tích hình lập phương là

$$V = 9.9.9 = 729\,cm^3$$

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′.

a) Những cạch nào song song với DD′?

b) Những cạch nào song song với BC?

c) Những cạch nào song song với CD?

d) Những mặt nào song song với mp(BCC′B′)

<u>Bài giải</u>

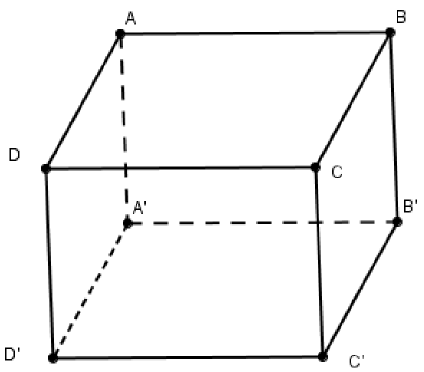
a) Các cạch song song với DD′ là AA′; BB′; CC′.

b)Các cạch song song với BC là B′C′; AD; A′D′.

c) Các cạch song song với CD là AB; C′D′; A′B′.

d) mp(BCC′B′) // mp(ADD′A′)

vì mp(BCC′B′) chứa hai đường thẳng BC và BB′ cắt nhau, mà BC//AD và BB′//AA′



Bài 2. Một căn phòng dài 5m, rộng 3,2m và cao 3m. Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường. Biết rằng tổng diện tích các cửa là $6,3\,m^2$. Hãy tính diện tích cần quét vôi?

<u>Bài giải</u>

Diện tích trần nhà

$S_1 = 5.3,2 = 16m^2$

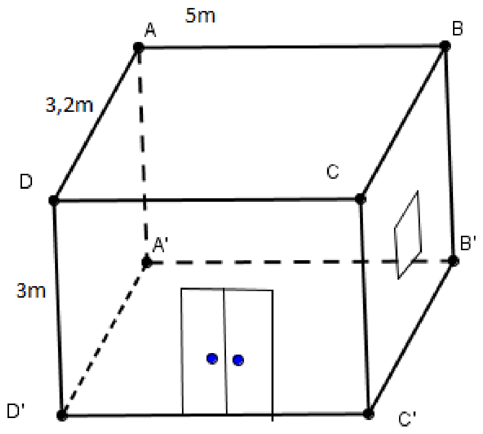
Diện tích một mặt các bức tường của căn phòng

$S_2 = (3.5).2 + (3.3,2).2 = 49.2m^2$

Diện tích cần quét vôi căn phòng (đã trừ diện tích các cửa) là

$S = S_1 + S_2 - 6,3 = 16 + 49,2 - 6,3$

$S = 68.8m^2$



Bài 3. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′. Tìm đường thẳng chung (giao tuyến) của hai mặt phẳng

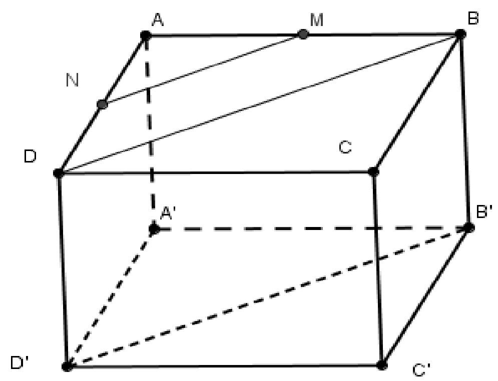
a) mp(ABCD) và mp(ADD′A′)

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (BB′D′D) và (A′B′C′D′).

<u>Bài giải</u>

a) Giao tuyến của hai mp(ABCD) và mp(ADD′A′) là AD.

b) Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABD nên MN//DB, mà $BD \subset mp(BB'D'D)$. Suy ra MN// mp(BB′D′D)



* Ta có MN// mp(BB′D′D) (cmt)

Suy ra MN//B′D′ mà $B'D' \subset mp(A'B'C'D')$

Nên MN // mp(A′B′C′D′)

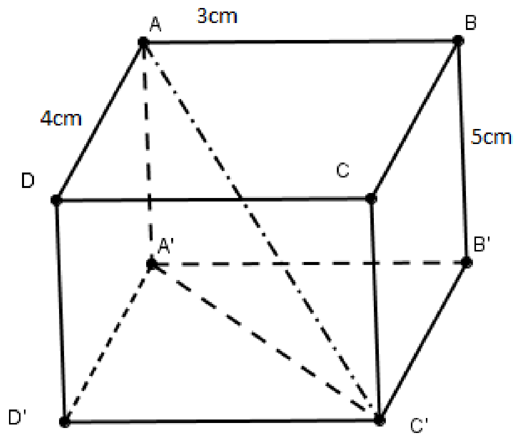
Bài 4. Hãy kể tên những cạnh bằng cạnh BD của hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′

<u>Bài giải</u>

Những cạnh bằng cạnh BD là AC; B′D′; A′C′.

Bài 5. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có AB = 3cm, AD = 4cm; AA′= 5cm. Tính AC′

Bài giải



Ta có AB = A′B′=3cm; AA′=BB′ = 5cm

AD=B′C′ = 4cm

Áp dụng định lí py - ta – go vào tam giác vuông A′B′C′ ta có

$$A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$A'C' = 5cm$$

Áp dụng định lí py - ta – go vào tam giác vuông AA′C′ ta có

$$AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = \sqrt{5^2 + 5^2}$$
$$AC' = 5\sqrt{2}cm$$

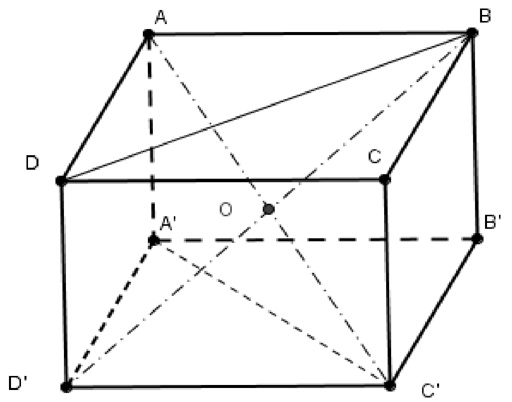
Bài 6. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′.

a) Hai đường thẳng AC′ và BD′ có cắt nhau không?

b) Đường thẳng BD có cắt các đường thẳng AA′, A′C′, CC′ hay không

c) Tìm một điểm cách đều các đỉnh của hình hộp chữ nhật

Bài giải



a) Đường thẳng AC′ và BD′ cắt nhau vì đó là hai đường chéo của hình hộp chữ nhật.

b) Ta có AA′ vuông góc với mp(ABCD) mà $BD \subset mp(ABCD)$ nên $AA' \perp BD$ hay BD cắt AA′

* Ta có mp(ABCD)//mp(A′B′C′D′)

Mà $BD \subset mp(ABCD)$ và $A'C' \subset mp(A'B'C'D')$

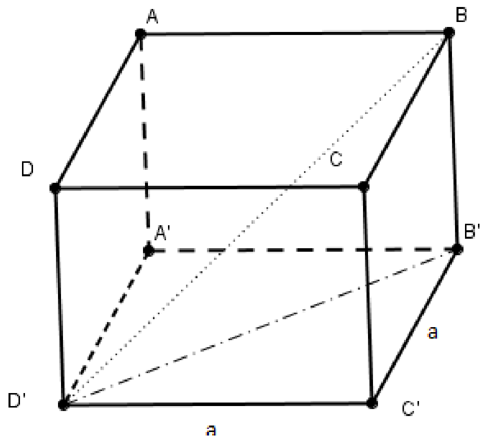
Nên BD không cắt A′C′.

* Ta có CC′ vuông góc với mp(ABCD) mà $BD \subset mp(ABCD)$ nên $CC' \perp BD$ hay BD cắt CC′

Bài 7. Tìm độ dài cạnh của hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ biết BD′=$\sqrt{3}$ cm

Bài giải

Gọi độ dài cạnh hình lập phương là a cm



Ta có $B'D' = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ cm

Ta có

$BD' = \sqrt{B'D'^2 + BB'^2} = \sqrt{2a^2 + a^2}$

$BD' = a\sqrt{3}cm$

Mà BD′=$\sqrt{3}$ cm nên ta có a = 1 cm

Vậy cạnh hình lập phương là 1cm

Bài 8. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′. Chứng minh rằng nếu BA′C′ là tam giác đều thì ABCD.A′B′C′D′ là hình lập phương

Bài giải

Gọi cạnh tam giác đều BA′C′ là d

Chiều dài, chiều rộng, chiều cao hình hộp lần lượt là a, b, c

Trong tam giác vuông A′D′C′ ta có $d^2 = a^2 + b^2$ (1)

Trong tam giác vuông AA′B ta có $d^2 = a^2 + c^2$ (2)

Trong tam giác vuông C′B′B ta có $d^2 = b^2 + c^2$ (3)

Lấy (2)-(3) vế theo vế ta được

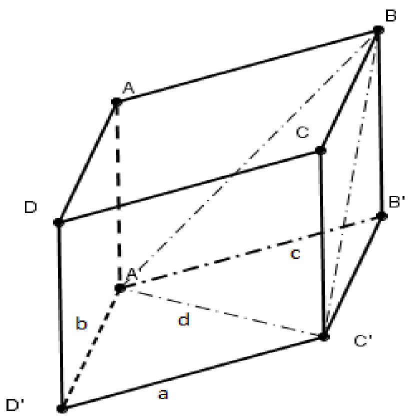
$a^2 = b^2$ (*)

Lấy (1)-(2) vế theo vế ta được

$c^2 = b^2$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra a = b = c

Hay ABCD.A′B′C′D′ là hình lập phương



Bài 9. Tính các kích thước của hình hộp chữ nhật biết rằng chúng tỉ lệ với 2, 3, 4 và thể tích của hình hộp bằng 1536 cm^2

Bài giải

Gọi 3 kích thước của hình hộp chữ nhật lần lượt là a, b, c

Ta có $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k$ và V= abc = 1536 cm^3

Suy ra $k^3=\frac{abc}{2.3.4}=\frac{1536}{24}=64$

$\Rightarrow k=4$

Vậy $\frac{a}{2}=4\Rightarrow a=8$; $\frac{b}{3}=4\Rightarrow b=12$; $\frac{c}{4}=4\Rightarrow c=16$

Vậy 3 kích thước của hình hộp lần lượt là 8; 12; 16

Bài 10. Một bể đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật (xem hình vẽ). Mực nước hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình. Nếu ta đậy bình lại rùi dựng đứng lên (lấy mặt (AA′B′B) làm đáy) thì chiều cao của mực nước là bao nhiêu?

Bài giải

Thể tích hình hộp chữ nhật là

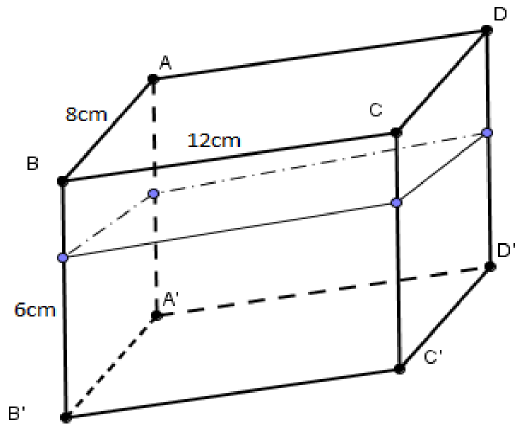
$V=6.8.12=576cm^3$

Thể tích nước chứa trong hình hộp là

$V_1=8.12.\left(\frac{2}{3}.6\right)=384cm^3$

Nếu chọn (AA′B′B) làm đáy. Gọi h là chiều cao mực nước mới, ta có thể tích

$V_1=8.6.h\Rightarrow 384=48h\Rightarrow h=8cm$



Vậy chiều cao mực nước mới là 8cm

Bài 11. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′. Chứng minh rằng

a) BC vuông góc với mp(DD′C′C)

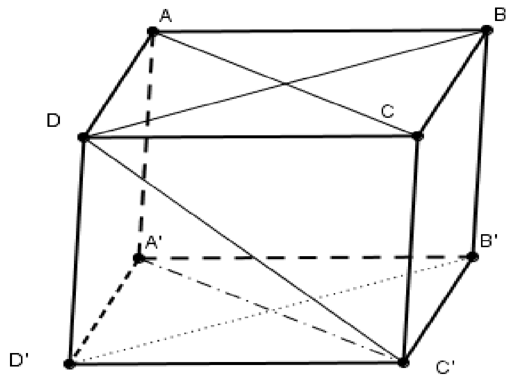
b) A′C′ vuông góc với mp(BDD′B′)

c) BD vuông góc với mp(AA′C′C)

d) BC vuông góc C′D

Bài giải

a) Ta có BC $\perp$ DC; BC $\perp$ CC′ mà DC và CC′ là hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mp(DD′C′C). Vậy nên $BC \perp mp(DD'C'C)$



b) Ta có $A'C' \subset mp(A'B'C'D')$

mặt khác DD′ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau A′D′ và D′C′ nằm trong mp(A′B′C′D′) nên DD′ $\perp$ mp(A′B′C′D′)

mà $DD' \subset mp(DD'B'B)$

Suy ra A′C′ vuông góc với mp(BDD′B′)

c) Tương tự như câu b

d) $BC \perp mp(DD'C'C)$ nên BC vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp(DD′C′C) hay BC $\perp$ DC′

Bài 12. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′.

a) Đường thẳng A′B′ song song với những mặt phẳng nào?

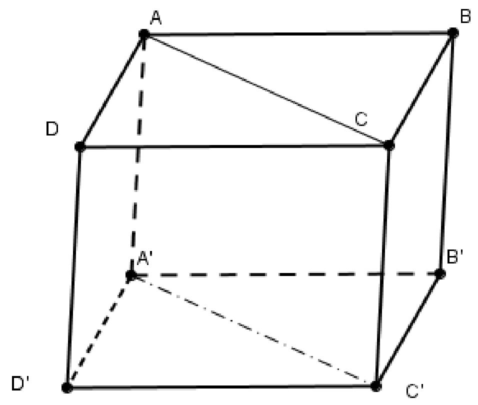
b) Đường thẳng AC có song song với mặt phẳng (A′B′C′) không?

<u>Bài giải</u>

a) A′B′//mp(ABCD) vì A′B′//AB và $AB \subset mp(ABCD)$

A′B′// mp(DCC′D′) vì A′B′//D′C′ và $D'C' \subset mp(DCC'D)$

b) AC//mp(A′B′C′) vì AC//A′C′ và $A'C' \subset mp(A'B'C')$



Bài 13. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có AB = a, AD = b, AA′ = c. Chứng minh D′B = B′D =AC′=A′C = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

<u>Bài giải</u>

Trong tam giác vuông A′B′C′ ta có $A'C' = \sqrt{B'C'^2 + B'A'^2} \Rightarrow A'C' = \sqrt{b^2 + a^2}$

Trong tam giác vuông AA′C′ ta có

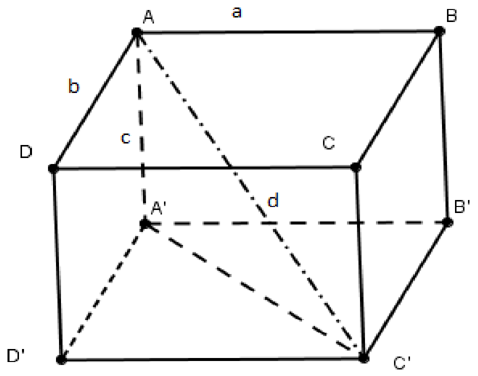
$AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} \Rightarrow AC' = \sqrt{c^2 + b^2 + a^2}$

Tương tự ta có D′B = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

B′D = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

A′C= $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Vậy D′B=B′D =AC′=A′C= $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



Bài 14. Một hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 60 cm^3 và diện tích toàn phần bằng 94 cm^2 . Tính chiều rộng, chiều dài của hình hộp chữ nhật biết chiều cao bằng 4cm.

Bài giải

Gọi hai kích của hình hộp lần lượt là a, b

Ta có $V = 4ab = 60 \quad cm^3 \Rightarrow ab = 15$ (1)

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day} = 2ph + 2ab$

$S_{tp} = 2(a+b).4 + 2ab = 94$

Hay a + b = 8 (2)

Từ (1) và (2) suy ra a = 5; b = 3 hoặc a = 3; b = 5

Vậy hai kích thước của hình hộp chữ nhật là 3cm và 5 cm.

Bài 15. Một bể đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật (xem hình vẽ). Mực nước hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình. Nếu ta đậy bình lại rùi dựng đứng lên (lấy mặt (ADD′A′) làm đáy) thì chiều cao của mực nước là bao nhiêu?

Bài giải

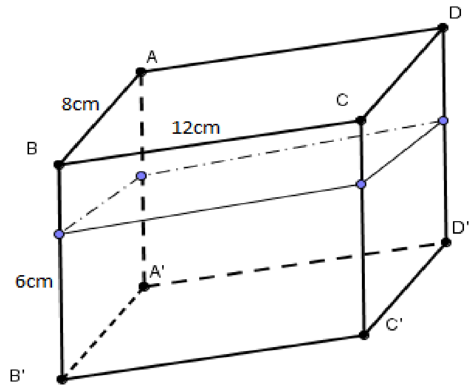
Thể tích hình hộp chữ nhật là $V = 6.8.12 = 576cm^3$

Thể tích nước chứa trong hình hộp là $V_1 = 8.12.\left(\frac{2}{3}.6\right) = 384cm^3$

Nếu chọn (ADD’A’) làm đáy . Gọi h là chiều cao mực nước mới, ta có thể tích

$V_1 = 12.6.h \Rightarrow 384 = 72h \Rightarrow h = 5,3cm$

Vậy chiều cao mực nước mới là 5,3cm



Bài 16. Một bình đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật có chiều rộng bằng 4cm, chiều dài bằng 8cm, chiều cao bằng 5cm. Mực nước hiện tại bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của bình. Nếu ta đổ nước trong bình vào một bình khác hình lập phương có cạnh bằng 5cm thì chiều cao mực nước là bao nhiêu?

Bài giải

Thể tích nước có trong hình hộp là $V = \frac{3}{4}.5.8.4 = 120cm^3$

Gọi h là chiều cao của mực nước mới ở bình hình lập phương có cạnh là 5cm, ta có

$h = \frac{V}{25} = \frac{120}{25} = 4,8cm$

Bài 2. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1) Hình lăng trụ đứng

- Hình bên là hình lăng trụ đứng. Trong hình này:

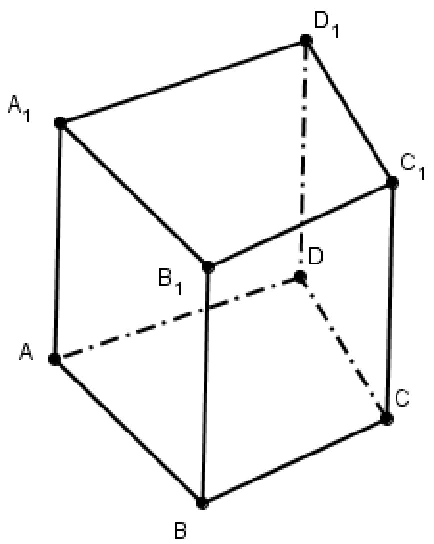
- A, B, C, D, $A_1; B_1; C_1; D_1$ là các đỉnh

- Các mặt $ABB_1A_1; BCC_1B_1; \ldots$ là các hình chữ nhật.

Chúng được gọi là các mặt bên.

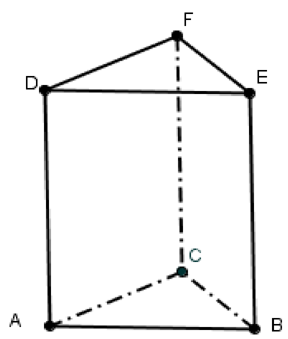
- Hai mặt $ABCD; A_1B_1C_1D_1$ là hai đáy

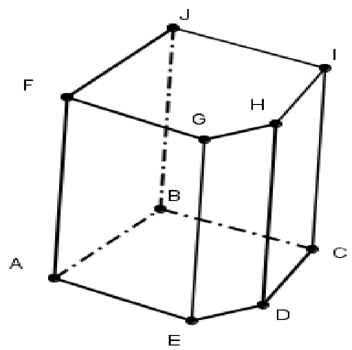
- Hình lăng trụ đứng trên có hai đáy là tứ giác nên gọi là lăng trụ đứng tứ giác, kí hiệu $ABCD.A_1B_1C_1D_1$



Hình lăng trụ đứng tứ giác

- Hình hộp chữ nhật, hình lập phương cũng là những hình lăng trụ đứng.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.
- Lăng trụ đứng có hai đáy là tam giác, tứ giác , ngũ giác thì hình lăng trụ đứng tương ứng được gọi là lăng trụ đứng tam giác, lăng trụ đứng tứ giác, lăng trụ đứng ngũ giác. (hình 1)





(hình 1)

2) Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng

- Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích các mặt bên. Ta có công thức $S_{xq} = 2ph$ (p là nữa chu vi đáy, h là chiều cao).

- Diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day}$$

3) <u>Thể tích của hình lăng trụ đứng</u>

- Thể tích của hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao
- Công thức V = S.h (S là diện tích đáy, h là chiều cao)

B. <u>LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP</u>

Bài 17. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A′B′C′.

a) Những cặp mặt phẳng nào song song với nhau?

b) Những cặp mặt phẳng nào vuông góc với nhau?

<u>Bài giải</u>

a) Những cặp mặt phẳng song song là: mp(ABC)//mp(A′B′C′)

b) Những cặp mặt phẳng vuông góc nhau là: mp(ABC)$\perp$mp(AA′B′B)

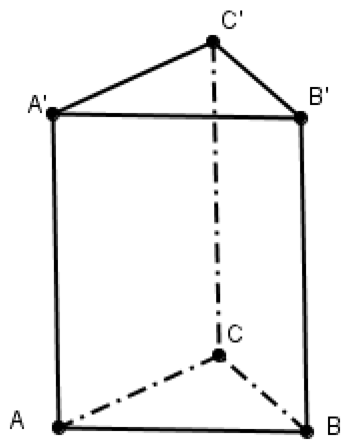
mp(ABC)$\perp$mp(BB′C′C)

mp(ABC)$\perp$mp(AA′C′C)

mp(A′B′C′)$\perp$mp(BB′C′C)

mp(A′B′C′)$\perp$mp(AA′C′C)

mp(A′B′C′)$\perp$mp(AA′B′B)



Bài 18. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.DEF.

Trong các phát biểu sau phát biểu nào đúng ?

a) Các cạnh bên AB và AD vuông góc với nhau.

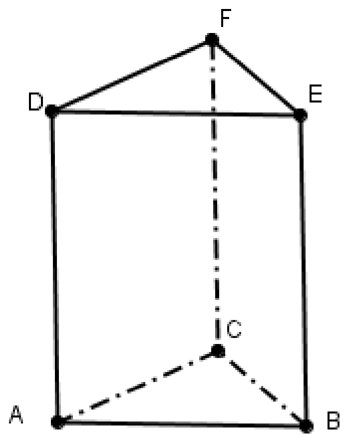
b) Các cạnh bên BE và EF vuông góc với nhau.

c) Các cạnh bên AC và DF vuông góc với nhau.

d) Các cạnh bên AC và DF song song với nhau.

e) Hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) song song với nhau.

f) Hai mặt phẳng (ACFD) và (BCFE) song song với



nhau.

g) Hai mặt phẳng (ABED) và (DEF) vuông góc với nhau.

Bài giải

a) Sai vì AB và AD không phải là các cạnh bên.

b) Sai vì BE và EF không phải là các cạnh bên.

c) Sai vì AC và DF không phải là các cạnh bên.

d) Sai vì AC và DF không phải là các cạnh bên.

e) Đúng

f) Sai vì Hai mặt phẳng (ACFD) và (BCFE) vuông góc nhau

g) Đúng

Bài 19. Cho một hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′

a) Những cặp mặt phẳng nào song song với nhau.

b) Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với những mặt phẳng nào.

Bài giải

a) Những mặt phẳng song song với nhau là: mp(ABCD)//mp(A′B′C′D′);

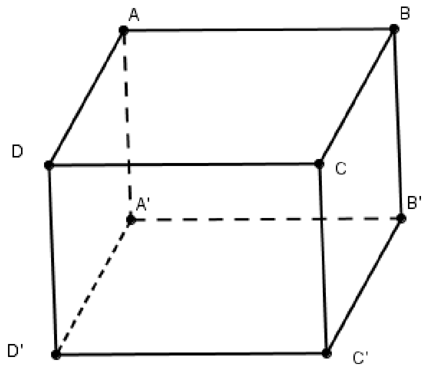
mp(AA′D′D)// mp(BB′C′C);

mp(DCC′D′)//mp(AA′B′B)

b) mp(ABCD) $\perp$ mp(AA′B′B)

mp(ABCD) $\perp$ mp(BCC′B′)

mp(ABCD) $\perp$ mp(ADD′D)



Bài 20. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A′B′C′ có hai đáy là hai tam giác vuông tại A, A′. Chứng minh

a) $AB \perp mp(\mathrm{AA}'C'C)$

b) $mp(\mathrm{AA}'C'C) \perp mp(\mathrm{AA}'B'B)$

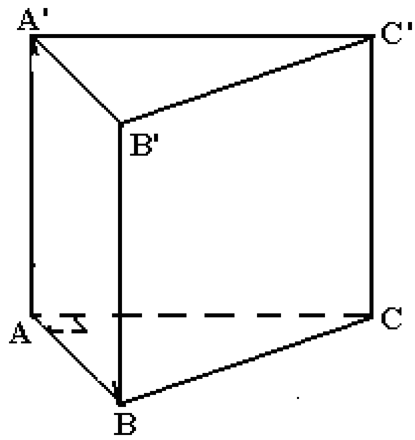
Bài giải

a) $AB \perp AC (\Delta ABC$ vuông tại A)

$AB \perp AA'$ (AA′B′B là hình chữ nhật) nên AB vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AC và AA′ của mặt phẳng (AA′C′C).

Suy ra $AB \perp mp(AA'C'C)$

b) mp(AA′B′B) chứa AB, mà AB vuông góc với mp(AA′C′C) nên $mp(AA'C'C) \perp mp(AA'B'B)$



Bài 21. Một khối gỗ hình lập phương ABCD.A′B′C′D′, có cạnh bằng a. Người ta cắt khối gỗ theo mặt (ACC′A′) được hai hình lăng trụ đứng bằng nhau. Tính diện tích xung quanh của mỗi hình lăng trụ đó.

Bài giải

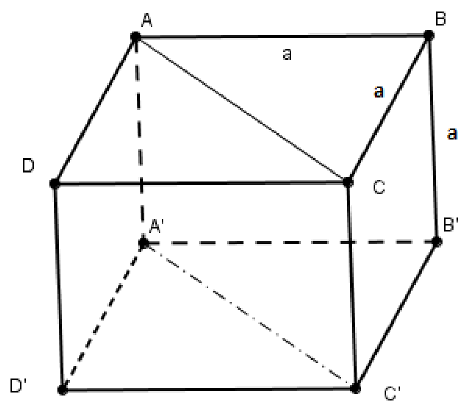
Ta có $AC = \sqrt{a \ \ + a^2} = a\sqrt{2}cm$

Chu vi đáy hình lăng trụ

$a + a + a\sqrt{2} = \left(2 + \sqrt{2}\right)a$

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ

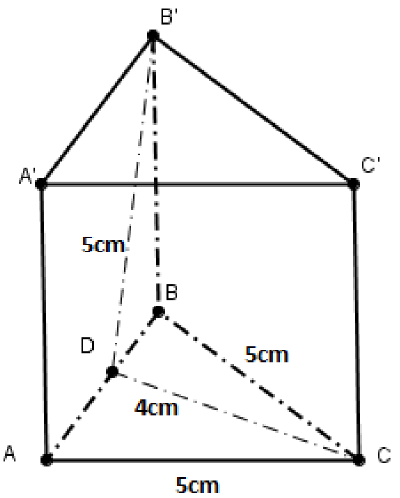
$S_{xq} = 2ph = \dfrac{2(2+\sqrt{2})a.a}{2} = (2+\sqrt{2})a^2cm^2$



Bài 22 Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A′B′C′, có đáy là tam giác ABC cân tại C, D là trung điểm của cạnh AB. Tính diện tích toàn phần của hình lăng trụ.

Bài giải

D là trung điểm AB, suy ra CD là chiều cao tam giác đáy



Vậy nên

$DB = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3cm$

BB' ⊥ AB, áp dụng định lí py-ta-go, ta có

$BB' = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4cm$

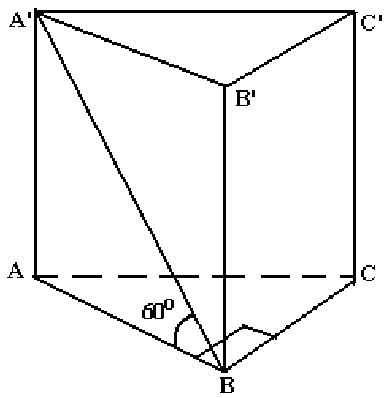
Diện tích toàn phần của hình lăng trụ là

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = (5+5+6).4 + 2(\frac{1}{2}.4.6)$

$S_{tp} = 64 + 24 = 88cm^2$

Bài 23 Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA = BC = a ,biết A'B hợp với đáy ABC một góc 60^0 . Tính thể tích lăng trụ.

Bài giải



Ta có $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp AB \,\&\, AB$ là hình chiếu của A'B trên đáy ABC và $A\hat{B}A' = 60^o$

Trong $\Delta ABA'$ ta có

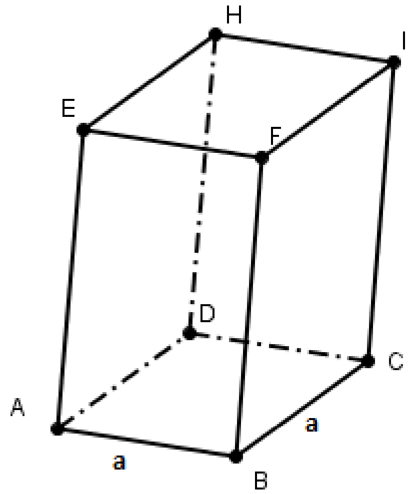
$\Rightarrow AA' = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{a^2}{2}$

Vậy $V = S_{ABC}.AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Bài 24. Cho hình lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a. Tính chiều cao (theo a) của hình lăng trụ, biết diện tích xung quanh bằng $\frac{1}{2}$ diện tích toàn phần.

Bài giải



Diện tích xung quanh hình trụ

$S_{xq} = 2(a+a).h$ (cm)

Diện tích toàn phần của hình trụ

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2(a+a).h + 2a.a$

$\Rightarrow S_{tp} = 4ah + 2a^2 = 2a(2h+a)$

Theo đề ta có $S_{xq} = \frac{1}{2}S_{tp}$

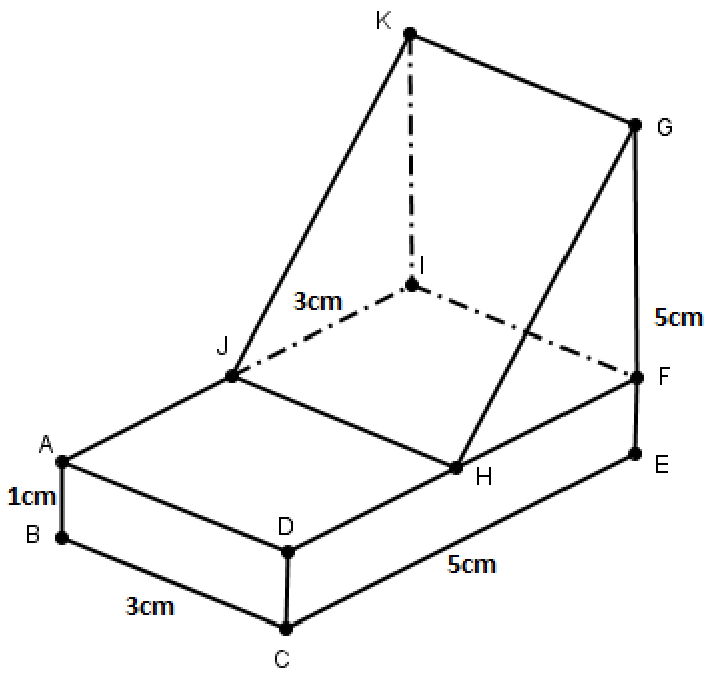
Hay $4ah = \frac{1}{2}2a(a+2h)$

$\Rightarrow 4h = a + 2h$

$\Rightarrow 2h = a \Rightarrow h = \frac{a}{2}$

Vậy chiều cao của hình trụ là $\frac{a}{2}$(cm)

Bài 25. Tính diện tích toàn phần (tổng diện tích các mặt) và thể tích của hình sau



Bài giải

* Tính diện tích toàn phần hình lăng trụ HFG.JIK

Độ dài đường chéo của tam giác đáy là $JK = HG = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5cm$

Diện tích tam giác đáy $S_{\Delta HFG} = S_{\Delta JIK} = \frac{1}{2}3.4 = 6cm^2$

Diện tích toàn phần hình lăng trụ HFG.JIK

$$S_{tp1} = S_{xq} + 2S_{day} = 2\left(\frac{3+4+5}{2}\right).3 + 2.6 = 48cm^2$$

* Tính diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật ABCD.EFII′

$$S_{tp2} = S_{xq} + 2S_d = 2(1+3).5 + 2.1.3 = 46cm^2$$

* $S_{JIFH} = 3.3 = 9cm^2$

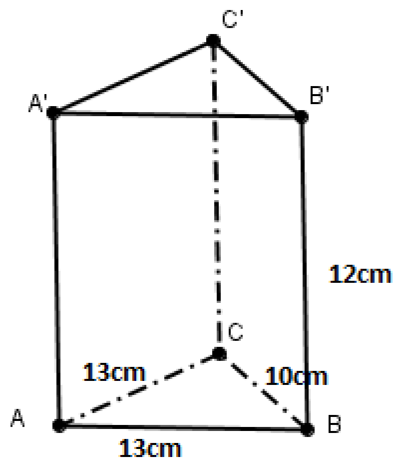
* Diện tích toàn phần của hình đã cho là

$$S_{tp} = S_{tp1} + S_{tp2} - S_{JIFH} = 48 + 46 - 9 = 85cm^2$$

- Thể tích hình lăng trụ $V_1 = S_d.h = 6.3 = 18cm^3$
- Thể tích hình hộp chữ nhật $V_2 = S_d.h = 3.5 = 15cm^3$
- Thể tích của hình đã cho là $V = V_1 + V_2 = 18 + 15 = 33cm^3$

Bài 26.

Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A′B′C′ có đáy là tam giác ABC cân tại A có các kích thước như hình vẽ. Tính thể tích của hình lăng trụ.



Bài giải

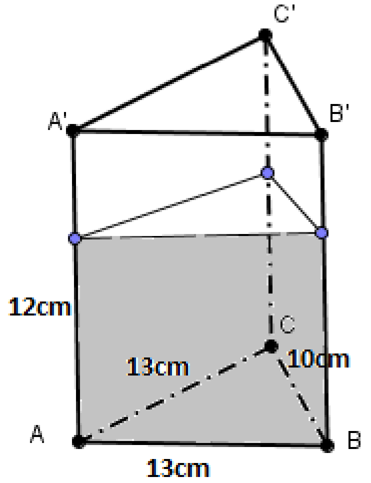
Chiều cao của tam giác đáy

$$h' = \sqrt{13^3 - 5^2} = \sqrt{169 - 25}$$
$$h' = \sqrt{144} = 12cm$$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}h'.BC = \frac{1}{2}.12.10 = 60cm^2$

Thể tích của hình lăng trụ ABC.A′B′C′ là $V = S_d.h = 60.12 = 720cm^3$

Bài 27. Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng ABC.A′B′C′, đáy là tam giác cân ABC có kích thước như hình vẽ. Mực nước hiện tại trong bình bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của lăng trụ. Bây giờ ta đậy bình lại và lật đứng lên sao cho mặt (BCC′B′) là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.



Bài giải

Chiều cao của tam giác đáy

$$h' = \sqrt{13^3 - 5^2} = \sqrt{169 - 25}$$
$$h' = \sqrt{144} = 12cm$$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}h'.BC = \frac{1}{2}.12.10 = 60cm^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là $V = 60.\frac{2}{3}.12 = 480cm^3$

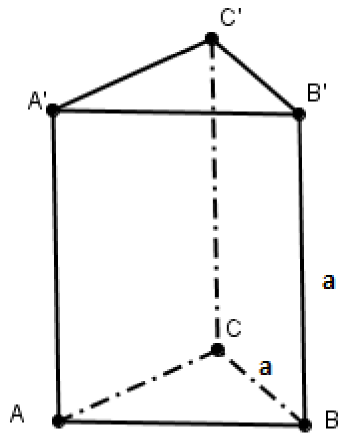
Nếu chọn đáy là (BCC′B′) thì $S_d = 10.12 = 120cm^2$

Chiều cao mực nước mới là $h' = \frac{V}{S_d} = \frac{480}{120} \Rightarrow h' = 4cm$

Vậy chiều cao mực nước mới là 4cm.

Bài 28. Tính thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác và các mặt bên là các hình vuông cạnh bằng a.

Bài giải



Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều cạnh a,

đường cao tam giác đáy là $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}cm$

Diện tích tam giác đáy là

$$S = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Thể tích hình lăng trụ là

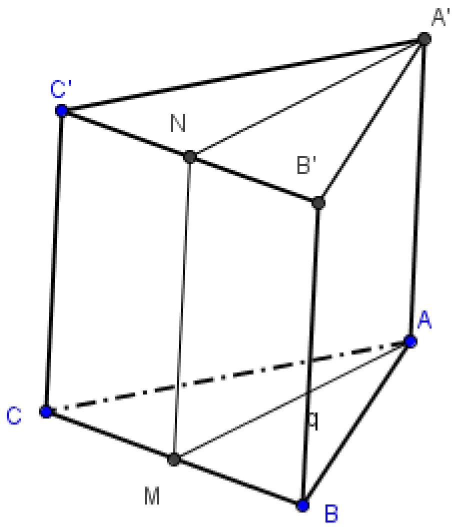
$$V = S.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}cm^3$$

Bài 29. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A′B′C′ có đáy là tam giác ABC cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và B′C′

a) Chứng minh AMNA′ là hình chữ nhật

b) Tính diện tích hình chữ nhật AMNA′ biết thể tích của hình lăng trụ bằng V và BC = a.

Bài giải.



a) Ta có A′N // AM và A′N = AM nên A′NMA là hình bình hành.

Mặt khác A′N $\perp$ mp(CC′B′B) nên A′N $\perp$ NM

Vậy AMNA′ là hình chữ nhật

b) $V = S_d.h = \dfrac{1}{2}AM.BC.AA'$

mà AA′ = MN

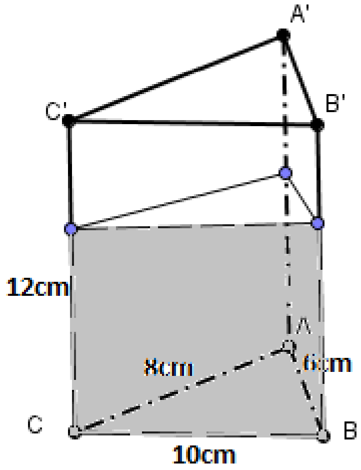
nên diện tích hình chữ nhật AMNA′ là

$$S = \frac{1}{2}AM.AA' = \frac{V}{a}(cm^2)$$

Bài 30. Một Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng ABC.A′B′C′, đáy là tam giác ABC có AB = 6cm, BC = 10cm, AC = 8cm, chiều cao CC′= 12cm. Mực nước trong bình hiện tại bằng

$\frac{2}{3}$ chiều cao của hình lăng trụ. Bây giờ ta đậy bình lại và lật đứng lên sao cho mặt (ACC'A') là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.

Bài giải



Diện tích tam giác đáy là $S = \frac{1}{2}.8.6 = 24cm^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là

$V = 24.\frac{2}{3}.12 = 192cm^3$

Nếu chọn đáy là (ACC'A') thì $S_d = 8.12 = 96cm^2$

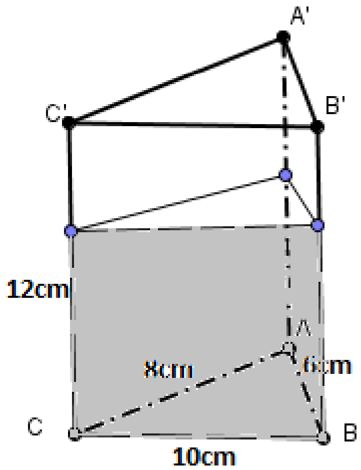
Chiều cao mực nước mới là

$$h' = \frac{V}{S_d} = \frac{192}{96} \Rightarrow h' = 2cm$$

Vậy chiều cao mực nước mới là 2cm.

Bài 31. Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy là tam giác ABC có AB = 6cm, BC = 10cm, AC = 8cm, chiều cao CC'= 12cm. Mực nước trong bình hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của hình lăng trụ. Bây giờ ta đậy bình lại và lật đứng lên sao cho mặt (BCC'B') là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.

Bài giải



Diện tích tam giác đáy là $S = \frac{1}{2}.8.6 = 24cm^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là

$V = 24.\frac{2}{3}.12 = 192cm^3$

Nếu chọn đáy là (BCC'B') thì $S_d = 6.12 = 72cm^2$

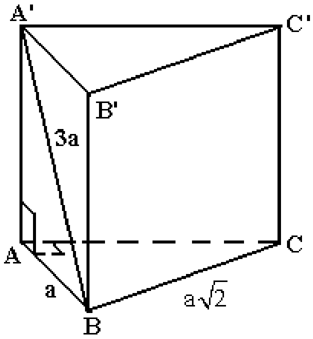
Chiều cao mực nước mới là

$$h' = \frac{V}{S_d} = \frac{192}{72} \Rightarrow h' \approx 2,7cm$$

Vậy chiều cao mực nước mới là 2,7cm.

Bài 32. Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A′B′C′ là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và biết $A'B = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ.

Bài giải



Ta có

ΔABC vuông cân tại A nên AB = AC = a

ABC A'B'C' là lăng trụ đứng

$\Rightarrow AA' \perp AB$

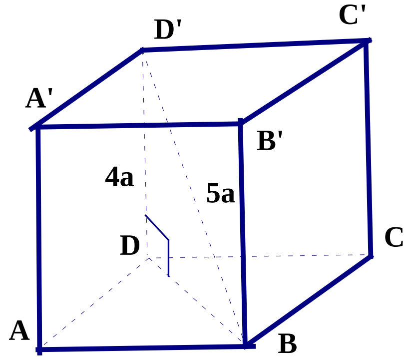
$\Delta AA'B \Rightarrow AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 8a^2$

$\Rightarrow AA' = 2a\sqrt{2}$

Vậy $V = B.h = S_{ABC}.AA' = a^3\sqrt{2}$

Bài 33. Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A′B′C′D' có cạnh bên bằng 4a và đường chéo 5a. Tính thể tích khối lăng trụ này.

Bài giải



ABCD A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên

$BD^2 = BD'^2 - DD'^2 = 9a^2 \Rightarrow BD = 3a$

ABCD là hình vuông $\Rightarrow AB = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$

Suy ra $B = S_{ABCD} = \dfrac{9a^2}{4}$

Vậy $V = B.h = S_{ABCD}.AA' = 9a^3$

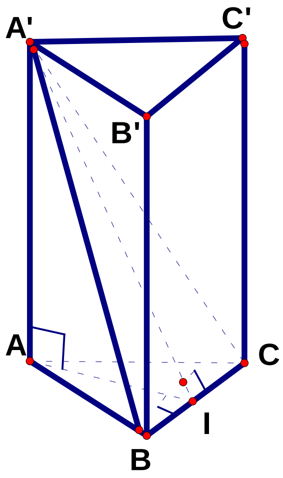
Bài 34. Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A′B′C′ là tam giác đều cạnh a=4 và biết diện tích tam giác A′BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

+ Phân tích V= B.h để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?

+ Tìm diên tích B = S_{ABC} bằng công thức nào ?

+ Từ diện tích $\Delta A'BC$ suy ra cạnh nào ? tại sao ?

+ Tìm h = AA' dùng tam giác nào và định lí gì ?



Lời giải:

Gọi I là trung điểm BC .Ta có ΔABC đều nên

$$AI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \;\&\; AI \perp BC \Rightarrow A'I \perp BC$$

$$S_{A'BC} = \frac{1}{2}BC.A'I \Rightarrow A'I = \frac{2S_{A'BC}}{BC} = 4$$

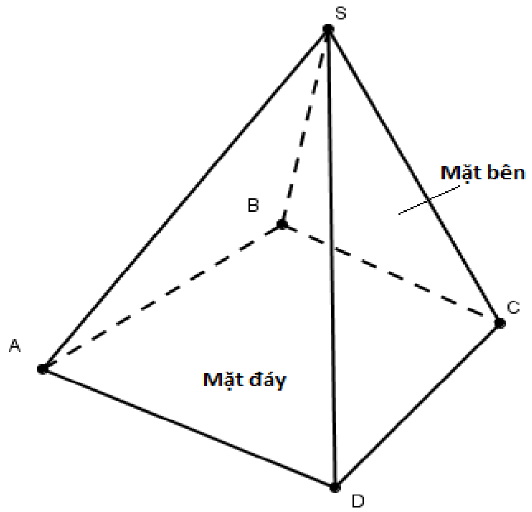
$$AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AI$$
$$\Rightarrow AA' = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = 2$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = 8\sqrt{3}$

Bài 3. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1) Hình chóp

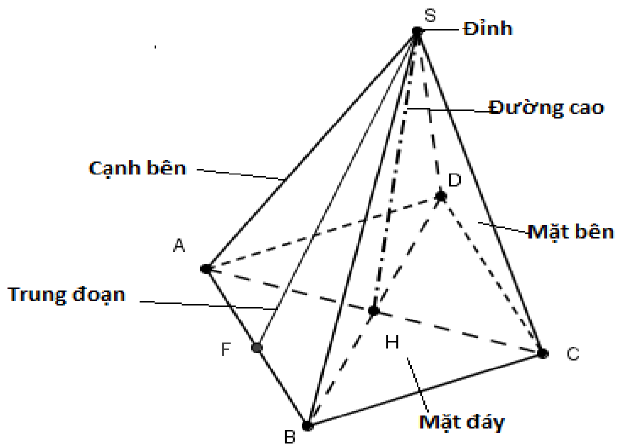


Hình chóp có:

- Đáy là một đa giác, các mặt bên là những tam giác có chung một đỉnh.
- Đường thẳng đi qua đỉnh và vuông góc với mặt phẳng đáy gọi là đường cao.

- Trong hình trên: hình chóp S.ABCD có đỉnh là S, đáy là tứ giác ABCD, ta gọi đó là hình chóp tứ giác.

2) Hình chóp đều



Hình chóp S.ABCD trên có đáy là hình vuông ABCD, các mặt bên SAB, SBC, SCD và SDA là những tam giác cân bằng nhau. Ta gọi S.ABCD là hình chóp tứ giác đều

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều, các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.

– Chân đường cao của hình chóp đều trùng với tâm của đường tròn đi qua các đỉnh của mặt đáy.

– Đường cao vẽ từ đỉnh của mỗi mặt bên của hình chóp đều được gọi là **trung đoạn** của hình chóp đó.

Ví dụ 1: a) Hình chóp có đáy là một hình thoi, các mặt bên là tam giác cân bằng nhau và có chung đỉnh, có thể được gọi là hình chóp tứ giác đều không?

b) Hình chóp có đáy là một hình chữ nhật, các mặt bên là tam giác cân bằng nhau và có chung đỉnh, có thể được gọi là hình chóp tứ giác đều không?

<u>Bài giải</u>

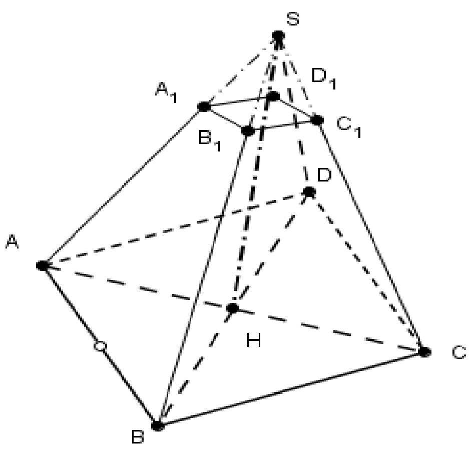
a) Hình thoi không phải là một đa giác đều nên hình chóp có mặt đáy là một hình thoi không phải là hình chóp đều. Vậy phát biểu trên sai

b) Sai vid hình chữ nhật không phải là đa giác đều.

3) Hình chóp cụt đều

Hình chóp cụt đều là phần hình chóp đều nằm giữa mặt phẳng đáy của hình chóp và mặt phẳng song song với đáy và cắt hình chóp.

– Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là một hình thang cân.



4) Diện tích xung quanh của hình chóp đều.

- Diện tích xung quanh của hình chóp đều bằng nữa tích của chu vi đáy với trung đoạn.

$$S_{xq} = pd$$

(p là nữa chu vi đáy; d là trung đoạn của hình chóp)

– Diện tích toàn phần của hình chóp bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy.

$\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S}$ (S: diện tích đáy)

Ví dụ 2: Hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên bằng 25cm. Đáy là hình vuông ABCD cạnh 30cm. Tính diện tích toàn phần của hình chóp?

Bài giải

Gọi EI là một trung đoạn của hình chóp đều, ta có

$$EI^2 + IB^2 = EB^2$$

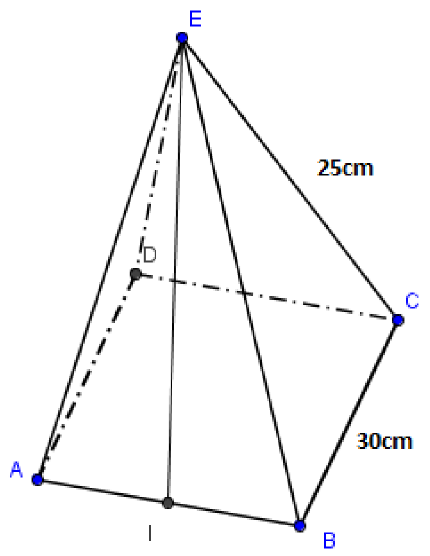
$$\Rightarrow EI^2 = EB^2 - IB^2 = EB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$EI^2 = 25^2 - 15^2$$

$$\Rightarrow EI = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20cm$$

Diện tích toàn phần của hình chóp đều

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = (30+30)20 + 30.30 = 2100cm^2$$



5) Thể tích của hình chóp đều

– Thể tích của hình chóp bằng một phần ba của diện tích đáy nhân với chiều cao.

$\boxed{V = \frac{1}{3}S.h}$ (S: diện tích đáy, h: chiều cao)

Ví dụ 3: Tính thể tích hình chóp tam giác đều, biết đường cao 12cm, cạnh đáy 10cm.

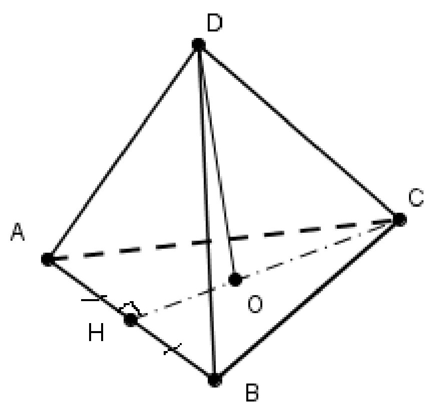
Bài giải

Hình chóp tam giác đều với cạnh đáy AB = 10cm, đường cao OD = 12cm có

+ Đường cao của tam giác đáy CH=

$\sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8,66cm$

+ Diện tích đáy



$$S = \frac{1}{2}HC.AB = \frac{1}{2}10.8,66 = 43,30cm^2$$

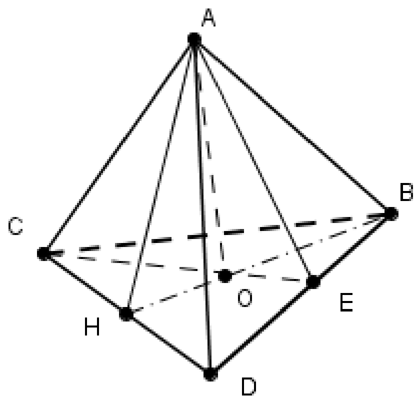
Thể tích $V = \frac{1}{3}S.OD = \frac{1}{3}.43,3.12 = 173,20cm^3$

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 35. Cho hình chóp tam giác đều A.BCD. Gọi H là trung điểm CD. Chứng minh: a) CD vuông góc với mặt phẳng (AHB)

b) AC$\perp$BD

Bài giải



a) Hình chóp A.BCD là hình chóp tam giác đều nên tam giác CBD là tam giác đều các tam ACB, ACD, ADB là các tam giác cân tại A. H là trung điểm CD suy ra HB $\perp$CD; AH$\perp$CD

Vậy CD vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (AHB) nên CD$\perp$mp(AHB)

b) Gọi E là trung điểm BD ta có AE$\perp$BD; CE$\perp$BD

Vậy BD vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (AEC) nên CD$\perp$ mp(AEC) suy ra CD vuông góc với mọi đường thẳng thuộc mp(AEC)

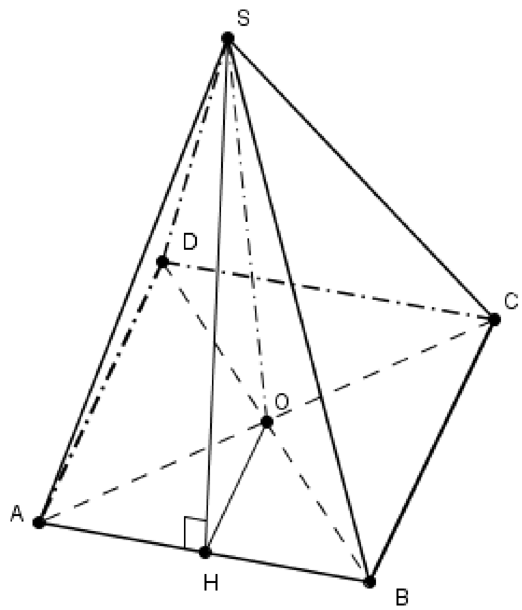
Hay AC$\perp$BD

Bài 36. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh

a) SO vuông góc với mp(ABCD)

b) mp(SAC) vuông góc với mp(ABCD)

Bài giải



a) Hình chóp tứ giác đều S.ABCD nên có ABCD là hình vuông, các cạnh bên bằng nhau.

Ta có ΔSBD là tam giác cân tại A có OD = OB nên SO là đường cao của tam giác hay $SO \perp BD$

Tương tự, ta có $SO \perp AC$

SO vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mp(ABCD) nên SO $\perp mp(ABCD)$

b) Ta có AC$\in mp(SAC)$

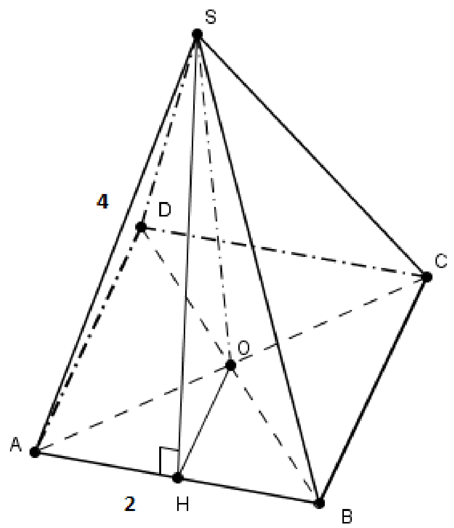
BD $\in mp(SBD)$

Mà BD$\perp AC$ nên

$mp(SAC) \perp mp(SBD)$

Bài 37.Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có AB = 2cm, SA = 4cm. Tính độ dài trung đoạn và chiều cao của hình chóp đều này.

Bài giải



Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có AB = 2cm, SA = 4cm, nên ABCD là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau.

Ta có

$$AC = BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AO = \frac{AC}{2} = \sqrt{2}$$

Trong tam giác vuông SOA vuông tại O, theo pytago ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4^4 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$$

Vậy chiều cao hình chóp là $3\sqrt{2}cm$

Gọi H là trung điểm AB, ta có SH là trung đoạn của hình chóp

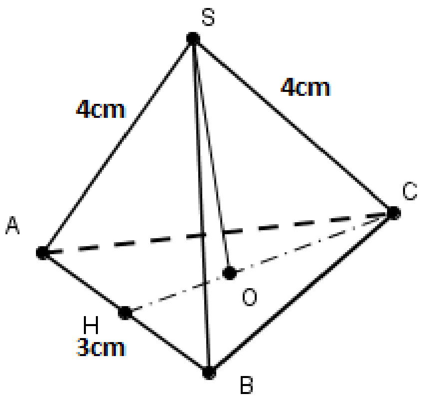
Trong tam giác SBH vuông tại H, theo pytago ta có

$$SH = \sqrt{SB^2 + IB^2} = \sqrt{4^2 - 1^1} = \sqrt{15}$$

Vậy độ dài trung đoạn là $\sqrt{15}cm$

Bài 38. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có AB = 3cm, cạnh bên SA = 4cm. Tính chiều cao của hình chóp.

Bài giải



Hình chóp tam giác đều S.ABC nên ABC là tam giác đều.

Gọi H là trung điểm AB, O là trong tâm tam giác ABC

Ta có CH là đường cao tam giác ABC

Trong tam giác CHB vuông tại H ta có

$$HC = \sqrt{CB^2 - HB^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$OC = \frac{2}{3}CH = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Trong tam giác vuông SOC vuông tại O ta có

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{4^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{13}$$

Vậy chiều cao của hình chóp là $\sqrt{13}cm$

Bài 39. Một hình chóp đều có 10 cạnh. Hỏi đáy của hình chóp đó là đa giác đều nào?

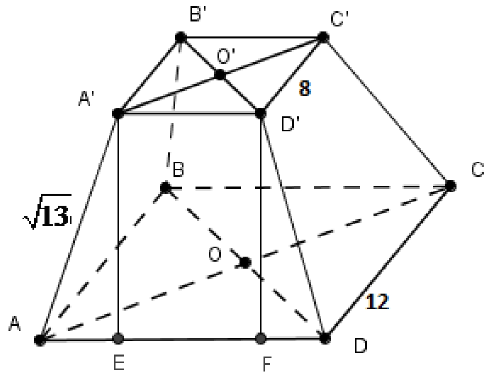
Bài giải

Hình chóp đều có 10 cạnh thì đáy của hình chóp đó là thập giác đều.

Bài 40. Một hình chóp cụt đều có đáy lớn bằng 12cm, đáy bé bằng 8cm và cạnh bên bằng $\sqrt{13}cm$. Tính độ dài trung đoạn và chiều cao của hình chóp cụt đó.

Bài giải

Hình chóp cụt đều ta thấy mặt bên là hình thang cân AA’D’D. Vẽ đường cao A’E và D’F , ta có

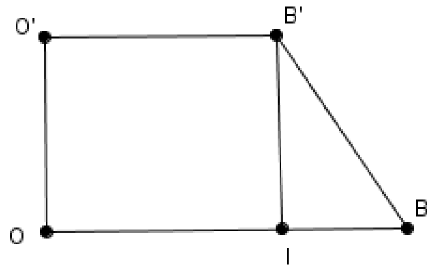


$$A'E = D'F = \frac{AD - A'D'}{2} = \frac{12-8}{2} = 2$$

Vậy độ dài trung đoạn là 2 cm

Khai triển hình chóp cụt đều ta thấy

Trong hình thang vuông OBB’O’ vẽ đường cao B’I ta có



$$OB = \frac{BD}{2} = 6\sqrt{2}; O'B' = 4\sqrt{2}$$

$$BI = OB - O'B' = 2\sqrt{2}$$

Vậy đường cao hình chóp cụt đều là

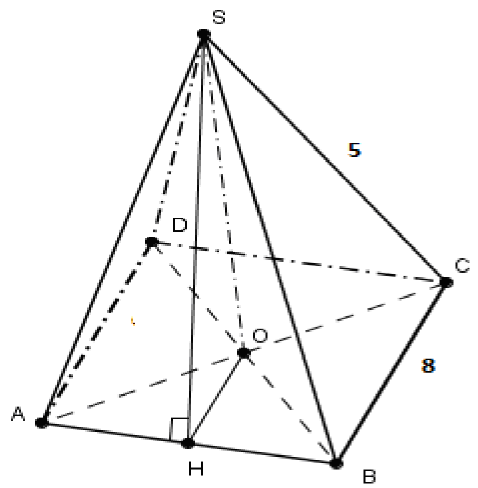
$$B'I = \sqrt{B'B^2 - BI^2}$$

$$B'I = \sqrt{\sqrt{13}^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{5}$$

Bài 41. Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng 8cm và độ dài cạnh bên bằng 5cm. Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

Bài giải

Trong tam giác vuông SHB, theo pytago ta có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$



Diện tích đáy là $S_d = 8.8 = 64(cm^2)$

Diện tích xung quanh hình chóp là

$$S_{xq} = pd = (8+8).3 = 48(cm^2)$$

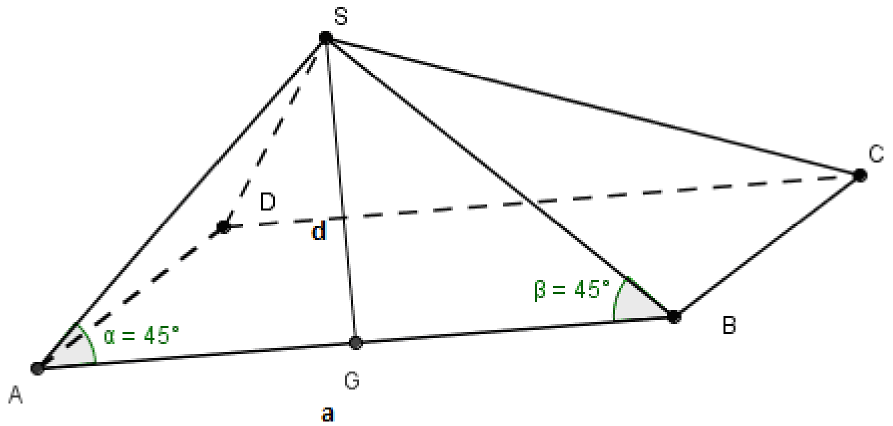
Diện tích toàn phần hình chóp

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 64 + 48 = 112(cm^2)$$

Bài 42. Cho hình chóp tứ giác đều có diện tích xung quanh bằng $\frac{1}{2}$ diện tích toàn phần.

Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông cân.

Bài giải



Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông, các cạnh bên là các tam giác cân tại S (1)

Gọi a là độ dài cạnh đáy, d là trung đoạn của hình chóp

Ta có $S_{xq} = pd = 2ad$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 2ad + a^2$$

Mặt khác $S_{xq} = \frac{1}{2}S_{tp} \Leftrightarrow 2ad = \frac{1}{2}\left(2ad + a^2\right) \Leftrightarrow ad - \frac{1}{2}a^2 = 0$

$$\Leftrightarrow a\left(d - \frac{1}{2}a\right) = 0 \Leftrightarrow d = \frac{1}{2}a$$

Gọi G là trung điểm AB suy ra $GB = \frac{1}{2}a$

Ta có SG là trung đoạn hình chóp $SG = \frac{1}{2}a$

Vậy trong tam giác SGB có GB=$SG = \frac{1}{2}a$ và $\hat{G} = 90^0$ nên ΔSGB là tam giác vuông

cân tại G $\Rightarrow \widehat{GSB} = 45^0$ (2)

Tương tự, ta có $\widehat{GSA} = 45^0$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $\widehat{BSA} = 90^0$ (4)

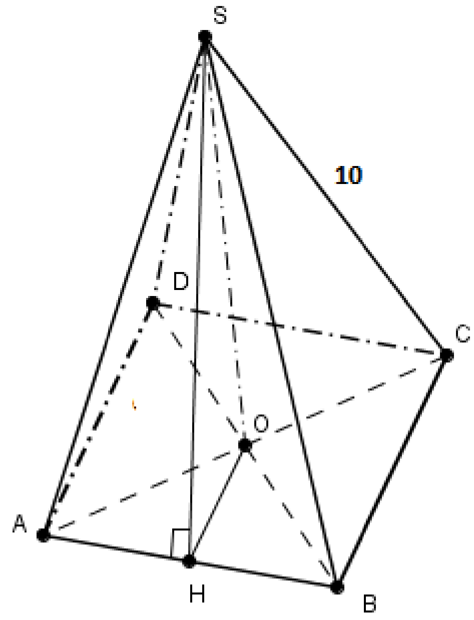
Từ (1), (4) suy ra ΔASB vuông cân tại S

Tương tự ta chứng minh được các cạnh bên của hình chóp là tam giác vuông cân.

Bài 43. Tính diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều S.ABCD biết

$BD = 12\sqrt{2}cm, SC = 10cm$

Bài giải



Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông nên AD = AB, ta có

$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = AB\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

$\Rightarrow AB = 12$

Trong tam giác vuông SHB, theo pytago ta có

$SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

Trong tam giác SOB vuông tại O, theo pytago ta có

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{10^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{7}$

Diện tích đáy là $S_d = 12.12 = 144(cm^2)$

Diện tích xung quanh hình chóp là $S_{xq} = pd = (12+12).8 = 192(cm^2)$

Diện tích toàn phần hình chóp $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 144 + 192 = 336(cm^2)$

Bài 44. Tính diện tích toàn phần của hình chóp tam giác đều biết cạnh đáy bằng 10cm, cạnh bên bằng 13cm.

Bài giải

Tam giác BCA cân tại S có SI$\perp AB$ tại I, theo pytago ta có

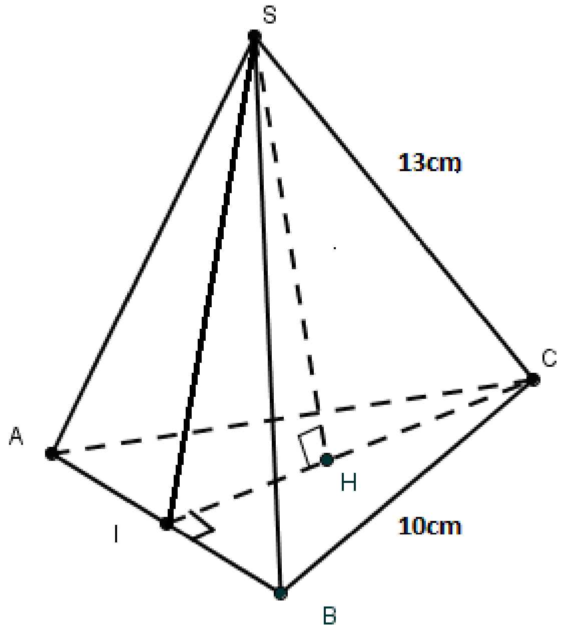
$$SI = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

Tam giác ABC là tam giác đều có cạnh là a = 10cm nên chiều cao tam giác đều là

$$h = CI = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

S.ABC là hình chóp đều nên chân đường cao H trùng với giao điểm ba đường trung tuyến của tam giác, ta có SH $\perp$ CI và

$$HC = \frac{2}{3}CI = \frac{2}{3}.5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$



Trong tam giác SHC vuông tại H, theo định lí pytago ta có

$$HS = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 11,6$$

Diện tích đáy là $S = \frac{1}{2}CI.AB = \frac{1}{2}.5\sqrt{3}.10 = 25\sqrt{3}(cm^2)$

$$S_{xq} = pd = \left(\frac{10+10+10}{2}\right).12 = 180(cm^2)$$

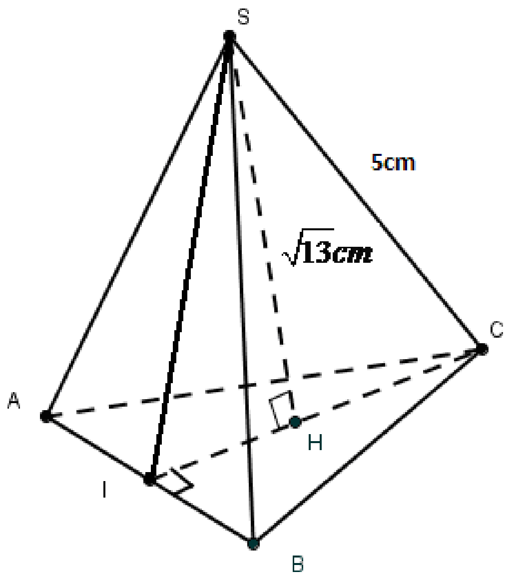
Vậy diện tích toàn phần của hình chóp là $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 11,6 + 180 = 191,6(cm^2)$

Bài 45. Tính diện tích toàn phần của hình chóp tam giác đều biết chiều cao bằng $\sqrt{13}cm$ và cạnh bên bằng 5cm.

Bài giải

S.ABC là hình chóp đều nên chân đường cao H trùng với giao điểm ba đường trung tuyến của tam giác, ta có SH $\perp$ CI và $HC = \frac{2}{3}CI$

Trong tam giác SHC vuông tại H, theo định lí pytago ta có



$$HC = \sqrt{SC^2 - SH^2} = \sqrt{5^2 - \sqrt{13}^2} = 2\sqrt{3}$$

Suy ra CI = $3\sqrt{3}$ cm

Tam giác ABC là tam giác đều, giả sử có cạnh là a nên chiều cao tam giác đều là $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ mà CI là chiều cao tam giác ABC nên cạnh tam giác đều là

$\dfrac{2h}{\sqrt{3}} = \dfrac{2.3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$ hay AB=6cm

Diện tích đáy là $S = \dfrac{1}{2}CI.AB = \dfrac{1}{2}.3\sqrt{3}.6 = 9\sqrt{3}(cm^2)$

Ta có SI là trung đoạn của hình chóp, ta có $SI = \sqrt{SB^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$$S_{xq} = pd = \left(\frac{6+6+6}{2}\right).4 = 36(cm^2)$$

Vậy diện tích toàn phần của hình chóp là $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 36 + 9\sqrt{3} \approx 51,6(cm^2)$

Bài 46. Cho hình chóp tứ giác đều có diện tích xung quanh bằng $\dfrac{2}{3}$ diện tích toàn phần.

Tính diện tích xung quanh của hình chóp biết cạnh bên $\sqrt{5}cm$

Bài giải

Gọi a là cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều, d là trung đoạn.

Ta có $S_{xq} = \dfrac{2}{3}S_{tp}$

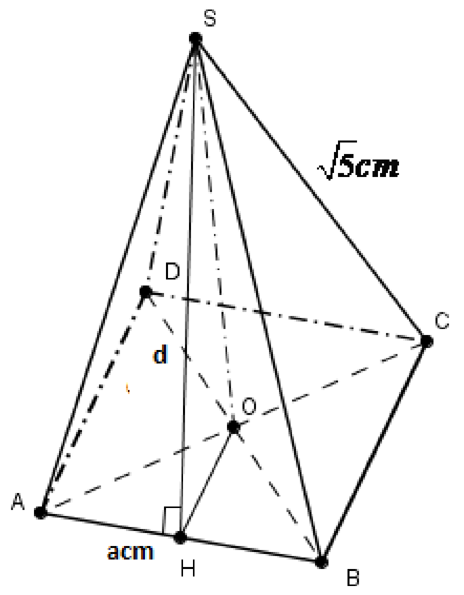
Mà $S_{xq} = pd = 2a.d$ và $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 2ad + a^2$

Vậy $2ad = \frac{2}{3}\left(2ad + a^2\right)$

$\Rightarrow 2ad = \frac{4ad}{3} + \frac{2a^2}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}ad - \frac{2}{3}a^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}a\left(d - a\right) = 0$

$\Leftrightarrow d = a$ vì $a > 0$



Ta có

$d = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{5 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{20 - a^2}}{2}$

Vậy $\frac{\sqrt{20 - a^2}}{2} = a \Leftrightarrow 2a = \sqrt{20 - a^2} \Leftrightarrow 4a^2 = 20 - a^2$

$\Leftrightarrow 5a^2 = 20 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$

Diện tích xung quanh của hình chóp là $S_{xq} = pd = 2a.d = 2.2.2 = 8(cm^2)$

Bài 47. Tính diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều biết chiều cao bằng $\sqrt{28}cm$ và cạnh bên bằng 10cm.

Bài giải

Áp dụng định lí pytago trong tam giác vuông EFC ta có

$\text{CF} = \sqrt{EC^2 - FE^2} = \sqrt{10^2 - \sqrt{28}^2}$

$\text{FC} = \sqrt{100 - 28} = \sqrt{72}cm$

Suy ra AC = $2\sqrt{72}$ cm

Gọi a là độ dài cạnh đáy của hình chóp, ta có

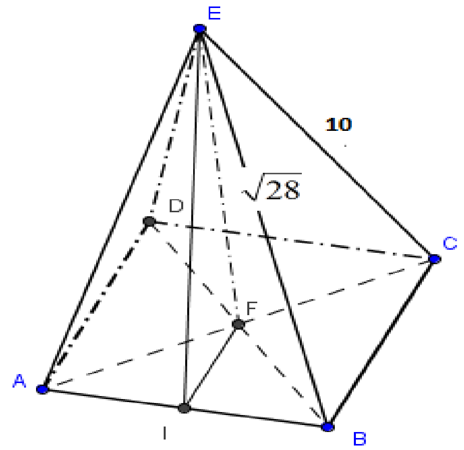
$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = 2\sqrt{72}$

$\Rightarrow a = 12cm$

Diện tích tứ giác đáy $S = 12.12 = 144cm^2$

Thể tích hình chóp

$V = \dfrac{1}{3}S.h = \dfrac{1}{3}144.\sqrt{28} \approx 253,9cm^3$



Bài 48. Tính thể tích hình chóp tứ giác đều biết độ dài cạnh đáy bằng 6cm và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{43}cm$

Bài giải

Ta có $AC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}cm$

Suy ra FC = $3\sqrt{2}cm$

Áp dụng định lí pytago trong tam giác vuông EFC ta có

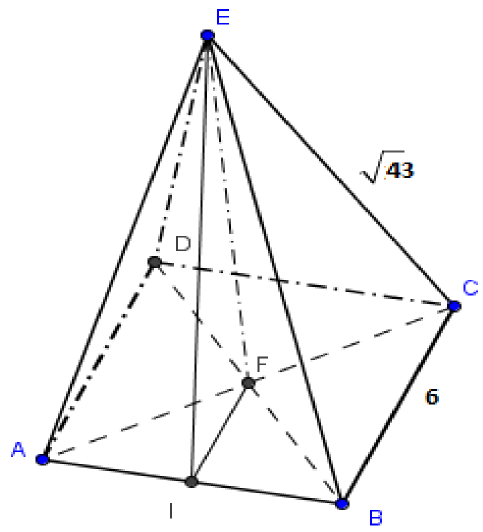
$EF = \sqrt{EC^2 - FC^2} = \sqrt{\sqrt{43}^2 - (3\sqrt{2})^2}$

$EF = \sqrt{43 - 18} = \sqrt{25} = 5cm$

Diện tích tứ giác đáy $S = 6.6 = 36cm$

Thể tích hình chóp

$V = \dfrac{1}{3}S.h = \dfrac{1}{3}36.5 = 60cm^3$



Bài 49. Tính thể tích hình chóp tam giác đều biết chiều cao bằng $\sqrt{12}cm$ và cạnh bên bằng 4cm.

Bài giải

S.ABC là hình chóp đều nên chân đường cao H trùng với giao điểm ba đường trung tuyến của tam giác, ta có SH$\perp$CI và $HC = \dfrac{2}{3}CI$

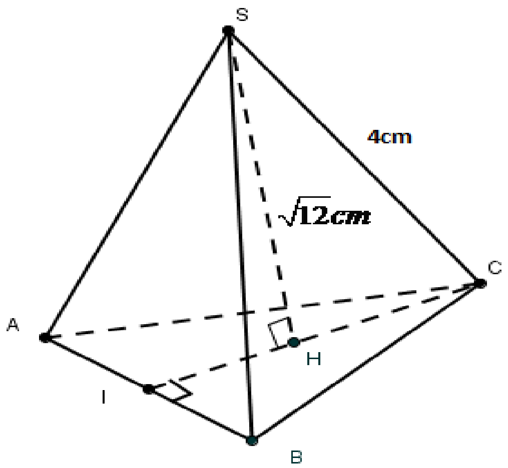
Trong tam giác SHC vuông tại H, theo định lí pytago ta có

$$HC = \sqrt{SC^2 - SH^2} = \sqrt{4^2 - \sqrt{12}^2} = 2$$

Suy ra CI = 3cm

Tam giác ABC là tam giác đều, giả sử có cạnh là a nên chiều cao tam giác

đều là $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ mà CI là chiều cao tam



giác ABC nên cạnh tam giác đều là

$\dfrac{2h}{\sqrt{3}} = \dfrac{2.3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ hay AB= $2\sqrt{3}$ cm

Diện tích đáy là

$$S = \frac{1}{2}CI.AB = \frac{1}{2}.3.2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}(cm^2)$$

Thể tích hình chóp là

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}3\sqrt{3}.\sqrt{12} = 6(cm^3)$$

Bài 50. Tính thể tích hình chóp tứ giác đều biết độ dài cạnh đáy bằng 4cm và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{24}cm$

Bài giải

E.ABCD là hình chóp tứ giác đều có đáy ABCD là hình vuông, có cạnh AB=4cm

Ta có $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}cm$

Suy ra FC = $2\sqrt{2}cm$

Áp dụng định lí pytago trong tam giác vuông EFC ta có

$$EF = \sqrt{EC^2 - FC^2} = \sqrt{\sqrt{24}^2 - (2\sqrt{2})^2}$$

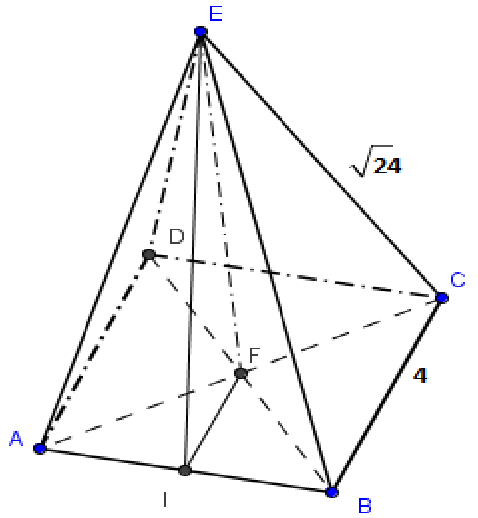
$$EF = \sqrt{24 - 8} = \sqrt{16} = 4cm$$

Chiều cao hình chóp là 4cm

Diện tích tứ giác đáy $S = 4.4 = 16cm$

Thể tích hình chóp

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}16.4 \approx 21,3cm^3$$



Bài 51. Tính thể tích hình chóp tam giác đều biết độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{6}cm$ và cạnh bên đáy 3cm.

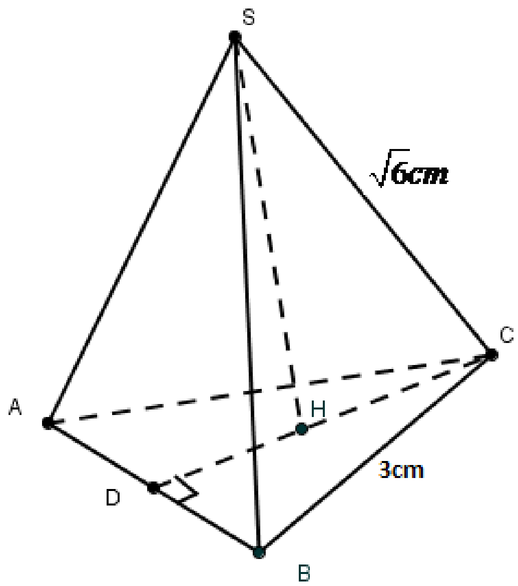
Bài giải

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, HC cắt AB tại D, ta có $AD = DB = \dfrac{3}{2}$

Tam giác CDB vuông tại D, theo định lí pytago, ta có

$$DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ và}$$

$$HC = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$



Tam giác SHC vuông tại H , ta có

$$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3}$$

Thể tích của hình chóp đều là

$$V = \frac{1}{3}S_d.h = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}DC.AB\right).SH = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2}.3\right)\sqrt{3} = \frac{9}{4}cm^3$$

Bài 52. Tính thể tích hình chóp tứ giác đều có trung đoạn bằng 5cm và diện tích xung quanh bằng $80cm^2$.

Bài giải

Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a cm, trung đoạn là 5cm:

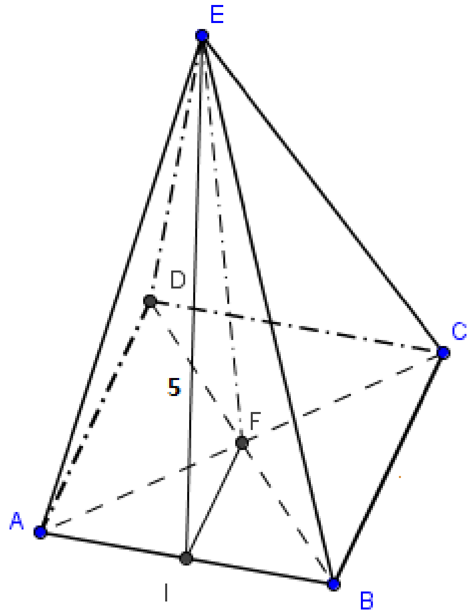
$S_{xq} = p.d = 2a.5 = 80cm^2$

Hay a = 8cm

Ta có $AC = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}cm$

$\Rightarrow BF = 4\sqrt{2}cm$

Ta có FI = 4cm (vì FI là đường trung bình của tam giác ABC, tam giác ABC có cạnh AB = a = 8cm)



Áp dụng định lí pytago trong tam giác vuông EFI ta có

$EF = \sqrt{EI^2 - FI^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3cm$

Thể tích hình chóp

$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}8^2.3 = 64cm^3$

Bài 53. Tính thể tích hình chóp tứ giác đều có diện tích xung quanh bằng $80cm^2$ và diện tích toàn phần bằng $144cm^2$

Bài giải

Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a, trung đoạn là d

$S_{xq} = p.d = 2a.d = 80cm^2$ (1)

Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a, trung đoạn là d

$S_{xq} + S_d = 2ad + a^2 = 144cm^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 = 144 - 80 = 64 \Rightarrow a = \sqrt{64} = 8cm$

Thay a = 8 vào (1) ta được d = 5 cm

Ta có $AC = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}cm$

$\Rightarrow BF = 4\sqrt{2}cm$

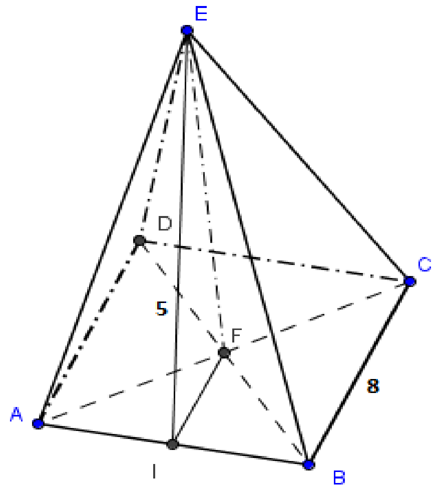
Ta có FI = 4cm

Áp dụng định lí pytago trong tam giác vuông EFI ta có

$$EF = \sqrt{EI^2 - FI^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3cm$$

Vậy thể tích của hình chóp tứ giác đều đã cho là

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}8^2.3 = 64cm^3$$



Bài 54. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng a. Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính thể tích của hình chóp cụt đều ABCD.MNPQ theo a.

Bài giải

Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh đều bằng a và N là trung điểm SB nên

$$NB = \frac{a}{2}$$

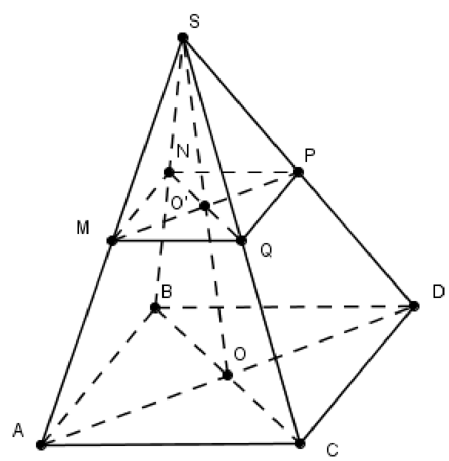
Trong hình thang vuông OO'NB vẽ đường cao NI, ta có

$$OB = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$O'N = \frac{ON}{2} = \frac{\sqrt{MN^2 + MQ^2}}{2}$$

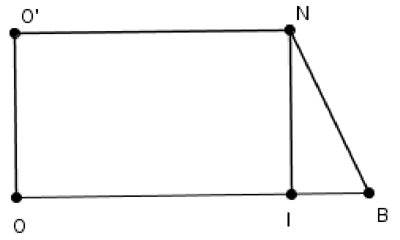
$$O'N = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$IB = OB - O'N = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$



$NI = \sqrt{NB^2 - IB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}$

$\Rightarrow NI = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$



Vậy đường cao của hình chóp cụt là $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Diện tích đáy lớn $S_1 = a^2 (cm^2)$

Diện tích đáy nhỏ $S_2 = \frac{a^2}{4}(cm^2)$

Thể tích hình chóp cụt là

$$V = \frac{1}{3}.h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{4}\left(a^2 + \frac{a^2}{4} + \sqrt{a^2.\frac{a^2}{4}}\right)$$

$$V = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{4}\frac{a^2\sqrt{7}}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{24}(cm^3)$$

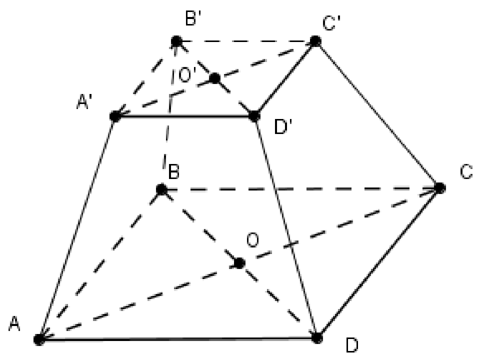
Bài 55. Một hình chóp cụt đều ABCD.A′B′C′D′ có các cạnh đáy bằng a và 2a, đường cao của mặt bên bằng a.

a) Tính diện tích xung quanh

b) Tính cạnh bên, đường cao của hình chóp cụt đều.

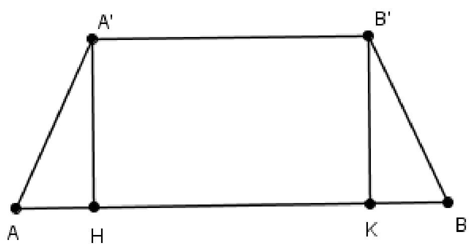
Bài giải

a) Diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều



$$S_{xq} = \frac{1}{2}(p + p').d = \frac{1}{2}(4.2a + 4a)a = 6a^2$$

b) Khai triển hình chóp cụt đều ta thấy mặt bên là hình thang cân ABA′B′. Vẽ đường cao A′H và B′K , ta có

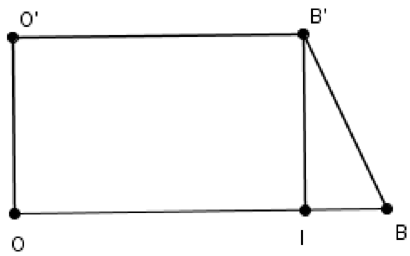


$$AH = BK = \frac{AB - A'B'}{2} = \frac{a}{2}$$

Trong hình thang vuông OBB′O′ vẽ đường cao B′I ta có

$OB=\frac{BD}{2}=a\sqrt{2};O'B'=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$BI=OB-O'B'=\frac{a\sqrt{2}}{2}$



Vậy đường cao hình chóp cụt đều là

$B'I=\sqrt{B'B^2-BI^2}$

$B'I=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 56. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC. Chứng minh ABC.MNP là hình chóp cụt tam giác đều.

Bài giải

Ta có AB//MN ; BC//NP nên

mp(MNP)//mp(ABC).

Mặt khác, S.ABC là hình chóp tam giác đều nên

SA = SB = SC

Suy ra $S\hat{A}B=S\hat{B}C$, do đó AMNB là hình thang cân.

Tương tự BNPC; AMPC là các hình thang cân

Vậy ABC.MNP là hình chóp cụt tam giác đều.

Bài 57. Cho khối chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh có độ dài bằng a .

a) Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều.

b) Tính thể tích khối chóp SABCD

Bài giải

? Dựng hình thoi ABCD và từ câu hỏi 1, dựng SO $\perp$ (ABCD) . Tại sao ?

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

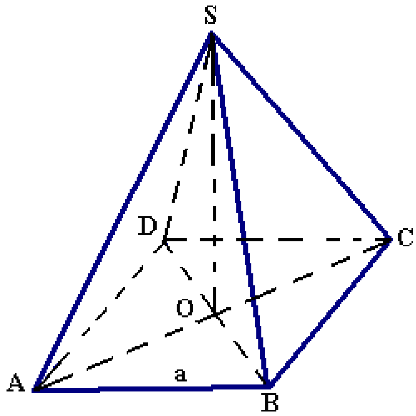
*) Hình thoi ABCD có nội tiếp trong đường tròn không? Suy ra gì từ giả thiết?

*) Phân tích V= $\frac{1}{3}$B.h để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào?

*) Tìm diện tích B của ABCD bằng công thức nào?

*) Tìm h = SO qua tam giác nào bởi định lí gì?

Dựng SO $\perp$ (ABCD)



Ta có SA = SB = SC = SD nên

OA = OB = OC = OD $\Rightarrow$ ABCD là hình thoi có đường tròn gnoại tiếp nên ABCD là hình vuông .

Ta có $SA^2 + SB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên ΔSAC vuông tại S

$$\Rightarrow OS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Vậy $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Bài 58. Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng a, M là trung điểm DC.

a) Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD.

b)Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC). Suy ra thể tích hình chóp MABC

Bài giải

? Dựng tam giác đều ABC ,từ tâm O dựng DO $\perp$ (ABC) . Tại sao?

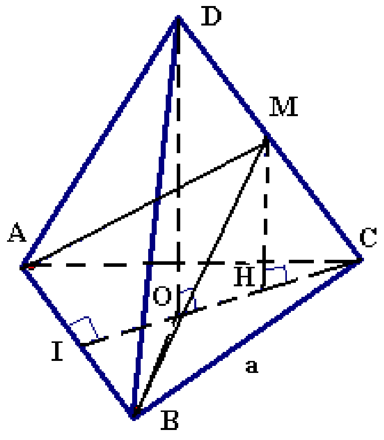
Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

*) Phân tích V= $\frac{1}{3}$B.h để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào?

*) Tìm diện tích B của ABC bằng công thức nào?

*) Tìm h = DO qua tam giác nào bởi định lí gì ?

*) Mặt phẳng (DCO)$\perp$(ABC)? Dựng MH$\perp$OC suy ra điều gì ?Tính MH?



a) Gọi O là tâm của $\Delta ABC \Rightarrow DO \perp (ABC)$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.DO$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ OC = \frac{2}{3}CI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

ΔDOC *vuông có* $: DO = \sqrt{DC^2 - OC^2}$

$$= \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

b) Kẻ MH// DO, khoảng cách từ M đến mp(ABC)

là MH

$$MH = \frac{1}{2}DO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$\Rightarrow V_{MABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.MH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ Vậy $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

Bài 59. Cho chóp tam giác đều SABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Chứng minh rằng chân đường cao kẻ từ S của hình chóp là tâm của tam giác đều ABC.Tính thể tích chóp đều SABC

Bài giải

? Dựng tam giác đều ABC , từ tâm O dựng SO $\perp$ (ABC). Tại sao?

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

*) So sánh SA,SB,SC suyra OA,OB,OC bởi tích chất nào?

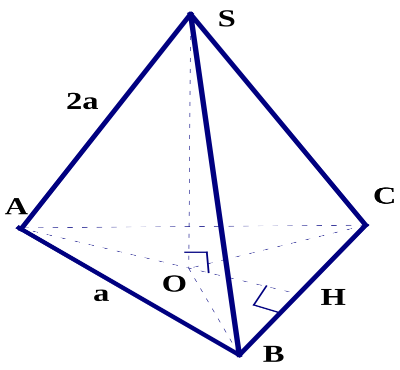
*) Phân tích V= $\frac{1}{3}$B.h để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào?

*) Tìm diện tích B của ABC bằng công thức nào?

*) Tìm h = SO qua tam giác nào bởi định lí gì?

Dựng $SO \perp (ABC)$ Ta có SA = SB = SC suy ra OA = OB = OC

Vậy O là tâm của tam giác đều ABC.



Ta có tam giác ABC đều nên

$$AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2 = \frac{11a^2}{3} \quad \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SO = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$