LÊ HẢI CHÂU
(Nhà giáo Nhân dân)

Dùng cho học sinh lớp
8-9

HỌC và GIẢI TOÁN MỘT CÁCH THÔNG MINH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

§1. HỌC TOÁN MỘT CÁCH THÔNG MINH 5
A. BỐN CHĂM VÀ BA TỰ 5
B. SỬ DỤNG ĐÚNG CÁC KÍ HIỆU TOÁN HỌC 7
C. NẮM VỮNG CÁC KHÁI NIỆM TOÁN HỌC 8
D. CẢNH GIÁC KHI CHUYỂN TỪ SỐ HỌC SANG ĐẠI SỐ 10
E. KINH NGHIỆM ĐÚC KẾT VỀ CÁC CÁCH CHỨNG MINH HÌNH HỌC 11
§2. KHẢ NĂNG QUAN SÁT TÁC DỤNG LỚN TRONG VIỆC HỌC VÀ GIẢI TOÁN.... 14
§3. DỰ ĐOÁN BẰNG CÁCH XÉT CÁC TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIẾT 16
§4. TRAO DỒI KHẢ NĂNG KHAI THÁC ĐỂ RÈN TƯ DUY SÁNG TẠO 20
§5. TÁC DỤNG BIẾN KHÓ THÀNH DỄ CỦA PHƯƠNG PHÁP ẨN PHỤ 34
§6. HẾT SỨC CẢNH GIÁC VỚI GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ VÀ VỚI CĂN SỐ HỌC 37
§7. DÙNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ MỘT CÁCH THÔNG MINH 43
§8. VẬN DỤNG SÁNG TẠO CÁC PHƯƠNG PHÁP TOÁN HỌC TRONG ĐẠI SỐ VÀ TRONG HÌNH HỌC 50
A. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP KHÔNG HOÀN TOÀN 50
B. PHƯƠNG PHÁP SUY DIỄN 51
§.9. PHƯƠNG PHÉP TỔNG HỢP VÀ PHÂN TÍCH 58
§10. ĐỪNG VỘI BẰNG LÒNG VỚI MỘT CÁCH GIẢI TOÁN MÀ TÌM THÊM NHỮNG CÁCH GIẢI KHÁC 63
§11. HAI VÍ DỤ VỀ SỐ HỌC VÀ HÌNH HỌC CHỨNG MINH BẰNG 10 CÁCH.. 88
§12. ĐÀO SÂU ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ VIÉT 92

Mở đầu

1. *Học toán là một quá trình sáng tạo, sáng tạo* trong tiếp thu kiến thức, sáng tạo trong vận dụng kiến thức, vì thế cần phải học toán một cách thông minh, mà thông minh chính là do học tập mà có.

Giải toán cũng là một quá trình vận dụng kiến thức, nên cũng cần giải toán một cách thông minh.

Cuốn *"Học và giải toán một cách thông minh"* nhằm giúp bạn trẻ yêu toán nắm vững và chủ động trong học tập, tăng khả năng tiếp thu kiến thức, biết cách rèn luyện kĩ năng giải toán, nhằm dự đoán, khai thác đào sâu, biết quan sát xung quanh với con mắt toán học.

Bác Hồ đã từng nói:

"Siêng học tập thì mau biết

Siêng nghĩ ngợi thì mau có sáng kiến

Siêng làm thì nhất định phải thành công".

2. Xin nhắc lại ở đây câu chuyện về thi học sinh giỏi toán ở Mat–xcơ–va (1946). Có bài toán sau đây:

"Cho dãy số 0,1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... trong đó mỗi số, kể từ số thứ ba, bằng tổng hai số đứng trước nó. Trong $10^8 + 1$ số hàng đầu tiên của hằng số trên có số nào tận cùng bằng bốn chữ số 0 không?".

Thí sinh Ba–lát–xơ đã đề xuất và tìm cách giải bài toán tổng quát hơn: Đánh số tất cả số hạng tận cùng bằng bốn chữ số 0 của dãy và đã tìm ra rằng số hạng thứ 7501 và chỉ ra được suy luận tìm các số tận cùng bằng bốn chữ số tiếp theo.

Ba–lat–xơ chỉ giải bài toán này trong khi đề bài gồm 5 bài toán giải chưa xong. Ban giám khảo đã đánh giá cao năng lực sáng tạo của em và đã quyết định trao giải nhất cho thí sinh Ba–lat–xơ.

Hi vọng cuốn sách này góp phần thiết thực và bổ ích giúp các bạn trẻ yêu toán, biết cách đọc và giải toán một cách thông minh.

Hà Nội, đầu xuân 2014

LÊ HẢI CHÂU

Nhà giáo Nhân dân

§1. HỌC TOÁN MỘT CÁCH THÔNG MINH

A. BỐN CHĂM VÀ BA TỰ

1. Kinh nghiệm của nhiều thế hệ học sinh là muốn học tốt môn toán thì cần thực hiện nghiêm túc và sáng tạo phương châm "4 chăm và 5 tự".

Bốn chăm là gì?

Ở lớp thì: chăm nghe giảng, chăm suy nghĩ, chăm ghi chép và chăm phát biểu.

Năm tự là gì?

Ở nhà thì: tự học bài, tự làm bài, tự tổng kết, tự nhận xét và tự vận dụng.

2. Kinh nghiệm làm bài tập toán

Cần thực hiện những điều sau đây:

– Đọc thật kĩ đề bài.

– Cho gì, hỏi gì?

– Nắm vững lí thuyết.

– Lập kế hoạch giải (các bước)

– Thực hiện kế hoạch (từng bước)

– Thử lại kết quả.

3. Lập bảng tóm tắt, so sánh

Sau đây là một số ví dụ

a) So sánh các tính chất cơ bản của phép cộng và phép nhân số hữu tỉ

– Phép cộng và phép nhân đều có tính chất giao hoán

$$\begin{matrix} a + b = b + a \\ a.b = b.a \end{matrix} \quad (\text{với } a, b \in \mathbb{Q})$$

– Cả hai phép đều có tính chất kết hợp

$$(a + b) + c = a(b + c)$$

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

– Cả hai phép đều có phần tử trung hòa

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a.1 = 1.a = a$$

– Riêng phép nhân số hữu tỉ có tính chất phân phối đối với phép cộng: (a + b).c = a.c + b.c.

b) So sánh ba trường hợp về tam giác bằng nhau và tam giác đồng dạng

Tam giác bằng nhau	**Tam giác đồng dạng**
– Một cạnh bằng nhau kề với hai góc bằng nhau từng đôi một (g.c.g) – Một góc bằng nhau xen giữa hai cạnh bằng nhau từng đôi một (c.g.c). – Ba cạnh bằng nhau từng đôi một (c.c.c).	– Hai góc bằng nhau từng đôi một (g.g). – Một góc bằng nhau xen giữa hai cạnh tỉ lệ với nhau từng đôi một. – Ba cạnh tỉ lệ với nhau từng đôi một.

c) Bảng tóm tắt đối chiếu giữa tính chất của bình phương và căn bậc hai

Bình phương	***Căn bậc hai***
$a^2 \geq 0$	$\sqrt{a}$ tồn tại khi $a \geq 0$
$a > b \rightleftarrows a^2 > b^2$ (a và b dương)	$a > b \rightleftarrows \sqrt{a} > \sqrt{b}$ (a và b dương)
$(ab)^2 = a^2b^2$	$\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ (a, b không âm)
$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$ (a và b bất kì, $b \neq 0$)	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a \geq 0, b > 0)$ $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$ (a là số thực)

d) Quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác

Quan hệ giữa các góc	*Tam giác*	**Các tam giác đặc biệt**			
		Vuông	*Cân*	*Vuông cân*	*Đều*
	$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$	$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^0$	$\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^0 - \widehat{A}}{2}$ $\widehat{A} = 180^0 - 2\widehat{B}$	$\widehat{B} = \widehat{C} = 45^0$	$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^0$

Quan hệ giữa ba cạnh	$\lvert b - c\rvert < a < b + c$ $\lvert a - c\rvert < b < a + c$ $\lvert a - b\rvert < c < a + b$	$a > b$ $a < c$	$b = c$	$b = c < a$	$a = b = c$
Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện	$b > c$ $\Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$	$\hat{B} = 30^0$ $\Leftrightarrow \hat{B} = \frac{a}{2}$	$b = c$ $\Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C}$		

B. SỬ DỤNG ĐÚNG CÁC KÍ HIỆU TOÁN HỌC

Kí hiệu toán học là phương thức để diễn đạt khái niệm, có thể coi đó là văn tự thường dùng của thế giới toán học. Kí hiệu toán học có thể chia làm 2 nhóm lớn.

a) Nhóm kí hiệu toán học được quy định thống nhất gồm:

- Kí hiệu các phép tính: +, –, . (×), :, $\sqrt{\ }$ (căn bậc hai), $\sqrt[n]{\ }$ (căn bậc n), lũy thừa (a^n), v.v...
- Kí hiệu quan hệ: >, <, ≥, ≤ (lớn hơn, nhỏ hơn, lớn hơn hoặc bằng, nhỏ hơn hoặc bằng); ∽ (đồng dạng), = (bằng), ~ (gần bằng), ⊥ (vuông góc) // (song song); () (ngoặc đơn), [ ] (móc vuông), { } ngoặc nhọn); ⇒ (suy ra), ⇔ (tương đương), v.v...
- Kí hiệu tên gọi:

  + Đại số: $|a|$ (giá trị tuyệt đối của a), $a > 0$, $a < 0$ (a là số dương, là số âm), $\pm\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ (căn bậc hai của x không âm); Δ (biệt thức hoặc biệt số) của phương thức bậc hai; ℕ (tập số tự nhiên), ℚ (tập số hữu tỉ), ℝ (tập số thực)

  + Hình học: ⌒ (góc), (O, r) (đường tròn O, bán kính r), ΔABC (tam giác ABC), ▱ (hình bình hành), v.v...

- ***Lưu ý:*** đến các kí hiệu có hình dạng giống nhau nhưng ý nghĩa khác nhau, chẳng hạn:

  a lớn hơn 1 có thể viết $a > 1$ hoặc $1 < a$.

a^n (với n nguyên dương) thì $a^n = \underbrace{a.a...a}_{\text{n chữ a}}$

$\overline{a}^n$ $(a \neq 0)$ thì $\overline{a}^n = \dfrac{1}{a^n}$.

b) Nhóm kí hiệu do nhu cầu giải bài tập mà đặt ra

– Chọn ẩn là x, y, z, ...

– Diện tích kí hiệu là S, chu vi là 2p, chiều cao là h.

– Hàm số $y = ax + b$ hoặc $f(x) = ax + b$

– $y = kx$ $(k \neq 0)$ biểu thị y là hàm số tỉ lệ thuận của x, $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ biểu thị y là hàm số tỉ lệ nghịch của x.

– $(a - b)^3$ là kí hiệu của lập phương của hiệu hai số a và b, còn $a^3 - b^3$ là hiệu của hai lập phương, v.v...

C. NẮM VỮNG CÁC KHÁI NIỆM TOÁN HỌC

Học tốt các khái niệm toán học là điều kiện cơ bản để bảo đảm tư duy toán học chính xác. Muốn thế cần lưu ý đến những điều sau đây:

a) Nắm vững khái niệm định nghĩa

Số dương và số âm là hai khái niệm khác nhau. Nhưng số tự nhiên và số nguyên dương thực tế là cùng một khái niệm.

Phương trình là đẳng thức chứa ẩn, do đó đẳng thức không chứa ẩn hoặc các phép tính chứa ẩn đều không phải là phương trình.

Góc nhỏ hơn góc vuông gọi là góc nhọn, góc lớn hơn góc vuông nhỏ hơn góc bẹt là góc tù.

b) Làm rõ điều kiện và kết luận của định nghĩa

Định nghĩa đường thẳng song song như sau: "Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không cắt nhau gọi là hai đường thẳng song song". Ở đây phần trước chữ "gọi là" là điều kiện (hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng; không cắt nhau), phần đứng sau chữ gọi là kết luận (hai đường thẳng song song).

Lũy thừa với số mũ 0 được xác định nghĩa là $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$. Ở đây điều kiện $a \neq 0$ rất quan trọng vì nếu $a = 0$ thì a^0 không có nghĩa.

Thực ra khái niệm số mũ 0 là do hiệu hai số mũ có cùng cơ số mà ra, tức là thương của hai số bằng nhau (số 0 không thể là số bị chia, còn $0^0 = \frac{0^n}{0^n}$ thì số 0 là số chia, do đó 0^0 không có nghĩa.

c) Dùng định nghĩa thuận và định nghĩa ngược

Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau (định nghĩa thuận này đúng) nhưng hai góc bằng nhau thì đối đỉnh (định nghĩa ngược này sai).

Nối phương trình $2t - 5 = 5$ có hai nghiệm $t_1 = 6$ và $t_2 = 4$ thì đúng hay sai? Ta biết rằng: giải phương trình là tìm giá trị của ẩn để khi thay vào hai vế của phương trình thì hai vế này có giá trị bằng nhau. Nếu ta lần lượt thay $t = 6$ không phải là nghiệm mà chỉ có $t = 4$ là nghiệm của phương trình.

d) Lưu ý đến điều kiện khống chế trong bài ra

Chẳng hạn, nếu viết $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ với điều kiện $a \geq 0$, $v \geq 0$ thì điều kiện bài cho là rõ ràng.

Nhưng nếu bài ra là: tính $\sqrt{ab}.\sqrt{\frac{a}{b}} - a$ thì ta phải tìm điều kiện để phép tính có nghĩa. Đó là điều kiện $ab \geq 0$ và $b \neq 0$, (có thể viết thành $a \geq 0$, $b > 0$, hoặc $a \leq 0$, $b < 0$). Như thế $\sqrt{ab}.\sqrt{\frac{a}{b}} - a = \sqrt{a^2}$

$$- a = \begin{cases} 0 & (\text{với } a \geq 0 \\ -2a & (\text{với } a < 0) \end{cases}.$$

Nếu chỉ chú ý đến điều kiện $a \geq 0$, $b > 0$ mà bỏ qua điều kiện $a \leq 0$, $b < 0$ thì kết quả sẽ không đầy đủ.

e) Lưu ý cách chuyển hóa

- Chẳng hạn với tính chất $\sqrt{a^2} = |a|$ ta thấy rằng giữa a^2 và $|a|$, tương tự $|a|$ có thể biểu diễn thành $\sqrt{a^2}$. Cách chuyển hóa này rất có ích khi giải các bài tập.

– Xét ví dụ: Cho $x + y = 2$, $xy = -1$, hãy tính $|x - y|$ ta có thể viết:

$$|x - y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}.$$

Điều này chứng tỏ: Số bình phương trong dấu căn có thể đưa ra ngoài, hoặc một số không âm ở ngoài dấu căn có thể đưa vào trong dấu căn, chẳng hạn $-x\sqrt{y}$ $(x < 0)$ có thể viết thành $\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2y}$.

• Xét công thức tính diện tích tam giác theo hai cạnh a, b và góc C xem giữa $S = \frac{1}{2}ab\sin C$.

Ngoài cách dụng trực tiếp, ta có thể:

Tìm $\sin c = \frac{2S}{ab}$, tìm a hoặc b, tức là $a = \frac{2S}{\sin C}$, $b = \frac{2S}{\sin B}$, tìm tích $ab = \frac{2S}{\sin C}$.

D. CẢNH GIÁC KHI CHUYỂN TỪ SỐ HỌC SANG ĐẠI SỐ

Từ số học chuyển sang đại số thường dễ gặp sai lầm.

Chẳng hạn, cho rằng a > –a (!). Sai lầm xem a là số dương, –a là số âm, mà quên rằng a ở đây có thể là số dương, số 0 hoặc số âm còn –a là số ngược lại với a.

Khi giải phương trình $\frac{t}{1-t} = \frac{t}{t-1}$ thì giải như sau: do tử bằng nhau nên mẫu cũng bằng nhau ta có ngay 1 – t = t – 1, vậy t = 1 là nghiệm (!). Đáp số này sai, tại sao? Vì không thấy rằng tử có hai vế của phương trình là biến t, giá trị của nó chưa xác định nên không loại trừ khả năng t = 0, như thế chưa có đủ lý do để rút ra kết quả 1 – t = t – 1. Thực tế, phương trình đã cho chỉ có một nghiệm t = 0, khi đó mẫu khác 0.

Một ví dụ khác:

Cho rằng tỉ số $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, tính giá trị biểu thức $\frac{a+b-a}{a-b+c}$.

Có hai cách giải:

Cách 1.

Từ giả thiết $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ ta suy ra:

$$\begin{cases} \frac{-a}{-2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \\ \frac{a}{2} = \frac{-b}{-3} = \frac{c}{4} \end{cases}. \text{ Suy ra } \begin{cases} \frac{b+c-a}{4+3-2} = \frac{c}{4} \\ \frac{a-b+c}{2-3+4} = \frac{c}{4} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \frac{b+c-a}{5} = \frac{c}{4} \\ \frac{a-b+c}{3} = \frac{c}{4} \end{cases}$$

Từ đó ta có: $\dfrac{b+c-a}{a-b+c}=\dfrac{5}{3}$

Cách 2.

Đặt $\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}=k \neq 0$, ta có $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 4k$, thay vào biểu thức được:

$$\frac{b+c-a}{a-b+c}=\frac{3k+4k-2k}{2k-3k+4k}=\frac{5k}{3k}=\frac{5}{3}$$

Rõ ràng cách 2 ngắn gọn hơn nhiều.

E. KINH NGHIỆM ĐÚC KẾT VỀ CÁC CÁCH CHỨNG MINH HÌNH HỌC

1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Có thể dùng các kiến thức sau để chứng minh:

a) Cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau

b) Hai cạnh bên của tam giác cân.

c) Đường trung bình của tam giác.

d) Đường thẳng qua đỉnh và trọng tâm của tam giác.

e) Đường cao (hay phân giác) tương ứng của đáy tam giác cân.

f) Hai đoạn thẳng cùng bằng một đoạn thẳng thứ ba.

g) Hai đoạn thẳng là khoảng cách từ một điểm thuộc phân giác của một góc tới hai cạnh của góc.

h) PA và PB có P nằm trên trung trực của đoạn AB.

i) Hai cạnh bên hay hai đường chéo của hình thang cân.

k) Hai cạnh đối của hình bình hành.

l) Một đường chéo của hình bình hành chia đường chéo kia thành hai đoạn bằng nhau.

m) Đường thẳng qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với đáy thì chia đôi cạnh bên thứ hai.

n) Hai đường chéo của hình chữ nhật.

o) Trung tuyến ứng với cạnh huyền tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền.

f) Những dây trương những cung bằng nhau.

q) Những dây cách đều tâm.

r) Đường nối tâm của hai đường tròn cắt nhau chia đôi dây cung.

s) Những khoảng cách tới tâm của hai dây bằng nhau.

t) Đường kính vuông góc với một dây thì chia đôi dây đó.

n) Hai tiếp tuyến của một đường tròn phát suất từ một điểm.

2. Chứng minh hai góc bằng nhau

Có thể dùng các kiến thức sau để chứng minh:

a) Góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau.

b) Hai góc đối đỉnh.

c) Hai góc so le trong, hai góc đồng vị của hai đường thẳng song song tạo thành với một cát tuyến.

d) Hai góc cùng phụ (hoặc cùng bù) với một góc thứ ba.

e) Hai góc có cạnh tương ứng song song hay vuông góc (cùng nhọn, cùng tù).

f) Hai góc ở đáy của tam giác cân.

g) Đường thẳng qua đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác.

h) Hai góc kề với cạnh đáy của hình thang cân.

i) Hai góc đối của hình bình hành.

k) Những đường chéo của hình thoi chia đôi các góc của nó.

l) Đường nối tâm đường tròn với giao điểm của hai tiếp tuyến với đường tròn đó là phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

m) Những góc nội tiếp cùng chắn một cung (hoặc hai cung bằng nhau) của một đường tròn.

3. Chứng minh một góc là góc vuông (hoặc hai đường thẳng vuông góc)

Có thể dùng các kiến thức sau để chứng minh:

a) Hai phân giác của hai góc kề bù.

b) Đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song.

c) Phân giác (hoặc trung tuyến) tương ứng của đáy một tam giác cân.

d) Tam giác có trung tuyến ứng với một cạnh mà bằng nửa cạnh ấy là tam giác vuông.

e) Góc tạo bởi hai đường chéo của hình thoi.

f) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

g) Đường kính qua trung điểm của một dây (hay một cung) thì vuông góc với dây (hay dây trương cung).

h) Tiếp tuyến của một đường tròn thì vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

i) Đường nối tâm của hai đường tròn cắt nhau thì vuông góc với dây chung.

4. Chứng minh hai đường thẳng song song

Có thể dùng các kiến thức sau để chứng minh:

a) Hai đường thẳng bị cắt bởi một cát tuyến tạo với cát tuyến đo hai góc so le trong bằng nhau, hoặc hai góc đồng vị bằng nhau, hoặc hai góc trong cùng phía bù nhau.

b) Đường trung bình của tam giác.

c) Hai đường thẳng cùng song song (hoặc cùng vuông góc) với một đường thứ ba.

d) Hai cạnh đáy của một hình thang; đường trung bình của hình thang.

c) Hai cạnh đối của hình bình hành.

5. Chứng minh các điểm nằm trên cùng một đường tròn

Có thể dùng các kiến thức sau để chứng minh 4 điểm cùng nằm trên một đường tròn:

a) Tứ giác nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180^0 và đảo lại)

b) Hai tam giác vuông có cạnh huyền chung.

c) Hai tam giác có đáy chung và góc ở đỉnh bằng nhau (góc nội tiếp).

d) Một góc ngoài của một tứ giác bằng góc trong đối diện với góc kề của nó.

e) Chứng minh 4 đỉnh của một tứ giác cách đều một điểm cố định.

f) Để chứng minh 5 điểm cùng nằm trên một đường tròn thì:

– Chứng minh 4 trong chúng cùng nằm trên một đường tròn;

– Chứng minh điểm thứ năm cùng ở trên đường tròn đó.

6. Chứng minh các đường tròn cắt nhau tại một điểm

Có thể dùng các kiến thức sau để chứng minh:

a) Chứng minh các đường tròn đều đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh giao điểm của hai đường tròn nằm trên các đường tròn khác (chẳng hạn vẽ 3 tam giác đều có cạnh là ba cạnh của một tam giác và ở phía ngoài tam giác, chứng minh ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác đều này cắt nhau tại một điểm).

§2. KHẢ NĂNG QUAN SÁT TÁC DỤNG LỚN TRONG VIỆC HỌC VÀ GIẢI TOÁN

Muốn học tốt toán cần trau dồi khả năng quan sát nhằm giúp ta tiếp thu được kiến thức mới và vận dụng kiến thức trong đời sống, trong giải các bài tập để có cách giải đơn giản, ngắn gọn?

1. Quan sát đặc điểm của các phép tính

Ví dụ 1: Tính biểu thức:

$$(-66).\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{11}\right)+124.(-37)+63.(-124)$$

Ta quan sát các phép tính ở đây thì thấy rằng:

Số hạng thứ nhất là tích của số nguyên với tổng các phân số, hai số hạng sau đều là tích của hai số nguyên. Ngoài ra còn thấy 66 là bội của 2, 3, 11, và hai số hạng sau đều có thừa số chung là 124.

Từ đó ta có cách giải đơn giản sau:

$$-66.\frac{1}{2}+66.\frac{1}{3}-66.\frac{1}{11}+124.(-37-63)$$

$$= -33 + 22 - 6 - 12400 = -12417$$

Ví dụ 2: Tính biểu thức $(2x + 3y^2 - (2x - 3y)^2$

Quan sát ta thấy đây là hiệu hai bình phương của hai nhị thức đối xứng nhau $2x + 3y$ và $2x - 3y$. Từ đó cách giải đơn giản nhất là áp dụng công thức về hiệu của hai bình phương $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$:

Ta có: $(2x + 3y + 2x - 3y)(2x + 3y - 2x + 3y) = 4x.6y = 24xy$

Ví dụ 3: Cho hai số thực m và p phân biệt sao cho $\frac{4}{m^4} - \frac{2}{m^2} - 3 = 0$ và $p^4 + p^2 - 3 = 0$, hãy tính giá trị của biểu thức $M = \frac{m^4p^4 + 4}{m^4}$.

Quan sát ta thấy các dữ kiện đã cho đều có kết cấu dạng $x^2 + x - 3 = 0$, chứng tỏ rằng $\frac{-2}{m^2}$ và p^2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 + x - 3 = 0$. Ngoài ra lại thấy $M = p^4 + \frac{4}{m^4} = (p^2)^2 + \left(\frac{-2}{m^2}\right)^2$ nên M chính là tổng bình phương của hai nghiệm $-\frac{2}{m^2}$ và p^2.

Do đó cách giải sẽ đơn giản, vì theo định lí Viét ta có:

$$(p^2) + \left(\frac{-2}{m^2}\right)^2 = \left(p^2 - \frac{2}{m^2}\right)^2 - 2p^2\left(-\frac{2}{m^2}\right) = 1 - 2(-3) = 7$$

2. Từ tổng thể xét từng bộ phận; so sánh sự giống nhau và khác nhau

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\frac{2(1-a)}{1=a} + \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2} + 1}{\frac{2(1+a)}{1-a} + \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2 + 1}$$

Quan sát cả tử lẫn mẫu của A ta thấy rằng ba số hạng của tử và mẫu vừa đúng là bình phương của một tổng.

Từ đó cách giải sẽ rất ngắn gọn như nhau:

$$A = \frac{\left(\frac{1-a}{1+a} + 1\right)^2}{\left(\frac{1+a}{1-a} + 1\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{1+a}\right)^2}{\left(\frac{2}{1-a}\right)^2} = \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2}$$

Ví dụ 2: Không dùng giấy và bút, chỉ quan sát hãy giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 30 & (1) \\ 2x + 3y + z = 30 & (2) \\ x + 2y + 3z = 30 & (3) \end{cases}$$

Quan sát cả hai phương trình ta thấy rằng: tổng hệ số của các ẩn x, y, z đều bằng 6, do đó nếu cộng từng vế cả ba phương trình rồi đơn giản nhẩm sẽ được $x + y + z = 15$.

Lại từ tổng thể ta quan sát quy luật thay đổi của hệ số x, y, z của cả ba phương trình thì thấy rằng: các ẩn x, y, z luân lưu đối xứng, do đó ta được $x = y = 3$ nên tìm ngay được nghiệm của hệ là:

$x = 5, y = 5, z = 5$

• **Lưu ý thêm:** nếu đầu tiên ta quan sát được chọn trong cả ba phương trình các ẩn x, y, z luân lưu đối xứng thì đối với phương trình bất kì nào, dùng x thay cho y và z ta sẻ có ngay $3x + x + 2x = 30$, từ đó $x = 5$. Tương tự $y = 5$, $z = 5$.

Ví dụ 3: Cho biết $t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 = 0$, hãy tính giá trị

$$T = t^{2017} + t^{2016} + t^{2015} + t^{2014} + t^{2013} + t^{2012}.$$

Quan sát sơ bộ thấy rằng ở giả thiết có 6 số hạng mà số mũ giảm dần và tổng của chúng bằng 0. Quan sát biểu thức tìm T lại thấy thêm là giữa giả thiết và T thì 6 số hạng chênh nhau 2011. Lại đi sâu quan sát ta thấy biểu thức T có thể phân tích thành một tích bằng cách đặt t^{2011} làm thừa số chung

$$T = t^{2011}(t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t).$$

Quan sát tiếp biểu thức trong ngoặc với giả thiết, ta có thể viết giả thiết thành: $t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t = -1$.

Thành thử T trở thành $-t^{2011}$ vấn đề còn lại là từ giả thiết làm sao tìm được giá trị $-t^{2011}$.

§3. DỰ ĐOÁN BẰNG CÁCH XÉT CÁC TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

1. Xét bài toán hình học:

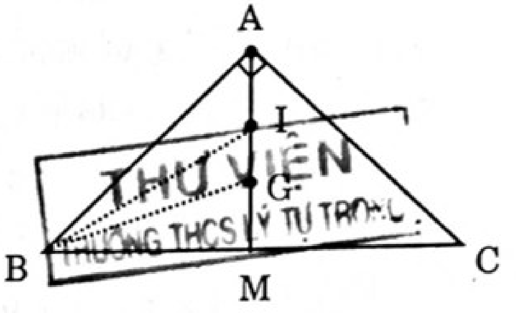
"Tìm trong mặt phẳng của ΔABC một điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ đó tới các đỉnh của tam giác là bé nhất".

Vấn đề đặt ra là: Một điểm P như trên có hay không? Nếu có thì đó là điểm nào?

Muốn thế ta tìm cách dự đoán vị trí của P bằng cách xét các trường hợp đặc biệt.

a) Trước tiên ta xét tam giác đều. Vì sao? Vì có điểm O trong tam giác này mà là tâm các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp, lại vừa là trực tâm và trọng tâm.

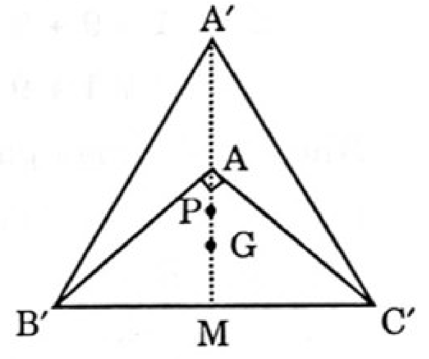
Nếu P là điểm ngoài tam giác thì dễ dàng chứng minh rằng $OA + OB + OC < PA + PB + PC$.



Hình 1

b) Nếu là tam giác bất kì thì hãy xét tam giác cân, tốt nhất là chọn tam giác vuông cân có trực tâm là đỉnh A, tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm M của BC, tâm đường tròn nội tiếp là I, trọng tâm là F (hình 1).

Ta sẽ thấy rằng P không phải là M, không phải là A, là I, là G mà P lại chính là điểm từ đó nhìn các cạnh của ΔABC dưới cùng một góc 120^0 (hình 2): $\widehat{APB} = \widehat{APC} = \widehat{BPC} = 120^0$.



Hình 2

2. Xét bài toán đại số:

"Phương trình $4t = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$, trong đó t là số nguyên dương lẻ, có bao nhiêu nghiệm nguyên dương lẻ?

Vấn đề đặt ra là: có bao nhiêu số nguyên dương lẻ là nghiệm? Chúng phụ thuộc vào t như thế nào?

Muốn thế ta tìm cách dự đoán, bằng cách xét các trường hợp đặc biệt.

a) Trước tiên ta xét $t = 1$. Khi đó phương trình có dạng

$$4 = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$$

và chỉ có một nghiệm nguyên dương là:

$$m = n = p = q = 1$$

Nếu bây giờ $t = 3$ thì sao? Phương trình sẽ có dạng

$$12 = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$$

Số chính phương lẻ nhỏ hơn 12 chỉ có hai số là 1 và 9, do đó:

$12 = 9 + 1 + 1 + 1$ (khi đó $m = 3$, $n = p = q = 1$)

$12 = 1 + 9 + 1 + 1$ (khi đó $m = 1$, $n = 3$, $p = q = 1$)

$12 = 1 + 1 + 9 + 1$ (khi đó $m = n = 1$, $p = 3$, $q = 1$)

$12 = 1 + 1 + 1 + 9$ (khi đó $m = n = p = 1$, $q = 3$).

Như thế, phương trình có 4 nghiệm nguyên dương lẻ.

Xét tiếp trường hợp $t = 5$, ta có phương trình:

$$20 = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$$

Số chính phương lẻ nhỏ hơn 20 chỉ có hai số là 1 và 9, do đó:

$20 = 9 + 9 + 1 + 1$ (khi đó $m = n = 3$, $p = q = 1$)

$20 = 9 + 1 + 9 + 1$ (khi đó $m = 3$, $n = 2$, $p = 3$, $q = 1$)

$20 + 9 + 1 + 1 + 9$ (khi đó $m = 3$, $n = p = 1$, $q = 3$)

$20 = 1 + 9 + 1 + 9$ (khi đó $m = 1$, $n = 3$, $p = 1$, $q = 3$)

$20 = 1 = 9 + 9 + 1$ (khi đó $m = 1$, $n = p = 3$, $q = 1$)

$20 = 1 + 1 + 9 + 9$ (khi đó $m = n = 1$, $p = 9 = 3$).

Như thế, lần này phương trình có 6 nghiệm nguyên dương lẻ.

Nếu gọi S(t) là số nghiệm nguyên dương lẻ thì với ba trường hợp đã nêu ta có:

$t = 1$ thì $S(t) = 1$

$t = 3$ thì $S(t) = 4$

$t = 5$ thì $S(t) = 6$

Phải chăng $S(t) = 1$ khi $t = 1$, còn $t > 1$ thì $S(t) = t + 1$? Ta xét thêm một số trường hợp khác.

Với $t = 7$ thì có phương trình $28 = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$. Số chính phương lẻ nhỏ hơn 28 là 1, 9 và 25. Từ đó tìm được 8 nghiệm, tức là với $t = 7$ thì đúng là $S(t) = 7 + 1 = 8$.

Với $t = 9$ thì có phương trình $36 = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$ và số chính phương lẻ nhỏ hơn 36 cũng là 1, 9 và 25. Từ đó tìm được đến 13 nghiệm, thế thì $S(t) > t + 1$ (!).

Thật là ngạc nhiên, nhà toán học vĩ đại Gau–xơ đã chứng minh được rằng:

"Nếu t là số nguyên dương lẻ thì số các cách viết 4t dưới dạng tổng của bốn số chính phương lẻ là bằng tổng các ước của t".

Rõ ràng với $t = 9$ (ước của 9 là 9, 3 và 1) thì ta có:

Với $t = 25$ (ước của 25 là 25, 5 và 1) thì ta có:

$$S(t) = 25 + 5 + 1 = 31$$

Ta nhận thấy rằng:

$$1^3 = 1,\ 2^3 = 3 + 5;\ 3^3 = 7 + 9 + 11$$

Vấn đề đặt ra là:

Ta có thể biểu diễn lũy thừa bất kì của một số nguyên dưới dạng tổng của những số lẻ liên tiếp hay không?

Trước tiên ta nhận xét rằng:

Đối với lũy thừa bậc n của bất cứ của số a nào thì số hạng đầu tiên của khai triển $u_1 = a^{n-1} - a + 1$ và số hạng cuối cùng là $u_n = a^{n-1} + a - 1$.

Chẳng hạn với n = 2 ta được công thức

$$a^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2a - 1)$$

Với n = 3 thì:

$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$

Với n = 4 thì:

$$5^4 = 121 + 123 + 125 + 127 + 129 = 625$$

Với n = 5 thì:

$$4^5 = 253 + 255 + 257 + 259 = 1024$$

Dạng tổng quát của định lí là:

$$\sum_{i=1}^{n} a_1^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

Có thể chứng minh định lí này (có từ thời cổ phương đông) bằng quy nạp toán học, nhưng cũng có thể chứng minh như sau:

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + ... = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... =$$
$$= (1 + 2 + 3 + 4 + ...)^2$$

Ngoài ra, có thể nhận xét thêm:

$$u_1 + u_n = 2a^{n-1}, \text{ hay } \frac{u_1 + u_n}{2} = a^{n-1}, \text{ tức là:}$$

Trong một dãy số lẻ liên tiếp nhận được khi khai triển một lũy thừa của số a thì giữa các số hạng đầu và cuối có ít nhất một lũy thừa của số với số mũ nhỏ hơn số mũ của lũy thừa được khai triển là 1 đơn vị.

§4. TRAO DỒI KHẢ NĂNG KHAI THÁC ĐỂ RÈN TƯ DUY SÁNG TẠO

1. Xét bài toán chia hết:

"Chứng minh biểu thức $p^2 + p + 1$ không chia hết cho 9 với mọi p nguyên".

Ta có thể chứng minh theo 4 cách sau đây.

Cách 1.

Xét ba trường hợp $p = 3k$, $p = 3k + 1$, $p = 3k + 2$.

– Nếu $p = 3k$ thì $p^2 + p + 1 = 3k(k + 1) + 1$

– Nếu $p = 3k + 2$ thì $p^2 + p + 1 = 3(3k + 5k + 2) + 1$.

Trong cả ba trường hợp này thì biểu thức $p^2 + p + 1$ đều không chia hết cho 9.

Cách 2.

Ta viết biểu thức đã cho dưới dạng sau:

$$p^2 + p + 1 = (p + 2)(p - 1) + 3 \ (*)$$

Hiệu $(p + 2) - (p - 1) = 3$ nên $p + 2$ và $p - 1$ đồng thời hoặc không đồng thời chia hết cho 3.

Nếu cả hai $(p + 2)$ và $(p - 1)$ đều chia hết cho 3 thì tích của chúng chia hết cho 9, do đó (*) không chia hết cho 9.

Nếu cả hai $(p + 2)$ và $(p - 1)$ đều không chia hết cho 3 thì (*) không chia hết cho 9.

Vậy $p^2 + p + 1$ không chia hết cho 9 với mọi p nguyên.

Cách 3.

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử $p^2 + p + 1$ chia hết cho 9. Đặt $p^2 + p + 1 = 9t$ (t nguyên) hay $p^2 + p + 1 - 9t = 0$ (**).

Xét biệt số $\Delta = 36t - 3 = 3(12t - 1)$ chia hết cho 3 nhưng $3(12t - 1)$ không chia hết cho 9. Như thế Δ không là số chính phương nên (**) không có nghiệm nguyên. Vô lí! Suy ra $p^2 + p + 1$ không chia hết cho 9.

Cách 4.

Ta viết biểu thức dưới dạng sau: $4(p^2 + p + 1) = (2p + 1)^2 + 3$

– Nếu $(2p + 1)$ chia hết cho 3 thì $(2p + 1)^2$ chia hết cho 9, như thế $(2p + 1)^2 + 3$ không chia hết cho 9.

– Nếu $(2p + 1)$ không chia hết cho 3 thì $(2p + 1)^2$ không chia hết cho 9, như thế $(2p + 1)^2 + 3$ không chia hết cho 3 nên $(2p + 1)^2$ không chia hết cho 9.

Từ đó suy ra $p^2 + p + 1$ không chia hết cho 9 với mọi p nguyên.

2. Xét bài toán thi học sinh giỏi THCS toàn quốc (1981):

"Chứng minh rằng chữ số tận cùng của các số tự nhiên n và n^5 là như nhau".

Giải

Chỉ cần chứng minh $A = n^5 = n$ chia hết cho 10.

Thật vậy ta biến đổi A như sau:

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$$
$$= n(n - 1)(n + 1)(n^2 - 4 + 5) =$$
$$= 5n(n - 1)(n + 1) + (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) \quad (*)$$

Từ đó mỗi số hạng của (*) chia hết cho 2 và 5 nên A chia hết cho 10 với mọi n.

Để khai thác bài toán này, vấn đề đặt ra là liệu $A = n^5 - n$ có chia hết cho 30, cho 240 không?

a) Chứng minh A chia hết cho 30 với n tự nhiên bất kì.

Do $A = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$ nên A chia hết cho 2, 3, 5 mà 2, 3, 5 đôi một nguyên tố cùng nhau nên A chia hết cho $2.3.5 = 30$.

Ta thấy rằng trong hai số chẵn liên tiếp thì có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 4 nên tích của hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.

– Nếu n lẻ thì do $A = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$ nên $(n - 1)(n + 1)$ chia hết cho 8 còn $n^2 + 1$ là chẵn nên A chia hết cho 16, do đó A chia hết cho $3.5.16 = 240$.

– Nếu n chẵn thì n^4 chia hết cho 16 nên $n^4(n^4 - 1)$ chia hết cho 240. Như thế:

b) A chia hết cho 240.

c) Hiệu $n^8 - n^4$ chia hết cho 240 với n tự nhiên bất kì.

d) Tích $n^m(n^4 - 1)$ chia hết 240 với mọi $m \geq 4$.

3. Xét hai bài toán hay về giải hệ phương trình sau đây:

1) Bài toán 1

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=1 & (1) \\ x^2+y^2+z^2=1 & (2) \\ x^3+y^3+z^3=1 & (3) \end{cases}$

Ta có hai cách giải sau:

Cách 1.

Từ (1) và (3) suy ra: $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=0$

hay $3(x+y)(x+z)(y+z)=0$. Suy ra:

$x+y=0, x+z=0, y+z=0$. Từ đó:

– Nếu $x+y=0$ thì hệ có nghiệm (0, 0, 1)

– nếu $x+z=0$ thì hệ có nghiệm (1, 0, 0)

– Nếu $y+z=0$ thì hệ có nghiệm (0, 1, 0)

Cách 2.

Từ (2) và (3) suy ra: $x^2(1-x)+y^2(1-y)+z^2(1-z)=0$ (*)

Điều kiện là $1-x\geq 0$, vì nếu $1-x<0$ hay $x>1$ thì $x^2+y^2+z^2>1$ trái với (2). Tương tự với $1-y=0$, $1-z\geq 0$.

Vậy (*) chỉ xảy ra kvck (khi và chỉ khi)

$$x^2(1-x)=y^2(1-y)=z^2(1-z)=0$$

Suy ra $x=y=z=0$ hoặc $=1$. Từ đó có các nghiệm của hệ.

2) Bài toán 2

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=6 & (1) \\ x^2+y^2+z^2=18 & (2) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4 & (3) \end{cases}$

Ta có các cách giải sau:

Cách 1.

Do các biểu thức $x+y+z$, $x^2+y^2+z^2$ và $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ đều đối xứng với x, y, z không âm, và các biểu thức $x+y+z$, $xy+yz+zx$, xyz là ba đa thức đối xứng cơ bản của x, y, z, nên ta có thể đưa cách giải hệ đã cho về cách giải hệ:

$$(*)\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 9 \\ xyz = 4 \end{cases}$$

Từ đó tìm được ba nghiệm của hệ đã cho là:

$(x, y, z) = (1, 1, 4) = (1, 4, 1) = (4, 1, 1)$

Cách 2.

Theo cách 1 ta có $xyz = 4$ nên $x, y, z \neq 0$ và $yz = \frac{4}{x}$.

Thay vào $xy + yz + zx = 9$ được $xy + yz + zx + x^2 = 9 + x^2$.

Do $x + y + z = 6$ và $yz = \frac{4}{x}$ nên ta có:

$$6x + \frac{4}{x} = 9 + x^2 \text{ hay } x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$$

Vì tổng các hệ số của phương trình bậc ba này là $1 - 6 + 9 - 4 = 0$ nên phương trình có một nghiệm là $x = 1$, do đó nó có thể viết: $(x - 1)(x^2 - 5x + 4) = 0$ hay $(x - 1)^2(x - 4) = 0$ và nghiệm là $x = 1$ và $x = 4$.

Từ đó tìm được ba nghiệm như ở cách 1.

Cách 3.

Sau khi tìm được hệ (*) ở cách 1, ta áp dụng định lí Vi–ét để được phương trình ẩn α sau đây: $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 9\alpha - 4 = 0$, (**), hay $(\alpha - 1)^2(\alpha - 4) = 0$.

Mặt khác (**) chính là phương trình:

$$\alpha^3 - (x + y + z)\alpha^2 + (xy + yz + zx)\alpha - xyz = 0$$

hay $\quad (\alpha - x)(\alpha - y)(\alpha - z) = 0.$

Từ đó suy ra (x, y, z) là một hoán vị của các số 1, 1, 4.

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm như ở trên.

Cách 4.

Do $x + y + z = 6$ nên trong ba số x, y, z phải có một số lớn hơn hoặc bằng 2, giả sử $x \geq 2$. Từ $xyz = 4$ suy ra $yz = \frac{4}{x}$. Thay vào $xy + yz + zx = 9$ được: $x(x + y + z) + yz = 9 + x^2$, hay $(x - 3)^2 = yz$.

Từ đó:

– Nếu $x > 4$ thì $x - 3 > 1$, suy ra $(x - 3)^2 > 1$ hay $yz > 1$ (với $x > 0$) thành thử $4 > x$, mâu thuẫn nếu $x > 4$ (!)

– Nếu $x < 4$ thì do $x \geq 2$ nên $-1 \leq x - 3 < 1$. Suy ra:

$(x - 3)^2 \leq 1$ hay $yz > 1$, thành thử $\dfrac{4}{x} > 1$ (với $x > 0$) hay $4 \leq x$ mâu thuẫn với $x < 4$ (!)

Suy ra $x = 4$. Giải tiếp được $x = 4$, $y = 1$, $z = 1$.

Do x, y, z có vai trò như nhau nên ta tìm được ba nghiệm của hệ đã cho như ở trên.

4. Một số bài toán khác

Bài toán 1

Có bao nhiêu số N có bốn chữ số chia hết cho 9 mà các chữ số đó chỉ viết bởi ba chữ số 1, 2, 3?

Giải

- N không thể có bốn chữ số 3 vì $3 + 3 + 3 + 3 = 12 \not\vdots\, 9$

  N không thể có ba chữ số 3 vì $3 + 3 + 3 + 1 = 10 \not\vdots\, 9$

  hoặc $3 + 3 + 3 + 2 = 11 \not\vdots\, 9$

- Nếu N có một chữ số 3 thì ba chữ số còn lại là 2, ta sẽ được bốn số là: 2223, 2232, 2322, 3222.

- Nếu N có hai chữ số 3 thì hai chữ số còn lại là 1 và 2, ta được 12 số là: 1332, 1323, 1233, 2331, 2313, 2133

  và 3312, 3321, 3132, 3231, 3123, 3213

  Tóm lại ta được $4 + 12 = 16$ số N

  Khai thác

a) Nếu N chỉ viết với ba chữ số 2, 3, 4 thì sao?

Thế thì $2 + 3 + 4 = 9 \,\vdots\, 9$.

Rõ ràng N không thể có bốn chữ số 4, ba chữ số 4, hai chữ số 4, hoặc N không thể có một chữ số 4 thì ba chữ số còn lại không thể là 2 cả (vì $4 + 2 + 2 + 2 = 10 \not\vdots\, 9$), càng không thể là 3 cả (vì $4 + 3 + 3 + 3 = 13 \not\vdots\, 9$), cũng không thể là 2 và 3 (vì $4 + 3 + 3 + 1 = 11 \not\vdots\, 9$).

Vậy chỉ có bốn số N là: 2223, 2232, 2322, 3222 (không chứa chữ số 4).

b) Có bao nhiêu số có hai chữ số chia hết cho tích các chữ số của nó?

Ta phải có $\overline{ab} \vdots ab$, hay $(10a + b) \vdots ab$, suy ra:

$\overline{ab} \vdots a$ hay $(10a + b) \vdots a$, từ đó $b \vdots a$ và $10a \vdots b$.

Nếu $b = ka$ thì $10a \vdots ka$ tức là $10 \vdots k$, suy ra $k \in \{1, 2, 5\}$.

$k = 1$ thì $a = b$, nhưng $11a$ chỉ $\vdots a$ khi $a = 1$, ta có $\overline{ab} = 11$;

$k = 2$ thì $b = 2a$, ta được ba số 12, 24 và 36;

$k = 5$ thì chỉ có một số là 15.

c) Tìm số lớn nhất chia hết cho 11 viết bằng các chữ số khác nhau

- Số lớn nhất viết bằng các chữ số khác nhau là

9 876 543 210 (*) có 10 chữ số.

Muốn nó chia hết cho 11 thì hiệu giữa tổng các số ở vị trí chẵn và vị trí lẻ phải chia hết cho 11. Tổng các chữ số của (*) là 45.

Gọi tổng các chữ số ở vị trí chẵn là x, ở vị trí lẻ là y. Ta có các trường hợp sau:

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x + y = 45 \\ x - y = 11 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x + y = 45 \\ x - y = 22 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ x - y = 33 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} x + y = 45 \\ x - y = 44 \end{cases} \quad (5)$$

Loại (1), (3) và (5) vì x và y sẽ cho tổng là phân số (!) Giải (4) được $x = 39$, $y = 6$ (không xảy ra và tổng năm chữ số nhỏ nhất bằng $1 + 2 + 3 + 4 + 0 = 10$). Vậy chỉ còn lại trường hợp $x = 28$, $y = 17$ của (2).

Ở (*) vị trí lẻ $y = 8 + 6 + 4 + 2 + 0 = 20$. Ta phải thay một vài chữ số bằng chữ số nhỏ hơn để được $y = 17$. Do đó ta thay 2 bằng 1, 4 bằng 2 (cách chữ số còn lại nhỏ nhất) và được số mà chữ số sắp xếp 3 và 4 theo thứ tự giảm dần từ trái sang phải. Khi đó số phải tìm là: 9 876 524 130.

Chú ý:

– Số nhỏ nhất được chia hết cho 11 là 1 024 375 869.

– Với số có 9 chữ số khác nhau chia hết cho 11 thì: số lớn nhất là 987 652 413, số nhỏ nhất là 102 347 586.

– Với số có 8 chữ số khác nhau chia hết cho 11 thì: số lớn nhất là 98 764 523, số nhỏ nhất là 10 234 5676.

Bài toán 2

Tính tổng $E = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99}$

Giải

Ta nhận thấy rằng các phân số đã cho có thể viết dưới dạng sau:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right);\ \frac{1}{15} = \frac{1}{2}.\frac{2}{15} = \frac{1}{2}.\frac{2}{15} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right);$$

$$\frac{1}{35} = \frac{1}{2}.\frac{2}{35} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right);\ \frac{1}{63} = \frac{1}{2}.\frac{2}{63} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \text{ và}$$

$$\frac{1}{99} = \frac{1}{2}.\frac{2}{99} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right)$$

Lưu ý: Các mẫu lần lượt là

$$3 = 1.3,\ 15 = 3.5,\ 35 = 5.7,\ 63 = 7.9,\ 99 = 9.11.$$

Vậy $E = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{2}.\frac{10}{11} = \frac{5}{11}$

Khai thác

a) Tính tổng $F = \frac{3}{1.3} + \frac{3}{3.5} + ... + \frac{3}{49.51}$

Ta nhận thấy rằng các mẫu đều là tích của hai số lẻ liên tiếp, ta có thể viết tương tự như trên:

$$\frac{3}{1.3} = \frac{3}{2}.\frac{2}{1.3} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right);\ \frac{3}{3.5} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{5}\right);\ ...$$

Cuối cùng ta được $F = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{51}\right) = \frac{25}{17}$.

b) Tính tổng $G = \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + ... + \frac{1}{24.25}$

Ta nhận thấy rằng các mẫu đều là tích của hai số tự nhiên liên tiếp, ta có thể viết chúng dưới dạng hiệu của hai phân số:

$$\frac{1}{5.6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6};\ \frac{1}{6.7}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7};\ \dots;\ \frac{1}{24.25}=\frac{1}{24}-\frac{1}{25}$$

Vậy $\quad G=\frac{4}{25}\left(\text{vì } \frac{1}{5}-\frac{1}{25}=\frac{4}{25}\right)$

c) Tính tổng $H=\frac{1}{7}+\frac{1}{99}+\frac{1}{247}+\frac{1}{475}+\frac{1}{775}+\frac{1}{1147}$

Ta nhận thấy rằng các mẫu có thể viết:

$7 = 1.7$, $91 = 7.13$, $247 = 13.19$, $475 = 19.25$, $775 = 25.31$ và $1147 = 31.37$. Như thế mỗi mẫu đều là tích của hai số hơn kém nhau 6. Do đó:

$$4=\frac{1}{1.7}+\frac{1}{7.13}+\dots+\frac{1}{31.37}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\dots+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{37}\right)$$

Vậy $H=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{37}\right)=\frac{6}{37}$

d) Chứng tỏ rằng tổng sau đây chia hết cho 7:

$$K=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$$

Ta nhóm các số hạng sau để được các phân số mà tử đều là 7:

$$K=\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{6}+\frac{7}{10}+\frac{7}{12}=\frac{7.21}{60}$$

là bội của 7, nên K chia hết cho 7.

c) Cho tổng $M=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\dots|\frac{2}{m(m+1)}=\frac{1998}{2000}$. Hỏi m bằng bao nhiêu?

Trước tiên ta nhận thấy rằng số hạng cuối có thể viết:

$\frac{2}{m(m+1)}=2.\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)$, do đó có thể biến đổi các phân số trước nó để được các phân số có tử đều là 2 còn mẫu là tích của hai số tự nhiên liên tiếp:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.\frac{2}{2}=\frac{2}{2.3};\ \frac{1}{6}.\frac{2}{2}=\frac{2}{3.4};\ \frac{1}{10}=\frac{1}{10}.\frac{2}{2}=\frac{2}{4.5}$$

Vậy $M=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}\right)=\frac{1998}{2000}$

Từ đó $\frac{1}{m+1}=\frac{1}{2000}$, suy ra $m = 1999$.

Bài toán 3

Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^0$ và BE là phân giác. Gọi Q, I, R theo thứ tự là trung điểm của BE, BC, EC. Xét dạng của tứ giác AQIK và tính các góc của nó.

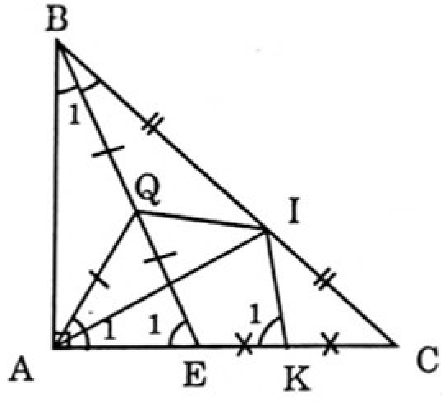
Giải

(hình 3)

Ta có QI // EC (đường trung bình trong ΔBEC) nên tứ giác AQIK là hình thang.

Ngoài ra AQ là trung tuyến của tam giác ABE vuông tại A nên $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1$ và bằng $\widehat{K}_1$ (Đồng vị). Suy ra:

$\widehat{A}_1 = \widehat{K}_1$, vậy hình thang này cân.



Hình 3

(***Lưu ý:*** Nếu chỉ chứng minh hai cạnh bên bằng nhau thì chưa đủ để kết luận là hình thang cân, chẳng hạn EQIK là hình thang có QE = IK nhưng không cân vì hai góc ở đáy bù nhau).

Lại có $\widehat{B}_1 = 30^0$, nên $\widehat{E}_1 = 60^0$.

Do đó $\widehat{A}_1 = 60^0 = \widehat{K}_1$.

Từ đó ta có $\widehat{QIK} = 120^0$.

Khai thác

a) Ta có thể chứng minh hình thang AQIK bằng cách khác: chứng minh hai đường chéo của nó AI = QK như sau:

$AI = \frac{1}{2}BC$, $QK = \frac{1}{2}BC$ (đường trung bình trong tam giác).

b) Chứng minh AI và QK là các tia phân giác của các góc QAK và IKA.

Thật thế, ta có AI = IB vì là trung tuyến của tam giác vuông ABC. Suy ra ΔAIB đều nên BF là đường cao. Do đó

$\widehat{AEF} = 90^0$, mà $\widehat{E}_1 = 60^0$ nên $\widehat{FAE} = 30^0$

Vì $\widehat{A}_1 = 60^0$ nên $\widehat{QAF} = 30^0$, suy ra KQ là phân giác $\widehat{IAK}$.

c) Nếu ΔABC vuông cân thì các góc của hình thang cân AQIK bằng bao nhiêu?

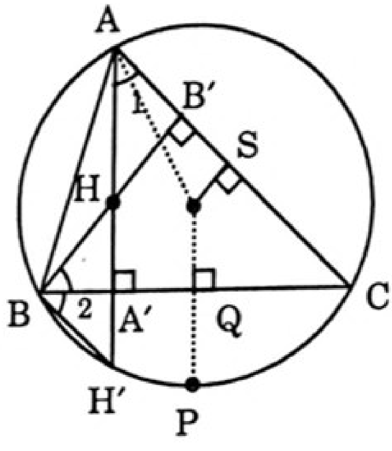
Ta có $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^0$, suy ra $\widehat{B}_1 = 22^0 30'$, do đó $\widehat{E} = 67^0 30'$. Xét ΔQAE cân nên $\widehat{E}_1 = \widehat{K}_1 = 67^0 30'$, $\widehat{AQI}$ bù với $\widehat{A}_1$ nên $\widehat{QAK} = 112^0 30'$.

Bài toán 4

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O và H là giao điểm hai đường cao AA′ và BB′/

a) Chứng minh CA′.CB = CB′.CA.

b) Kéo dài AA′ cắt (O) tại H′. Chứng minh H và H′ đối xứng nhau qua BC. Rút ra nhận xét gì?



Hình 4

Giải

a) Xét hai tam giác vuông CA′A và CB′B đồng dạng vì có $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) nên ta có (hình 4):

$\dfrac{CA'}{CA} = \dfrac{CB'}{CB}$, hay CN.CB = CB′.CA

b) Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ (góc nội tiếp cùng chắn cung H′C) mà $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ (góc có cạnh vuông góc). Suy ra $\Delta BHH'$ cân tại B.

Do đó A′H, tức là H và H′ đối xứng nhau qua BC.

Nhận xét:

Điểm đối xứng của trực tâm H của một tam giác qua một cạnh nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Khai thác

a) Gọi P là điểm đối xứng của O qua BC, chứng minh tứ giác AOPH là hình bình hành.

Xét $\Delta ABH \backsim \Delta QSO$ (g.g). Suy ra $\dfrac{AH}{OQ} = \dfrac{AB}{SQ} = 2$.

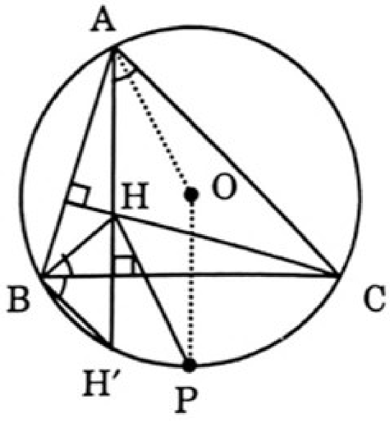
(Do $OS \perp AC$ nên S là trung điểm của AC), hay AH = 2OQ = OP.

Lại có AH // OQ và cùng vuông góc với BC.

Vậy AOPH là hình bình hành.

b) Chứng minh ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác AHB, BHC và CHA thì bằng nhau (hình 5).

Thật thế, cả ba đường tròn ngoại tiếp này đều bằng đường tròn ngoại tiếp ΔABC, do $\Delta HBC = \Delta H'BC$, đó là đường tròn (BH'C).



Hình 5

c) Giả sử đỉnh A chuyển động trên cung BAC, hỏi trực tâm H chuyển động như thế nào?

Ta có PH = OA = R (do AOPH là hình bình hành), do đó trực tâm H sẽ chuyển động trên cung tâm P bán kính R, giới hạn tại hai điểm U và Y là giao điểm của các đường vuông góc với BC tại B và C với đường tròn (O):

$H \equiv U$ khi $A \equiv B$, $H \equiv V$ khi $A \equiv C$.

Bài toán 5

So sánh cặp phân số $\frac{1}{2^{300}}$ và $\frac{1}{3^{200}}$.

Giải

Ta có thể viết:

$$2^{300} = 2^{3.100} = (2^3)^{100} = 8^{100};$$
$$3^{200} = 3^{2.100} = (3^2)^{100} = 9^{100}$$

Như thế:

$$\frac{1}{8^{100}} > \frac{1}{9^{100}}, \text{ vậy } \frac{1}{2^{300}} > \frac{1}{3^{200}}$$

Khai thác

a) Ta có thể làm cách khác: quy đồng mẫu rồi so sánh tử.

$\frac{3^{200}}{2^{200}.3^{200}}$ và $\frac{2^{300}}{2^{300}.3^{200}}$, do đó chỉ cần so sánh hai phân số 3^{200} và 2^{300} ta được kết quả như ở ví dụ 1.

b) So sánh cặp phân số $\frac{1}{5^{199}}$ và $\frac{1}{3^{300}}$

Ta nhận thấy rằng:

$$5^{199} < 5^{200} = 5^{2.100} = 25^{100};\ 3^{300} = 3^{3.100} = 27^{100}$$

Suy ra $\frac{1}{25^{100}} > \frac{1}{27^{100}}$, hay $\frac{1}{5^{200}} > \frac{1}{3^{300}}$

Nhưng $\frac{1}{5^{199}} > \frac{1}{5^{200}}$ nên $\frac{1}{5^{199}} > \frac{1}{3^{300}}$

c) So sánh cặp phân số $\frac{12}{25}$ và $\frac{11}{20}$.

Ta có thể so sánh với 1 như sau:

$$1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25} = \frac{52}{100}.$$

$1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20} = \frac{45}{100}$. Suy ra: do $\frac{45}{100} < \frac{52}{100}$ nên $\frac{11}{20} > \frac{12}{25}$

d) So sánh cặp phân số $\frac{9764}{36615}$ và $\frac{56272}{263775}$

Với hai phân số phức tạp này, rõ ràng ta phải tìm cách rút gọn chúng đến dạng tối giản rồi mới so sánh. Ta có:

$$\frac{9764}{36615} = \frac{4}{15};\ \frac{56272}{263775} = \frac{16}{75}$$

Vấn đề còn lại là chỉ so sánh hai phân số $\frac{4}{15}$ và $\frac{16}{75}$.

Dễ dàng thấy rằng $\frac{4}{15} = \frac{20}{75}$. Do đó ta có ngay $\frac{4}{15}.\frac{16}{75}$, tức là $\frac{9764}{36615} > \frac{56272}{263775}$.

e) So sánh $A = \frac{100^{100}+1}{100^{99}+1}$ và $B = \frac{100^{69}+1}{100^{68}+1}$

Trước tiên ta hãy quy đồng mẫu, ta được:

$$A = \frac{(100^{100}+1)(100^{68}+1)}{(100^{99}+1)(100^{68}+1)} \text{ và } B = \frac{(100^{69}+1)(100^{99}+1)}{MC}$$

Như thế chỉ cần so sánh tử của A với tử của B. Cách làm như sau:

Lấy tử của A trừ đi tử của B được:

$$100^{100} - 100^{99} - 100^{69} + 100^{68}$$
$$= 100^{99}(100 - 1) - 100^{68}(100 - 1)$$
$$= 99(100^{99} - 100^{68}) > 0.\text{ Suy ra } A > B.$$

f) So sánh tổng $5^{10} + 6^{10}$ với 7^{10}

Trước hết ta hãy so sánh $5^3 + 6^3$ với 7^3 cho dễ thấy, ta có:

$$5^3 + 6^3 = 31 < 343 = 7^3.\text{ Suy ra } \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 < 1 \qquad (1)$$

Nếu bây giờ ta chứng minh được $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} + \left(\frac{6}{7}\right)^{10} < 1$ (2) thì sẽ có ngay $5^{10} + 6^{10} < 7^{10}$.

Muốn thế ta so sánh các vế trái của (1) và (2):

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{5}{7}\right)^3 < \left(\frac{5}{7}\right)^{10} \\ \left(\frac{6}{7}\right)^{30} < \left(\frac{6}{7}\right)^{10} \end{array}\right\} \text{ vậy } \left(\frac{5}{7}\right)^{10} + \left(\frac{6}{7}\right)^{10} < 1\text{, tức là } 5^{10} + 6^{10} < 7^{10}$$

g) Số nào lớn hơn trong his số $2^{3^{100}}$ và $3^{2^{100}}$

Ta có $\left(\frac{3}{2}\right)^2 > 2$, suy ra $\left(\frac{3}{2}\right)^{100} > 2$ hay $3^{100} > 2.2^{100}$

Từ đó: $2^{3^{100}} > 4^{2^{100}} > 3^{2^{100}}$

h) So sánh $1 + 2^2 + 3^3 + ... + 1000^{1000}$ và $2^{2^{2^{2^2}}}$?

Ta có: $2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{2^{2^4}} = 2^{2^{16}}$, vì $2^{10} = 1024 > 10^3$ và

$$2^6 = 64 \text{ nên } 2^{16} > 64000\text{, tức là } 2^{2^{2^{2^2}}} > 2^{64000}$$

Mặt khác:

$$1 + 2^2 + 3^3 + ... + 1000^{1000} < 1000.1000^{1000} = 1000^{1000} <$$
$$< (2^0)^{1001} = 2^{10010}$$

Do $2^{64000} > 2^{10010}$ nên: $1 + 2^2 + 3^3 + ... + 1000^{1000} < 2^{2^{2^{2^2}}}$

Bài toán 6

Tìm điều kiện để biểu thức $P = \sqrt{-9p^4 + 6p^2 - 1} - \sqrt{-4p^4 + 12p^2 - 9}$ có nghĩa.

Ta có thể viết:

$$P = \sqrt{-99p^4 - 6p^2 + 1)} - \sqrt{-(4p^4 - 12p^2 + 9} = \sqrt{-(2p^2 - 1)^2} - \sqrt{-(2p^2 - 3)^2}$$

Điều kiện là:

$-(p^2 - 1)^2 \geq 0$ hay $(2p^2 - 1)^2 \leq 0$, mà $(2p^2 - 1)^2$ không thể âm nên phải có $(2p^2 - 1)^2 = 0$, tức là $p = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Tương tự ta phải có $(2p^2 -)^2$ $= 0$, tức là $p = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Lưu ý: Nếu biểu thức dưới dấu căn bậc hai dạng $-M^2$ với M là một hàm số của p thì đừng vội cho rằng $\sqrt{-M^2}$ không tồn tại.

Khai thác

a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{a + 4\sqrt{a-4}} + \sqrt{a - 4\sqrt{a-4}}$

Điều kiện: $a > 4$

Ta thêm và bớt 4 được:

$$\sqrt{(a-4) + 4\sqrt{a-4} + 4} = (\sqrt{a-4} + 2)^2$$

$$\sqrt{(a-4) - 4\sqrt{a-4} + 4} = (\sqrt{a-4} - 2)^2$$

Như thế $A = \sqrt{a-4} + 2 + \left|\sqrt{a-4} - 2\right|$.

Nếu $0 \leq \sqrt{a-4} \leq 2$ hay $4 \leq a \leq 8$ thì

$$A = \sqrt{a-4} + 2 + 2 - \sqrt{a-4} = 4,$$

Nếu $\sqrt{a-4} > 2$ hay $a > 8$ thì

$$A = \sqrt{a-4} + 2 + \sqrt{a-4} - 2 = 2\sqrt{a-4}.$$

b) Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$

Ta hãy bắt đầu từ phải sang trái ($\Leftarrow$). Ta lần lượt có:

$$\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{20 - 12\sqrt{5} + 9} = \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2} = 2\sqrt{50 - 3}.$$

Như thế: $= \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{5} - 1$, vậy:

$$B = \sqrt{\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)} = 1$$

c) Rút gọn biểu thức

$$C = \sqrt{c + d + c + 2\sqrt{cd} + de} + \sqrt{c + d + e - 2\sqrt{ce + de}}.$$

Điều kiện, $c \geq -d$, $e \geq 0$ ta có:

$$C = \sqrt{c + d + 2\sqrt{e}.\sqrt{c+d} + e} + \sqrt{c + d + 2\sqrt{e}.\sqrt{c+d} + e}$$

$= \sqrt{(\sqrt{c+d}} \geq \sqrt{e}$, hay $\sqrt{c+d} - \sqrt{e} \geq 0$, tức là $c + d \geq e$

thì $\left|\sqrt{c+d} - \sqrt{e}\right| = \sqrt{c+d} - \sqrt{e}$ ta được $C = 2\sqrt{c+d}$.

Nếu $\sqrt{c+d} < \sqrt{e}$, hay $c + d < e$ thì $\left|\sqrt{c+d} - \sqrt{e}\right| = \sqrt{e} - \sqrt{c+d}$.

ta được $C = 2\sqrt{e}$.

d) Rút gọn $D = \dfrac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$

Ta bắt đầu biến đổi tử từ phải sang trái:

$$\sqrt{13 + \sqrt{48}} = \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2} = 2\sqrt{3} + 1;$$

$$\sqrt{5 - (2\sqrt{3} + 1)} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1;$$

$$3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + 48}} = 3 + \sqrt{3} - 1 = 2 + \sqrt{3}$$

Vậy $D = \dfrac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 1$

§5. TÁC DỤNG BIẾN KHÓ THÀNH DỄ CỦA PHƯƠNG PHÁP ẨN PHỤ

Phương pháp ẩn phụ có tác dụng biến khó thành dễ, biến phức tạp thành đơn giản.

Ví dụ 1

Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{8 - a}{2 + \sqrt[3]{a}} : \left(2 + \frac{\sqrt[3]{a^2}}{2 + \sqrt[3]{a}}\right) + \left(\sqrt[3]{a} + \frac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} - 2}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{a} - 4}{\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a}}\right)$$

Mới nhìn qua thấy biểu thức rắc rồi quá! Nhưng thật ra chỉ có hai dạng căn là $\sqrt[3]{a}$ và $\sqrt[3]{a^2}$, cho nên ta có thể dùng ẩn phụ để tính toán được đơn giản bằng cách đặt:

$$\sqrt[3]{a} = m, \text{ do đó } \sqrt[3]{a^2} = m^2.\ a = m^3$$

Như thế biểu thức A có thể viết gọn:

$$A = \frac{8-m^3}{2+m} : \left(2 + \frac{m^2}{2+m}\right) + \left(m + \frac{2m}{m-2}\right)\left(\frac{m^2-4}{m^2+2m}\right)$$

$$= (4 + 2m + m^2) : \frac{m^2+2m+4}{m+2} + \frac{m^2}{m-2}.\frac{(m+2)(m-2)}{m(m-2)}$$

$$= m + 2 + m = 2m + 2$$

$$= 2\sqrt[3]{a}$$

Ví dụ 2

Biến đổi đa thức sau thành một tích:

$$(p^2 + 3p + 4)(p^2 + 3p + 5) - 6$$

Ta có thể biến đổi bằng ba cách sau:

Cách 1. Đặt $t = p^2 + 3p$ ta có $(t + 4)(t + 5) - 6$;

Cách 2. Đặt $t = p^2 + 3p + 4$ ta có $t(t + 1) - 6$;

Cách 3. Đặt $t = p^2 + 3p + \frac{4+5}{2}$ ta có $\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{1}{2}\right) - 6$.

Thử xem cách nào hay nhất trong ba cách dùng ẩn phụ này?

Ví dụ 3

Cho ba số m, n, p khác 0 sao cho $m^3n^3 + n^3p^3 + p^3m^3 = 3m^2n^2p^2$ (*)

Tính tích $T = \left(1 + \frac{m}{n}\right)\left(1 + \frac{n}{p}\right)\left(1 + \frac{p}{m}\right)$

Ở đây ta có ba tích m, np và pm ta hãy đặt các ẩn phụ sau:

$$u = np,\ v = mp,\ n = mn \text{ với } uvw \neq 0$$

Từ (*) ta suy ra: $u^3 + v^3 + w^3 = 3uvw$, tương ứng với:

$$\left[\begin{array}{l} u + v + w = 0 \\ u = v = w \end{array}\right.$$

Ta được $T = \left(1 + \frac{v}{u}\right)\left(1 + \frac{u}{w}\right)\left(1 + \frac{w}{u}\right)$

Do đó cần xét hai trường hợp:

a) Nếu $u + v + w = 0$ thì ta có:

$3(u + v)(v + w)(w + u) = -3uvw$. Từ đó $T = -1$;

b) Nếu $u = v = w$ (hay $m = n = p$) thì ta tính được $T = 8$.

Ví dụ 4

Giải phương trình: $(6x + 7)^2(3x + 4)(x + 1) = 6$

Phương trình có thể viết: $(36x^2 + 84x + 49)(3x^2 + 7x + 4) = 6$

Đặt ẩn phụ: $3x^2 + 7x + 4 = t$;

vì $3x^2 + 7x + 4 = 3\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$ nên $t \geq -\frac{1}{12}$.

Do đó phương trình đã cho trở thành $(12t + 1)t = 6$.

Giải ra được nghiệm $t = \frac{2}{3}$ thỏa mãn điều kiện $t \geq -\frac{1}{12}$.

Ví dụ 5

Chứng minh bất đẳng thức: $(\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}})^8 > 3^6$

Đặt các ẩn phụ: $u = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}$, $v = \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}$, $w = u + v$.

Ta phải chứng minh rằng: $w=8 > 3^6$.

Thật vậy, ta có: $u^3 + v^3 = 6$ và $uv = 1$, nên

$w^3 = (u=3 + v^3) + 3uv(u + v) = 6 + 3w = 3(1 = 1 + w) > 3(3\sqrt[3]{1.1.w})$

Vì $u > 1$, $v > 0$ nên $w > 1$.

Do đó: $w^9 > (3^2)^3.w$

Vậy $w^8 > 3^6$

Ví dụ 6

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x + 1)(y + 1) = 6 \\ (x + 1)^3 + (y + 1)^3 = 35\end{cases}$

Ta đặt ẩn phụ: $(x + 1)^3 = u$, $(y + 1)^3 = v$, thế thì hệ đã cho trở thành $\begin{cases}u + v = 35 \\ uv = 216\end{cases}$

Giải ra ta được nghiệm $(u, v) = (27; 8) = (8; 27)$.

Từ đó nghiệm của hệ đã cho là: $(x, y) = (2; 1) = (1; 2)$

Ví dụ 7.

Giải hệ: $\begin{cases}x + y + z + \sqrt{x + y + z + 1} = 11 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}\end{cases}$

Nếu từ phương trình thứ hai ta biến đổi x và y về z, rồi thay vào thứ nhất để chỉ còn một ẩn thì sẽ phức tạp (!).

Vì thế ta đặt ẩn phụ $\sqrt{x+y+z+1} = t > 0$. Lúc đó phương trình thứ nhất sẽ có dạng $t^2 + t - 12 = 0$.

Giải ra được $t_1 = 3$, $t_2 = -4$ (loại)

Từ đó $\sqrt{x+y+z+1} = 3$. Suy ra $x + y + z = 8$.

Từ phương trình thứ hai ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{8}{9}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là:

$$x = \frac{16}{9},\ y = \frac{8}{3},\ z = \frac{32}{9}$$

§6. HẾT SỨC CẢNH GIÁC VỚI GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ VÀ VỚI CĂN SỐ HỌC

1. Giá trị tuyệt đối

Hiệu là $|a|$ ta có: Giá trị tuyệt đối của số a (còn gọi là môđun của số a.

$$|a| = a \text{ nếu } a \geq 0$$

$$|a| = -a \text{ nếu } a < 0$$

Suy ra: $|a| \geq 0$ và $|a| \geq a$ với mọi $a \in \mathbb{R}$

Lưu ý đến các tính chất sau đây:

$|ab| = |a|\,|b|$ $\qquad$ $|a + b| \leq |a| + |b|$

$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \left|\dfrac{b}{a}\right|$ nếu $b \neq 0$ $\qquad$ $|a + b| \geq |a| - |b|$

$|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$

Ví dụ 1

$|-a| = |-1.a| = |-1|.|a| = |a|$

$|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$

$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$

Ví dụ 2

Chứng minh rằng với $|a| < 1$, $|b - 1| < 10$, $|a - c| < 0$ ta có bất đẳng thức sau: $|ab - c| < 20$.

Ta có: $|ab - c| = |ab - a + a - c|$

$= |(ab - a) + (a - c)| \leq |ab - a| + |a - c|$

$= |a|.|b - 1| + |a - c| < 1.10 + 10 = 20$

2. Phương trình đơn giản chứa giá trị tuyệt đối có dạng $f(|x|) = g(x)$ (*) trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số nào đó

Để giải loại phương trình này, trước tiên ta phải tìm tất cả nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ trong tập $x \geq 0$, sau đó giải phương trình $f(-x) = g(x)$ trong tập $x < 0$. Hợp các nghiệm tìm được sẽ là tập tất cả nghiệm của phương trình đã cho (*).

Nói cách khác, phương trình (*) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(-x) = g(x) \\ x < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 1

Giải phương trình $x^2 - 5|x| + 6 = 0$

Phương trình này tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} x^2 + 5x + 6 = 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = 3$ đều là số dương nên là nghiệm của (1).

Phương trình $x^2 + 5x + 6 = 0$ có nghiệm là $x_3 = -2$ và $x_4 = -3$ đều là số âm nên là nghiệm của (2).

Vậy tập tất cả nghiệm của phương trình này bằng cách đổi ẩn. Đặt $t = |x|$ ta được phương trình

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \text{ vì } x^2 = |x^2| = |x|^2.$$

Giải ra được hai nghiệm dương 2 và 3. Như thế phương trình đã cho tương đương với tập hai phương trình $|x| = 2$ và $|x| = 3$ mà nghiệm là ± 2 và ± 3.

Ví dụ 2

Giải phương trình $|x| = x^2 + x - 2$

Phương trình đã cho tương đương với hệ;

$$\begin{cases} x = x^2 + x - 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x = x^2 + x - 2 \\ x < 0 \end{cases}$$

Phương trình $x^2 + x - 2$ có nghiệm $x_1 = -\sqrt{2}$ và $x_2 = \sqrt{2}$, mà phải có $x \geq 0$ nên chỉ có nghiệm là $\sqrt{2}$. Phương trình $-x = x^2 + x - 2$ và $1 + \sqrt{3} > 0$ nên chỉ có nghiệm là $-1 - \sqrt{3}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $\sqrt{2}$ và $(-1 - \sqrt{3})$.

Ví dụ 3

Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{1+a^2x^2} - ax}{\sqrt{1+a^2x^2} + ax} = \dfrac{1}{c^2}$

Khử căn ở mẫu ta được:

$$(\sqrt{1+a^2x^2} - ax)^2 = \frac{1}{c^2}$$

Do biểu thức $\sqrt{1+a^2x^2} - ax$ luôn dương nên ta có thể viết:

$$\sqrt{1+a^2x^2} - ax = \frac{1}{|c|}, \text{ tức là } \sqrt{1+a^2x^2} = ax + \frac{1}{|c|}.$$

Bình phương hai vế được $x = \dfrac{|c|^2 - 1}{2a|c|}$ hay $x = \dfrac{c^2 - 1}{2a|c|}$.

Thử lại. Thay giá trị $x = \dfrac{c^2 - 1}{2a|c|}$ ta tìm được:

$$1 + a^2x^2 = \frac{4c^2 - (c^2 - 1)^2}{4x^2} = \frac{(c^2 + 1)^2}{4c^2}.$$

Lưu ý biểu thức $c^2 + 1$ luôn dương nên ta có: $\sqrt{1+a^2x^2} = \dfrac{c^2 + 1}{2|c|}$ điều này chứng tỏ phương trình đã cho luôn thỏa mãn.

Vậy nghiệm của nó là $x = \dfrac{c^2 - 1}{2a|c|}$, tức là nếu $c > 0$ thì $x = \dfrac{c^2 - 1}{2ac}$, nếu $c < 0$ thì $x = \dfrac{1 - c^2}{2ac}$.

3. Giải phương trình bằng phép tính và bằng đồ thị

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x+2$$

Mấu chốt là biết suy ra từ định nghĩa giá trị tuyệt đối:

$$|a| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Giải

Trước tiên ta phải tìm các nghiệm trên đoạn từ 2 đến ∞, rồi trên các đoạn từ 1 đến 2, từ 0 đến 1, từ –1 đến 0 và từ –∞ đến –1.

a) Với $x \geq 2$, ta có: $x + 1 > 0$, $x > 0$, $x - 1 > 0$, $x - 2 \geq 0$, do đó:
$|x + 1| = x + 1$. $|x| = x$, $|x - 1| = x - 1$, $|x - 2| = x - 2$. Ta được phương trình:

$$x + 1 - x + 3(x - 1) - 2(x - 2) = x + 2$$

Đây là hằng đẳng thức. Vậy mọi số lớn hơn hoặc bằng 2 là nghiệm của phương trình đã cho.

b) Với $1 \leq x < 2$, ta có: $x + 1 > 0$, $x\ x > 0$, $x - 1 \geq 0$ và $x - 2 < 0$, do đó $|x + 1| = x + 1$, $|x| = x$, $|x - 1| = x - 1$, $|x - 2| = -(x - 2)$. Ta được phương trình:

$$x + 1 - x + 3(x - 1) + 2(x - 2) = x + 2$$

Từ đó $4x = 8$, $x = 2$, tức là nằm ngoài đoạn $1 \leq x < 2$. Vậy phương trình vô nghiệm.

c) Với $0 \leq x < 1$, ta có:
$|x + 1| = x + 1$, $|x| = x$, $|x - 1| = -(x - 1)$, $|x - 2| = -(x - 2)$. Ta được phương trình:

$x + 1 - x - 3(x - 1) + 2(x - 2) = x + 2$, từ đó $x = -1$, tức là nằm ngoài khoảng cách $0 \leq x < 1$. Vậy phương trình cũng vô nghiệm.

d) Với $-1 \leq x < 0$, ta có:
$|x + 1| = x + 1$, $|x| = -x$, $|x - 1| = -(x - 1)$, $|x - 2| = -(x - 2)$. Ta được phương trình:

$x + 1 + x - 3(x - 1) + 2(x - 2) = x + 2$, từ đó $x - 3 = x + 2$ (!)

Vậy phương trình đã cho cũng vô nghiệm.

e) Cuối cùng với $x < -1$, ta có:
$|x + 1| = -(x + 1)$, $|x| = -x$, $|x - 1| = -(x - 1)$, $|x - 2| = -(x - 2)$.

Ta được phương trình:

$$-(x-1)+x-3(x-1)+2(x-2)=x+2, \text{ từ đó } x=-2.$$

Phương trình đã cho có thêm một nghiệm nữa là $x = -2$.

Tóm lại, phương trình đã cho thỏa mãn với số -2 và với mọi số nhỏ hơn -1.

- Để giải bằng đồ thị ta phải vẽ đồ thị hàm số:

$$y = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| - (x+2)$$

Ta vẽ đồ thị các hàm số (nét mảnh):

$y_1 = |x+1|$, $y_2 = -|x|$, $y_3 = 2|x-1|$, $y_4 = -2|x-2|$

và $y_5 = -(x+2)$ và cuối cùng là đồ thị (nét đậm) của hàm số

$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$ (hình 6).

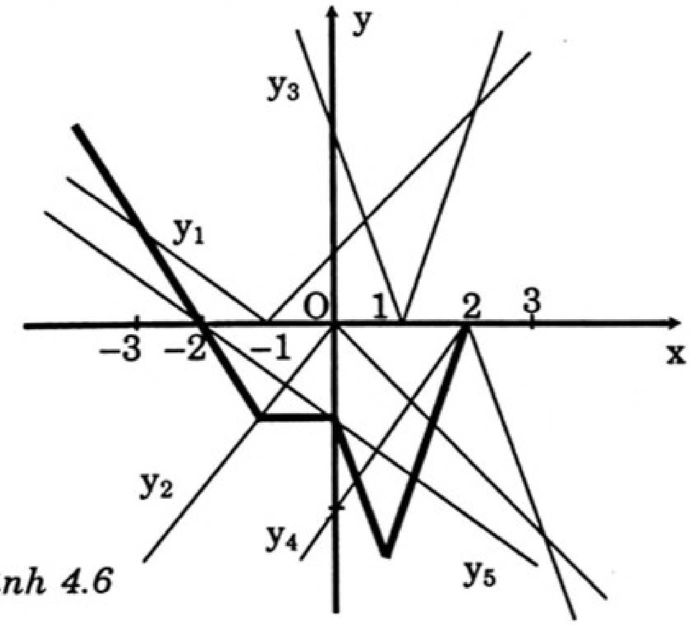
Ta thấy ngay rằng trên đồ thị cuối này thì $y = 0$ trên tia $x \geq 2$ và tại điểm $x = -2$.

Tương tự, nếu phải vẽ đồ thị hàm số: $z = |t+1| + |x| + |t-1|$

thì sau khi tìm các nghiệm $t = -1$, $t = 0$ và $t = 1$, để chọn gọn ta lập bảng sau đây:

t		1		0		1	
$\|t+1\|$	$-1-t$	0	$1+t$		$1+t$		$1+t$
$\|t\|$	$-t$		$-t$	0	t		t
$\|t-1\|$	$-t+1$		$-t+1$		$-t+1$	0	$1-t$
z	$-3t$		$-t+2$		$t+2$		$3t$

Đến đây việc vẽ đồ thị của z không còn gì khó. Bạn đọc tự vẽ.



Hình 4.6

2. Căn số học

Luôn luôn nhắc học sinh là $\sqrt[n]{a}$ là căn số học nếu $a \geq 0$ vì thế $\sqrt[3]{-27}$ không thể là căn số học vì số dưới dấu căn là số âm.

Nhưng $\sqrt[3]{27}$ lại là căn số học (nó bằng 3), $\sqrt[4]{16}$ cũng là căn số học (nó bằng 2), còn $\sqrt{-16}$ cũng không phải là căn số học.

Đẳng thức $\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2}$ không đúng khi x âm, vì với $x = -8$ thì vế trái bằng $\sqrt[3]{-8} = -2$, còn vế phải có hai giá trị $\sqrt[6]{64} = \pm 2$.

Như thế $\sqrt{x^2} = x$ chỉ đúng khi $x \geq 0$ ($\sqrt{x^2}$ là căn số học), ta lại có $\sqrt{x^2} = -x$, nên cả hai trường hợp thì cách viết đúng phải là $\sqrt{x^2} = |x|$. Do đó nếu $x = -3$ thì $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = -(-3)$ với $\sqrt{(-3)^2}$ là căn số học vì số dưới dấu căn bằng số dương 9. Ta cũng có thể viết $\sqrt{(-3)^2} = |3|$.

Để minh họa phép biến đổi đại số ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$.

Giải

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{(a-b)^2} = a - b \text{ chỉ đúng khi } a \geq b.$$

Nếu $a < b$ thì phải viết:

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = -(a - b), \text{ tức là } \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = b - a.$$

Thành thử nếu $a = 2$, $b = 3$ thì $a - b = -2$, trong khi đó

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{4 - 12} + 9 = \sqrt{1} = 1.$$

Vì vậy ta phải viết đúng như sau:

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = |a - b| \text{ hoặc} = |b - a|$$

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{4 + 4m + m^2} - \sqrt{4 - 4m + m^2}}{\sqrt{4 + 4m + m^2} + \sqrt{4 - 4m + m^2}}$$

Giải

Với $m \neq -2$ ta có thể viết:

$$P = \frac{|2+m| - |2-m|}{|2+m| + |2-m|} = \frac{1 - \left|\frac{2-m}{2+m}\right|}{1 + \left|\frac{2-m}{2+m}\right|}$$

Nếu phân thức $\frac{2-m}{2+m} > 0$ thì $P = \frac{1 - \frac{2-m}{2+m}}{1 + \frac{2-m}{2+m}} = \frac{m}{2}$, còn nếu nó âm

thì $P = \frac{1 + \frac{2-m}{2+m}}{1 - \frac{2-m}{2+m}} = \frac{m}{2} = \frac{2}{m}$.

- Lưu ý thêm: $P = \frac{m}{2}$ với điều kiện $|m| < 2$ và $P = \frac{2}{m}$ và $P = \frac{2}{m}$ với điều kiện $|m| \geq 2$, còn nếu $|m| = 2$ thì cả hai đáp số trên đều không đúng.

§7. DÙNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ MỘT CÁCH THÔNG MINH

1. Rút gọn và tìm giá trị

Ví dụ 1. Rút gọn và tìm giá trị biểu thức $\sqrt{9a^2 - 6a + 1}$ với $a < \frac{1}{3}$.

Ta có: $\sqrt{9a^2 - 6a + 1} = \sqrt{(3a-1)^2} = 1 - 3a$ (vì $a < \frac{1}{3}$).

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

Ta có: $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2 - 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}.1 + 1}$

$$= \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị của biểu thức:

$$\sqrt{p - 2\sqrt{p-1}} + \sqrt{p + 2\sqrt{p-1}} \text{ (với } p \geq 1)$$

Ta có thể viết bằng cách ±1 vào biểu thức dưới dấu căn:

$$\sqrt{p - 1 - 2\sqrt{p-1} + 1} + \sqrt{p - 1 + 2\sqrt{p-1} + 1}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{p-1}-1)^2} + \sqrt{(p-1}+1)^2$$

$$= \left|\sqrt{p-1}-1\right| + \sqrt{p-1}+1 = \begin{cases} 2\sqrt{p-1} \text{ khi } p \geq 2 \\ 2 \text{ khi } 1 \leq p < 2 \end{cases}$$

Ví dụ 4. Tính giá trị của biểu thức

$$M = m^2 + n^2 + p^2 - mn - np - pm$$

biết $\quad m - n = \sqrt{2} + 1, n - p = \sqrt{2} - 1.$

- Ở đây ta biết giá trị m – n và n – p, nên gợi ý cho ta biến đổi M về dạng có $(m-n)^2$ và $(n-p)^2$ như sau:

$$M = \frac{1}{2}[(2m^2 - 2mn + n^2) + (n^2 - 2np + p^2) = (p^2 - 2pm + m^2]$$

$$= \frac{1}{2}[(m-n)^2 + (n-p)^2 + (p-m)^2]$$

Đến đây xuất hiện số hạng $(p-m)^2$, do đó ta biến đổi như sau:

$$p - m = -(m-p) = -[(m-n) + (n-p)]$$
$$= -(\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1) = -2\sqrt{2}$$

Cuối cùng ta tìm được:

$$M = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2 + (-2\sqrt{2})^2 = 7$$

2. Biến đổi tổng thành tích

Ví dụ 1. Biến đổi thành tích tổng sau:

- Ta có: $\quad 9a^2 + b^2 - c^2 + 6ab = (9a^2 + 6ab + b^2) - c^2$

$$= (3a+b)^2 - c^2 = (3a+b+c)(3a+b-c)$$

Ví dụ 2.

Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$1 - m^2p^4 + 2mp^2q^3 - q^6$$

- Ta có: $\quad 1 - m^2p^4 + 2mp^2 - q^6 - 1 - (m^4p^4 - 2mp^2.q^3 + q^6)$

$$= 1 - (mp^2 - q^3)^2 - (1 - mp^2 + q^3)(1 + mp^2 - q^3)$$

Ví dụ 3.

Chứng minh bất đẳng thức:

Ví dụ 3.1. Chứng minh rằng: nếu a > 0 và $b^2 - 4ac \leq 0$ thì với bất kì số thực nào thì $ax^2 + bx + c \geq 0$.

• Trước tiên ta hãy viết $ax^2 + bx + c$ về dạng bình phương:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Do với mọi x ta đều có $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ và do $b^2 - 4ac \leq 0$ nên chú ý đến $\begin{cases} 4ac - b^2 \geq 0 \\ a > 0 \end{cases}$, ta thấy rằng:

Với bất kì giá trị nào của x ta đều có $ax^2 + bx + c \geq 0$.

Ví dụ 3.2. Chứng minh rằng với mọi x, y, z, t thực ta đều có:

$$(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) \geq (xz + yt)^2$$

• Chứng minh trực tiếp là khó nên ta chứng minh bằng cách chuyển vế phải sang vế trái để chứng minh hiệu có được là không âm, tức là:

$$(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) - (xz + yt)^2 \geq 0$$

Ta đưa hiệu ở vế trái này về dạng một bình phương như sau:

$$x^2z^2 + y^2z^2 + x^2t^2 + y^2t^2 - x^2z^2 - 2xyzt - y^2t^2$$

$$= y^2z^2 - 2xyzt + x^2t^2 = (yz - xt)^2 \geq 0$$

Ví dụ 3.3. Gọi m, n, p là ba cạnh của tam giác MNP. Chứng minh hệ thức:

$$m(n^2 + p^2) + n(p^2 + m^2) + p(m^2 + n^2) \geq m^3 + n^3 + p^3 + 2mnp$$

• Lấy vế trái trừ đi vế phải được:

$$m(n^2 + p^2 - m^2) + n(p^2 + m^2 - n^2) + p(m^2 + n^2 - p^2) - 2mnp$$

$$= m(n^2 - 2np + p^2 - m^2) + n(p^2 + 2pm + m^2 - n^2) + p(m^2 - 2mn + n^2 - p^2)$$

$$= m(n - p + m)(n - p - m) + n(p + m + n) + p(m - n + p)(m - n - p)$$

$$= (m - n + p)[-m(n - p + m) + n(m + n + p) + p(m - n - p)]$$

$$= (m - n + p)(-m^2 + 2mp - p^2 + n^2)$$

$$= (m - n + p)[n^2 - (m - p)^2]$$

$$= (m - n + p)(n + m - p)(n - m + p)$$

Trong tam giác tổng hai cạnh bất kì bao giờ cũng lớn hơn cạnh thứ ba nên:

$$m - n + p > 0,\ n + m - p > 0,\ n - m + p > 0$$

Vậy ta có: vế trái – vế phải luôn dương, do đó ta đã chứng minh được hệt thức đã cho.

4. So sánh các số

Ví dụ 1. So sánh số $M = 2015^2$ với số $N = 2014.2016$

Số N có thể viết như sau:

$$N = (2015 - 1)(2015 + 1) = 2015^2 - 1^2 = M - 1$$

Vậy $M = N + 1$, do đó $M > N$.

Ví dụ 2. So sánh số $P = \dfrac{5^{2019} + 7 + 18}{5^{2017} + 7}$ với $Q = \dfrac{5^{2017} + 1}{5^{2015} + 1}$

Ta có thể viết:

$$P = \frac{5^{2019} + 7}{5^{2017} + 7} > \frac{5^{2019} + 7 + 18}{5^{2017} + 7} = \frac{5^{2019} + 5^2}{5^{2017} + 5^2}$$

Đặt 5^2 làm thừa số chung được:

$$P > \frac{5^2(5^{2017} + 1)}{5^2(5^{2015} + 1)} = \frac{5^{2017} + 1}{5^{2015} + 1} = Q$$

Vậy $P > Q$.

5. Giải thích tại sao

Ví dụ 1. Tại sao tổng $21^{39} + 39^{21}$ chia hết cho 45?

Tổng đã cho có thể viết:

$9.3^{37}.7^{39} + 9.3^{19}.13^{21}$. Như thế tổng chia hết cho 9.

Lại có: $21^{39} + 39^{21} = (21^{39} - 1^{39}) + [39^{21} - (-1)^{21}]$

$= (21 - 1)p + (39 + 1)q = 20p + 40q$ chia hết cho 5

nên ta có ngay $21^{39} + 39^{21}$ chia hết cho 45.

Ví dụ 2. Tại sao tổng $13^n.2 + 7^n.5 + 26$ không phải là số chính phương?

Ta đặt $n = 3k + r$ (với $r = 0, 1, 2$ và k nguyên)

Thế thì tổng đã cho có thể viết:

$$13^{3k+r}.2 + 7^{3k+r}.5 + 26$$

$$= 13^r.2197^k.2 + 343^k.7^r.5 + 26$$

$$= 2.13^r(2187^k - 1^k) + 5.7^r(343^k - 1^k) + 2.13^r + 5.7^r + 26$$

$= (2197 - 1)t + (343 - 1)s + 2.13^r + 5.7^r + 26$

$= 2196t + 342s + 2.13^r + 5.7^r + 26$

Với $r = 0$ thì $u = 13^r.2 + 7^r.5 + 26 = 33$;

$r = 1$ thì $u = 87$ và với $r = 2$ thì $u = 609$

Do 2196 và 342 đều chia hết cho 9 nên số $(13^r.2 + 7^n.5 + 26)$ chia hết cho 3 nhưng lại không chia hết cho 9, vậy nó không thể là số chính phương.

6. Vận dụng hằng đẳng thức $(a + b + c)^2$

Ví dụ 1. Tìm tất cả số nguyên n để tổng $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7$ là số chính phương.

Có thể giải bằng hai cách.

Cách 1. Đặt $t^2 = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7$

$= (n^2 + n + 1)^2 - (n^2 + n - 6)$, hoặc t^2

$$= (n^2 + n)^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + 6\frac{3}{4},$$

hoặc $(n^2 + n + 2)^2 - 3[n^2 + (n - 1)]$.

Khi $n = 0$ hoặc $n = -1$ thì t^2 không phải là số chính phương, do đó ta phải có điều kiện $n \neq 0$ và $n \neq -1$.

Khi đó $n^2 + n - 1 = (n - 1)(n + 1)n > 0$ và $-3[n^2 + n - 1] < 0$.

Ta có: $(n^2 + n)^2 < t^2 < (n^2 + n + 2)^2$.

Vậy $t^2 = (n^2 + n + 1)^2$ từ đó $n^2 + n - 6 = 0$. Suy ra $n = 2$ hoặc $n = -3$. Thử lại ta thấy ngay tổng đã cho là số chính phương.

Cách 2.

Tổng đã cho là số chính phương kvck $4(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 7)$ là số chính phương t^2, tức là:

$4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 28 = t^2$, hay

$(2n^2 + 2n + 1)^2 + 27 = t^2$; $t^2 - (2n^2 + 2n + 1) = 27$;

$[t - (2n^2 + 2n + 1)][t + (2n^2 + 2n + 1)] = 27$

Với $t \geq 0$ thì $2n^2 + 2n + 1 = n^2 + (n + 1)^2 \geq 0$;

$t + (2n^2 + 2n + 1) > t - (2n^2 + 2n + 1)$

Lập bảng sau:

$t + (2n^2 + 2n + 1)$	27	9
$t - (2n^2 + 2n + 1)$	1	3
t	14	6
$2n^2 + 2n + 1$	13	3

Vậy với $n = 2$ hoặc $n = -3$ thì tổng đã cho là số chính phương.

Ví dụ 2.

Từ $(x + y + z)^2$ hãy tính

$$A = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}$$

• Ta có:

$$A^2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz}$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2(x + y + z)}{xyz}$$

Nếu $x + y + z = 0$ thì $A^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$. Suy ra

$$A = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} = \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right| \text{ với } xyz \neq 0 \text{ và } x + y + z = 0.$$

Ví dụ 3.

Phân tích thành thừa số:

$$B = (m + 1)(m + 3)(m + 5)(m + 7) + 15$$

• Ta có: $= (m^2 + 8m)^2 + 22(m^2 + 8m) + 120$

$= (m^2 + 8m + 11)^2 - 1 = (m^2 + 8m + 10)(m^2 + 8m + 12)$

$= (m^2 + 8m + 10)(m + 2)(m + 6)$

Vậy $B = (m + 2)(m + 6)(m^2 + 8m + 10)$

Ví dụ 4.

Chứng minh rằng biểu thức

$$C = \left(\frac{1}{c^2 + 5c + 6} + \frac{1}{c^2 + 3c + 2} + \frac{1}{c^2 + 4c + 3}\right) \cdot \frac{(c - 3)^2 + 12c}{4}$$

Không phụ thuộc và c nếu $c \neq -1, -2, -3$.

• Trước tiên ta phân tích các mẫu thành thừa số:

$$c^2 + 5c + 6 = (c + 2)(c + 3)$$

$$c^2 + 3c + 2 = (c + 1)(c + 2)$$

$$c^2 + 4c + 3 = (c + 2)(c + 1)$$

Mặt khác lại thấy:

$$\frac{1}{c^2+5c+6} = \frac{1}{(c+2)(c+3)} = \frac{1}{c+2} - \frac{1}{c+3}$$

$$\frac{1}{c^2+3c}+1 = \frac{1}{(c+1)(c+2)} = \frac{1}{c+1} - \frac{1}{c+2}$$

$$\frac{2c}{c^2+4c+3} = \frac{2c}{(c+3)(c+1)} = \frac{1}{c+3} - \frac{1}{c+2}$$

Do đó

$$C = \left[\frac{1}{(c+2)(c+3)} + \frac{1}{(c+1)(c+2)} + \frac{2c}{(c+3)(c+1)}\right]^2 . \frac{c^2 - 6c + 9 + 12c}{4}$$

$$= \left(\frac{1}{c+2} - \frac{1}{c+3} + \frac{1}{c+1} + \frac{3}{c+3} - \frac{1}{c+1}\right)^2 . \frac{c^2 + 6c + 9}{4}$$

$$= \left(\frac{2}{c+3}\right)^2 . \frac{(c+3)^2}{4} = \frac{4}{(c+3)^2} . \frac{(c+3)^2}{4} = 1$$, không phụ thuộc vào c.

Ví dụ 5.

Cho ba số m, n, p sao cho $m^2 + n^2 + p^2 = 2$. Chứng minh:

$|m + n + p - mnp| \le 2$.

• Ta có: $2 = m^2 + n^2 + p^2 \ge m^2 + 2np \ge 2np$, suy ra $np \le 1$.

Do đó:

$(m + n + p - mnp)^2 = (m(1 - np) + (n + p)^2] \le [m^2 + (m + p)^2] [1 + (1 - np)^2]$

$= 2(1 + np)[1 + (1 - np)^2] = 2(1 + np) + 2(1 + np)(1 - np)^2$

$= 2(1 + np) + 2(1 - n^2p^2)(1 - np)$

$= 4 - 2n^2p^2(1 - np) \le 4$

Suy ra bất đẳng thức phải chứng minh

$$|m + n + p - mnp| \le 2$$

Dấu = xảy ra kvck trong ba số m, n, p có một số bằng 0, hai số còn lại bằng nhau và bằng ±1.

§8. VẬN DỤNG SÁNG TẠO CÁC PHƯƠNG PHÁP TOÁN HỌC TRONG ĐẠI SỐ VÀ TRONG HÌNH HỌC

A. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP KHÔNG HOÀN TOÀN

Bắt đầu xét một số trường hợp đặt biệt sau đó chuyển sang trường hợp tổng quát.

Ví dụ 1. Có n điểm. Nếu nối từng đôi một thì được bao nhiêu đường thẳng biết rằng bất kì 3 điểm nào của những đường thẳng đó đều không thẳng hàng.

Ở đây $n \geq 2$, khi $n = 2$ chỉ có 1 đường thẳng. Nếu có một điểm thứ ba thì nối nó với hai điểm đầu sẽ có thêm 2 đường thẳng nữa tức có cả thảy $1 + 2 = 3$.

Nếu có thêm điểm thứ tư thì nếu nó với ba điểm đầu sẽ có thêm 3 đường thẳng nữa, tức có cả thảy $1 + 2 + 3 = 6$, v.v...

Nếu có 5 điểm thì lý luận như trên số đường thẳng sẽ là $1 + 2 + 3 + 4$.

Nếu có n điểm thì số đường thẳng sẽ là

$$1 + 2 + 3 + ... + (n - 2) + (n - 1).$$

Tổng này bằng $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Ví dụ 2. Một đa giác lồi có thể có bao nhiêu góc nhọn?

Một tam giác có thể có 2 hoặc 3 góc nhọn.

Một tứ giác như: hình thang vuông có 1 góc nhọn (hình vuông không có góc nhọn), hình thang cân có 2 góc nhọn, tứ giác của một tứ giác bằng 4v.

Không có ngũ giác nào có 4 góc nhọn (các góc của ngũ giác là $(n - 2)2v = 6v$ nên góc thứ năm sẽ $> 2v$ (!).

Suy ra một đa giác lồi chỉ có thể có 0, 1, 2, 3 góc nhọn. (Có thể chứng minh như sau:

S_1 = tổng k góc nhọn < k góc vuông

S_2 = tổng các góc còn lại $< 20\ (n - k)$

$S_1 + S_2 < 2v(n - k)kv$, nhưng $S_1 + S_2 = 2v(n - 2)$. Suy ra $[2(n - k) + k]v > 2v(n - 2)$. Rút gọn được $k < 4$)

B. PHƯƠNG PHÁP SUY DIỄN

1. Phương pháp quy nạp toán học

Chứng minh gồm 2 phần:

a) Nếu $n = 1$ điều ta chứng minh là đúng;

b) Nếu điều ta chứng minh mà đúng với $n = k$ (k tự nhiên bất kì) thì cũng đúng với $n = k + 1$.

Phương pháp này dựa trên nguyên lí quy nạp toán học, nguyên lý này là một tiền đề cơ bản của toán học:

"Nếu một điều nào mà đúng với $n = 1$ và nếu khi đã công nhận điều này đúng với một số tự nhiên $n = k$ mà ta lại chứng minh nó đúng với $n = k + 1$ thì ta đã chứng minh được định lí đó đúng với bất kì số tự nhiên nào".

Ta hãy kiểm tra lại ví dụ 1 ở trên.

a) Nếu có 2 điểm trên mặt phẳng thì điều ta nêu lên là đúng.

Do $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$ nên $S_2 = \frac{2(2-1)}{2} = 1$.

b) Nếu k điểm của mặt phẳng nối bằng $S_k = \frac{k(k-1)}{2}$ đường thẳng thì qua $k + 1$ điểm ta có thể được:

$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+1-1)}{2} = \frac{(k+1)k}{2}$ đường thẳng (k tự nhiên).

Thực tế, nếu ta lấy điểm thứ $k + 1$ trên mặt phẳng và nối điểm đó với k điểm đã có thì số đường thẳng được tăng lên k và sẽ là

$$S_{k+1} = \frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{(k+1)k}{2}.$$

Phương pháp này có lợi khi định lí phát biểu có chứa số tự nhiên n.

2. Phương pháp tổng hợp

Ví dụ.

Từ đỉnh C của góc vuông ACB kẻ đường vuông góc CD với cạnh huyền AB. Từ D hạ các đường vuông góc với hai cạnh góc vuông

DE = p, DK = n. Biết p và n hãy tính cạnh huyền.

Phương pháp này là: tìm các điều phải chứng minh bằng các đi từ các dữ kiện đã cho rồi chuyển qua các điều phải tìm.

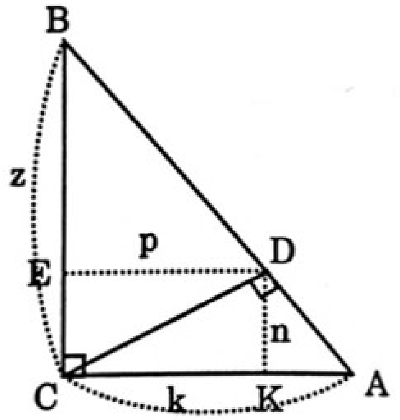
Nhận xét (hình 7):

dtΔABC = dtΔACD + dtΔCBD

Ta có: $yz = yn + zp \qquad (1)$

ΔADC ∽ ΔBCD nên $\dfrac{y}{n} = \dfrac{z}{p}$, suy ra:

$$y = \frac{zn}{p},\ z = \frac{yp}{n} \qquad (2)$$



Hình 7

Thay vào vế phải của (1) được:

$$yz = \frac{zn^2}{p} + zp \text{ và } yz = yn = \frac{yp^2}{n}. \text{ MSC: pn (với p, n > 0)}$$

Ta có: $y = \dfrac{n^2 + p^2}{p}$, $z = \dfrac{n^2 + p^2}{n}$. Theo định lí Py–ta–go $x^2 = y^2 + z^2$,

ta tìm được: $x^2 = \dfrac{(n^2 + p^2)^3}{n^2p^2}$, từ đó $x = \dfrac{(n^2 + p^2)^{3/2}}{np}$

(***Lưu ý:*** Nếu chứng minh bằng phương pháp tổng hợp này mà cho kết luận ngược lại với kết luận của định lí thì định lí đó sai.)

3. Phương pháp giải tích đi lên

Ví dụ:

Chứng minh rằng tích các đoạn vuông góc kẻ từ một điểm M trên đường tròn xuống hai cạnh đối của một tứ giác nội tiếp ABCD bằng tích các đoạn vuông góc kẻ từ điểm ấy xuống hai cạnh kia của tứ giác.

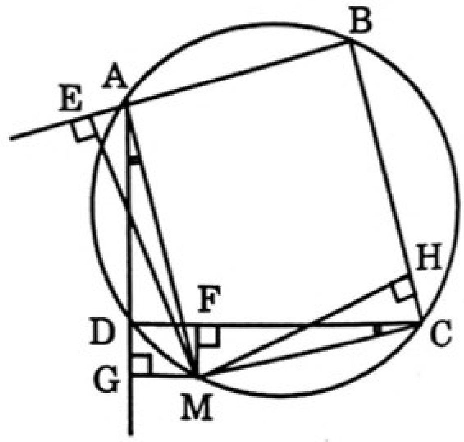
Giải

Cho tứ giác ABCD nội tiếp và điểm M trên đường tròn ngoại tiếp (hình 8).

Ta phải chứng minh rằng:

ME.MF = MG.MH

Muốn thế phải chứng minh:



Hình 8

$$\frac{MF}{MG} = \frac{MH}{ME}\left(= \frac{MC}{MA}\right),$$

tức là chứng minh $\Delta MFC \backsim \Delta MFA$.

Hai tam giác này đã vuông nên chỉ cần chứng minh chúng có một góc nhọn bằng nhau $\widehat{MCF} = \widehat{MAG}$ (vì cùng chắn cung DM).

Ta viết lại sơ đồ lí luận để thấy rõ phép giải tích đi lên được vận dụng thế nào.

$$ME.MF = MG.MH \leftarrow ... \leftarrow \Delta MFC \backsim \Delta MGA.$$

Phương pháp này có giá trị lớn mà ta có thể tóm tắt trong hai câu hỏi:

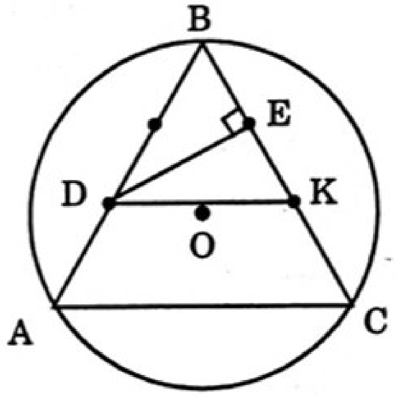
a) Phải chứng minh gì?

b) Muốn thế cần chứng minh gì?

4. Phương pháp giải tích đi xuống

Ví dụ.

Cho tam giác ABC đều nội tiếp, trên AB lấy đoạn $AD = \frac{1}{3}AB$, trên BC lấy đoạn $BE = \frac{1}{3}BC$. Chứng minh $DE = \frac{2}{3}$ bán kính đường tròn ngoại tiếp R.



Hình 9

Giả sử $DE = \frac{2}{3}R$ là đúng (*). Kẻ DK // AC (hình 9), ta có ΔBDK đều nên cạnh của nó bằng $AB - AD = AB - \frac{1}{3}AB = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$.

Theo giả thiết $BE = \frac{1}{3}BC$, như thế DE là trung tuyến và là đường cao của ΔDBK. Xét tam giác DBE vuông ta có:

$$DE = BE.\tan 60^0 = \frac{1}{3}R\sqrt{3}.\sqrt{3} = R.$$

Thay vào(*) được:

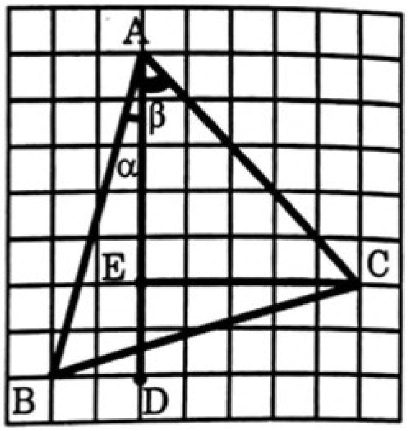
$$DE = \frac{2}{3}R = R. \text{ Suy ra } \frac{2}{3} = 1 \text{ (!) (Lẽ ra DE = R).}$$

5. Phương pháp phản chứng

Ví dụ.

Chứng minh rằng nếu ta nối các giao điểm của những đường kẻ ô vuông trong một trang giấy thì ta không thể có một tam giác đều.

Giả sử ta được ΔABC đều ở giao điểm các đường kẻ ô vuông (hình 10).



Hình 10

$\widehat{A} = 60^0$ coi là $\alpha + \beta$. Ta có:

$\tan\alpha = \dfrac{BD}{AD}$, $\tan\beta = \dfrac{CE}{AE}$, cả hai giá trị tang đều là số hữu tỉ vì các đoạn thẳng BD, AD, CE, AE đều bằng số tự nhiên. Do đó $\tan 60^0 = \tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ sẽ là số hữu tỉ.

Điều này vô lí! vì $\tan 60^0 = \sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Vậy tam giác ABC không thể đều.

6. Phương pháp đại số

a) Giải lại bài toán của phương pháp tổng hợp.

Gọi cạnh huyền là x ta có $x^2 + y^2 + z^2$ (y và z là cạnh góc vuông) (*)

Dùng công thức $b^2 = ab'$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) ta tìm y và z như sau:

$CD^2 = yp$, $CD^2 = zn$ (tam giác vuông ACD và CBD). Suy ra:

$y = \dfrac{p^2 + n^2}{p}$, $z = \dfrac{p^2 + n^2}{n}$, thay vào (*) ta được $x = \dfrac{(p^2 + n^2)^{3/2}}{pn}$

Giải bằng phương pháp này rõ hơn và chắc chắn hơn.

b) Ví dụ khác.

Cho nửa đường tròn (O, R). Trên đường kính vẽ hai nửa đường tròn bằng nhau và tiếp xúc với nửa đường tròn đã cho. Dựng đường tròn tiếp xúc với cả ba nửa đường tròn này.

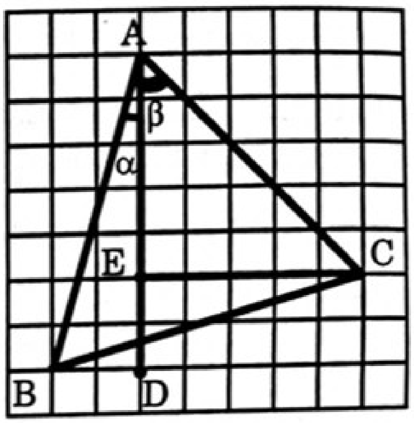
Giả sử đó là đường tròn (O_3, x). Vị trí tâm O_3 là giao điểm hai đường nối tâm O_1O_3 và OO_3 (hình 11).

5. Phương pháp phản chứng

Ví dụ.

Chứng minh rằng nếu ta nối các giao điểm của những đường kẻ ô vuông trong một trang giấy thì ta không thể có một tam giác đều.

Giả sử ta được ΔABC đều ở giao điểm các đường kẻ ô vuông (hình 10).



Hình 10

$\widehat{A} = 60^0$ coi là $\alpha + \beta$. Ta có:

$\tan\alpha = \dfrac{BD}{AD}$, $\tan\beta = \dfrac{CE}{AE}$, cả hai giá trị tang đều là số hữu tỉ vì các đoạn thẳng BD, AD, CE, AE đều bằng số tự nhiên. Do đó $\tan 60^0 = \tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ sẽ là số hữu tỉ.

Điều này vô lí! vì $\tan 60^0 = \sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Vậy tam giác ABC không thể đều.

6. Phương pháp đại số

a) Giải lại bài toán của phương pháp tổng hợp.

Gọi cạnh huyền là x ta có $x^2 + y^2 + z^2$ (y và z là cạnh góc vuông) (*)

Dùng công thức $b^2 = ab'$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) ta tìm y và z như sau:

$CD^2 = yp$, $CD^2 = zn$ (tam giác vuông ACD và CBD). Suy ra:

$y = \dfrac{p^2 + n^2}{p}$, $z = \dfrac{p^2 + n^2}{n}$, thay vào (*) ta được $x = \dfrac{(p^2 + n^2)^{3/2}}{pn}$

Giải bằng phương pháp này rõ hơn và chắc chắn hơn.

b) Ví dụ khác.

Cho nửa đường tròn (O, R). Trên đường kính vẽ hai nửa đường tròn bằng nhau và tiếp xúc với nửa đường tròn đã cho. Dựng đường tròn tiếp xúc với cả ba nửa đường tròn này.

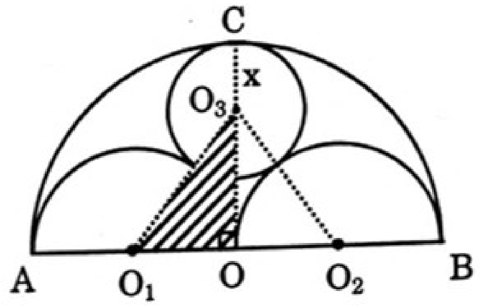
Giả sử đó là đường tròn (O_3, x). Vị trí tâm O_3 là giao điểm hai đường nối tâm O_1O_3 và OO_3 (hình 11).

$\Delta O_1O_2O_3$ cân nên OO_3 là đường cao. Suy ra ΔO_1OO_3 vuông với

$$O_1O = \frac{R}{2} + x,\ OO_3 = R - x.$$

Vậy $\left(\left(\frac{R}{2} + x\right)^2\right) = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - x)^2$.

Giải ra được $x = \frac{R}{3}$. Từ đó thấy ngay cách dựng:



Hình 11

– Dựng $OC \perp AB$, dựng đường tròn bán kính $\frac{R}{3}$ được giao điểm O_3 ta có đường tròn $(O_3, \frac{R}{3})$ là đường trò·· phải dựng.

7. Phương pháp chuyển động từ cả hai đầu (tức là cả phân tích lẫn tổng hợp).

Ví dụ

Trong một tam giác nếu từ đỉnh của góc xen giữa hai cạnh không bằng nhau ta kẻ phân giác và trung tuyến thì phân giác ngắn hơn trung tuyến.

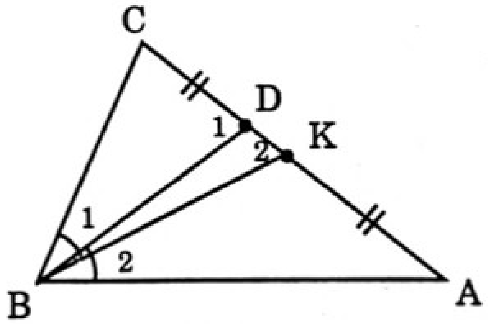
a) Ta giải bài toán bằng cách biến đổi kết luận (hình 12)

Phải chứng minh BK > BD (cả hai đoạn thuộc ΔKBD) nên chỉ cần chứng minh.

$$\widehat{BDK} > \widehat{BKD} \ (\bullet)$$

b) Bây giờ ta biến đổi giả thiết

Vì AB > BC nên $\widehat{C} > \widehat{A}$, BD là phân giác nên $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$. Vậy trong hai tam giác ABD và DBC thì góc còn lại $\widehat{D}_1 < \widehat{D}_2$. Do chúng kề bù nhau nên $\widehat{D}_2 > 90^0$.



Hình 12

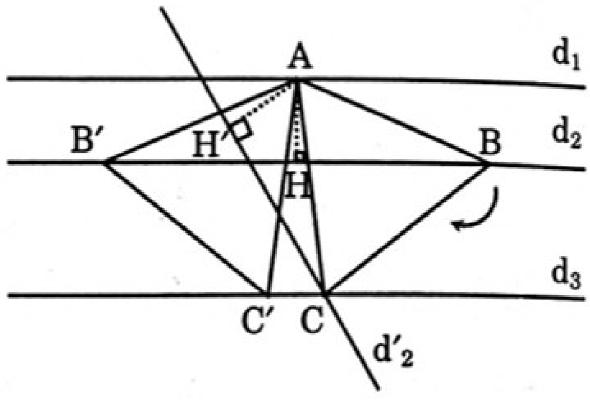
Trở lại kết luận. Do $\widehat{D}_2 > 90^0$ nên các góc khác của ΔBKD đều nhọn và góc tù $\widehat{BDK}$ > góc nhọn $\widehat{BKD}$. Vậy (•) đã được chứng minh.

8. Phương pháp quay

Ví dụ.

Dựng tam giác đều mà ba đỉnh nằm trên ba đường thẳng song song cho trước.

Giả sử bài toán đã giải được và ta dựng được ΔABC (hình 13).



Hình 13

Ta quay d_1 xung quanh A một góc 60^0 như sau:

$AH \perp d_1$, $\widehat{HAH'} = 60$, kẻ $d'_2 \perp AH'$. Điểm B đã dời chỗ đến C mà vị trí được xác định rõ vì C là giao của d_2 và d'_2. Ta có AC là cạnh phải dựng.

Suy ra cách dựng sau:

Lấy điểm A trên d_1, quay d_2 xung quanh A một góc 60^0.

Được d'_2. Ta được giao điểm của d_3 và d'_2 là đỉnh C (đỉnh thứ hai). Chỉ còn phải dựng đỉnh B là được ΔABC đều.

Do có thể quay d_2 theo hai chiều khác nhau nên bài toán có 2 nghiệm hình.

9. Phương pháp đồng dạng

Đây là phép biến đổi các điểm trong mặt phẳng sao cho mỗi điểm M ứng với một điểm M′ theo 2 điều kiện:

a) M là M′ nằm trên một đường thẳng cùng với tâm đồng dạng O;

b) Tỉ số $\dfrac{OM'}{OM} = k\ (k \neq 0)$.

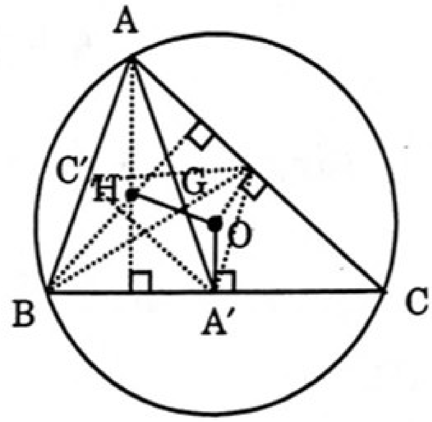
Ví dụ: Chứng minh trong ΔABC trọng tâm G, tâm O đường tròn ngoại tiếp và trực tâm h nằm trên một đường thẳng (gọi là đường thẳng Ơ–le) và tỉ số $\dfrac{HG}{GD} = 2$.

Ta cần chứng minh là có phép biến đổi đồng dạng tâm G, tỉ số $\dfrac{1}{2}$, chuyển G tới O. Do H là trực tâm nên chỉ cần chứng minh (hình 14):

a) Có phép biến đổi ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với n_1;

b) Mà O là trực tâm.

Rõ ràng $\Delta A'B'C'$ mà đỉnh là trung điểm các cạnh của ΔABC nên hai tam giác này đồng dạng tâm G với tỉ số $\frac{1}{2}$.



Hình 14

Ta chứng minh thêm phép đồng dạng này biến đổi điểm H thành điểm O. Thật thế, chỉ cần chứng minh các trung trực của ΔABC (mà giao điểm là O) là đường cao của A'B'C' tức là vuông góc với các cạnh của $\Delta A'B'C'$ (theo định lí về đường vuông góc với một trong hai đường thẳng song song).

10. Phương pháp quỹ tích

Ví dụ.

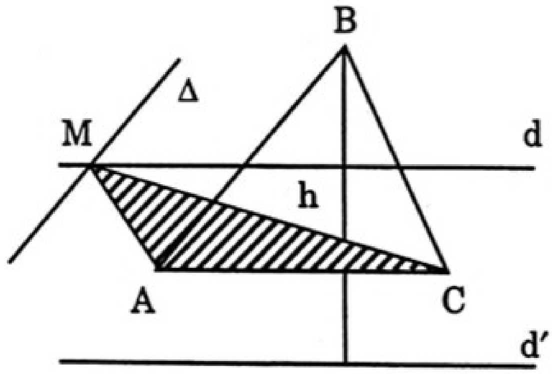
Tìm trên đường thẳng Δ một điểm M sao cho khi nối M với hai đỉnh của tam giác ABC cho trước sẽ được tam giác MAC có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích tam giác ABC.

Giả sử M là điểm phải dựng và dtMAC = $\frac{1}{2}$ dtABC (hình 15).

Ta có:

$$\begin{cases} M \text{ thuộc } \Delta \\ M \text{ thuộc } d \text{ và } d' \parallel AC \end{cases}$$

và cách AC một khoảng bằng $\frac{1}{2}h_b$.



Hình 15

Nếu d cắt Δ thì d' cắt Δ: 2 nghiệm hình.

Nếu d // Δ thì d' // Δ: vô nghiệm.

nếu d $\equiv \Delta$ thì d' // Δ: vô nghiệm.

§9. PHƯƠNG PHÉP TỔNG HỢP VÀ PHÂN TÍCH

1. Phép tổng hợp và phép phân tích

a) Xét bài toán

Chứng minh $\sqrt{p} - \sqrt{p-1} < \sqrt{p-2} - \sqrt{p-3}$ (với $p \geq 3$).

Cách 1.

Hai vế của bất đẳng thức đều là hiệu của hai căn bậc hai nên có thể biến đổi chúng thành hai phân thức thích hợp:

$$\sqrt{p} - \sqrt{p-1} = \frac{1}{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}},\ \sqrt{p-2} - \sqrt{p-3} = \frac{1}{\sqrt{p-2} + \sqrt{p-3}}$$

Như thế tử đều là 1, còn mẫu là tổng hai căn bậc hai.

Do $p > p - 1 > p - 2 > p - 3$, nên ta có ngay:

$$\sqrt{p} + \sqrt{p-1} > \sqrt{p-2} + \sqrt{p-3}$$

Cách 2.

Muốn cho $\sqrt{p} - \sqrt{p-1} < \sqrt{p-1=2} - \sqrt{p-3}$ thì ta chỉ cần chứng minh:

$$\sqrt{p} + \sqrt{p-3} < \sqrt{p-1} + \sqrt{p-2}, \text{ hay}$$

$$(\sqrt{p} + \sqrt{p-3})^2 < (\sqrt{p-1} + \sqrt{p-2})^2;$$

$$2p - 3 + 2\sqrt{p(p-3)} < 2p - 3 + \sqrt{(p-1)(p-2)};$$

$$\sqrt{p(p-3)} < \sqrt{(p-1)(p-2)};$$

$p(p - 3) < (p - 1)(p - 2)$ hay $p^2 - 3p < p^2 - 3p + 2$, tức là $0 < 2$.

Điều này đúng. Vậy $\sqrt{p} - \sqrt{p-1} < \sqrt{p-2} - \sqrt{p-3}$.

b) Ví dụ khác.

Cho $|m| < 1$, $|n| < 1$, chứng minh $\left|\frac{m+n}{1+mn}\right| < 1$.

Giải

Giả sử $\left|\frac{m+n}{1+mn}\right| < 1$ là đúng. Vì hai vế đều không âm nên bình phương hai vế được: $\frac{(m+n)^2}{(1+mn)^2} < 1$, do đó chỉ cần chứng minh $(m + n)^2 < (1 + mn)^2$ hay $m^2 + 2mn + n^2 < 1 + 2mn + m^2n^2$, hay $m^2 + n^2 < 1 + m^2n^2$, hay $m^2 + n^2 < 1 + m^2n^2 < 1 + n^2$ (*) tức là chỉ cần chứng minh $m^2 < 1$ nên $|m| < 1$.

Mà ta đã biết $m < 1$ nên ta có bất đẳng thức $\left|\frac{m+n}{1+mn}\right| < 1$.

Chứng minh như thế này là sai! Vì sai ở chỗ bất đẳng thức (*), do từ $m^2 + n^2 < 1 + n^2$ không thể suy ra $m^2 + n^2 < 1 + m^2n^2 < 1 + n^2$ không phải là điều kiện đủ để $m^2 + n^2 < 1 + m^2n^2$ mà chỉ là điều kiện cần của $m^2 + n^2 < 1 + m^2n^2$.

Vì vậy, cách chứng minh đúng phải như sau:

Muốn $\left|\frac{m+n}{1+mn}\right| < 1$ thì chỉ cần chứng minh $|m + n| < |1 + mn|$, $m^2 + 2mn + n^2 < 1 + 2mn + m^2n^2$, hay $m^2 + n^2 - 1 - m^2n^2 < 0$; $(m^2 - 1)(1 - m^2) < 0$; hay $m^2 < 1$ và $n^2 < 1$ hoặc $m^2 > 1$ và $n^2 > 1$. Từ đó: $|m| < 1$ và $|n| < 1$, hoặc $|m| > 1$ và $|n| > 1$.

Mà ta đã biết $|m| < 1$ và $|n| < 1$ nên ta có bất đẳng thức đã cho.

Chú ý: Với bài toán:

"Cho m và n là hai chữ số thực dương với $m \neq n$, hãy chứng minh: $m^3 + n^3 > m^2n + mn^2$".

Thì cách giải phải kết hợp phân tích với tổng hợp như sau:

Trước hết ta phân tích $(m^3 + n^3) = (m + n)(m^2 - mn + n^2)$ và $m^2n + mn^2 = mn(m + n)$. Muốn cho $m^3 + n^3 > m^2n + mn^2$ thì chỉ cần chứng minh $m^2 - mn + n^2 > mn$, hay $(m - n)^2 > 0$ (với $m \neq n$).

Từ đó ta có cách chứng minh tổng hợp sau:

Do m và n là hai số thực dương ($m \neq n$) nên ta có $m + n > 0$ và $(m - n)^2 > 0$.

Ta biết rằng $m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2) =$

$$= (m + n)[(m - n)^2 + mn]$$

$$= (m + n)(m - n)^2 + (m + n)(mn)$$

$$> (m + n)mn = m^2n + mn^2.$$

2. Liên tưởng đến những vấn đề cũ từng giải quyết

Ví dụ 1

Cho $z < -2$, hãy tính giá trị của biểu thức $\left|1 - |1 + z|\right|$. Ở đây có vấn đề mới là giá trị số tuyệt đối của số tuyệt đối, vậy phải bắt đầu từ đâu?

Với hai lần giá trị tuyệt đối ta hãy chuyển thành một lần là đầu tiên không xét dấu giá trị tuyệt đối bên ngoài mà hãy xét $1 + |1 + z|$.

Ta có $z < -2$ nên $z + 2 < 0$, do đó $z + 1 < -1 < 0$.

Do đó $\left|1 - |1 + z|\right| = |1 - (-1 - z)| = |2 + z| = -2 - z$.

Ví dụ 2

Tính giá trị của tổng $\sqrt[3]{10 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$.

Ta hãy nhớ lại cách giải loại bài tập trước đây, chẳng hạn tính $\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}}$. Ta đặt tổng này là t với $t > 0$.

Bình phương hai vế được:

$$t^2 = 16 - \sqrt{15}, \text{ từ đó } t = \sqrt{16 - \sqrt{15}}.$$

Vậy $\qquad \sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}} = \sqrt{16 - \sqrt{15}}$

Bây giờ ta liên hệ với cách giải này và đặt

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = t$$

Lập phương hai vế được (theo công thức

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b):$$

$$20 + 14\sqrt{2} + 20 - 14\sqrt{2}$$

$$+ 3\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.(\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}) = t^3$$

Sau khi rút gọn được: $t^3 - 6t - 40 = 0$, hay $(t - 4)(t^2 - 4t + 10) = 0$.

Vậy tổng $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$

3. Từ phức tạp lùi về đơn giản

a) Xét ví dụ sau:

"Cho a, b, c là ba số thực khác nhau và $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$. Chứng minh $a^2b^2c^2 = 1$".

Ta hãy tạm bỏ c đi để chỉ còn hai ẩn a và b, tức là

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{a} \text{ và chứng minh } a^2b^2 = 1.$$

Từ điều kiện $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{a}$ ta có: $a - b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ (*),

hay $ab(a - b) = b - a$. Do $a \neq b$ nên $ab = -1$ hay $a^2b^2 = 1$.

Như thế là ta đã biến một vế là hiệu hai ẩn còn vế kia là hiệu hai nghịch đảo (*). Bắt chước cách giải này ta có:

$$\begin{cases} a - n = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \\ b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \\ c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc(a - b) = b - c \\ ca(b - c) = c - a \\ ab(c - a) = a - b \end{cases}$$

Nhân mỗi vế của ba đẳng thức với nhau được:

$a^2b^2c^2(a - b)(b - c)(c - a) = (b - c)(c - a)(a - b)$

Vì a, b, c khác nhau nên $a - b \neq 0$, $b - c \neq 0$, $c - a \neq 0$, do đó ta có ngay $a^2b^2c^2 = 1$.

Rõ ràng cách chứng minh thật đẹp!

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = ||x-1| - x|$

Cách giải như sau:

Với $x - 1 \geq 0$ ta có $|x - 1| = x - 1$, khi đó $y = |x - 1 - x| = 1$.

Với $x - 1 < 0$ ta có $|x - 1| = 1 - x$, khi đó $y = |1 - x - x| = |1 - 2x|$.

Ta xét thêm:

$$1 - 2x \geq 0 \text{ hay } x \leq \frac{1}{2} \text{ thì } y = 1 - 2x.$$

$$1 - 2x < 0 \text{ hay } x > \frac{1}{2} \text{ thì } y = n - 1.$$

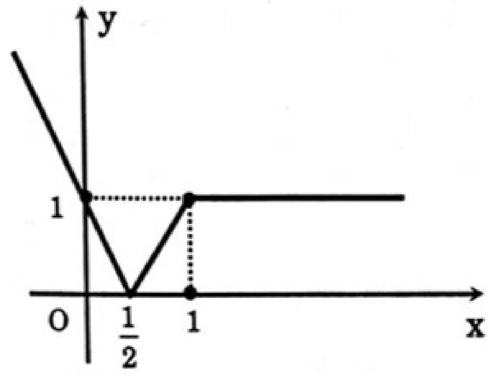
Như thế, ta được hàm số như sau:

$y = 1$ với $x \geq 1$;

$y = 2x - 1$ với $\frac{1}{2} < x < 1$

$y = 1 - 2x$ với $x \leq \frac{1}{2}$.

Đồ thị hàm số như ở hình 16.



Hình 16

c) Xét một số ví dụ phức tạp sau:

Rút gọn phân thức

A =

$$\frac{x(y+z-x)^2 + y(z+x-y)^2 = z(x+y-z)^2 = (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}{x^2(y+z-x) + y^2(z+x-y) + z^2(x+y-z) - (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}$$

Gọi tử là B và mẫu là C, như thế A có dạng $\frac{B}{C}$.

Ta nhận thấy rằng nếu cho $x = 0$ thì $B = 0$. Thật thế khi đó:

$$b = 0 + y(z-y)^2 + z(y-z)^2 + (y-z)(y+z)(z-y) =$$

$$= (y-z)^2(y+z) - (y-z)^2(y+z) = 0$$

Do x, y, z có vai trò như nhau trong B nên rõ ràng $B = 0$ khi $y = 0$ hoăc $z = 0$. Như thế ta có thể viết $B = mxz$.

Ngoài ra để ý rằng, do B không có số hạng bậc cao hơn 3 nên m không thể chứa x, hoặc y, hoặc z. Để tìm được m ta có thể cho $x = y = z = 1$, thế thì $m = 4$, tức là $B = 4xyz$.

Tương tự đối với mẫu C ta có $C = nxyz$ và tìm được hệ số $n = 2$, tức là $C = 2xyz$.

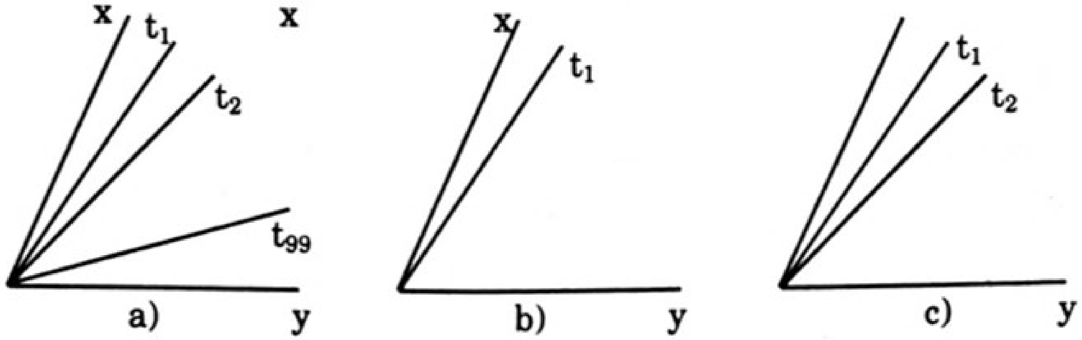
Vậy phân thức A có thể rút gọn thành:

$$A = \frac{B}{C} = \frac{4xyz}{2xyz} = 2 \text{ (với } x, y, z \neq 0)$$

Rõ ràng ta có cách giải khá đẹp!

d) Xét thêm một ví dụ về hình học

Trong góc nhọn xOy có 99 đoạn thẳng (hình a). Hỏi chúng đã chia góc nhọn này thành bao nhiêu góc nhọn (bao gồm cả góc xOy).



Giải bài này nếu đếm từng góc thì rất phức tạp và dễ sai. Do đó tốt nhất là từ 99 đoạn thẳng ta lùi về chỉ còn một đoạn thẳng Ot_1 chẳng hạn (hình b). Ta quan sát trực tiếp thì đã thấy có ba góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{t_1Oy}$ tức là tổng $S_1 = 1 + 2 = 3$.

Lại tiếp tục quan sát khi trong góc có hai đoạn Ot_1 và Ot_2 (hình c). Ta thấy ngay có 6 góc: $\widehat{xOy}$, $\widehat{xOt_1}$, $\widehat{yOt_2}$, $\widehat{xOt_2}$, $\widehat{t_1Ot_2}$ và t_1Oy tức là tổng $S_2 = 1 + 2 + 6 = 6$.

Bây giờ thử so sánh số đoạn thẳng và số góc để tìm ra quy luật.

Ta thấy rằng số góc S bằng tổng các số tự nhiên bắt đầu từ 1. số hạng cuối của tổng bằng số đoạn thẳng trong góc cộng thêm 1.

Vậy $S_{99} = 1 + 2 + 3 + ... + 100 = \dfrac{100(100+1)}{2} = 5050$ (góc).

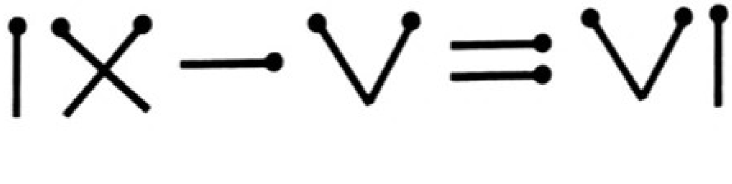
§10. ĐỪNG VỘI BẰNG LÒNG VỚI MỘT CÁCH GIẢI TOÁN MÀ TÌM THÊM NHỮNG CÁCH GIẢI KHÁC

I. 26 VÍ DỤ VỀ SỐ HỌC, ĐẠI SỐ, HÌNH HỌC

A. Bài toán số học

Ví dụ 1

Một bạn đã sắp xếp 11 que diêm như sau:



9 – 5 = 6 (!)

Đố bạn làm thế nào để chỉ chuyển chỗ 1 que diêm mà có cách sắp xếp đúng?

Ví dụ 2

Có bao nhiêu bộ gồm ba chữ số tự nhiên trong đó tích của hai chữ số bất kì cộng thêm 1 chia hết cho chữ số còn lại?

Ví dụ 3

Tìm số tự nhiên A thỏa mãn hai điều kiện:

a) A tận cùng bằng 6.

b) Khi chuyển chữ số 6 ở cuối lên đầu thì số A sẽ tăng lên gấp 4 lần.

Ví dụ 4

Bác Ba đi xe đạp từ M đến N với vận tốc 15 km/h. Sau đó 1 giờ 30 phút bác Tư đi xe đạp từ M với vận tốc 20 km/h và đến n trước bác Ba là 30 phút. Tính quãng đường MN.

Ví dụ 5

Cho tỉ lệ thức $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$. Chứng minh hệ thức $\frac{xz}{yt} = \frac{x^2 + z^2}{y^2 + t^2}$

Ví dụ 6

Cô Đào mang một số quả xoài ra chợ bán. Người đầu tiên mở hàng mua là bà A, bà mua $\frac{1}{2}$ số xoài và mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, bà B mua $\frac{1}{2}$ số còn lại và cũng mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, tiếp đó là ông C mua $\frac{1}{2}$ số còn lại và mua thêm $\frac{1}{2}$ quả, ông D mua $\frac{1}{2}$ số còn lại cũng mua thêm $\frac{1}{2}$ quả. Cuối cùng bà E mua $\frac{1}{2}$ số còn lại rồi mua thêm $\frac{1}{2}$ quả thì vừa hết số xoài.

Hỏi cô Đào đã mang bao nhiêu quả xoài đi chợ bán và mỗi khách đã mua mỗi người bao nhiêu quả xoài?

B. Bài toán đại số

Ví dụ 1

Chứng minh rằng nếu có hai chữ số mà tổng bằng 0 thì tích của chúng không thể là số dương.

Ví dụ 2

So sánh số $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$.

Ví dụ 3

Tìm tất cả các số x, y, z sao cho $xyz = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$

Ví dụ 4

Số ℕ sau đây tận cùng bằng chữ số nào?

$$N = 99999^{9999^{999^{99^{9}}}}$$

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\sqrt{x^2(x-1)} = |x|$

Ví dụ 6. Tính giá trị của tổng:

$$A = \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} = \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

Ví dụ 7

Tìm bốn số tự nhiên p, q, r, s sao cho tổng $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1$

Ví du 8. Phân tích ra thừa số: $t^5 + t^4 + 1$

Ví dụ 9

Rút gọn biểu thức: $P = \sqrt{p + \sqrt{2p-1}} - \sqrt{p - \sqrt{2p-1}}$

Ví dụ 10

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$Q = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ với a, b, c là số dương.

C. Bài toán hình học

Ví dụ 1.

Chứng minh hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC cân tại A có trung tuyến CM. Trên tia đối của tia BA lấy điểm P sao cho BP = BA. Chứng minh hệ thức PC = 2MC.

Ví dụ 3

Cho tam giác DEF, trên các cạnh DE và DF theo thứ tự lấy hai điểm M và N sao cho EM = FN. Gọi P là trung điểm của EF và Q là trung điểm của MN. Chứng minh rằng đường thẳng PQ tạo những góc bằng nhau với hai đường thẳng DE và DF.

Ví dụ 4

Cho tam giác MNP cân tại M. Lấy điểm D trên cạnh MN rồi kèo dài MP lấy điểm E sao cho ND = PE. Đoạn DE cắt NP tại F. Chứng minh F là trung điểm của DE.

Ví dụ 5

Cho tam giác cân ABC đỉnh A. Từ một điểm M trên đáy BC ta kẻ MP vuông góc vơi AB và MQ vuông góc với AC. Chứng minh rằng tổng MP + MQ không đổi khi M chạy trên BC.

Ví dụ 6

Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm A với OA = 2R. từ A kẻ hai tiếp tuyến AE và AF tới (O). Đường thẳng Ao cắt (O) tại B và C. Tứ giác AECF là hình gì? Tính diện tích của nó.

Ví dụ 7

Ba đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 có bán kính đều bằng R. Chúng cùng đi qua một điểm A và có các giao điểm thứ hai là B_1, B_2, B_3. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác $B_1B_2B_3$ cùng có bán kính bằng R.

Ví dụ 8

Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn bán kính R. Qua đỉnh C kẻ đường thẳng d bất kì cắt đường thẳng AB tại D và cắt đường trọn tại E. Tính tích CD.CE.

Ví dụ 9

Cho tam giác DEF có cạnh huyền EF = 2k. Tính giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác DKHI trong đó H là chân đường cao, I và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H tới hai cạnh góc vuông DE và DF.

Ví dụ 10. Không dùng bảng số hãy tính $\tan\frac{\pi}{12}$.

II. Cách giải

Ví dụ 1

Có 6 cách sắp xếp như sau:

Cách 1. IX – IV = V (9 – 4 = 5)

Cách 2. IX – V = IV (9 – 5 = 4)

Cách 3. X – IV = VI (10 – 4 = 6)

Cách 4. XI – V = VI (11 – 5 = 6)

Cách 5. X – V ≠ VI (10 – 5 ≠ 6)

Cách 6. IX – V ≠ V (9 – 5 ≠ 5)

Ví dụ 2

Cách 1.

Gọi ba chữ số đó là a, b, c, với điều kiện $a \geq b \geq c \geq 1$ (1)

Theo bài ra ta có:

$ab + 1$ chia hết cho c; $ac + 2$ chia hết cho b; $bc + 1$ chia hết cho a.

Do đó tích của chúng chia hết cho tích abc, hay

$(a^2b^2c^2 + a^2bc + b^2ac + c^2ab) + (ab + bc + ac + 1)$ chia hết cho abc.

Ta thấy rằng $\frac{ab+bc+ac+1}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = k$ nguyên dương.

Từ (1) ta có: $\frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a} \geq \frac{1}{abc}$. Khi thay mỗi một trong các phân số $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{abc}$ của tổng k bằng phân số $\frac{1}{c}$ ta được $k = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \leq \frac{1}{c}$ (2). Mặt khác k là tổng của 4 phân số trong đó mỗi phân số ≤ 1 nên $k \leq 4$, tức là $k = 1, 2, 3, 4$.

Ta xét từng trường hợp:

α) Nếu $k = 4$, do $a \geq b \geq c \geq 1$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = 4$, như thế mỗi phân số phải bằng 1, thừa $a = b = c = 1$. Ta được bộ ba số (1, 1, 1).

β) Nếu $k = 3$ thì a, b, c không thể đồng thời bằng 1, do đó $\frac{1}{abc} < \frac{1}{c}$.

Từ (2) ta có $k < \frac{4}{c}$ hay $3 < \frac{4}{c}$, suy ra $c = 1$.

Khi đó $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=2<\frac{3}{b}$ (cho $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$) nên b = 1.

Vậy $\frac{1}{a}+1+\frac{1}{a}=2$ hay a = 2.

Ta được bộ (2, 1, 1).

γ) Nếu k = 2 thì $2<\frac{4}{c}$ nên c = 1, khi đó $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=1<$

Suy ra b < 3 tức là b = 1 hoặc 2. Khi b = 1 thì $\frac{1}{a}+4+\frac{1}{a}=1$

Vô lí! Khi b = 2 thì $\frac{1}{a}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}=1$ hay a = 3.

Ta được bộ (3, 2, 1).

δ) Nếu k = 1 thì $1<\frac{4}{c}$ hay c < 4 nên c = 1, 2, 3. Với c = 1, 3 thì sẽ dẫn đến điều mâu thuẫn! Với c = 2 thì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\frac{1}{ab}=1$ dẫn tới (a – 2)(b – 2) = 5. Nhưng a – 2 > b – 2 nên chỉ có thể là a – 2 = 5 và b – 2 = 1. Từ đó a = 7, b = 3.

Ta được bộ(7, 3, 1).

Tóm lại, có 4 bộ ba chữ số thỏa mãn đầu bài là:

$$(a, b, c) = (1, 1, 1) = (2, 1, 1) = (3, 2, 1) = (7, 3, 2).$$

Cách 2.

Ta lần lượt xét các trường hợp sau:

α) Nếu a = b = c thì theo bài ra ab + 1 chia hết cho c nên cb + 1 chia hết cho c, suy ra c = 1. Ta được bộ (1, 1, 1).

β) Nếu a > b = c thì theo đầu bài ra ac + 1 chia hết cho b và cũng chia hết cho c (vì b = c), suy ra c = 1, b = 1.

Cũng theo bài ra bc + 1 chia hết cho a hay 1.1 + 1 = 2 chia hết cho a. Kết hợp với a > b = c = 1 ta có a = 2.

Ta được bộ (2, 1, 1).

γ) Nếu a > b > c, theo bài ra ta có tích (ab + 1)(ac + 1)(bc + 1) chia hết cho abc, hay abc ≤ ab + bc + ac + 1. Trong trường hợp này ta có thể viết abc < 3ab, suy ra c < 3 hay c = 1, 2.

- Khi $c = 1$ thì theo bài ra $a + 1$ chia hết cho b, $b + 1$ chia hết cho a, suy ra $a \le b + 1$. Mặt khác $b < a$ nên $b < a \le b + 1$, từ đó $a = b + 1$. Thay vào $a + 1$ ta có $b + 2$ chia hết cho b nên $b = 1,2$. Nhưng $c = 1$ nên $b = 2$ và $a = b + 1 = 3$.

  Ta được bộ (3, 1, 1).

- Khi $c = 2$, lý luận tương tự như trên ta tìm được $b = 3$, $c = 2$, $a = 7$. Vậy được thêm bộ (7, 3, 2).

Ví dụ 3

Cách 1. Ta viết A dưới dạng sau:

$$A = a_1a_2a_3 \ldots a_{k-1}a_k6.$$

Thế thì $\quad 4A = 6a_1a_2a_3 \ldots a_{k-1}a_k$ (theo bài ra).

Để xác định các chữ số của số A ta nhân A với 4 ($6.4 = 24$).

Từ đó được: $\quad a_k = 4$, $4a_k + 2 = 4.4 + 2 = 18$;

$a_{k-1} = 8$,

$4a_{k-1} + 1 = 4.8 + 1 = 33$;

$a_{k-2} = 3$, $4a_{k-2} + 3 = 4.3 + 3 = 15$;

$a_{k-3} = 5$, $4a_{k-3} + 1 = 4.5 + 1 = 21$;

$a_{k-4} = 1$, $4a_{k-4} + 2 = 4.1 + 2 = 6$;

$a_{k-5} = 0$

Quá trình tính toán này kết thúc vì ta đã có chữ số 6.

Như thế 4A = 615 384. Vậy A = 153 846.

Cách 2.

Theo bài ra ta có thể viết đẳng thức:

$$\frac{A-6}{10} + 6.10^k = 4A, \text{ hay } 39A = 6.10^{k+1} - 6$$

Từ đó $A = \dfrac{5999\ldots94}{39}$. Thực hiện phép chia này cho đến chữ số 9 cuối cùng thì được số dư 23, lúc đó 234 chia cho 39 sẽ cho chữ số 6 và ta được A = 153 846.

Ví dụ 4

Theo bài ra ta thấy thời gian đi quãng đường MN của bác Tư ít hơn bác Ba là 1h30ph + 30ph = 2 giờ.

Cách 1.

Giả sử bác Tư đi sau bác Ba 2 giờ thì hai người đến N cùng một lúc. Như thế trong 2 giờ đi trước bác Ba đã đi được 15.2 = 30 (km).

Thời gian để bác Tư đuổi kịp bác Ba là: 30 : (20 − 15) = 6 (giờ)

Vậy quãng đường MN dài: 20.6 = 120 (km).

Cách 2.

Giả sư bác Tư đi với thời gian như bác Ba thì bác Tư đi quãng đường nhiều hơn bác Ba là: 20.2 = 40 (km).

Do vận tốc của bác Tư hơn vận tốc bác Ba là 20 − 15 = 5 (km) nên thời gian bác Ba đi quãng đường MN hết: 40 : 5 = 8 (giờ).

Vậy quãng đường MN dài: 15.8 = 120 (km).

Cách 3.

Do Tùng đi một quãng đường MN thì vận tốc tỉ lệ nghịch với thời gian nên ta có thể viết:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \text{ nên } \frac{t_1}{t_2} = \frac{4}{3}.$$

Biết thêm hiệu $t_1 - t_2 = 2$, ta sẽ tìm được $t_1 = 8$, $t_2 = 6$.

Vậy quãng đường MN dài: 15.8 = 120 (km) hoặc 20.6 = 120 (km).

Ví dụ 5

Cách 1.

Đặt $\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = k$, ta có x = yk, z = tk. Như thế:

$$\frac{xz}{yt} = \frac{yk.tk}{yt} = k^2 \text{ (1). Mặt khác:}$$

$$\frac{x^2 + z^2}{y^2 + t^2} = \frac{(yk)^2 + (tk)^2}{y^2 + t^2} = \frac{k^2(y^2 + t^2)}{y^2 + t^2} = k^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ngay đẳng thức $\frac{xz}{yt} = \frac{x^2 + z^2}{y^2 + t^2}$

Cách 2.

Từ $\frac{x}{y} + \frac{z}{t}$, ta có $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{z}{t}\right)^2 = \frac{x}{y}.\frac{z}{t}$. Như thế:

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{z^2}{t^2}=\frac{xz}{yr} \qquad (1)$$

Nhưng $$\frac{x^2}{y^2}=\frac{z^2}{t^2}=\frac{x^2+z^2}{y^2+t^2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hệ thức cần chứng minh.

Cách 3.

Ta xét các tích sau:

$$xz(y^2+t^2)=zy^2z+xzt^2=xy.yz+x.zt \qquad (1)$$

$$yt(x^2+y^2)=x^2yt+yz^2t=xy.xt+yz.zt \qquad (2)$$

Do $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$ nên $xt=yz$, từ (1) và (2) ta suy ra:

$$xz(y^2+t^2)=yt(x^2+z^2)$$

Vậy ta có: $\frac{xz}{yt}=\frac{x^2+z^2}{y^2+t^2}$

Ví dụ 6

Cách 1.

Ta tính ngược từ cuối lên đầu.

- Lần cuối bán $\frac{1}{2}$ số xoài còn lại thì hết, nên $\frac{1}{2}$ quả xoài chính là $\frac{1}{2}$ số còn lại. Suy ra số còn lại sau lần bán thứ tư là $\frac{1}{2}.2=1$ (quả).

  Lần thứ tư bán $\frac{1}{2}$ số còn lại cộng $\frac{1}{2}$ quả thì còn 1 quả nên $1\frac{1}{2}$ chính là $\frac{1}{2}$ số còn lại. Suy ra số còn lại sau lần bán thứ ba là $1\frac{1}{2}.2=3$ (quả).

  Lần thứ ba bán $\frac{1}{2}$ số còn lại cộng $\frac{1}{2}$ quả thì còn 3 quả nên $3\frac{1}{2}$ chính là $\frac{1}{2}$ số còn lại. Suy ra số còn lại sau lần bán thứ hai là $3\frac{1}{2}.2=7$ (quả).

Lần thứ hai bán $\frac{1}{2}$ số còn lại cộng $\frac{1}{2}$ quả thì còn 7 quả nên $7\frac{1}{2}$ chính là $\frac{1}{2}$ số còn lại. Suy ra số còn lại sau lần bán thứ nhất là $7\frac{1}{2}.2 = 15$ (quả).

- Lần đầu bán $\frac{1}{2}$ số xoài mang đi cộng $\frac{1}{2}$ quả thì còn 15 quả nên $15\frac{1}{2}.2 = 31$ (quả).

Vậy bà A đã mua: $31 - 5 = 16$ (quả)

bà B đã mua: $15 - 7 = 8$ (quả)

ông C đã mua: $7 - 3 = 4$ (quả)

ông D đã mua: $3 - 1 = 2$ (quả)

bà E đã mua đúng 1 quả cuối cùng.

Cách 2.

Gọi số xoài mà cô Đào mang đi chợ bán là x.

Bà A đã mua $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ (quả) nên còn $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ (quả)

Bà B đã mua $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$ (quả).

Như thế số xoài bà B mua bằng $\frac{1}{2}$ số xoài bà A mua. Tương tự ta thấy rằng số xoài người mua bằng $\frac{1}{2}$ số xàoi người liền trước mua.

Đến lượt bà E mua $\frac{1}{2}$ số còn lại cộng $\frac{1}{2}$ quả thì hết, ông C mua 4 quả, bà B mua 8 quả và bà A mua 15 quả.

Thử lại: số xoài mà 5 người mua là:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 \text{ (quả)},$$

đúng bằng số xoài mà cô Đào mang đi chợ bán.

Bài toán đại số

Ví dụ 1

Cách 1.

Gọi hai số đã cho là m và n, ta có:

$m + n = 0$, suy ra $m = -n$. Từ đó $mn = -n^2 \le 0$, thành thử tích của chúng không thể là số dương.

Cách 2.

Giả sử tích hai số là số dương thì hai số đó phải cùng dấu, trái với bài ra là tổng hai số bằng 0!

Ví dụ 2

Cách 1.

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{16}\right)^{10} > \left(\frac{1}{32}\right)^{10} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\right]^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{50}$$

Cách 2.

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{16}\right)^{10} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\right]^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{40} > \left(\frac{1}{2}\right)^{50}$$

Ví dụ 3

Cách 1.

Đẳng thức đã cho có thể viết: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.

Biến đổi vế trái được:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{xy + z}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$$

Tích ở vế phải sẽ bằng 0 nếu mỗi thừa số bằng 0, tức là:

hoặc số $x + y + z = 0$, hoặc $x = y = z$.

Cách 2.

Xét tích: $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ (*)

Từ đó có ngay:

$$xyz = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$$

Từ (*) ta có: hoặc $x + y + z = 0$, hoặc $x = y = z$

Ví dụ 4

Cách 1.

Ta bắt đầu từ trên xuống, tức là bắt đầu tính số $n_1 = 99^9$, rồi đến $n_2 = 000^{n_1}$, tiếp đó $n_3 = 999^{n_2}$ và cuối cùng $N = 99999^{n_3}$.

Trước tiên ta nhận xét rằng số $n_3 = 9999^{999^{99^9}}$ là số lẻ. Vậy nó có dạng $2k + 1$ (k nguyên) nên $\mathbb{N}$ có thể viết;

$$N = 99\,999^{2k+1} = 11\,111^{2k+1}.9^{2k+1} = 11\,111^{2k+1}.81^k.9.$$

Nhưng $11\,111^{2k+1}$ tận cùng bằng chữ số 1 và số 81^k cũng tận cùng bằng 1.

Như thế tích của chúng cũng tận cùng bằng 1, do đó số $\mathbb{N}$ bằng tích này nhân với 9 sẽ tận cùng bằng 9.

Cách 2.

Tất cả số mũ của lũy thừa $n_1 = 9$, $n_2 = 99^{n_1}$, $n_3 = 999^{n_2}$, v.v... đều là số lẻ. Mà mọi lũy thừa của số 9 đều tận cùng bằng 9, do đó số $\mathbb{N}$ tận cùng bằng 9.

Ví dụ 5

Cách 1.

Điều kiện: $x^2(x - 1) \geq 0$, tức là $x = 0$ và $x \geq 1$.

Nếu $x = 0$ thì phương trình đã cho thỏa mãn, do đó số O là nghiệm của phương trình.

Nếu $x \geq 1$ thì $|x| = x$ và $\sqrt{x^2(x-1)} = x\sqrt{x-1}$. Phương trình đã cho có dạng $x\sqrt{x-1} = x$.

Trong điều kiện này ta có thể chia 2 vế của phương trình này cho x (vì $x \geq 1$) và ta được phương trình $\sqrt{x-1} = 1$ mà nghiệm là $x = 2$. Cả hai giá trị O và 2 đều thỏa mãn điều kiện đã nêu ở trên.

Cách 2.

Do giá trị tuyệt đối của một số là một số không âm nên phương trình đã cho tương đương với:

$$x^2(x - 1) = x^2, \text{ hay } x^2(x - 2) = 0, \text{ tương đương với } \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Cách 3.

Do $f(x) = g(x) \Rightarrow f^2(x) = g^2(x)$, nên phương trình đã cho tương đương với:

$$x^2(x-1) = x^2, \text{ hay } x^2(x-2) = 0 \text{ mà nghiệm là } \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Thử lại ta thấy rằng các giá trị $x = 0$ và $x = 2$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 6

Cách 1.

Quy đồng mẫu ta được:

$$A = \frac{bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} \ (*)$$

Thực hiện phép nhân ở mẫu ta có kết quả là:

$$a^2b - ab^2 + b^2c - a^2c + ac^2 - bc^2$$

đúng bằng biểu thức ở tử. Sau khi rút gọn được giá trị $A = \dfrac{1}{abc}$.

Cách 2.

Thay $a = b$ trong biểu thức (*) thì được tử bằng 0. Vậy theo định lí Bơ–du (•) nó chia hết cho $(a - b)$. Thực hiện phép chia ta được thương là:

$$a(b-c) - c(b-c) = (b-c)(a-c)$$

Như thế tử sẽ bằng $(a - b)(b - c)(a - c)$

(•) Định lí Bơ–du: Khi chia $f(x)$ cho nhị thức $(x - a)$ ta được số dư (đa thức dư) là một hằng số bằng giá trị $f(a)$ của $f(x)$ khi $x = a$.

Cách 3.

Ta chỉ quy đồng mẫu hai phân số đầu của biểu thức A, ta có:

$$\frac{b^2 - bc - a^2 + ac}{ab(a-b)(a-c)(b-c)}$$

Nhóm các số hạng của tử (số hạng thứ nhất với thứ ba, số hạng thứ hai với thứ tư) ta được:

$$(b+a)(b-a) - c(b-a) = (a-b)(c-a-b).$$

Chia trên dưới cho $(a - b)$ và thêm vào phân số thứ ba ta sẽ có kết quả là biểu thức đã cho.

Vậy đáp số là $A = \dfrac{1}{abc}$.

Ví dụ 7

a) Giả sử $p \le q \le r \le s$. Thế thì số nhỏ nhất $p \le 4$ (nếu không thì $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s} < 1$) và $p \ge 2$. Do đó ta phải xét ba trường hợp: $p = 2$, $p = 3$ và $p = 4$.

Nếu $p = 2$ thì $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{2}$. Lại thấy rằng $q > 6$ (nếu không thì $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{2}1$ ta thay lần lượt $q = 3, 4, 5, 6$. Xét tiếp r và s theo cách đánh giá p và q ở trên.

Lại xét hai trường hợp $p = 3$ và $p = 4$. Cuối cùng sẽ được 14 bộ bốn số (p, q, r, s) phân biệt sau đây:

(2, 3, 7, 42)	(2, 4, 5, 20)	(3, 3, 4, 12)
(2, 3, 8, 24)	(2, 4, 6, 12)	(3, 3, 6, 6)
(2, 3, 9, 18)	(2, 4, 8, 8)	(3, 4, 4, 6)
(2, 3, 10, 15)	(2, 5, 5, 10) và	(4, 4, 4, 4)
(2, 3, 12, 12)	(2, 6, 6, 6)	

b) ***Chú ý:***

Bài toán này liên quan đến câu chuyển cổ về "di chúc chia lạc đà" sau đây:

"Một ông già có ba người con trai. Khi mất ông đã để lại di chúc về việc chia 17 con lạc đà như sau: chia cho con cả $\frac{1}{2}$ số lạc đà, cho người con thứ hai $\frac{1}{3}$ và cho con út $\frac{1}{9}$ số lạc đà".

Rõ ràng nếu thực hiện đúng thì con cả được $\frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$ (lạc đà), người con thứ hai được $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$ (lạc đà) và con út được $\frac{17}{9} = 1\frac{8}{9}$ (lạc đà). Nhưng làm sao mà chia 1 con lạc đà thành $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{9}$ (?)

Nếu s chia hết cho p, q, r, s thì bài toán chia lạc đà có thể là trường hợp đặc biệt của đẳng thức sau:

$$\frac{s}{p}+\frac{s}{q}+\frac{s}{r}=s-1$$

(s là 18 lạc đà, còn s – 1 là 17 lạc đà).

Đẳng thức trên lại có thể viết dưới dạng:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$$

Ở đây s phải chia hết cho p, q, r, nên so với bài toán đã cho ở trên thì chỉ có 12 bộ số (p, q, r, s) phân biệt, chứ không phải là 14 bộ số, tức là phải loại đi 2 bộ là (2, 3, 10, 15) và (2, 4, 4, 6) vì = 15 không chia hết cho 10, còn s = 6 không chia hết cho 4.

Đối với câu chuyện cổ về "di chúc chia lạc đà" thì đó là bộ bốn số (2, 3, 9, 18) ta có:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=1$$

- Nhắc lại ở đây về cách giải bài toán di chúc này là có một nhà thông thái giúp ba người con chia 17 lạc đà như sau: sang người hàng xóm mượn 1 lạc đà để có cả thảy 18 lạc đà, thế thì con cả được 18 : 2 = 9 (lạc đà), người con thứ hai được 18 : 3 = 6 (lạc đà), con út được 19 : 9 = 2 (lạc đà). Cộng lại ba người con được:

  9 + 6 + 2 = 17 (lạc đà)

  Vậy phải dắt một lạc đà đã mượn trả lại cho người hàng xóm và cảm ơn họ.

Ví dụ 8

Cách 1.

Cộng và trừ $\pm t^2 \pm t$ vào biểu thức được:

$$t^5 + t^4 + 1 + t^2 \;\; t - t =$$
$$= t^2(t^3 - 1) + t(t^3 - 1) + (t^2 + t + 1)$$
$$= t^2(t - 1)(t^2 + t \;\; 1) + t(\,t - 1)(t^2 + t + 1) + (t^2 + t + 1)$$
$$= (t^2 + t + 1)[t^2(t - 1) + t(t - 1) + 1]$$
$$= (t^2 + t = 1)(t^3 - t + 1).$$

Cách 2.

Cộng và trừ $\pm t^3 \pm t^2 \pm t$ vào biểu thức được:

$$t^5 - t^4 + t^3 - t^3 - t + t^2 + t + 1 =$$
$$= t^3(t^2 + t + 1) - t(t^2 + t + 1) + (t^2 + t + 1)$$
$$= (t^2 + t + 1)(t^3 - t + 1)$$

Ví dụ 9

Cách 1.

Điều kiện: $2p - 1 \geq 0$ và $p \geq \sqrt{2p-1}$, tức là $p \geq t$.

Nhân P với $\sqrt{2}$ được

$$P\sqrt{2} = \sqrt{2p + 2\sqrt{p-1}} = \sqrt{2p - \sqrt{2p-1}}$$
$$= \sqrt{2p - 1 + 1 + 2\sqrt{p-1}} - \sqrt{2p - 1 + 1 - 2\sqrt{p-1}}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{2p-1} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2p-1} - 1)^2}$$
$$= \sqrt{2p-1} + 1 - \left|\sqrt{2p-1} - 1\right|$$

Nếu $p \geq 1$ thì $P\sqrt{2} = \sqrt{2p-1} + 1 = (\sqrt{2p-1} - 1) = 2$

Vậy $P = \sqrt{2}$

Cách 2.

Đặt $\sqrt{2p-1} = t \geq 0$ ta có $2p - 1 = t^2$

$$P = \frac{\sqrt{2p + 2\sqrt{2p-1}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2p - 2\sqrt{2p-1}}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{t^2 + 1} - 2t}{\sqrt{2}} = \frac{t+1}{\sqrt{2}} - \frac{|t-1|}{\sqrt{2}}$$

Nếu $t \geq 1$ (tức là $p \geq 1$) thì $p = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + 1 - t + 1) = \sqrt{2}$;

Nếu $0 \leq t < 1$ (tức là $\frac{1}{2} \leq p < 1$) thì

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + 1 + t - 1) = \frac{2t}{\sqrt{2}} = t\sqrt{2} = \sqrt{4p-2}$$

Cách 3.

Nhân P với P được:

$$P^2 = (p + \sqrt{2p-1}) + (p - \sqrt{2p-1}) - 2(\sqrt{p + \sqrt{2p-1}})(p - \sqrt{2p-1})$$
$$= 2p - 2\sqrt{p^2 - 2p + 1} = 2p - 2|p-1|$$

Nếu $p \geq 1$ thì $P^2 = 2$, do đó $P = \sqrt{2}$;

Nếu $\frac{1}{2} \leq p < 1$ thì $P^2 = 4p - 2$, do đó $P = \sqrt{4p-2}$.

Ví dụ 10

Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho ba số dương $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$ ta có:

$$Q = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}} = 3$$

Như thế giá trị nhỏ nhất của Q bằng 3 kvck $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, tức là $a = b = c$.

Cách 2.

Thêm và bớt $\frac{b}{a}$ vào Q được:

$$Q = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\right)$$

Do $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (với a, b dương) nên ta chỉ cần chứng minh.

$\frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} \geq 1$ (*) hay nhân hai vế với $ac > 0$:

$ab + c^2 - bc - ac \geq 0$; hay:

$b(a - c) - c(a - c) \geq 0$, tức là $(a - c)(b - c) \geq 0$ đúng với giả sử c là số nhỏ nhất, từ đó tìm được giá trị nhỏ nhất của P.

Cách 3.

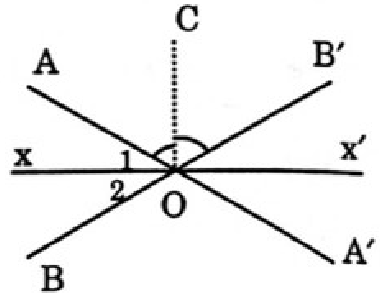
Cộng và trừ $\pm t^3$ vào biểu thức được:

$$\begin{aligned}
&t^5 + t^4 + t^3 - t^3 + 1 = \\
&= t^3(t^2 + t + 1) - (t^3 - 1) \\
&= t^3(t^2 + t + 1) - (t - 1)(t^2 + t + 1) \\
&= (t^2 + t + 1)(t^3 - t - 1)
\end{aligned}$$

Bài toán hình học

Ví dụ 1

Cho hai góc đối đỉnh là AOB và A′O′B′ (hình 18). Kẻ hai tia phân giác Ox và Ox′ của chúng, ta phải chứng minh rằng hai tia này đối nhau.



Hình 18

Cách 1.

Ta chứng minh $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_4$. Lại có $\widehat{O}_4 + \widehat{AOx'} = 180^0$, do đó:

$\widehat{O}_1 + \widehat{AOx'} = 180^0$ (lưu ý hai tia Ox và Ox′ nằm về hai phía của AA′).

Cách 2.

Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$ và $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$, tổng của 6 góc này bằng 360^0 nên $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 + \widehat{AOB'} = 180^0$.

Cách 3.

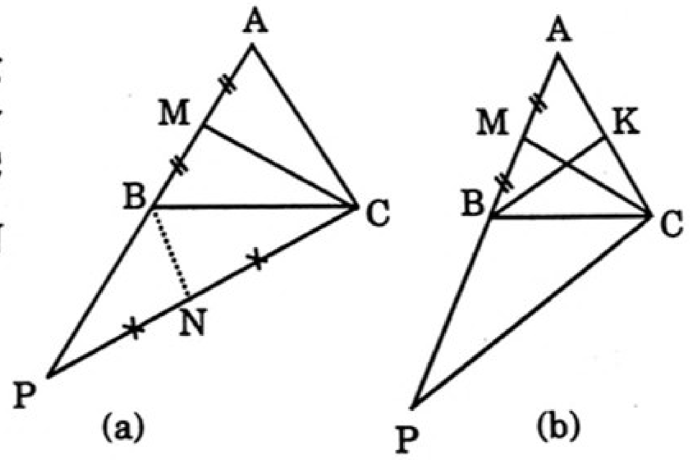
Vẽ thêm tia phân giác OC. Lưu ý hai tia Ox và Ox′ nằm về 2 phía của OC. Do OC và Ox′ là hai tia phân giác của hai góc kề bù nên $\widehat{COx'} = 90^0$. Tương tự $\widehat{COx} = 90^0$. Vậy hai tia Ox và Ox′ đối nhau.

Ví dụ 2

Cách 1. (hình 19a)

Ta tạo ra một đoạn thẳng bằng nửa Cp bằng cách lấy N là trung điểm của PC được $CN = \dfrac{1}{2}CP$. Xét $\Delta CBN = \Delta CBM$ (c.g.c)

Ta suy ra CN = CM. Từ đó ta có PC = 2MC.



Hình 19

Cách 2. (hình 19b)

Gọi K là trung điểm của AC ta có $BK = \dfrac{CP}{2}$.

Xét $\Delta BCK = \Delta CBM$ (c.g.c) suy ra BK = CM. Từ đó PC = 2MC.

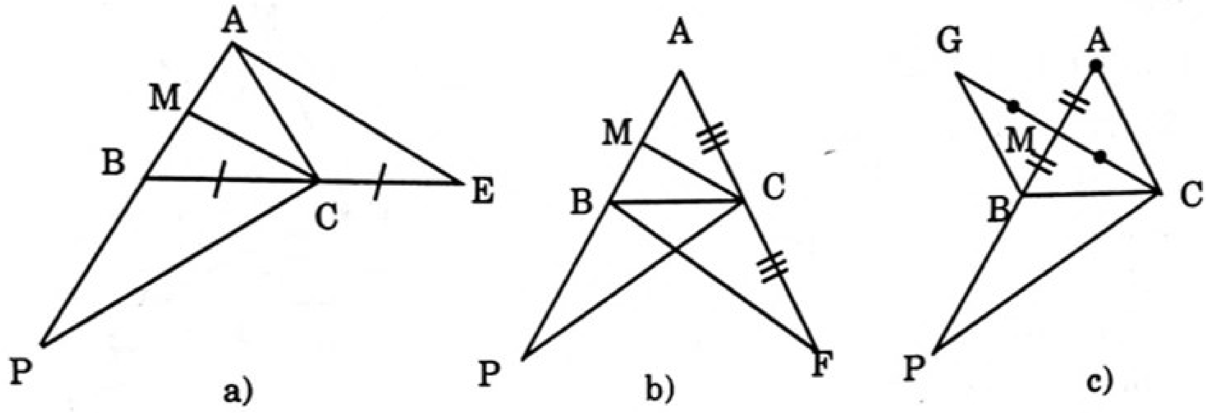
Cách 3. (hình 20a)

Ta tạo ra đoạn thẳng AE = 2CM bằng cách lấy điểm E trên tia đối của tia CB. Xét $\Delta ACE = \Delta CBP$ (c.g.c) suy ra AE = CP.

Cách 4. (hình 20b)

Trên tia đối của tia CA lấy CF = CA được BF = 2CM.

Xét $\Delta BCF = \Delta CBP$ (c.g.c) suy ra BF = CP.



Hình 20

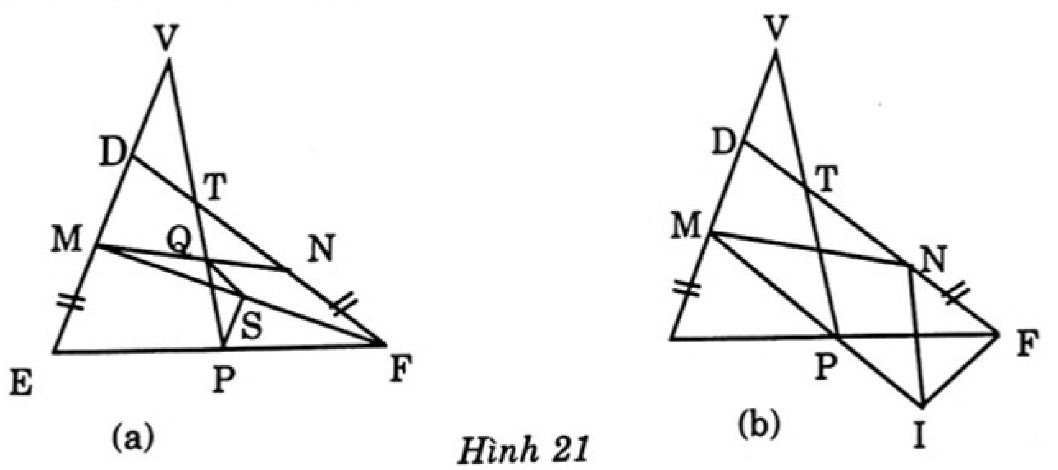
Cách 5. (hình 20c)

Trên tia đối của tia MC lấy MG = MC. Xét $\Delta MAC = \Delta MBG$ (c.g.c) suy ra BG = AC, từ đó được BG // AC. Xét $\Delta CBG = \Delta CBP$ (c.g.c) suy ra CG = CP.

Ví dụ 3

Cách 1. (hình 21a)

Ta chỉ cần chứng minh PQ tạo với hai đường thẳng song song với DE và DF những góc bằng nhau. Muốn thế lấy trung điểm S của MF ta sẽ được SP // DE, SQ // DF (đường trung bình trong tam giác). Do EM = FN nên SP = SQ. Như thế PQ tạo với SP và SQ những góc bằng nhau (vì ΔSPQ cân) nên PQ cũng tạo với SP và SQ những góc bằng nhau (vì ΔDTV cân).



Hình 21

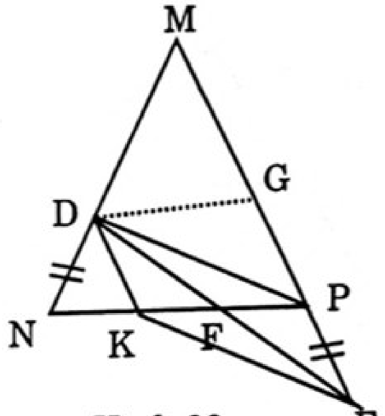
Cách 2. (hình 21b)

Trên tia đối của tia PM ta lấy điểm I sao cho OI = PM ta được đường thẳng NI // PQ. Ta có ΔNFI cân, nên NI tạo với DF và FI những góc bằng nhau. Như thế PQ cũng tạo với DF và DE những góc bằng nhau (vì ΔDTV cân).

Ví dụ 4

Cách 1. (hình 22)

Từ D kẻ DK // MP. Ta có ΔDNK cân nên DN = DK. Suy ra DK // DE. Tứ giác DPEK là hình bình hành, do đó DF = FE vậy F là trung điểm của DE.



Hình 22

Cách 2.

Từ D kẻ DG // NP, ta được ΔMDG cân, suy ra MD = MG. Từ đó ND = GP = PE.

Trong ΔDEG ta có FP là đường trung bình nên FD = FE, tức là F là trung điểm của DE.

Ví dụ 5

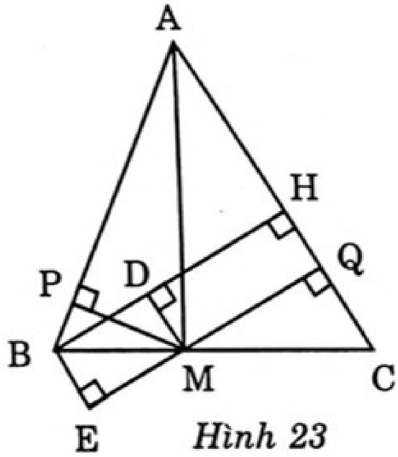
Cách 1. (hình 23)

Kẻ đường cao BH và hạ MD ⊥ BH.

Ta có ΔBMD = ΔMBP, suy ra MP = BD.

Lại có MP + MQ = BD + DH = BH.

mà BH không đổi nên tổng MP + MQ cũng không đổi.



Hình 23

Cách 2.

Kẻ đường cao BH và hạ BE ⊥ MQ.

Ta có ΔBMP = ΔBME, suy ra MP = ME.

Lại có MP + MQ = ME + MQ = EQ = BH.

Vậy tổng MP + MQ không đổi.

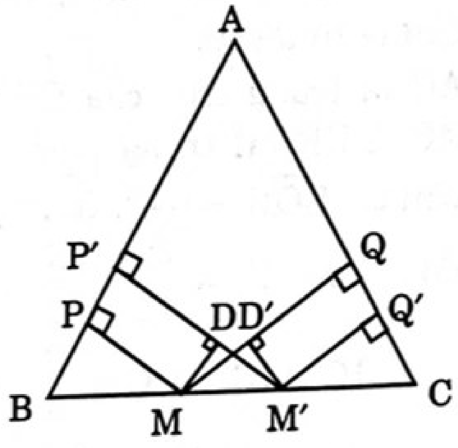
Cách 3.

Kẻ đường cao BH và nối AM. ta có: $S_{\Delta MAB} + S_{\Delta MAC} = S_{\Delta ABC}$. Suy ra:

MP.AB + MQ.AC = BH.AC. Từ đó MP + MQ = BH không đổi.

Cách 4.

Gọi M và M′ là hai điểm bất kì trên đáy BC với M′ nằm giữa C và M (hình 24).



Hình 24

Kẻ $M'P' \perp AB$, $M'Q' \perp AC$, $MD \perp M'P'$, $M'D' \perp MQ$.

Ta có $\Delta MDM' = \Delta M'D'M$, suy ra $MD' = M'D$.

Lại có:

$MP + MQ = P'D + MD' + D'Q$

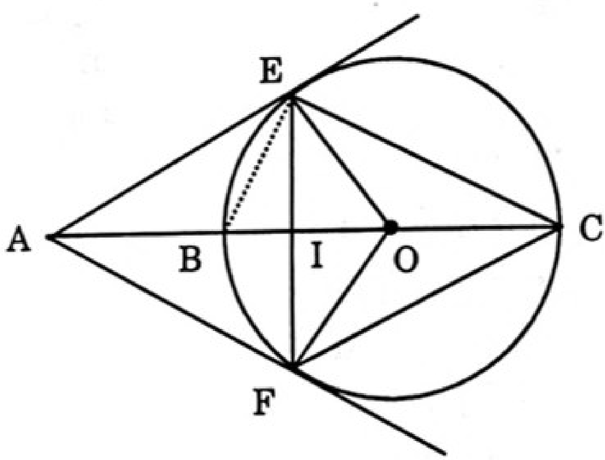
$= P'D + M'D + D'Q = M'P' + M'Q'$

Do M và M′ là hai điểm bất kì trên BC nên ta có tổng MP + MQ không đổi.

Chú ý: Nếu cho điểm nằm trên tia đối của tia BC thì ta sẽ có kết quả là hiệu MQ – MP = BH không đổi (bạn đọc tự chứng minh).

Ví dụ 6

Cách 1. (hình 25)



ΔCEF cân tại C (vì AC là trung trực của EF nên đi qua hai điểm O, A cách đều E và F).

Ta có $\widehat{ECF} = \frac{1}{2}\widehat{EOF}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung EF).

$= \widehat{EOA} = 60^0$. Do đó ΔCEF cân có góc 60^0 nên là tam giác đều.

Vậy tứ giác AECF có các cạnh bằng nhau (vì cùng bằng $EF = R\sqrt{3}$) nên là hình thoi.

$S_{AECF} = S_{AEF} + S_{CEF} = 3S_{AEF} = 2.\frac{1}{2}AI.EF$ (AI là đường cao của ΔAEF) $2.\frac{1}{2}.\frac{EF\sqrt{3}}{2}.EF = \frac{EF^2.\sqrt{3}}{2} = \frac{(R\sqrt{3})^2.\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Cách 2.

Ta có thể chứng minh tứ giác AECF là hình thoi vì có hai đường chéo AC và EF vuông góc và cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường như sau:

AC là trung trực của EF (vì qua A và O cách đều E và F), suy ra $AC \perp EF$ tại trung điểm của EF. Ta có ΔBOE đều (vì là tam giác cân có $\widehat{EOB} = 60^0$). Suy ra EF là đường cao cũng là trung tuyến, do đó: $IO = IB = \dfrac{OB}{2} = \dfrac{R}{2}$.

$$IC = IO + OC = \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2};\ IA = OA - OI = 2R - \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}.$$

Vậy I cũng là trung điểm của AC.

Xét tam giác đều AEF ta có đường cao $AI = \dfrac{EF\sqrt{3}}{2}$ và diện tích bằng $\dfrac{1}{2}.AI.EF = \dfrac{EF^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{(R\sqrt{3})^2.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 7

Cách 1. (hình 26)

a) Chú ý rằng nếu hai đường tròn (C_1) và (C_2) có bán kính bằng nhau cắt nhau tại B_1 và B_2 thì B_3 nằm trên đường tròn thứ nhất và A nằm trên đường tròn thứ hai, nên tổng hai góc $B_1B_3B_2$ và B_1AB_2 bằng 180^0. Để chứng minh chỉ cần tìm hình đối xứng của ΔB_1AB_2 qua đường thẳng B_1B_2.

Như thế $\widehat{B_1AB_2} = \widehat{B_1B_3B_2} + \widehat{B_1A'B_2} = 180^0$

Mệnh đề đảo vẫn đúng: nếu hai đường tròn cắt nhau tại B_1 và B_2 còn các điểm B_3 và a nằm như ở hình ... và tổng các góc $B_1B_3B_2$ và B_1AB_2 bằng 180^0 thì bán kính các đường tròn này (đường tròn ngoại tiếp các tam giác $B_1B_3B_2$ và B_1AB_2) bằng nhau.

b) Cách giải như sau:

Gọi $x = \widehat{B_3O_1A} = \widehat{B_3O_3A}$, $y = \widehat{AO_1B_1} = \widehat{B_1O_2A}$

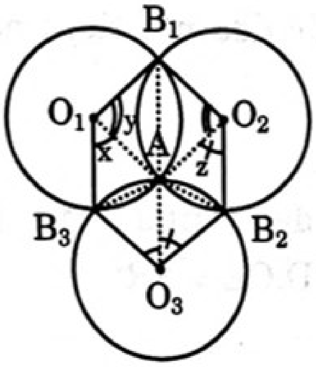
$z = \widehat{AO_2B_2} = \widehat{B_2O_3A}$ thế thì:

$$\widehat{B_1AB_2} = \widehat{B_1AO_2} + \widehat{O_2AB_2} - \frac{180^0 - y}{2} = 180^0 - \frac{y+z}{2};$$

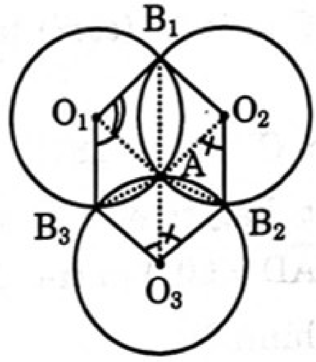
$$\widehat{B_1B_3B_2} = \widehat{B_1B_3A} + \widehat{AB_3B_2} = \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$$

Vậy $\widehat{B_2AB_2} + \widehat{B_1B_3B_2} = 180^0$

Kết hợp với điều chú ý ở trên ta thấy rằng các bán kính của hai đường tròn ngoại tiếp ΔB_1AB_2 và $\Delta B_3B_1B_2$ bằng nhau.



Hình 26



Hình 27

Cách 2.

Nếu sử dụng các hình thoi tạo thành thì ta có cách giải khác sau đây (hình 27):

Ba tứ giác $B_3O_3AO_1$, $O_1AO_2B_1$ và $O_2AO_3B_2$ đều là hình thoi vì có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng R. Ngoài ra $B_1B_3 = O_2O_3$ (vì $\Delta B_3O_1B_1 = \Delta O_3O_1B_1 = \Delta O_3AO_2$), tương tự $B_1B_2 = O_1O_3$, $B_3B_2 = O_1O_2$.

Suy ra hai tam giác $B_1B_2B_3$ và $O_1O_2O_3$ bằng nhau. Do đó các bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $O_1O_2O_3$ bằng R vì $O_1A = O_2A = O_3A = R$.

Ví dụ 8

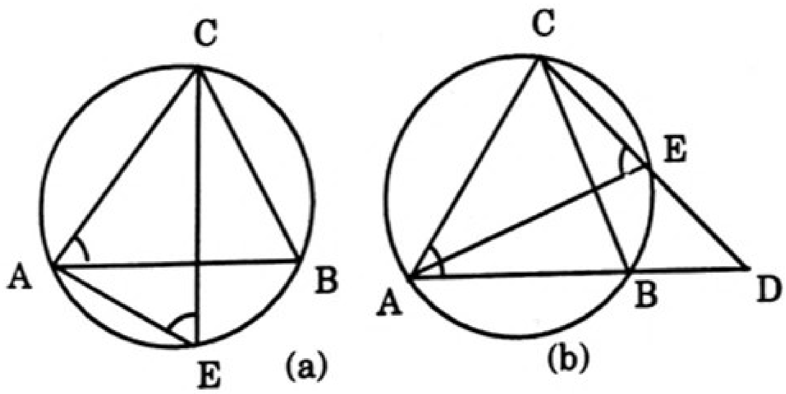
Do d là đường thẳng bất kì qua đỉnh C nên d có thể nằm trong góc C hoặc nằm ngoài góc C, do đó ta phải xét cả hai trường hợp hình vẽ (hình 28a và b).

Cách 1.

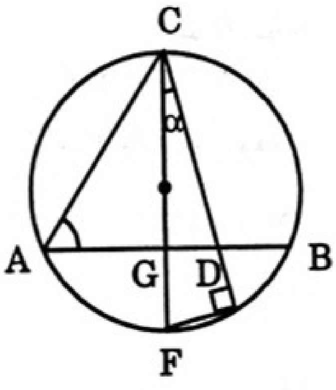
Xét hai trường hợp tùy theo (1) lớn hơn hay nhỏ hơn C.

a) Nếu CD < CE (hình 28a)

Xét hai tam giác đồng dạng ACE và DCA (góc C chung, $\widehat{CAD} = \widehat{AEC} = 60^0$) ta có:



Hình 28



Hình 29

$$\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{CA} \text{ hay } AC^2 = CD.CE$$

Nhưng $AC = R\sqrt{3}$ (cạnh tam giác đều nội tiếp) nên tích CD.CE $= 3R^2$.

b) Nếu CD > CE (hình 28b)

Cũng xét hai tam giác đồng dạng như trên (góc C chung, $\widehat{AEC} = \widehat{CAD} = 60^0$) ta tìm được $CD.CE = 3R^2$.

Cách 2. (hình 29)

Kẻ đường kính CF của đường tròn ngoại tiếp cắt cạnh AB tại G.

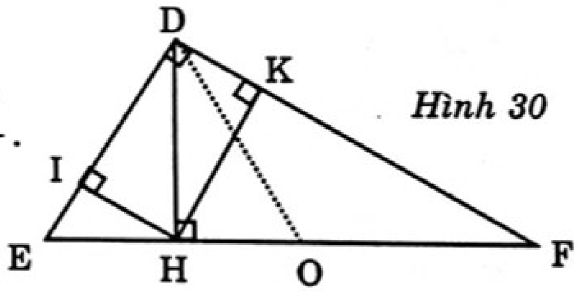
Gọi $\widehat{FCE} = \alpha$ ta có: $CE = 2R\cos\alpha$, $CD = \dfrac{CG}{\cos\alpha}$,

mà $CG = R + \dfrac{R}{2} = \dfrac{3R}{2}$ nên $CD = \dfrac{3R}{2\cos\alpha}$.

Từ đó ta có tích $CD.CE = 3R^2$.

Ví dụ 9

Cách 1.



Hình 30

Ta có: dt DKHI = DI.DK (hình 30)

Lại có: $DH^2 = DI.DE$ nên $DI = \dfrac{DH^2}{DE}$.

Tương tự $DK = \dfrac{DH^2}{F}$. Vậy:

$$dtDKHI = \frac{DH^4}{DE.DF} = \frac{DH^4}{EF} \le \frac{DO^3}{EF} = \frac{k^3}{2k} = \frac{k^2}{2}$$

Suy ra giá trị lớn nhất của diện tích DKHI bằng $\dfrac{k^2}{2}$. Khi đó ΔDEF vuông cân tại D.

Cách 2.

Ta dó dtDJHI = 2.dtHID. Do đó dtDKHI lớn nhất tương đương với dtHID lớn nhất.

Do $\Delta HID \backsim \Delta EDF$ nên $\dfrac{dtHID}{dtEDF} = \left(\dfrac{DH}{EF}\right)^2$. Như thế dtHID lớn nhất thì DH lớn nhất, tức là H sẽ trung với O. Khi đó ΔDEF vuông cân tại D và ta tính được $dtDKHI = \dfrac{k^2}{2}$.

Ví dụ 10

Cách 1.

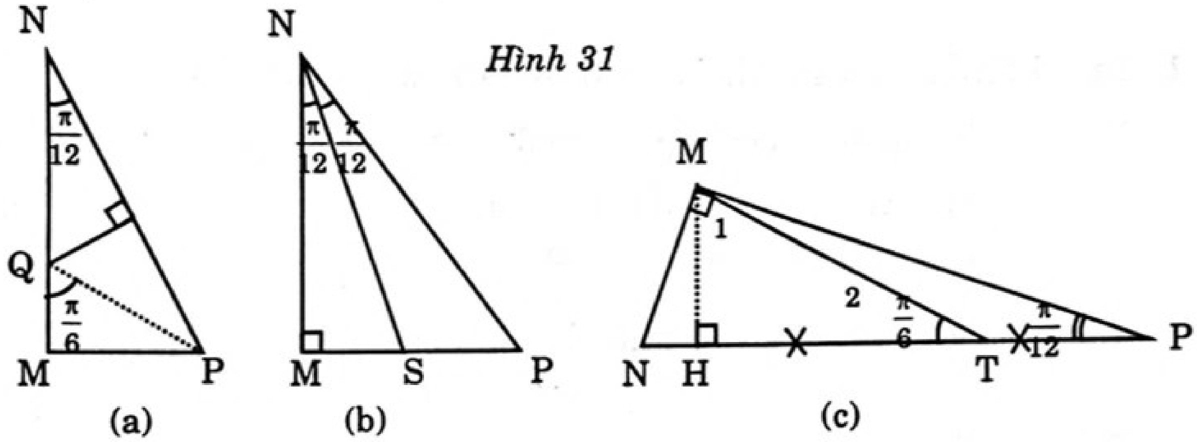
Xét ΔMNP vuông tại M có góc N bằng $\frac{\pi}{12}$ và cạnh MP = 1 (hình 31a)

Gọi Q là giao điểm của trung trực của NP, ta có:

$\widehat{AQP} = \frac{\pi}{6}$ nên QP = 2MP, tỉ số $\frac{MP}{MQ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Từ đó $MQ = \sqrt{3}$.

Lại có $MN = MQ + QN = MQ + QP = \sqrt{3} + 2$

Vậy $\tan\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$



Hình 31

Cách 2. (hình 31b)

Xét ΔMNP vuông tại M có $\widehat{N} = \frac{\pi}{6}$ và cạnh góc vuông MP = 1.

Ta có: $\widehat{N} = \frac{\pi}{6}$ nên NP = 2MP = 2, tỉ số $\frac{MP}{MN} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Như thế $MN = \sqrt{3}$.

Kẻ phân giác NS. Theo tính chất phân giác ta có:

$$\frac{MS}{MN} = \frac{SP}{NP} = \frac{MS+SP}{}MN + NP = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 2 - \sqrt{3}$$

Vậy $\tan\frac{\pi}{12} = \frac{MA}{MN} = 2 - \sqrt{3}$

Cách 3. (hình 31c)

Xét ΔMNP vuông tại M có $\widehat{P} = \frac{\pi}{12}$, cạnh góc vuông NP = 4.

Kẻ trung tuyến MT và đường cao MH, ta có:

$\widehat{MTN} = \frac{\pi}{6}$, MT = 2, do đó MH = 1 và tỉ số $\frac{MH}{HT} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Như thế $HT = \sqrt{3}$ và $HP = HT + TP = \sqrt{3} + 2$

Vậy $\tan\frac{\pi}{12} = \frac{MH}{HP} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

§11. HAI VÍ DỤ VỀ SỐ HỌC VÀ HÌNH HỌC CHỨNG MINH BẰNG 10 CÁCH

1. Ta có thể so sánh phân số bằng 10 cách sau đây:

Cách 1. Quy đồng mẫu các phân số đã cho, rồi so sánh các tử với nhau.

Cách 2. Viết các phân số đã cho dưới dạng các phân số cùng tử, rồi so sánh các mẫu với nhau.

Cách 3. So sánh dựa vào tính chất: nếu ad < bc thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Cách 4. So sánh các phân số với 1 dựa vào tính chất: nếu $\frac{x}{y} < 1$ thì x < y.

Cách 5. Viết các phân số dưới dạng số thập phân, rồi so sánh các số thập phân với nhau.

Cách 6. So sánh số nghịch đảo của các phân số dựa vào tính chất: nếu $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Cách 7. Dựa vào tính chất bắc cầu của quan hệ thứ tự:

nếu $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$ và $\frac{m}{n} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$

Cách 8. So sánh "phần bù của các phân số đối với 1" dựa vào tính chất:

nếu $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ đều nhỏ hơn 1 và $1 - \frac{a}{b}, 1 - \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

Cách 9. Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Cách 10. Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{an+c}{bn+d} < \frac{c}{d}$.

Ví dụ "So sánh hai phân số $\frac{5}{7}$ và $\frac{13}{16}$"

Cách 1. Ta có $\frac{5.16}{7.16}$ và $\frac{13.7}{16.7}$ hãy so sánh 80 và 91; do 80 < 91 nên $\frac{5}{7} < \frac{13}{16}$

Cách 2. Ta có: $\frac{5.13}{7.13}$ và $\frac{13.5}{16.5}$ hay so sánh 91 và 80; do 91 > 80 nên $\frac{5}{6} < \frac{13}{16}$.

Cách 3. Do 5.6 = 80 và 7.13 = 91, mà 80 < 91 nên $\frac{5}{7} < \frac{13}{16}$

Cách 4. Ta có $\frac{5}{7} : \frac{13}{16} = \frac{5}{7}.\frac{16}{13} = \frac{80}{91} < 1$, như thế $\frac{5}{7} < \frac{13}{16}$.

Cách 5. Ta có $\frac{5}{7} \approx 0{,}71$ và $\frac{13}{16} \approx 0{,}81$ nên $\frac{5}{7} < \frac{13}{16}$

Cách 6. Ta có $\frac{7}{5} > \frac{16}{13}$ nên $\frac{5}{7} < \frac{13}{16}$

Cách 7. $\frac{5}{7} < \frac{10}{16}$ mà $\frac{10}{16} < \frac{13}{16}$ nên $\frac{5}{7} < \frac{19}{16}$

Cách 8. Ta có $1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$ và $1 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16}$ mà $\frac{2}{7} > \frac{3}{16}$ nên $\frac{5}{7} < \frac{13}{16}$

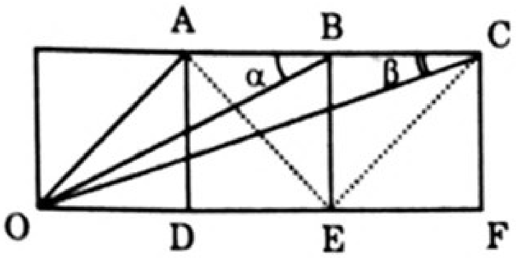
Cách 9. Do $\frac{5}{7} < \frac{3}{2}$ nên $\frac{5}{7} < \frac{8}{9} < \frac{3}{2}$ từ $\frac{5}{7} < \frac{8}{9}$ suy ra $\frac{5}{7} < \frac{13}{16} < \frac{8}{9}$

Vậy $\frac{5}{7} < \frac{13}{16}$

Cách 10. Do $\frac{5}{7} < \frac{3}{2}$ nên $\frac{5}{7} < \frac{5.2+3}{7.2+2} < \frac{3}{2}$ suy ra $\frac{5}{7} < \frac{13}{16}$.

2. Ví dụ về hình học

"Cho một hình chữ nhật gồm 3 hình vuông (hình 32). Chứng minh rằng tổng các góc $\alpha + \beta = 45^0$.



Hình 32

1. Chứng minh bằng cặp tam giác đồng dạng

Cách 1. Xét hình bình hành OECA có các đường chéo cắt nhau tại G ở chính giữa mỗi đường.

Hai tam giác vuông OGA và BOE có tỉ số các cạnh $\frac{OA}{OG} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$

và $\frac{OE}{BE} = 2$ nên chúng đồng dạng.

Suy ra $\widehat{AOG} = \widehat{BOE} = \alpha$, do đó

$$\widehat{AOG} + \widehat{GOE} = \alpha + \beta = 45^0.$$

Cách 2.

(Bạn đọc tự vẽ hình)

Kẻ GB // OA. Xét hai tam giác đồng dạng khác là ΔOCB và ΔOGB có chung góc BOC xen giữa hai cạnh tỉ lệ với nhau từng đôi một: $\frac{OB}{OG} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{10}}{2}} = \sqrt{2}$ và $\frac{OC}{OB} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$. Chúng đồng dạng nên suy ra: $\widehat{OCB} = \widehat{OBG}$, do đó: $\widehat{ABO} + \widehat{OBG} = \alpha + \beta = \widehat{ABG} = 45^0$

Cách 3.

Lại xét hai tam giác đồng dạng khác là ΔOAB và ΔODG có $\widehat{OAB} = \widehat{ODG} = \frac{3}{2}$ và tỉ số các cạnh bao hàm các góc đó bằng nhau:

$\frac{OA}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$, $\frac{OG}{DG} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$. Ta có:

$$\widehat{AOB} = \widehat{GOD} = \beta \text{ và } \widehat{AOB} + \widehat{BOE} = \beta + \alpha = \widehat{AOD} = 45^0.$$

Cách 4.

Xét hai tam giác OBA và OEC có $\widehat{AOB} = \widehat{OEC} = \frac{3}{2}$ và xen giữa hai cạnh tỉ lệ với nhau đôi một $\frac{OA}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. $\frac{OE}{EC} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Chúng đồng dạng với nhau suy ra:

$\widehat{AOB} = \widehat{COE} = \beta$, $\widehat{AOB} + \widehat{BOE} = \beta = \widehat{AOD} = 45^0$

Cách 5.

Xét thêm hai tam giác đồng dạng OAB và OAC và có góc chung OAB và tỉ số các cạnh bao hàm góc đó là:

$$\frac{AC}{OA} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},\ \frac{OA}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Suy ra: $\widehat{AOB} = \widehat{BCO} = \beta$, $\widehat{BOE} + \widehat{AOB} = \alpha + \beta = \widehat{AOD} = 45^0$

Cách 6.

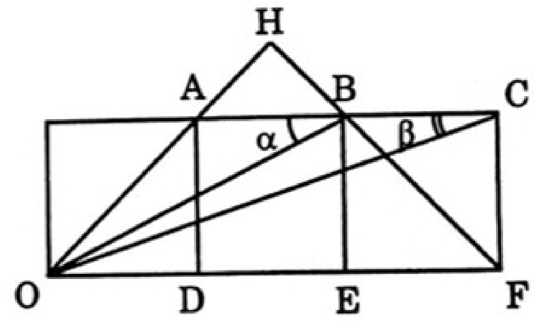
Hai đường chéo OA và FB cắt nhau tại H (hình 33).

Ta chỉ cần chứng minh rằng $\widehat{AOB} = \widehat{ACD} = \beta$. Thật vậy xét hai tam giác vuông OBH và OFC có tỉ số các cạnh góc vuông là:

$$\frac{OH}{HB} = 3.\frac{AH}{AH} = 3,\ \frac{OF}{FC} = \frac{3}{1} = 3$$

Vậy chúng đồng dạng nên ta có:

$\widehat{AOB} = \widehat{COF} = \beta$ và $\alpha + \beta = 45^0$.

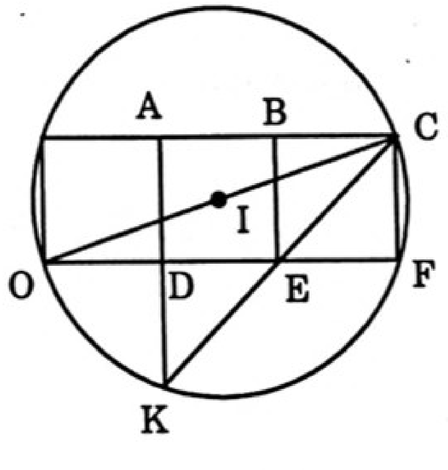


Hình 33

2. Hai cách chứng minh khác

Cách 7.

Vẽ đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật mà tâm I là trung điểm phân giác OC (hình 34). Kéo dài đường chéo CE cắt đường tròn ở K. Ta có $\widehat{CKO} = 90^0$, $\widehat{FOK} = 45^0$ (vì ΔOKE vuông cân).



Hình 34

Đường vuông góc hạ từ K xuống OE đi qua D và KD = DE = 1. lại có KO // BF, KF // OB (theo cách dựng), $\alpha = \widehat{O'BO} = \widehat{OFK}$ (góc có cạnh song song), $\widehat{OFK} = \widehat{OCK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung OK).

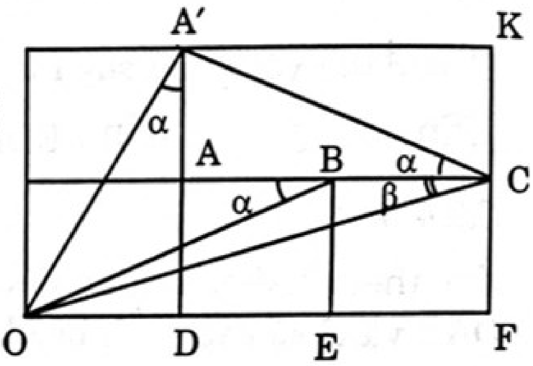
Vậy $\widehat{OCK} = \alpha$ và $\alpha + \beta = 45^0$.

Cách 8. (hình 35)

Xét tam giác cân OCA′ vì OA′ = A′C (theo cách dựng) ta có:

$\widehat{A'OC} = \widehat{A'CO}$. Góc OA′C là góc vuông (vì gồm góc vuông AA′K cộng và trừ thêm góc α).

Do đó $\widehat{A'CO} = \alpha + \beta = 45^0$.



Hình 35

3. Chứng minh bằng lượng giác

Cách 9.

Xét hình bình hành OACE có hai đường chéo cắt nhau tại G trung điểm của mỗi đường. Ta có:

$$\tan\alpha = \frac{1}{2} = \tan\widehat{OCE}, \text{ suy ra } \alpha = \widehat{OCE} \text{ vì } \widehat{OCE} < 45^0$$

Vậy $\alpha + \beta = \widehat{OCE} + \beta = 45^0$.

Cách 10.

Ta có: $\tan\alpha = \frac{1}{2}, \tan\beta = \frac{1}{3},$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{3}} = 1$$

Do đó $\alpha + \beta = 45^0$./.

§12. ĐÀO SÂU ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ VIÉT

Chúng ta đều biết công thức Viét về tổng và tích hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ là

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } P = x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Trong SGK có các bài tập về tính các biểu thức

$S_2 = x_1^2 + x_2^2$, $S_3 = x_1^3 + x_2^3$ theo các hệ số a, b, c như sau:

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \ldots = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \ldots = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}$$

1. Vấn đề đặt ra là cách tính các biểu thức

$S_4 = x_1^4 + x_2^4$, $S_5 = x_1^5 + x_2^5$, ..., $S_n = x_1^n + x_2^n$ như thế nào?

Cách 1.

a) Các bạn hãy suy nghĩ để tìm ra công thức

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$$

từ đó mà tính được $S_4, S_5, \ldots, S_n$

b) Lại có thể tính được:

$$S_{-1} = x_1^{-1} + x_2^{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

$$S_{-3} = x_1^{3} + x_2^{-3} = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{-b^3 + 3abc}{c^3}$$

Cách 2.

Ta hãy xét vài trường hợp cụ thể sau:

$$S_1 = x_1^1 + x_2^1 = (x_1 + x_2)^1$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$S_4 = x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4x_1x_2(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$S_5 = x_1^5 + x_2^5 = (x_1 + x_2)^5 - 5x_1x_2(x_1 + x_2)^3 - 5(x_1x_2)^2(x_1 + x_2)$$

$$S_6 = x_1^6 + x_2^6 = (x_1 + x_2)^6 - 6x_1x_2(x_1 + x_2)^4 + 9(x_1x_2)^2(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1x_2)^3$$

$$S_7 = x_1^7 + x_2^7 = (x_1 + x_2)^7 - 7x_1x_2(x_1 + x_2)^5 + 14(x_1x_2)^2(x_1 + x_2)^3 - 7(x_1x_2)^3(x_1 + x_2).$$

Qua các ví dụ này ta thấy rằng trong khai triển của S_k nếu sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của $x_1 + x_2$ thì:

- Số mũ của $(x_1 + x_2)$ giảm dần đều 2 đơn vị thì k xuống tới 0 hoặc 1 tùy theo k chẵn hay lẻ.
- Số mũ của (x_1x_2) tăng dần đều 1 đơn vị từ 0 đến phần nguyên $\left[\frac{k}{2}\right]$.
- Các hệ số trong S_k đan dấu (hệ số thứ 1, 3, 5, ... dương, còn thứ 2, 4, 6, ... âm).

Còn các hệ số của S_k thì theo quy luật nào?

Ta hãy ghi các hệ số của S_k (theo giá trị tuyệt đối) thành bảng sau:

Dòng 1:	1				
Dòng 2:	1	2	(do hệ số của $(x_1 + x_2)^2$ là 1 và của $-2x_1 + x_2$)		
Dòng 3:	1	3			
Dòng 4:	1	4	2		
Dòng 5:	1	5	5		
Dòng 6:	1	6	2	2	
Dòng 7:	1	7	14	7	

Số 7 ở dòng cuối (dòng 7) cột 2 là do số 6 ở dòng 6 cột 2 cộng với số 1 ở dòng 5 cột.

Số 9 ở dòng 6 cột 3 là do số 5 ở dòng 5 cột 3 cộng với số 4 ở dòng 4 cột 2.

Từ nhận xét trên ta có thể viết tiếp các dòng hệ số S_8, S_9, S_{10}, S_{11} như sau:

Dòng 8:	1	8	20	16	2	
Dòng 9:	1	9	27	30	9	
Dòng 10:	1	10	35	50	25	2
Dòng 11:	1	11	44	77	55	11

Ví dụ, từ dòng 9 ta có:

$$S_9 = (x_1^9 + x_2^9) = (x_1 + x_9)^9 - 9x_1x_2(x_1 + x_2)^7 + 27(x_1x_2)^2(x_1 + x_2)^5$$

$$-30(x_1x_2)^3(x_1 + x_2)^3 + 9(x_1x_2)^4(x_1 + x_2)$$

2. Một vấn đề nữa là: Không giải phương trình mà tính giá trị các biểu thức liên quan đến các nghiệm

Ví dụ 1

a) Không giải phương trình $x^2 - \frac{\sqrt{85}}{4}x + 1\frac{5}{16} = 0$, hãy tính giá trị các biểu thức $x_1^3 - x_2^3 x$ và $x_1^4 + x_2^4$.

b) Không giải phương trình $y^2 - 4y\sqrt{3} + 8 = 0$, hãy tính giá trị của biểu thức $\frac{6y_1^2 + 10y_1y_2 + 6y_2^2}{3y_1y_2^3 + 3y_1^3y_2}$

Giải

a) Giả sử $x_1 > x_2$ ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2}.[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2]$$
$$= \sqrt{(x_1 + x_2^2 - 4x_1x_2}[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2]\ (*)$$

Theo định lí Viét ta có: $x_1 + x2 = \frac{\sqrt{85}}{4}$, $x_1x_2 = \frac{21}{16}$. Thay các giá trị này vào (*) được:

$$\sqrt{\frac{85}{16} - \frac{4.21}{16}}.\left(\frac{85}{16} - \frac{21}{16}\right) = \sqrt{\frac{1}{10}}.\frac{64}{16} = \frac{1}{4}.\frac{64}{16} = \frac{64}{64} = 1$$

Vậy hiệu $x_1^3 - x_2^3 = 1$

– Ta có: $x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4x_1x_2(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

Thay $x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{85}}{4}$ và $x_1x_2 = \frac{21}{16}$ được:

$$\left(\frac{\sqrt{85}}{4}\right)^4 - 4.\frac{21}{16}.\left(\frac{85}{4}\right)^2 - 2.\frac{21}{16} = \frac{7225}{32} - \frac{1785}{64} - \frac{21}{8} =$$

$$= \frac{14450 - 1785 - 168}{64} = \frac{13497}{64} = 421\frac{25}{32}$$

b) Biểu thức đã cho có thể viết:

$$\frac{6(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2) - 2y_1y_2}{3y_1y_2[(y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2]} = \frac{6(y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2}{MS}$$

Theo định lí Viét ta có $y_1 + y_2 = 4\sqrt{3}$ và $y_1y_2 = 8$. Thay vào biểu thức trên ta được:

$$\frac{6.(4\sqrt{3})^2 - 2.8}{3.8[(4\sqrt{3})^2 - 2.8]} = \frac{6.16.3 - 16}{24(16.3 - 16)} = \frac{16(18 - 1)}{24(48 - 16)} = \frac{2.17}{3.32} = \frac{17}{48}.$$

Ví dụ 2

a) Không giải phương trình $x^2 + px + q = 0$, hãy tìm tổng các lập phương các nghiệm của nó.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình $2t^2 - (2m + 1)t + m^2 - 9m + 39 = 0$ có một nghiệm gấp đôi nghiệm kia? Tìm các nghiệm đó.

Giải

a) Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho, ta có:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] = -p(p^2 - 3q) \\ &= p(3q - p^2) \end{aligned}$$

trong đó theo định lí Viét $x_1 + x_2 = -p$ và $x_1x_2 = q$.

b) Gọi t_1 và t_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho với $t_1 = 2t_2$ (theo bài ra) (1). Theo định lí Viét ta có:

$$t_1 + t_2 = \frac{2m + 1}{2} \text{ (2)}, \quad t_1 + t_2 = \frac{m^2 - 9m + 39}{2} \text{ (3)}.$$

Thay giá trị $t_1 = 2t_2$ vào (2) và (3) được:

$$3t_2 = \frac{2m + 1}{2}, \quad 2t_2^2 = \frac{m^2 - 9m + 39}{2}, \text{ hay}$$

$$2\left(\frac{2m + 1}{6}\right)^2 = \frac{m^2 - 9m + 39}{2}, \text{ tức là}$$

$m^2 - 17m + 70 = 0$ mà nghiệm là $m_1 = 7$, $m_2 = 10$

Thay các giá trị của m vào phương trình đã cho ta được hai phương trình bậc hai.

$2t^2 - 15t + 25 = 0$ mà nghiệm là $t_1 = 5$, $t_2 = 2{,}5$.

$2t^2 - 21t + 49 = 0$ mà nghiệm là $t'_1 = 7$, $t'_2 = 3{,}5$.

3. Lập phương trình bậc hai biết sự liên hệ giữa các nghiệm

Ví dụ 1

Cho phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$. Lập phương trình bậc hai có nghiệm:

a) Chỉ khác nghiệm của phương trình đã cho về dấu;

b) Là nghịch đảo của nghiệm của phương trình đã cho:

c) Lớn hơn (hoặc bé hơn) k lần nghiệm của phương trình đã ch;

d) Bằng nghiệm của phương trình đã cho cộng thêm (hoặc trừ đi) một số m.

Giải

Gọi z_1 và z_2 là nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lí Viét ta có: $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} = p, z_1z_2 = \dfrac{c}{a} = q$ (1)

Giả sử phương trình phải tìm có dạng $z^2 + pz + q = 0$ (2)

Bài toán đã cho quy về tìm các hệ số p và q.

a) Nếu nghiệm của phương trình (2) là $(-z_1)$ và $(-z_2)$ thì

$$p = -1[-(z_1 + z_2)] = -\frac{1}{a};$$

$$q = (-z_1)(-z_2) = \frac{c}{a}.$$

Vậy phương trình cần tìm là: $z^2 - \dfrac{b}{a}z + \dfrac{c}{a} = 0$, tức là phương trình $az^2 - bz + c = 0$.

b) Nếu nghiệm của phương trình (2) là $\dfrac{1}{z_1}$ và $\dfrac{1}{z_2}$ thì

$$p = -\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) = \frac{-(z_1 + z_2)}{z_1 + z_2} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c};$$

$$q = \frac{1}{z_1}.\frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1z_2} = 1 : \frac{c}{a} = \frac{a}{c}$$

Vậy phương trình cần tìm là: $z^2 + \dfrac{b}{c}z + \dfrac{a}{c} = 0$, tức là phương trình $cz^2 + bz + a = 0$.

c) Nếu nghiệm của phương trình (2) là kz_1 và kz_2 thì

$$p = -k(z_1 + z_2) \doteq \frac{kb}{a};$$

$$q = k^2z_1z_2 = \frac{k^2c}{a}.$$

Vậy phương trình cần tìm là $z^2 + \frac{kb}{a}z + \frac{k^2c}{a} = 0$, tức là phương trình $az^2 + kbz + k^2c = 0$.

d) Nếu nghiệm của phương trình (2) là $z_1 + m$ và $z_2 + m$ thì

$$p = (z_1 + z_2 - 2m) = -\left(-\frac{b}{a} + 2m\right) = \frac{b}{a} - 2m;$$

$$q = (z_1 + m)(z_2 + m) = z_1z_2 + (z_1 + z_2)m + m^2 = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}m + m^2$$

Vậy phương trình cần tìm là $z^2 + \left(\frac{b}{a} - 2m\right)z + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}m + m^2 = 0$, tức là phương trình $az^2 + (b - 2am)z + (am^2 - bm + c) = 0$.

Ví dụ 2

Lập phương trình bậc hai có nghiệm bằng lập phương của nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$.

Giải

Đặt nghiệm của phương trình cần tìm là $t = x^3$, từ đó $x = \sqrt[3]{t}$.

Ta được: $a\sqrt[3]{t^2} + b\sqrt[3]{t} + c = 0$, hay

$$a^3t^2 + 3abt(a\sqrt[3]{t^2} + b\sqrt[3]{t}) + b^3t - c^3,$$

tức là $a^3t^2 - 3abct + b^3t + c^3 = 0$

Vậy phương trình cần tìm là:

$$a^3t^2 + b(b^2 - 3ac)t + c^3 = 0$$

Ví dụ 3

Cho phương trình $y^2 - 2(k + 2)y + k + 1 = 0$

a) Tìm giá trị của k để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Gọi y_1 và y_2 là hai nghiệm của phương trình, tìm giá trị của k thỏa mãn hệ thức.

$$y_1(1 - 2y_2) + y_2(1 - 2y_1) = k^2$$

Giải

a) Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi tích $ac < 0$, tức là $k + 1 < 0$ hay $k < -1$.

b) hệ thức đã cho có thể viết:

$$y_1 - 2y_1y_2 + y_2 - 2y_1y_2 = k^2, \text{ hay } (y_1 \ \ y_2) - 4(4y_1y_2) = k^2 \ (*)$$

Theo định lí Viét ta có:

$$y_1 + y_2 = -\frac{b}{a} = 2(k+2),\ y_1y_2 = \frac{c}{a} = k+1$$

Như thế (*) có dạng:

$$2(k+2) - 4(k+1) = k^2, \text{ hay } 2k + 4 - 4k - 4 = k^2;$$

tức là $k^2 + 2k = 0$ mà nghiệm là $k = 0$ và $k = -2$.

Vậy với $k = 0$ và $k = -2$ thì $\Delta > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm là y_1 và y_2.

4. Mở rộng định lí Viét với phương trình bậc ba

Ví dụ 1

Chứng minh rằng các phương trình bậc ba

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ta có hệ thức giữa các nghiệm và hệ số sau đây:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

Giải

Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình bậc ba đã cho, ta có:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

Cân bằng các hệ số của x_3, của x_2, của x và của số hạng tự do ở hai vế, ta có ngày ba hệ thức phải tìm.

Ví dụ 2

Giải phương trình bậc ba $t^3 + at^2 + bt + c = 0$

nếu các nghiệm của nó thỏa mãn các hệ thức:

a) $t_2 = \dfrac{t_1 + t_3}{2}$; b) $t_2 = \sqrt{t_1t_3}$

Giải

Theo các hệ thức này và hệ thức $t_1 = \dfrac{t_1 + t_3}{2}$ ta được:

$$t_1 = \frac{-a^2 + \sqrt{a^4 - 27ac}}{3a}$$

$$t_2 = -\frac{a}{3}$$

$$t_3 = \frac{-a^2 + \sqrt{a^4 - 27ac}}{3a}$$

b) Từ ba hệ thức trên và hệ thức $t_2 = \sqrt{t_1 t_3}$ ta được:

$$t_1 = \frac{-a\sqrt[3]{c} - \sqrt{a^2 - 2a\sqrt[3]{c} - 3\sqrt[3]{c^2}}}{2}$$

$$t_2 = -\sqrt[3]{c}$$

$$t_3 = \frac{-a\sqrt[3]{c} - \sqrt{a^2 - 2a\sqrt[3]{c} - 3\sqrt[3]{c^2}}}{2}$$

Ví dụ 3

Tìm tổng các nghiệm, tổng các bình phương, các lập phương các lũy thừa bậc bốn, các lũy thừa bậc năm của các nghiệm của phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Giải

Ta biết rằng nghiệm của phương trình trùng phương trình từng đôi một bằng nhau về giá trị tuyệt đối nhưng dấu khác nhau, tức là:

$$x_1 = -x_2,\ x_3 = -x_4$$

Do đó: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2(x_1^4 + x_3^4)$$

Nhưng $x_1^4 + x_3^4 = (x_1^2 + x_3^2)^2 - 2x_1^2x_3^2 = \dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{2c}{a} = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$

Vậy: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = \dfrac{2(b^2 - 2ac)}{a^2}$

Tóm lại ta có: $x_1^2 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -\frac{2b}{a}$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = \frac{2(b^2 - 2ac)}{a^2}$$

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0$$

Ví dụ 4

Cho phương trình bậc bốn $x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ có bốn nghiệm dương x_1, x_2, x_3 và x_4. Tìm các số a và b.

Giải

Theo định lí Viét ta có: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$

$$x_1x_2x_3x_4 = 1$$

Từ bất đẳng thức về trung bình cộng và trung bình nhân thì:

$$1 = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 1$$

Do đó: $\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 1$

Đẳng thức xảy ra kvck các số bằng nhau, tức là

$x_1 = x_2 = x_1 = x_3 = x_4$. Vậy ta có:

$x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1 = (x - 1)^4$

Từ đó có ngay giá trị của hệ số a = b, b = –4.