

Bùi Văn Tuyên (Chủ biên)
Nguyễn Đức Trường

PHÁT TRIỂN TƯ DUY SÁNG TẠO

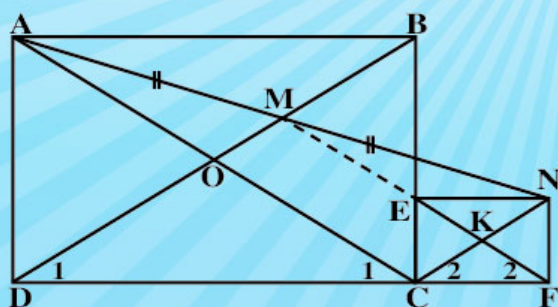
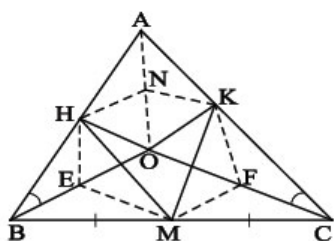
GIẢI TOÁN

HÌNH HỌC

(Biên soạn theo cấu trúc SGK mới hiện hành)

8

- Tài liệu tham khảo cho học sinh lớp 8 và giáo viên.
- Tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi lớp 8.
- Phân tích hướng giải chi tiết và bình luận.
- Nhiều bài hay, lạ và mới.



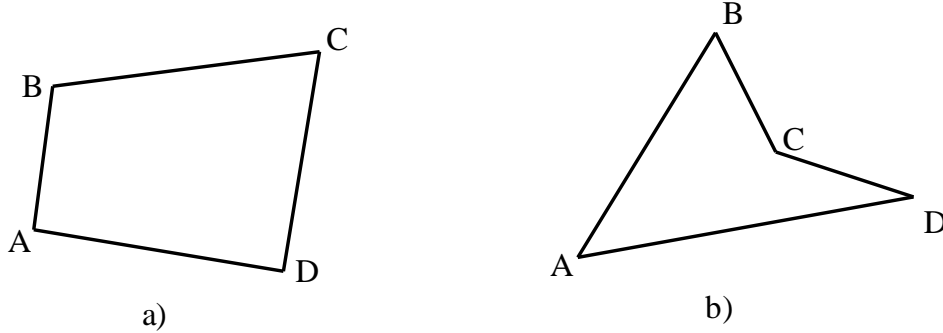
NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

MỤC LỤC

CHUYÊN ĐỀ 1. TỨ GIÁC	2
CHUYÊN ĐỀ 2. HÌNH THANG. HÌNH THANG CÂN. DỤNG HÌNH THANG	5
CHUYÊN ĐỀ 3. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG	11
CHUYÊN ĐỀ 4. HÌNH BÌNH HÀNH	17
CHUYÊN ĐỀ 5. HÌNH CHỮ NHẬT	22
CHUYÊN ĐỀ 6. HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG	28
CHUYÊN ĐỀ 7. ĐỐI XỨNG TRỤC – ĐỐI XỨNG TÂM	35
CHUYÊN ĐỀ 8. VẼ HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN	41

CHƯƠNG I: TỨ GIÁC**CHUYÊN ĐỀ 1. TỨ GIÁC****A. Kiến thức cần nhớ**

1. Tứ Giác $ABCD$ là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA , trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.



Hình 1.1

Ta phân biệt tứ giác lồi (h.1.1a) và tứ giác lõm (h.1.1b). Nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi.

2. Tổng các góc của tứ giác bằng 360° .

$$A + B + C + D = 360^\circ$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$, $A - B = 40^\circ$. Các tia phân giác của góc C và D cắt nhau tại O . Cho biết $COD = 110^\circ$. Chứng minh rằng $AB \perp BC$.

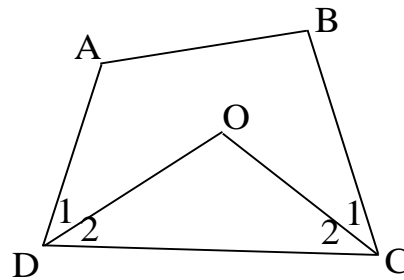
Giải (h.1.2)

- Tìm cách giải

Muốn chứng minh $AB \perp BC$ ta chứng minh

$$B = 90^\circ.$$

Đã biết $A - B = 40^\circ$, ta tính tổng $A + B$



Hình 1.2

- Trình bày lời giải

Xét tam giác $\triangle COD$ có $COD = 180^\circ - (C_2 + D_2) = 180^\circ - \frac{C + D}{2}$

(vì $C_1 = C_2$; $D_1 = D_2$).

Xét tứ giác $ABCD$ có $C + D = 360^\circ - (A + B)$, do đó

$$COD = 180^\circ - \frac{360^\circ - (A + B)}{2} = 180^\circ - 180^\circ + \frac{A + B}{2}$$

Vậy $COD = \frac{A + B}{2}$. Theo đề bài $COD = 110^\circ$ nên $A + B = 220^\circ$.

Mặt khác $A - B = 40^\circ$ nên $B = (220^\circ - 40^\circ) : 2 = 90^\circ$. Do đó $AB \perp BC$.

Ví dụ 2. Tứ giác $ABCD$ có $AB = BC$ và hai cạnh AD, DC không bằng nhau. Đường chéo

DB là đường phân giác của góc D . Chứng minh rằng các góc đối của tứ giác này bù nhau.

Giải (h.1.3a,b)

• **Tìm cách giải**

Để chứng minh hai góc A và C bù nhau, ta tạo ra một góc thứ ba làm trung gian, góc này bằng góc A chẳng hạn. Khi đó chỉ còn phải chứng minh góc này bù với góc C .

• **Trình bày lời giải**

Xét trường hợp $AD < DC$ (h.1.3a)

Trên cạnh DC lấy điểm E sao cho

$DE = DA$.

$$\triangle ADB = \triangle EDB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AB = EB \text{ và } \angle A = \angle E_1$$

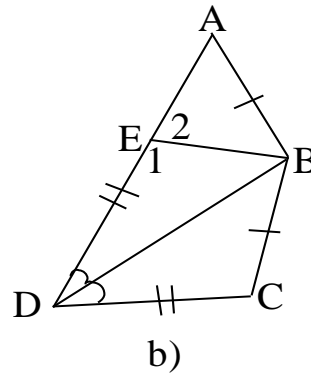
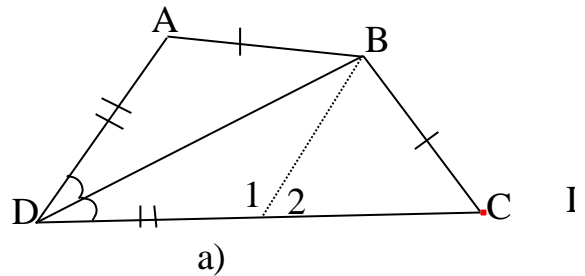
Mặt khác, $AB = BC$ nên $BE = BC$. Vậy $\triangle BEC$ cân $C = \angle E_2$.

Ta có: $\angle E_1 + \angle E_2 = 180^\circ \Rightarrow \angle A + \angle C = 180^\circ$.

Do đó $B + D = 360^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ$.

Xét trường hợp $AD > DC$ (h.1.3b).

Trên tia DA lấy điểm E sao cho $DE = DC$ Chứng minh tương tự như trên, ta được $\angle A + \angle C = 180^\circ$.



Hình 1.3

$$B + D = 180^\circ.$$

Ví dụ 3. Tứ giác $ABCD$ có tổng hai đường chéo bằng a . Gọi M là một điểm bất kì. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MA + MB + MC + MD$.

Giải (h.1.4)

• **Tìm cách giải**

Để tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MA + MB + MC + MD$ ta phải chứng minh

$$MA + MB + MC + MD \geq k \text{ (} k \text{ là hằng số)}.$$

Ghép tổng trên thành hai nhóm $(MA + MC) + (MB + MD)$.

• **Trình bày lời giải**

Xét ba điểm M, A, C có $MA + MC \geq AC$

(dấu “=” xảy ra khi $M \in AC$).

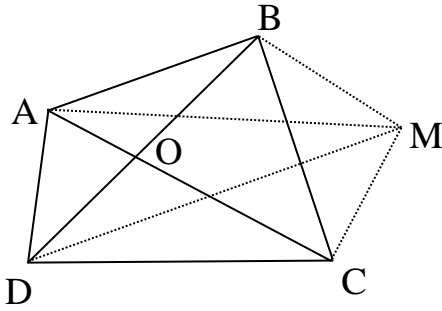
Xét ba điểm M, B, D có $MB + MD \geq BD$

(dấu “=” xảy ra khi $M \in BD$).

Do đó $MA + MB + MC + MD \geq AC + BD = a$

Vậy min $(MA + MB + MC + MD) = a$ khi M

trùng giao điểm O của hai đường chéo AC và BD .



Hình 1.4

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

• Tính số đo góc

1.1 Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai góc ngoài tại hai đỉnh bằng tổng hai góc trong tại hai đỉnh còn lại.

1.2. Cho tứ giác $ABCD$ có $A + B = 220^\circ$. Các tia phân giác ngoài tại đỉnh C và D cắt nhau tại K . Tính số đo của góc CKD .

1.3. Cho tứ giác $ABCD$ có $A = C$. Chứng minh rằng các đường phân giác ngoài của góc B và D song song hoặc trùng với nhau.

1.4. Cho tứ giác $ABCD$ có $AD = DC = CB$; $C = 130^\circ$; $D = 110^\circ$. Tính số đo góc A , góc B (Olympic Toán Châu Á – Thái Bình Dương 2010).

• So sánh các độ dài

1.5. Có hay không một tứ giác mà độ dài các cạnh tỉ lệ với 1,3,5,10?

1.6. Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc. Biết $AB = 3$; $BC = 6,6$; $CD = 6$. Tính độ dài AD .

1.7. Chứng minh rằng trong một tứ giác tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi tứ giác.

1.8 Cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, bất kì hai điểm nào cũng có khoảng cách lớn hơn 10. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 14.

1.9. Cho tứ giác $ABCD$ có độ dài các cạnh là a, b, c, d đều là các số tự nhiên. Biết tổng $S = a + b + c + d$ chia hết cho a , cho b , cho c , cho d . Chứng minh rằng tồn tại hai cạnh của tứ giác bằng nhau.

• Bài toán giải bằng phương trình tô màu

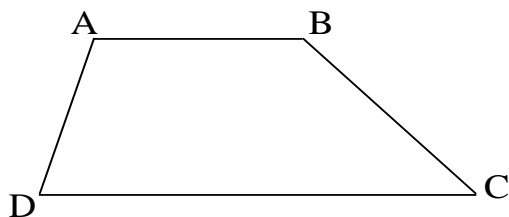
1.10. Có chín người trong đó bất kì ba người nào cũng có hai người quen nhau. Chứng minh rằng tồn tại một nhóm bốn người quen nhau.

CHUYÊN ĐỀ 2. HÌNH THANG. HÌNH THANG CÂN. DỰNG HÌNH THANG

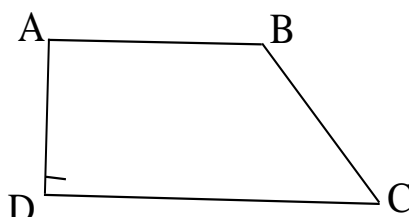
A. Kiến thức cần nhớ

1. Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song (h.2.1).

Đặc biệt: hình thang vuông là hình thang có một góc vuông (h.2.2).



Hình 2.1

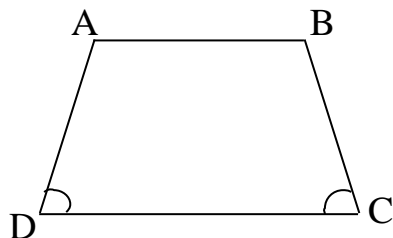


Hình 2.2

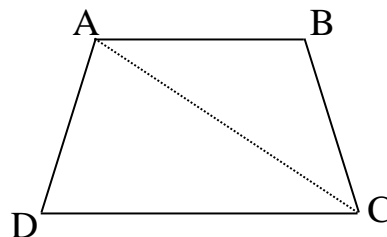
2. Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau (h.2.3).

3. Trong hình thang cân:

- Hai cạnh bên bằng nhau
- Hai đường chéo bằng nhau (h.2.4).



Hình 2.3



Hình 2.4

4. Dấu hiệu nhận biết hình thang cân:

- Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.
- Hình thang có hai góc đối bù nhau là hình thang cân.
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

5. Dựng hình

- Dụng cụ dựng hình: thước và compa
- Các bước giải một bài toán dựng hình
 - Phân tích;
 - Cách dựng;
 - Chứng minh;
 - Biện luận.

Đối với một bài toán dựng hình đơn giản ta có thể không trình bày bước phân tích.

TRANG 7-8

- Để dựng hình thang ta cần biết bốn yếu tố của nó, trong đó số đo góc cho trước không quá hai.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB // CD$), các tia phân giác của góc A , góc D cắt nhau tại M thuộc cạnh BC . Cho biết $AD = 7cm$, Chứng minh rằng một trong hai đáy của hình thang có độ dài nhỏ hơn $4cm$.

Giải(h.2.5)

***Tìm cách giải**

Để chứng minh một cạnh đáy nào đó nhỏ hơn $4cm$ ta có thể xét tổng của hai cạnh đáy rồi chứng minh tổng này nhỏ hơn $8cm$, khi đó tồn tại một đáy nhỏ hơn $4cm$.

***Trình bày lời giải**

Gọi N là giao điểm của tia AM và tia DC .

Ta có : $AB // CD \Rightarrow A_2 = N$ (so le trong)

Mặt khác, $A_1 = A_2 \Rightarrow A_1 = N \Rightarrow \triangle DAN$ cân tại D
 $\Rightarrow DA = DN$ (1)

Xét $\triangle DAN$ có $D_1 = D_2$ nên DM đồng thời là đường trung tuyến: $MA = MN$

$$\triangle ABM = \triangle NCM (c.g.c) \Rightarrow AB = CN.$$

Ta có: $DC + AB = DC + CN = DN = DA = 7cm$. Vậy $AB + CD < 8cm$.

Vậy một trong hai đáy AB, CD phải có độ dài nhỏ hơn $4cm$

Ví dụ 2. Tứ giác $ABCD$ có $AC = BD, AD = BC$. Chứng minh rằng tứ giác này là hình thang cân.

Giải(h.2.6)

***Tìm cách giải**

Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau nên để chứng minh nó là hình thang cân, chỉ cần chứng minh $AB // CD$. Muốn vậy ta chứng minh một cặp góc so le trong bằng nhau.

***Trình bày lời giải**

$$\triangle ADC = \triangle BCD (c.c.c) \Rightarrow C_1 = D_1$$

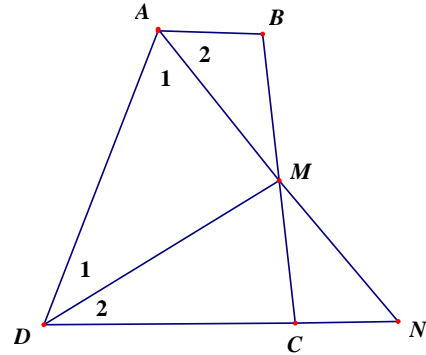
$$\triangle DAB = \triangle CBA (c.c.c) \Rightarrow B_1 = A_1$$

Mặt khác: $\angle COD = \angle AOB \Rightarrow 2C_1 = 2A_1 \Rightarrow C_1 = A_1 \Rightarrow AB // CD$

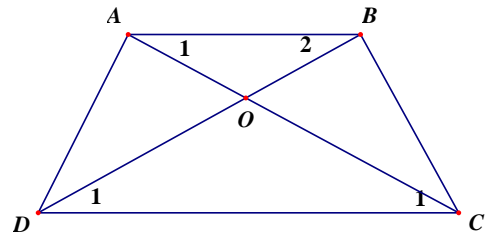
Vậy tứ giác $ABCD$ là hình thang. Hình thang này có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

Ví dụ 3. Một hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên và góc kề với đáy lớn bằng 60°

Biết chiều cao của hình thang cân này là $a\sqrt{3}$. Tính chu vi của hình thang cân.



Hình 2.5



Hình 2.6

Giải(h.2.7)***Tìm cách giải**

Ta đã biết hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau. Từ đó vẽ thêm hình phụ để tìm sự liên hệ giữa đáy lớn và ba cạnh còn lại. Ta vẽ $AM \parallel BC (M \in CD)$. Mặt khác, đề bài có cho góc 60° , gợi ý cho ta vận dụng tính chất của tam giác đều để tính độ dài một cạnh theo chiều cao của nó.

***Trình bày lời giải**

Ta đặt: $AD = AB = BC = x$

Vẽ $AM \parallel BC (M \in CD)$, ta được

$$AM = BC = x, MC = AB = x$$

Vẽ $AH \perp CD$ thì AH là đường cao của hình thang cân,

cũng là đường cao của tam giác đều: $AH = \frac{AD\sqrt{3}}{2}$. Vì

$$AH = a\sqrt{3} \text{ nên } \frac{x\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = 2a.$$

Do đó chu vi của hình thang cân là: $2a.5 = 10a$.

Nhận xét: Qua một đỉnh vẽ đường thẳng song song với một cạnh bên của hình thang là một cách vẽ hình phụ để giải bài toán về hình thang.

Ví dụ 4. Dựng hình thang $ABCD (AB \parallel CD)$ biết: $AB = 2cm, CD = 5cm, C = 40^\circ, D = 70^\circ$.

Giải(h.2.8)**a)Phân tích**

Giả sử ta đã dựng được thang $ABCD (AB \parallel CD)$ thỏa mãn đề bài. Vẽ $AE \parallel BC (E \in CD)$ ta được

$$AED = C = 40^\circ; EC = AB = 2cm;$$

$$DE = DC - EC = 5 - 2 = 3cm$$

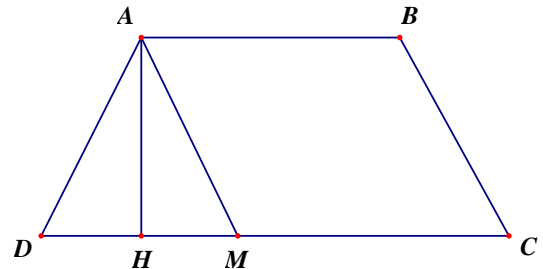
$\triangle ADE$ dựng được ngay (g.c.g)

Điểm C thỏa mãn điều kiện: C nằm trên tia DE và C cách D là $5cm$.

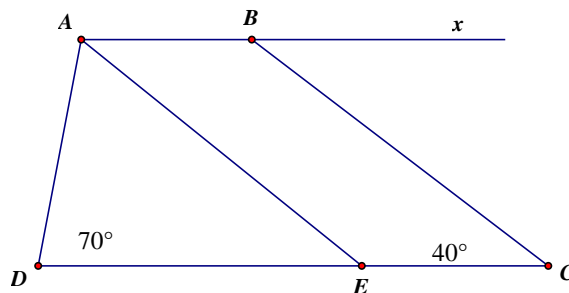
Điểm B thỏa mãn điều kiện: B nằm trên tia $Ax \parallel DE$ (hai tia Ax, DE cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AD) và B cách A là $2cm$

b)Cách dựng

Dựng $\triangle ADE$ sao cho $DE = 3cm; D = 70^\circ; E = 40^\circ$. Dựng tia $Ax \parallel DE$ (hai tia Ax, DE cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AD). Trên tia Ax đặt $AB = 2cm$. Trên tia DE đặt $DC = 5cm$



Hình 2.7



Hình 2.8

Nối BC ta được hình thang $ABCD$ phải dựng.

c) Chứng minh

Theo cách dựng tứ giác $ABCD$ có $AB \parallel CD$ nên nó là hình thang.

Xét hình thang $ABCE$ có $CE = 5 - 3 = 2$ (cm); $AB = 2$ cm nên $AB = CE$ do đó $AE \parallel BC$

$$\Rightarrow \angle BCD = \angle AED = 40^\circ.$$

Như vậy hình thang $ABCD$ có $AB = 2$ cm; $CD = 5$ cm; $D = 70^\circ$ và $C = 40^\circ$

d) Biện luận

Bài toán có một nghiệm hình.

Ví dụ 5. Dựng tam giác ABC , biết $A = 70^\circ$, $BC = 5$ cm và $AC - AB = 2$ cm.

Giải (h.2.9)

a) Phân tích

Giả sử ta đã dựng được tam giác ABC thoả mãn đề bài.

Trên tia AC ta lấy điểm D sao cho $AD = AB$.

Khi đó $DC = AC - AD = AC - AB = 2$ cm.

$$\triangle ABD \text{ cân, } A = 70^\circ \Rightarrow \angle ADB = 35^\circ \Rightarrow \angle BDC = 125^\circ.$$

- $\triangle DBC$ xác định được ($CD = 2$ cm; $D = 125^\circ$; $CB = 5$ cm).

- Điểm A thoả mãn hai điều kiện: A nằm trên tia CD và A nằm trên đường trung trực của BD .

b) Cách dựng

- Dựng $\triangle DBC$ sao cho $D = 125^\circ$; $DC = 2$ cm và $CB = 5$ cm.

- Dựng đường trung trực của BD cắt tia CD tại A .

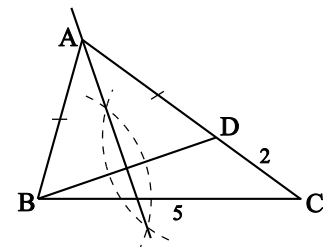
- Nối AB ta được $\triangle ABC$ phải dựng.

c) Chứng minh

$\triangle ABC$ thoả mãn đề bài vì theo cách dựng, điểm A nằm trên đường trung trực của BD nên $AD = AB$.

Do đó $AC - AB = AC - AD = DC = 2$ cm; $BC = 5$ cm và $\angle ADB = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$

$$\Rightarrow \angle BAC = 125^\circ - 2 \cdot 55^\circ = 70^\circ.$$



Hình 2.9

d) Biện luận

Bài toán có một nghiệm hình.

Nhận xét: Đề bài có cho đoạn thẳng 2cm nhưng trên hình vẽ chưa có đoạn thẳng nào như vậy. Ta đã làm xuất hiện đoạn thẳng $DC = 2\text{cm}$ bằng cách trên AC ta đặt $AD = AB$. Khi đó DC chính là hiệu $AC - AB$.

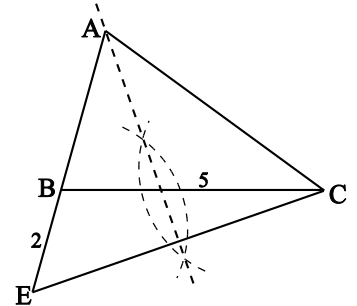
Cũng có thể làm xuất hiện đoạn thẳng 2cm bằng cách trên tia AB ta đặt $AE = AC$ (h.2.10).

Khi đó $BE = AE - AB = AC - AB = 2\text{cm}$.

$\triangle AEC$ cân, có $A = 70^\circ \Rightarrow E = (180^\circ - 70^\circ) : 2 = 55^\circ$.

$\triangle BEC$ xác định được.

Khi đó điểm A thỏa mãn hai điều kiện: A nằm trên tia EB và A nằm trên đường trung trực của EC .



Hình 2.10

C. Bài tập vận dụng**• Hình thang**

2.1. Cho tứ giác $ABCD$. Các tia phân giác của góc A , góc D cắt nhau tại M . Các tia phân giác của góc B , góc C cắt nhau tại N . Cho biết $AMD = 90^\circ$, chứng minh rằng:

a) Tứ giác $ABCD$ là hình thang;

b) $NB \perp NC$.

2.2. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Gọi M là trung điểm của AD . Cho biết $MB \perp MC$.

a) Chứng minh rằng $BC = AB + CD$;

b) Vẽ $MH \perp BC$. Chứng minh rằng tứ giác $MBHD$ là hình thang.

2.3. Chứng minh rằng trong một hình thang vuông, hiệu các bình phương của hai đường chéo bằng hiệu các bình phương của hai đáy.

2.4. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Cho biết $AD = 20$, $AC = 52$ và $BC = 29$. Tính độ dài AB .

• Hình thang cân

2.5. Cho tam giác đều ABC , mỗi cạnh có độ dài bằng a . Gọi O là một điểm bất kì ở trong tam giác. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $OM \parallel BC$; $ON \parallel CA$ và $OP \parallel AB$. Xác định vị trí của điểm O để tam giác MNP là tam giác đều. Tính chu vi của tam giác đều đó.

2.6. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $ADC > BCD$. Chứng minh rằng $AC > BD$.

2.7. Cho góc xOy có số đo lớn hơn 60° nhưng nhỏ hơn 180° . Trên cạnh Ox lấy điểm A , trên cạnh Oy lấy điểm C . Chứng minh rằng $AC > \frac{OA + OC}{2}$.

2.8. Tứ giác $ABCD$ có $AC = BD$; $C = D$ và $BD \perp BC$. Hỏi tứ giác $ABCD$ có phải là hình thang cân không?

• **Dựng hình**

2.9. Dựng hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) biết $AD = 2$ cm; $BD = 3$ cm; $AC = 4$ cm và góc nhọn xen giữa hai đường chéo bằng 70° .

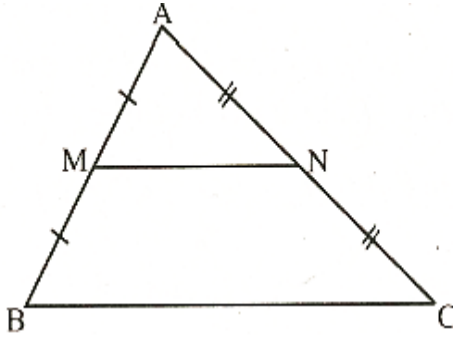
2.10. Dựng hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) biết $A = 120^\circ$; $AB = 2$ cm, $BD = 4$ cm và $BC = a$.

2.11. Dựng tứ giác $ABCD$ biết $AB = 2,5$ cm; $CD = 4$ cm; $A = 120^\circ$; $B = 100^\circ$ và $C = 60^\circ$.

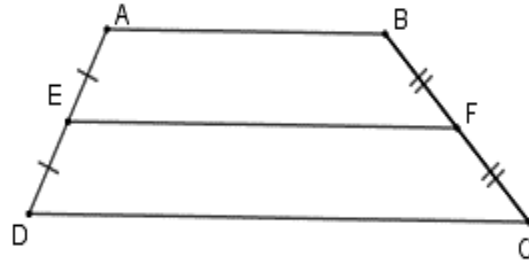
2.12. Dựng tam giác ABC vuông tại B có chu vi bằng 8 cm và $C = m^\circ$.

CHUYÊN ĐỀ 3. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ****1. Định nghĩa**

- Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác (h3.1)
- Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang (h3.2)



(hình 3.1)



(hình 3.2)

2. Tính chất

- Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

Trên hình 3.1 thì $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{BC}{2}$.

- Đường trung bình của hình thang thì song song với hai cạnh đáy và bằng nửa tổng hai đáy

Trên hình 3.2 thì $AB \parallel EF \parallel CD$ và $EF = \frac{AB + CD}{2}$.

3. Định lý

- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.
- Đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh bên hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh AG chia đôi MN .

Giải (hình 3.3)

- *Tìm cách giải*

Kết luận của bài toán gợi ý cho ta dùng định lý đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba. Gọi H là trung điểm của BG thì ta có thể dùng định lý đường trung bình để chứng minh.

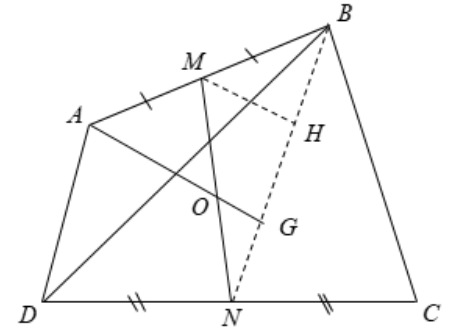
• **Trình bày lời giải**

Gọi O là giao điểm của AG và MN

Gọi H là trung điểm của BG

Theo tính chất của trọng tâm, ta có: $BH = HG = GN$

Xét $\triangle ABG$ có MH là đường trung bình $\Rightarrow MH \parallel AG$



(Hình 3.3)

Xét $\triangle HMN$ có $AG \parallel MH$ và $NG = GH$ nên $ON = OM$

Vậy AG chia đôi MN

Nhận xét: Vẽ thêm trung điểm của một đoạn thẳng là cách vẽ hình phụ thường dùng để vận dụng định lý đường trung bình của tam giác.

Ví dụ 2: Cho tứ giác $ABCD$ có chu vi là $4a$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng trong hai đoạn thẳng EG và HF có một đoạn thẳng có độ dài không lớn hơn a .

Giải (hình 3.4)

• **Tìm cách giải**

Để chứng minh một trong hai đoạn thẳng EG và HF có một đoạn thẳng có độ dài không lớn hơn a ta chứng minh tổng hai đoạn thẳng này không lớn hơn $2a$. Khi đó một trong hai đoạn thẳng có độ dài không lớn hơn a .

• **Trình bày lời giải**

Gọi M là trung điểm của BD

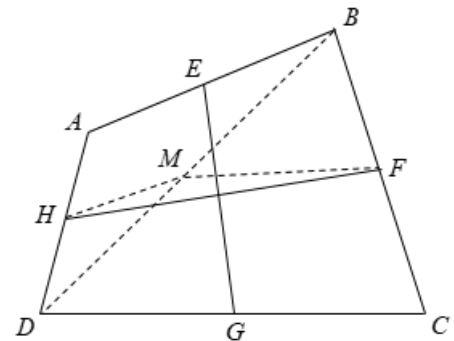
Xét $\triangle ABD$ có HM là đường trung bình nên $HM = \frac{AB}{2}$

Xét $\triangle BDC$ có MF là đường trung bình nên $MF = \frac{CD}{2}$

Xét ba điểm M, H, F có $HF \leq MH + MF = \frac{AB + CD}{2}$

Chứng minh tương tự, ta được: $EG \leq \frac{AD + BC}{2}$.

Vậy $HF + EG \leq \frac{AB + CD + AD + BC}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$



(Hình 3.4)

Suy ra một trong hai đoạn HF, EG có độ dài không lớn hơn a .

Nhận xét: Phương pháp vẽ hình phụ trong ví dụ này vẫn là vẽ trung điểm của đoạn BD . Cũng có thể vẽ trung điểm của cạnh AC thay cho trung điểm của đoạn thẳng BD .

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC , $BC = 6cm$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = \frac{1}{3}AB$. Vẽ

$DE // BC$ $E \in AC$. Tính độ dài DE

Giải (hình 3.5)

• **Tìm cách giải**

Vì $AD = \frac{1}{2}DB$ nên ta vẽ trung điểm F của DB . Từ F vẽ đường thẳng song song với BC thì DE chính là đường trung bình của tam giác. Từ đó sẽ tính được độ dài của nó.

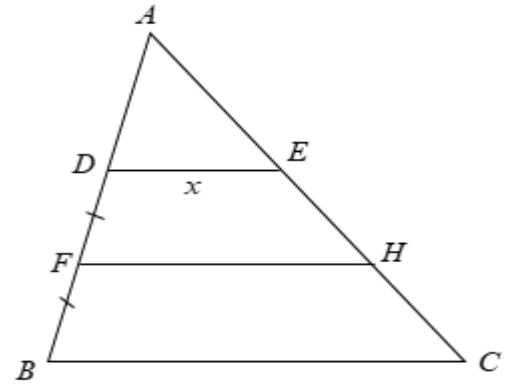
• **Trình bày lời giải**

Gọi F là trung điểm của DB . Khi đó: $AD = DF = FB$

Vẽ $FH // BC$ $H \in AC$

Xét $\triangle AFH$ có $DE // FH$ và $AD = DF$ nên $AE = EH$

Xét hình thang $DECB$ có $FH // BC$ và $DF = FB$ nên $EH = HC$



(Hình 3.5)

Ta đặt $DE = x$

Ta có DE là đường trung bình của $\triangle AFH \Rightarrow DF = \frac{1}{2}FH \Rightarrow FH = 2x$

Ta có FH là đường trung bình của hình thang $DECB \Rightarrow FH = \frac{DE + BC}{2} \Rightarrow 2x = \frac{x + 6}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ cm}$

Vậy $DE = 2 \text{ cm}$.

Nhận xét: Phương pháp vẽ hình phụ trong ví dụ này là ngoài việc vẽ trung điểm của một đoạn thẳng ta còn thêm một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác.

Ví dụ 4: Cho hình thang $ABCD$, AB là đáy nhỏ. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD và AC .

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh $PQ // CD$ và $PQ = \frac{CD - AB}{2}$

c) Hình thang $ABCD$ phải có điều kiện gì để $MP = PQ = QN$

Giải (hình 3.6)

• **Tìm cách giải**

Trong hình vẽ có nhiều đường thẳng cùng đi qua một điểm và cùng song song với một đường thẳng nên có thể vận dụng tiên đề Ô – clit để chứng minh thẳng hàng.

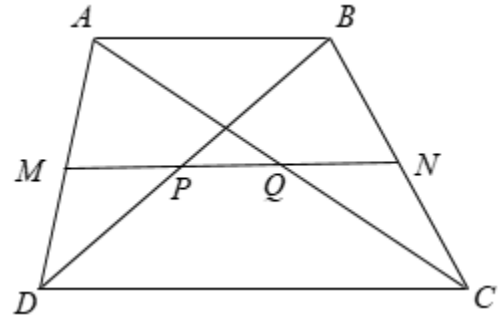
• **Trình bày lời giải**

a) Xét $\triangle ABD$ có MP là đường trung bình

$$\Rightarrow MP \parallel AB \Rightarrow MP \parallel CD$$

Xét $\triangle ADC$ có MQ là đường trung bình $\Rightarrow MQ \parallel CD$

Xét hình thang $ABCD$ có MN là đường trung bình $\Rightarrow MN \parallel CD$



(Hình 3.6)

Qua điểm M có các đường thẳng MP, MQ, MN cùng song song với CD nên các đường thẳng trùng nhau, suy ra bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

b) Ta có $MN \parallel CD$ nên $PQ \parallel CD$; $PQ = MQ - MP = \frac{CD}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}$

c) Ta có $MP = NQ = \frac{AB}{2}$; $MP = PQ \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}$

$$\Leftrightarrow AB = CD - AB \Leftrightarrow 2AB = CD \text{ (đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ)}$$

Nhận xét: Đường trung bình MN của hình thang và đoạn thẳng PQ nối trung điểm của hai đường chéo có tính chất giống nhau là cùng song song với hai đáy, có tính chất khác nhau là MN bằng nửa tổng hai đáy còn PQ bằng nửa hiệu hai đáy.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

• **Đường trung bình của tam giác**

3.1. Cho tứ giác $ABCD$, đường chéo BD là đường trung trực của AC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và AB . Vẽ $ME \perp BC$ và $NF \perp CD$ $E \in BC, F \in CD$. Chứng minh rằng ba đường thẳng ME, NF và AC đồng quy.

3.2. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB lấy điểm D , trên cạnh AC lấy điểm E . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BE và CD . Đường thẳng MN cắt tia AB và AC lần lượt tại P và Q . Hỏi hai điểm D và E phải có điều kiện gì để tam giác APQ cân tại A ?

3.3. Cho tam giác ABC . Gọi Bx và Cy lần lượt là các đường thẳng chứa tia phân giác của các góc ngoài tại đỉnh B và C . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên Bx và Cy .

a) Chứng minh rằng tứ giác $BCKH$ là hình thang

b) Tam giác ABC cần điều kiện gì để hình thang $BCKH$ là hình thang cân?

3.4. Cho tam giác ABC , trực tâm H . Gọi O là giao điểm của ba đường trung trực. Chứng minh rằng khoảng cách từ O tới BC bằng nửa độ dài AH .

3.5. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH và đường phân giác BD . Biết rằng $AH = \frac{1}{2}BD$. Tính số đo các góc của tam giác ABC .

3.6. Cho tam giác ABC cân tại A . Lấy điểm D ở trong tam giác. Vẽ tam giác ADE vuông cân tại A sao cho D và E thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD và DE . Tính số đo các góc của tam giác MNP .

3.7. Cho hình thang cân $ABCD$ $AB // CD$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi G, E, F lần lượt là trung điểm của OA, OD và BC . Cho biết $COD = 60^\circ$. Tính số đo các góc của tam giác GEF .

3.8. Cho tam giác ABC , góc A nhọn. Vẽ về phía ngoài của tam giác này các tam giác vuông cân ABM và CAN theo thứ tự có cạnh đáy là AB và AC . Gọi O là trung điểm của BC . Chứng minh rằng tam giác OMN là tam giác vuông cân.

3.9. Tam giác ABC , $AB < AC$. Trên cạnh AB lấy điểm E , trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $BE = CF$. Gọi M là trung điểm của EF . Chứng minh rằng khi E và F di động trên AB, AC thì trung điểm M của EF nằm trên một đường thẳng cố định.

3.10. Cho đoạn thẳng AB và n điểm O_1, O_2, \dots, O_n không nằm giữa A và B sao cho $O_1A + O_2A + \dots + O_nA = O_1B + O_2B + \dots + O_nB = a$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm M sao cho $O_1M + O_2M + \dots + O_nM \leq a$.

3.11. Cho tam giác ABC , $\hat{C} \leq \hat{B} \leq \hat{A}$. Biết rằng trung điểm của ba đường cao thẳng hàng. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A .

Đường trung bình của hình thang

3.12. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB < CD$). Vẽ $AH \perp CD$. Chứng minh rằng:

- HD bằng đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo.
- HC bằng đường trung bình của hình thang.

3.13. Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm của AB . Trên tia đối của tia BC lấy điểm O sao cho $BO = \frac{1}{2}BC$. Đường thẳng OM cắt OC tại N . Chứng minh rằng $AN = \frac{1}{4}AC$.

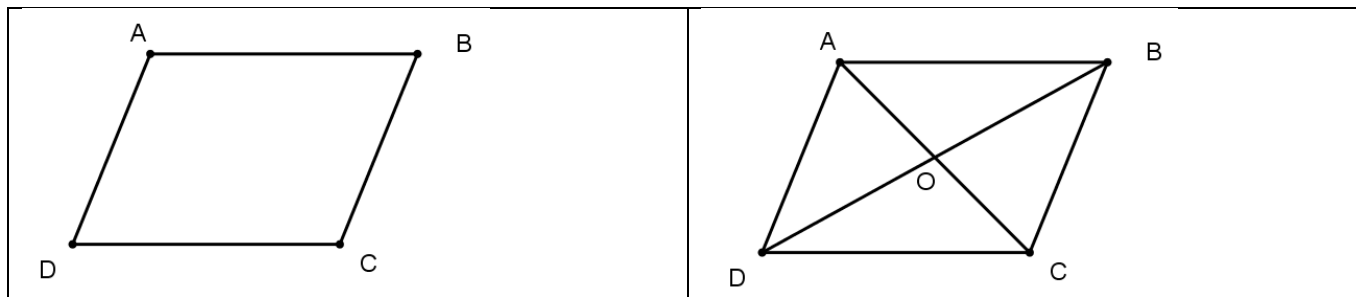
3.14. Cho tam giác ABC , cạnh BC cố định. Vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác ABM vuông cân tại B , tam giác CAN vuông cân tại C . Chứng minh rằng khi A di động trên một nửa mặt phẳng bờ BC thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

3.15. Cho điểm M nằm giữa hai điểm A, B nhưng không là trung điểm của đoạn AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tam giác CAM và DBM cân tại C và D sao cho $\hat{C} = \hat{D}$. Gọi H và F lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh rằng $HF = \frac{1}{2}CD$.

3.16. Chứng minh rằng trong các tam giác có một góc bằng nhau, xen giữa hai cạnh có tổng bằng nhau thì tam giác cân có chu vi nhỏ nhất.

CHUYÊN ĐỀ 4. HÌNH BÌNH HÀNH**A. Kiến thức cần nhớ****1. Định nghĩa**

Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song (h. 4.1)

**2. Tính chất**

Trong hình bình hành (h. 4.2):

Các cạnh đối bằng nhau

Các góc đối bằng nhau

Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết

Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành

Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành

Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành

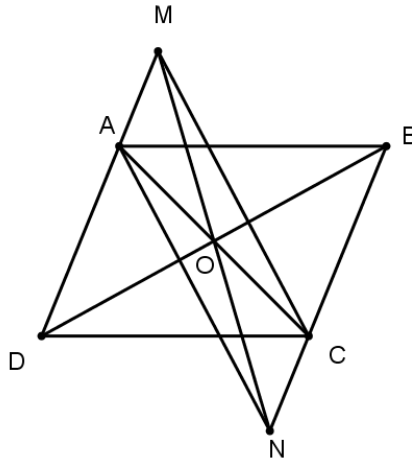
Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành

Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên tia đối của tia AD lấy điểm M , trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $AM = CN$. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, AC, BD gặp nhau tại một điểm.

Giải (h. 4.3)



Tìm cách giải

AC và BD là hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$ nên chúng cắt nhau tại trung điểm O của AC .

Trình bày lời giải

Tứ giác $AMCN$ có $AM \parallel CN$ và $AM = CN$ nên là hình bình hành. Suy ra hai đường chéo MN và AC cắt nhau tại trung điểm O của AC .

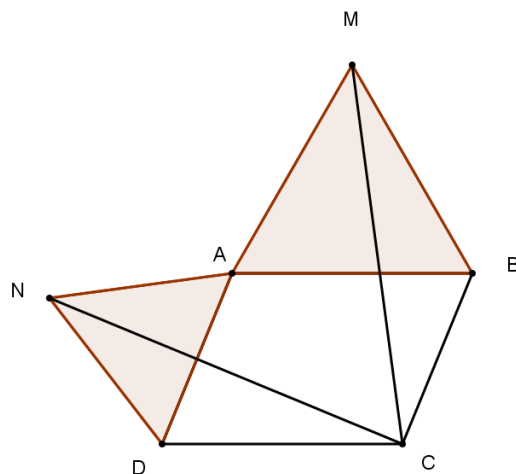
Mặt khác, $ABCD$ là hình bình hành nên hai đường chéo BD và AC cắt nhau tại trung điểm O của AC .

Như vậy, các đường thẳng MD, BD và AC cùng đi qua trung điểm O của AC .

Nhận xét: Hai hình bình hành $AMCD$ và $ABCD$ có chung đường chéo AC thì các đường chéo của chúng đồng quy tại trung điểm của đường chéo chung.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$, vẽ ra phía ngoài của hình bình hành các tam giác đều ABM và ADN . Chứng minh rằng tam giác CMD là tam giác đều.

Giải (h.4.4)



Tìm cách giải

Đề bài cho hình bình hành và các tam giác đều nên có nhiều đoạn thẳng bằng nhau, nhiều góc bằng nhau. Do đó có thể nghĩ đến việc chứng minh tam giác bằng nhau.

Trình bày lời giải

Ta đặt $ABC = \alpha$ thì $ADC = \alpha, BAD = 180^\circ - \alpha, MAN = 360^\circ - (60^\circ + 60^\circ + 180^\circ - \alpha) = 60^\circ + \alpha$.

$\triangle MAN$ và $\triangle CDN$ có

$$AM = DC (= AB); \quad \angle MAN = \angle CDN (= 60^\circ + \alpha); \quad AN = DN.$$

Do đó $\triangle MAN = \triangle CDN$ (c-g-c) $\Rightarrow MN = CN$ (1)

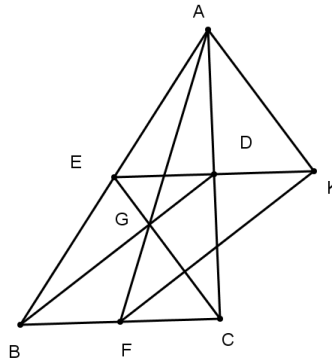
Chứng minh tương tự, ta được $\triangle MAN = \triangle MBC$ (c-g-c) $\Rightarrow MN = MC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN = CN = MC$. Vậy $\triangle CMN$ đều.

Nhận xét: Việc đặt $ABC = \alpha$ là một kỹ thuật giúp ta tính toán và so sánh góc được nhanh chóng, thuận tiện.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai đường trung tuyến vuông góc với nhau thì tổng các bình phương của hai đường trung tuyến này bằng bình phương của đường trung tuyến thứ ba.

Giải (h. 4.5)



Tìm cách giải

Kết luận của bài toán gợi ý cho ta vận dụng định lý Py-ta-go. Muốn vậy phải vẽ đường phụ tạo ra một tam giác vuông có ba cạnh bằng ba đường trung tuyến.

Trình bày lời giải

Giả sử tam giác ABC là tam giác có hai đường trung tuyến BD, CE vuông góc với nhau, ta phải chứng minh $BD^2 + CE^2 = AF^2$ (AF là đường trung tuyến thứ ba).

Trên tia ED lấy điểm K sao cho D là trung điểm của EK . Tứ giác $AKCE$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

$$\Rightarrow AK \parallel CE \text{ và } AK = CE.$$

Ta có $DE \parallel BC$ và $DE = \frac{1}{2}BC \Rightarrow DK \parallel BF$ và $DK = BF$.

Vậy tứ giác $DKFB$ là hình bình hành $\Rightarrow KF \parallel BD$ và $KF = BD$.

Mặt khác $BD \perp CE$ nên $AK \perp KF$.

Do đó $\triangle KAF$ vuông tại $A \Rightarrow AK^2 + KF^2 = AF^2 \Rightarrow CE^2 + BD^2 = AF^2$.

C. Bài tập vận dụng

Tính chất hình bình hành

4.1. Cho tam giác ABC nhọn. Vẽ ra phía ngoài tam giác này các tam giác ABD , và tam giác ACE vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm DE . Chứng minh rằng hai đường thẳng MA, BC vuông góc với nhau.

4.2. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ ra ngoài hình bình hành các tam giác ABM vuông cân tại A, BCN vuông cân tại C . Chứng minh rằng tam giác DMN vuông cân.

4.3. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H . Chứng minh rằng chu vi của tam giác ABC lớn hơn $\frac{3}{2}(HA + HB + HC)$.

4.4. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) và một điểm O ở trong hình này. Chứng minh rằng có một tứ giác mà bốn cạnh lần lượt bằng OA, OB, OC, OD và bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của hình thang cân.

4.5. Cho hình bình hành $ABCD$ và đường thẳng xy không cắt các cạnh của hình bình hành. Qua các đỉnh A, B, C, D vẽ các đường thẳng vuông góc với xy , cắt xy lần lượt tại A', B', C', D' . Chứng minh rằng $AA' + CC' = BB' + DD'$.

4.6. Cho hình bình hành $ABCD$ ($AD < AB$). Vẽ ra ngoài hình bình hành các tam giác ABM cân tại B và tam giác ADN cân tại D sao cho $ABM = ADN$.

a) Chứng minh rằng $CM = CN$;

b) Trên AC lấy một điểm O . Hãy so sánh OM, ON .

4.7. Cho tam giác ABC cân tại $A, AB < AC$. Trên tia AB có điểm D , trên tia CA có điểm E sao cho $AD = DE = EC = CB$. Tính các góc của tam giác ABC .

Nhận biết hình bình hành.

4.8. Chứng minh rằng trong một tứ giác, đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo và các đoạn thẳng nối trung điểm của hai cặp cạnh đối diện gặp nhau tại một điểm (định lý Giéc-gôn, nhà toán học Pháp).

4.9. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của NA, NB, MC, MD . Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, EF, GH đồng quy.

4.10. Cho đoạn thẳng PQ và một điểm A ở ngoài đường thẳng PQ . Vẽ hình bình hành $ABCD$ có đường chéo $BD \parallel PQ$ và $BD = PQ$. Chứng minh rằng mỗi đường thẳng BC và CD luôn đi qua một điểm cố định.

4.11. Trong tất cả các tứ giác với hai đường chéo có độ dài m và n cho trước và góc xen giữa hai đường chéo có độ lớn α cho trước hãy xác định tứ giác có chu vi nhỏ nhất

• **Dựng hình bình hành**

4.12. Cho tam giác ABC . Dựng điểm $M \in AB$, điểm $N \in AC$ sao cho $MN \parallel BC$ và $BM = AN$

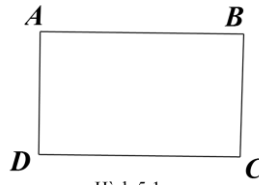
4.13. Dựng hình bình hành $ABCD$ biết vị trí của điểm A và vị trí các trung điểm M, N của BC và CD .

4.14. Cho trước hai điểm A và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng d . Một đoạn thẳng CD có độ dài a cho trước nằm trên đường thẳng d . Hãy xác định vị trí của điểm C và D để tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất

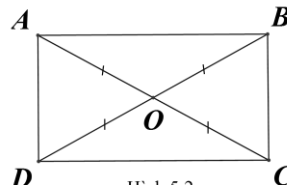
4.15. Hai điểm dân cư A và B ở hai bên một con sông có hai bờ d và d' . Chiều rộng con sông bằng a . Hãy tìm địa điểm bắc cầu sao cho quãng đường từ A sang B là ngắn nhất (cầu vuông góc với bờ sông).

CHUYÊN ĐỀ 5. HÌNH CHỮ NHẬT**A. Kiến thức cần nhớ****1. Định nghĩa**

Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông (h.5.1)



Hình 5.1



Hình 5.2

2. Tính chất

Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (h.5.2).

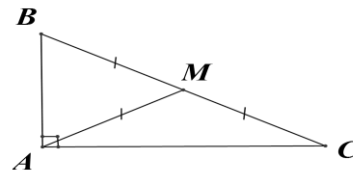
3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

4. Áp dụng vào tam giác (h.5.3)

$$\triangle ABC : MB = MC$$

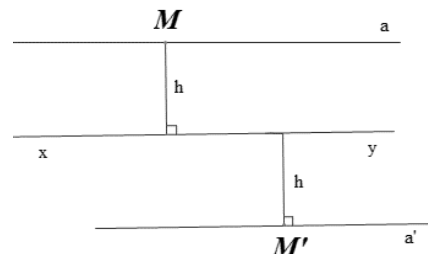
$$A = 90^\circ \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}BC$$



Hình 5.3

5. Tính chất các điểm cách đều một đường thẳng cho trước (h.5.4)

Tập hợp các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h .



Hình 5.4

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy một điểm M . Trên tia AM lấy điểm N sao cho M là trung điểm của AN . Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của N trên đường thẳng BC và CD . Chứng minh rằng ba điểm M, E, F thẳng hàng.

Giải (h.5.5)

* *Tìm cách giải*

Xét $\triangle CAN$, đường thẳng EF đi qua trung điểm của CN , muốn cho EF đi qua trung điểm M của AN ta cần chứng minh $EF \parallel AC$.

* *Trình bày lời giải*

Tứ giác $ENFC$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm của AC và BD và K là giao điểm của EF và CN . Theo tính chất hình chữ nhật,

ta có: $OA = OB = OC = OD$;

$KC = KN = KE = FF$.

Xét $\triangle CAN$ có OM là đường trung

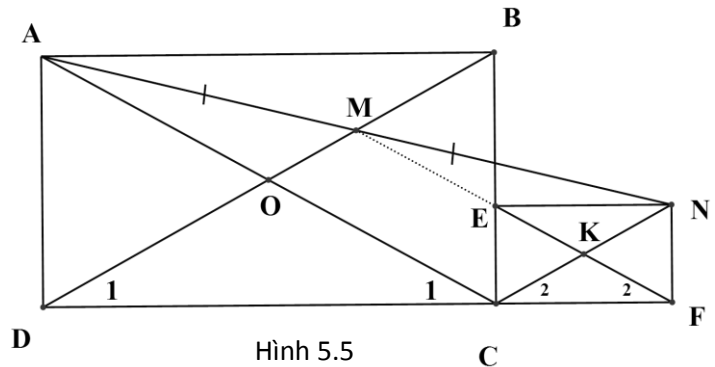
binh nên $OM \parallel CN$.

Do đó $BD \parallel CN$.

$\triangle OCD$, $\triangle KCF$ cân, suy ra: $D_1 = C_1$, $C_2 = F_2$

Mặt khác, $D_1 = C_2$ (cặp góc đồng vị) $C_1 = F_2$ Suy ra $AC \parallel EF$.

Xét $\triangle CAN$ có đường thẳng EF đi qua trung điểm K của CN và $EF \parallel AC$ nên EF đi qua trung điểm của AN , tức là đi qua M . Vậy ba điểm M, E, F thẳng hàng.



Hình 5.5

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC cân tại A . Từ một điểm trên đáy BC , vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AC, AB lần lượt tại M và N . Gọi H và K lần lượt là trung điểm của BC và MN . Chứng minh rằng tứ giác $AKDH$ là hình chữ nhật.

Giải (h.5.6)

* *Tìm cách giải*

Để thấy tứ giác $AKDH$ có hai góc vuông là $H = D = 90^\circ$ nên chỉ cần chứng minh tứ giác này có một góc vuông nữa là thành hình chữ nhật.

A. Trình bày lời giải

$\triangle BKC$ cân tại A , AH là đường trung tuyến nên cũng là đường cao, đường phân giác.

Do đó: $H = 90^\circ$ và $A_1 = A_2$

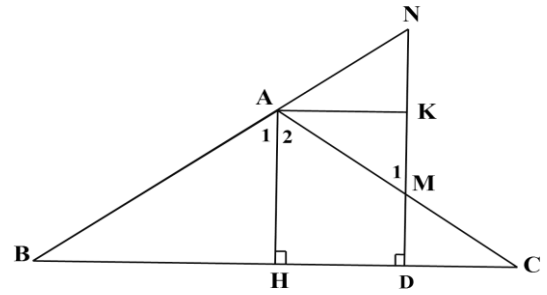
Ta có: $AH \parallel DN$ (vì cùng vuông góc với BC)
 $\Rightarrow N = A_1$ (cặp góc đồng vị); $M_1 = A_2$ (cặp góc so le trong).

Do đó $N = M_1$ (vì $A_1 = A_2$)

Vậy $\triangle AMN$ cân tại A mà AK là đường trung

tuyến nên AK cũng là đường cao, $K = 90^\circ$. Từ

giác $AKDH$ có $K = H = D = 90^\circ$ nên nó là hình chữ nhật.



Hình 5.6

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên cạnh huyền BC lấy điểm D . Vẽ

$DH \perp AB$, $DK \perp AC$. Biết $AB = a$, tính giá trị lớn nhất của tích $DH \cdot CK$.

Giải (h.5.7)

*** Tìm cách giải**

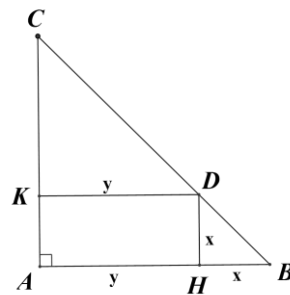
Ta thấy $DH + DK = AB$ (không đổi). Dựa vào các hằng đẳng thức ta có thể tìm được mối quan hệ giữa tích $DH \cdot CK$ với tổng $DH + DK$. Mối quan hệ này được biểu diễn như sau:

Ta có: $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy$

$$\Leftrightarrow xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}$$

*** Trình bày lời giải**

Từ giác $AHDK$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.



Hình 5.7

Tam giác HBD có $H = 90^\circ$; $B = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân. Ta đặt: $DH = x$. $DK = y$ thì $HB = x$, $AH = y$ và $x + y = a$

Ta có: $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow D$ là trung điểm của B

Vậy giá trị lớn nhất của tích $DH.CK$ là $\frac{a^2}{4}$ khi D là trung điểm của BC .

Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$, $A = D = 90^\circ$. Trên cạnh AD có một điểm H mà $AH < DH$ và $BHC = 90^\circ$. Chứng minh rằng trên cạnh AD còn một điểm K sao cho $BKC = 90^\circ$.

Giải (h.5.8)

* *Tìm cách giải*

Giả sử đã chứng minh được $BKC = 90^\circ$ thì $\triangle BHC$ và $\triangle BKC$ là hai tam giác vuông chung cạnh huyền BC nên hai đường trung tuyến ứng với BC phải bằng nhau. Do đó cần chứng minh hai đường trung tuyến này bằng nhau.

* *Trình bày lời giải*

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Khi đó MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$, suy ra: $MN \parallel AB$

$\Rightarrow MN \perp AD$ (vì $AB \perp AD$)

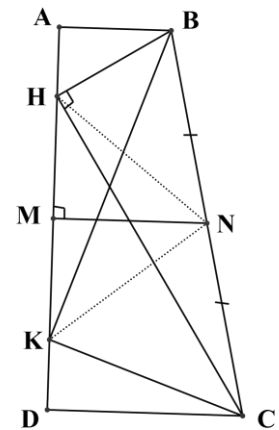
Trên cạnh AD lấy điểm K sao cho $DK = AH \Rightarrow MK = MH$.

$\triangle NHK$ có MN vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên là tam giác cân $\Rightarrow KN = HN$

Xét $\triangle HBC$ vuông tại H có $HN = \frac{1}{2}BC$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền).

Suy ra $KN = \frac{1}{2}BC$ (vì $KN = HN$)

Do đó $\triangle KBC$ vuông tại $K \Rightarrow BKC = 90^\circ$



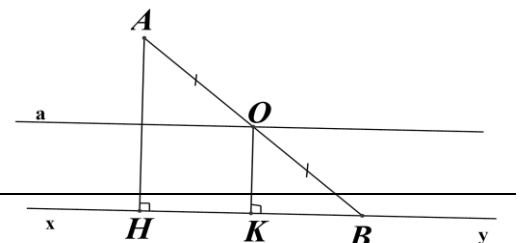
Hình 5.8

Ví dụ 5. Cho đường thẳng xy . Một điểm A cố định nằm ngoài xy và một điểm B di động trên xy

Gọi O là trung điểm của AB . Hỏi điểm O di động trên đường nào?

Giải (h.5.9)

Vẽ $AH \perp xy$, $OK \perp xy$.



Hình 5.9

Ta có: AH là một đoạn thẳng cố định. Xét $\triangle ABH$ có $OK \parallel AH$ và $OA = OB$ nên $KH = KB$.

Vậy OK là đường trung bình suy ra:

$$OK = \frac{1}{2} AH \text{ (không đổi).}$$

Điểm O cách đường thẳng xy cho trước một khoảng

không đổi là $\frac{1}{2} AH$ nên điểm O di động trên đường thẳng $a \parallel xy$ và cách xy là $\frac{AH}{2}$ (đường thẳng a và điểm A cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ xy).

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

• Tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình chữ nhật

5.1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , đường cao AD . Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC . Vẽ $ME \perp AB$, $MF \perp AC$. Tính số đo các góc của tam giác DEF .

5.2. Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $AD = \frac{1}{2} AC$ và $BAC = \frac{1}{2} DAC$. Chứng minh rằng hình bình hành $ABCD$ là hình chữ nhật.

5.3. Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 8$, $BC = 6$. Điểm M nằm trong hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng: $S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

5.4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi O là một điểm bất kì trong tam giác. Vẽ $OD \perp AB$, $OE \perp BC$ và $OF \perp CA$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng: $S = OD^2 + OE^2 + OF^2$.

5.5. Cho hình chữ nhật $ABCD$, đường chéo $AC = d$. Trên các cạnh AB , BC , CD và DA lần lượt lấy các điểm M , N , P , Q . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng: $S = MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2$.

5.6. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Trên các cạnh AB , AC lần lượt lấy các điểm D , E sao cho $AD = CE$. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài DE .

• Tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông

5.7. Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên cạnh huyền BC lấy một điểm M . Vẽ $MD \perp AB$, $ME \perp AC$, $AH \perp BC$. Tính số đo góc DHE .

5.8. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , đường trung tuyến AD . Vẽ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của HB và HC .

a) Chứng minh rằng $EM \parallel FN \parallel AD$.

b) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì thì ba đường thẳng EM , FN , AD là ba đường thẳng song song cách đều.

5.9. Cho tam giác ABC vuông tại A $AB < AC$, đường cao AH . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Gọi M là trung điểm của BD . Chứng minh rằng tia HM là tia phân giác của góc AHC .

5.10. Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 15$, $BC = 8$. Trên các cạnh AB , BC , CD , DA lần lượt lấy các điểm E , F , G , H . Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác $EFGH$.

• **Đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước**

5.11. Cho góc xOy có số đo bằng 30° . Điểm A cố định trên tia Ox sao cho $OA = 2cm$. Lấy điểm B bất kì trên tia Oy . Trên tia đối của tia BA lấy điểm C sao cho $BC = 2BA$. Hỏi khi điểm B di động trên tia Oy thì điểm C di động trên đường nào?

5.12. Cho góc xOy có số đo bằng 45° . Điểm A cố định trên tia Ox sao cho $OA = 3\sqrt{2}cm$. Lấy điểm B bất kì trên tia Oy . Gọi G là trọng tâm của tam giác OAB . Hỏi khi điểm B di động trên tia Oy thì điểm G di động trên đường nào?

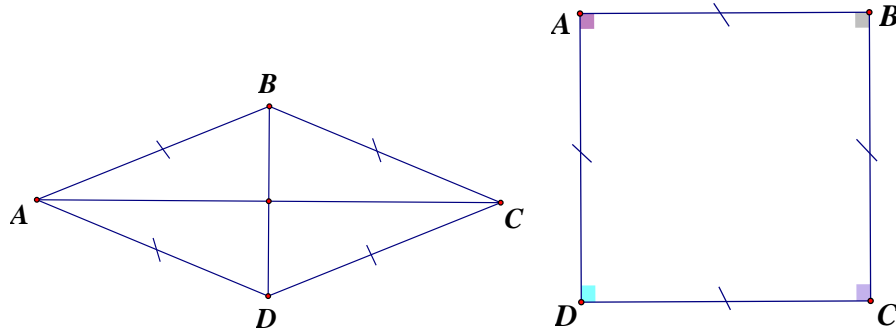
5.13. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = CN$. Gọi O là trung điểm của MN . Hỏi điểm O di động trên đường nào?

5.14. Bên trong hình chữ nhật kích thước 3×6 cho 10 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong số 10 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn 2,3.

5.15. Bên trong hình chữ nhật kích thước 3×6 cho 8 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong số 8 điểm đó có khoảng cách nhỏ hơn 2,3.

CHUYÊN ĐỀ 6. HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG**A. Kiến thức cần nhớ****1. Định nghĩa**

- Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau (h.6.1)
- Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau (h.6.2)

**2. Tính chất**

- * Trong hình thoi:
 - Hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau;
 - Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi;
- * Hình vuông có đủ các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

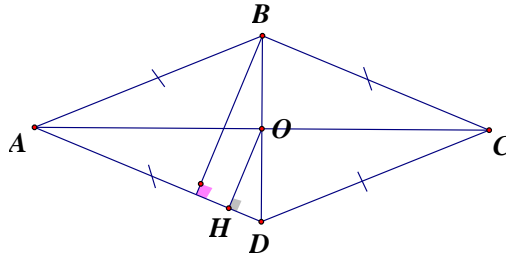
3. Dấu hiệu nhận biết

- * Nhận biết hình thoi:
 - Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi;
 - Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi;
 - Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi;
 - Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.
- * Nhận biết hình vuông:
 - Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông;
 - Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc là hình vuông;
 - Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông;
 - Hình thoi có một góc vuông là hình vuông;
 - Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình thoi $ABCD$, độ dài mỗi cạnh là 13cm . Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ $OH \perp AD$. Biết $OH = 6\text{cm}$, tính tỉ số của hai đường chéo BD và AC

Giải (h.63)



*** Tìm cách giải**

Vẽ thêm $BK \perp AD$ để dùng định lý đường trung bình của tam giác, định lý Py-ta-go tính bình phương độ dài của mỗi đường chéo.

*** Trình bày lời giải**

Vẽ $BK \perp AD$

Xét $\triangle BKD$ có $OH \parallel BK$ (vì cùng vuông góc với AD) và $OB = OD$ nên $KH = HD$.

Vậy OH là đường trung bình của $\triangle BKD$.

Suy ra $OH = \frac{1}{2}BK$, do đó $BK = 12cm$.

Xét $\triangle ABK$ vuông tại K có: $AK^2 = AB^2 - BK^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow AK = 5cm$ do đó $KD = 8cm$.

Xét $\triangle BKD$ vuông tại K có: $BD^2 = BK^2 + KD^2 = 12^2 + 8^2 = 208$.

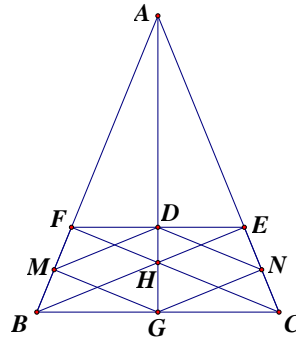
Xét $\triangle AOH$ vuông tại H có: $OA^2 = OH^2 + AH^2 = 6^2 + 9^2 = 117$.

$$\Rightarrow \left(\frac{AC}{2} \right)^2 = 117 \Rightarrow AC^2 = 468.$$

$$\text{Do đó: } \frac{BD^2}{AC^2} = \frac{208}{468} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{BD}{AC} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC cân tại A , hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Đường thẳng AH cắt EF tại D , cắt BC tại G . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của G trên AB và AC . Chứng minh rằng tứ giác $DNGM$ là hình thoi.

Giải (h.6.4)



*** Tìm cách giải**

Dùng định lý đường trung bình của tam giác ta chứng minh được tứ giác $DNGM$ là hình bình hành. Sau đó chứng minh hai cạnh kề bằng nhau.

*** Trình bày lời giải**

$$\triangle ABE = \triangle ACF \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)} \Rightarrow AE = AF \text{ và } BE = CF$$

Vì H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên AH là đường cao, đồng thời là đường trung tuyến, từ đó $GB = GC$ và từ đó $GB = GC$ và $DE = DF$.

Xét $\triangle EBC$ có $GN \parallel BE$ (cùng vuông góc với AC) và $GB = GC$ nên $NE = NC$.

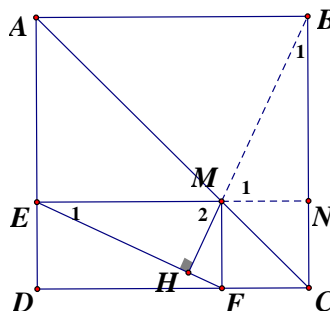
Chứng minh tương tự, ta được $MF = MB$.

Dùng định lý đường trung bình của tam giác ta chứng minh được $DM \parallel GN$ và $DM = GN$ nên tứ giác $DNGM$ là hình bình hành.

Mặt khác, $DM = DN$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ của hai cạnh bằng nhau) nên $DNGM$ là hình thoi.

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm M trên đường chéo AC . Vẽ $ME \perp AD$, $MF \perp CD$ và $MH \perp EF$. Chứng minh rằng khi điểm M di động trên AC thì đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định.

Giải (h.6.5)



*** Tìm cách giải**

Vẽ hình chính xác ta thấy đường thẳng MH đi qua một điểm cố định là điểm B . Vì thế ta sẽ chứng minh ba điểm H, M, B thẳng hàng bằng cách chứng minh $M_1 = M_2$.

*** Trình bày lời giải**

Gọi N là giao điểm của đường thẳng EM với BC

Khi đó $BN = AE$; $AE = ME$ (vì $\triangle AEM$ vuông cân), suy ra $BN = ME$.

Chứng minh tương tự, ta được: $MN = MF$

Nối MB ta được: $\triangle BMN = \triangle EFM$ c.g.c

Suy ra: $B_1 = E_1$ do đó $M_1 = M_2$

Từ đó ba điểm H, M, B thẳng hàng.

Vậy đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định là điểm B .

Ví dụ 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên cạnh BC lấy điểm M , trên cạnh CD lấy điểm N sao cho chu vi các tam giác CMN bằng $2a$. Chứng minh rằng góc MAN có số đo không đổi.

Giải (h.6.6)

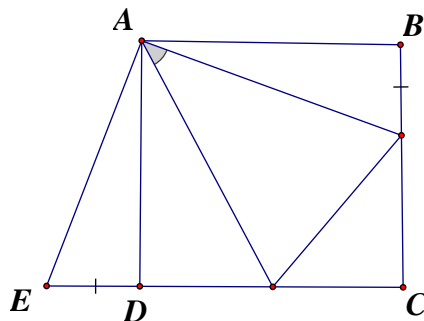
*** Tìm cách giải**

Vẽ hình chính xác ta luôn thấy $MAN = 45^\circ$. Vì vậy ta vẽ hình phụ tạo ra góc 90° rồi chứng minh MAN bằng nửa góc vuông đó.

*** Trình bày lời giải:**

Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho $DE = BM$.

$\triangle BAM = \triangle DAE$ c.g.c suy ra $AM = AE$ và $BAM = DAE$..



Hình 6.6

Ta có: $BAM + DAM = 90^\circ$

$\Rightarrow DAE + DAM = 90^\circ$ hay $EAM = 90^\circ$.

Theo đề bài, $CM + CN + MN = 2a$ mà $CM + CN + MB + ND = 2a$

Nên $MN = MB + ND$ hay $MN = DE + ND = EN$.

$$\triangle MAN = \triangle EAN \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \angle MAN = \angle EAN = \frac{\angle EAM}{2} = 45^\circ.$$

Vậy $\triangle MAN$ có số đo không đổi.

Ví dụ 5. Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = BN = CP$. Qua N vẽ một đường thẳng vuông góc với MP cắt AD tại Q . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

Giải (h 6.7)

(*) Tìm cách giải

Từ giả thiết ta nghĩ đến việc chứng minh rằng các tam giác bằng nhau để suy ra bốn cạnh của tứ giác $MNPQ$ bằng nhau., ta được tứ giác này là hình thoi. Sau đó chứng minh hai đường chéo nhau để được hình vuông.

(*) Trình bày lời giải

Gọi O là giao điểm của ME và NF .

Ta có: $AB = BC = CD = DA$ mà $AM = BN = CP$

Nên $BM = CN = DP$.

Dễ thấy tứ giác $AMOF$ là hình vuông.

$\triangle EMP$ và $\triangle FNQ$ có:

$$\angle E = \angle F = 90^\circ; ME = NF \text{ (bằng cạnh hình vuông)}.$$

$$\angle EMP = \angle FNQ \text{ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)}$$

$$\Rightarrow \triangle EMP = \triangle FNQ \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MP = NQ \text{ và } EP = FQ.$$

Ta có: $DE = AM = AF \Rightarrow DP = AQ$ do đó $DQ = CP$.

Các tam giác BNM, CPN, DQP và AMQ bằng nhau suy ra:

$$MN = QN = QP = QM.$$

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình thoi, Hình thoi này có hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.

C. Bài tập vận dụng

(*) Hình thoi

6.1. Một hình thoi có góc nhọn bằng 30° . Khoảng cách từ giao điểm của hai đường chéo đến mỗi cạnh bằng h . Tính độ dài mỗi cạnh của hình thoi.

6.2. Cho hình thoi $ABCD$, chu vi bằng $8cm$. Tìm giá trị lớn nhất của tích hai đường chéo.

6.3. Cho hình thoi $ABCD$, $A = 40^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB . Vẽ $DH \perp CM$. Tính số đo của góc MHB .

6.4. Cho hình thoi $ABCD$. Trên nửa mặt phẳng bờ BD có chứa điểm C , vẽ hình bình hành $BDEF$ sao cho $DE = DC$. Chứng minh rằng C là trực tâm của tam giác AEF .

6.5. Cho hình bình hành $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O . Gọi E, F, G, H lần lượt là các giao điểm các đường phân giác của tam giác AOB, BOC, COD và DOA . Chứng minh rằng tứ giác $EFGH$ là hình thoi.

6.6. Dựng hình thoi $ABCD$ biết $AC + BD = 8cm$ và $ABD = 25^\circ$.

(*) Hình vuông

6.7. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy các điểm E và F sao cho $BE = EF = FC$. Trên cạnh AD lấy điểm G sao cho $AG = \frac{1}{3}AD$. Tính tổng $AEG + AFG + ACG$.

6.8. Cho hình vuông $ABCD$. Trên đường chéo AC lấy một điểm M . Vẽ $ME \perp AD, MF \perp CD$. Chứng minh rằng ba đường thẳng AF, CE và BM đồng quy.

6.9. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Vẽ ra phía ngoài tam giác này các hình vuông $ABDE$ và $ACFG$. Chứng minh rằng:

a) Ba đường thẳng AH, DE và FG đồng quy.

b) Ba đường thẳng AH, BF và CD đồng quy.

6.10. Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E . Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $AE = CF$. Gọi O là trung điểm của EF . Vẽ điểm M sao cho O là trung điểm của DM . Chứng minh rằng tứ giác $DEMF$ là hình vuông.

6.11. Cho tam giác ABC , $A = 45^\circ$. Vẽ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, HB và HC . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

6.12. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ ra phía ngoài của hình bình hành các hình vuông có một cạnh là cạnh của hình bình hành. Gọi E, F, G, H lần lượt là tâm (tức là giao điểm của hai đường chéo) của các hình vuông vẽ trên các cạnh AB, BC, CD và DA . Chứng minh rằng: $EG = HF$ và $EG \perp HF$.

6.13. Dựng hình vuông $ABCD$ biết đỉnh A và trung điểm M của CD .

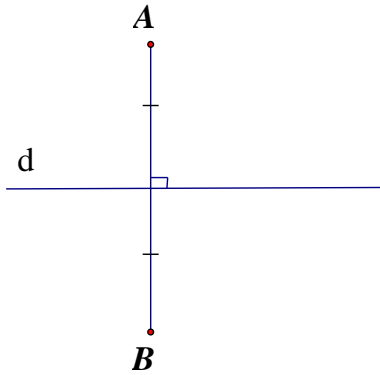
6.14. Một bàn cờ hình vuông có kích thước 6×6 . Có thể dùng 9 mảnh gỗ hình chữ nhật có kích thước 1×4 để ghép kín bàn cờ được không?

6.15. Một hình chữ nhật có kích thước 3×6 . Hãy chia hình chữ nhật này thành nhiều phần (hình tam giác, tứ giác) để ghép lại thành một hình vuông (số phần được chia ra càng ít càng tốt).

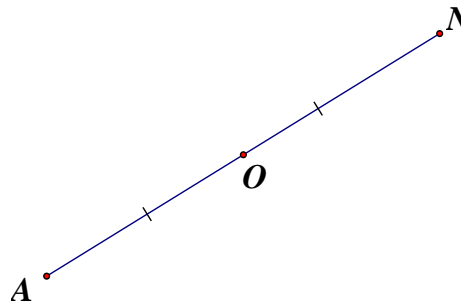
CHUYÊN ĐỀ 7. ĐỐI XỨNG TRỰC – ĐỐI XỨNG TÂM**A. Kiến thức cần nhớ****1. Các định nghĩa**

(*) Hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng d , nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó (h.7.1)

(*) Hai điểm đối xứng nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó (h.7.2).



Hình 7.1



Hình 7.2

(*) Hai hình gọi là đối xứng nhau qua đường thẳng d (hoặc qua điểm O), nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d (hoặc qua điểm O) và ngược lại.

2. Tính chất

Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng (hoặc qua một điểm) thì chúng bằng nhau.

3. Hình có trục đối xứng, có tâm đối xứng

- Hình thang cân có trục đối xứng là đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy.
- Tương tự hình chữ nhật có hai trục đối xứng.
- Hình thoi có hai trục, đối xứng là hai đường chéo. Hình vuông có 4 trục đối xứng.
- Hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông có tâm đối xứng là giao điểm hai đường chéo.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$, hai đường thẳng AB và CD không vuông góc với nhau. Dựng điểm M trên đường thẳng CD sao cho tia phân giác của góc AMB vuông góc với đường thẳng CD .

Giải (h.7.3)

36

$$\Delta AOE = \Delta BFE (g.c.g) \Rightarrow EA = EB$$

Mặt khác, $EM = EN$ nên tứ giác $AMNB$ là hình bình hành.

d) Biện luận: Bài toán luôn có một nghiệm hình.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Điểm D thuộc cạnh huyền BC . Vẽ điểm M và điểm N đối xứng với D lần lượt qua AB và AC . Chứng minh rằng :

- M và N đối xứng qua A ;
- Xác định vị trí của điểm D để MN ngắn nhất, dài nhất.

Giải (h.7.6)

*** Tìm cách giải**

Muốn chứng minh hai điểm M và N đối xứng qua A , ta chứng minh $AM = AN$ và $\angle MAN = 180^\circ$.

*** Trình bày lời giải**

a) AM đối xứng với AD qua AB nên

$$AM = AD \text{ và } \angle 1 = \angle 2. \quad (1)$$

$$AN \text{ đối xứng với } AD \text{ qua } AC \text{ nên } AN = AD \text{ và } \angle 3 = \angle 4. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AM = AN$ và $\angle MAN = 2(\angle 2 + \angle 3) = 2\angle BAC = 2.90^\circ = 180^\circ$.

Vậy ba điểm M, A, N thẳng hàng,

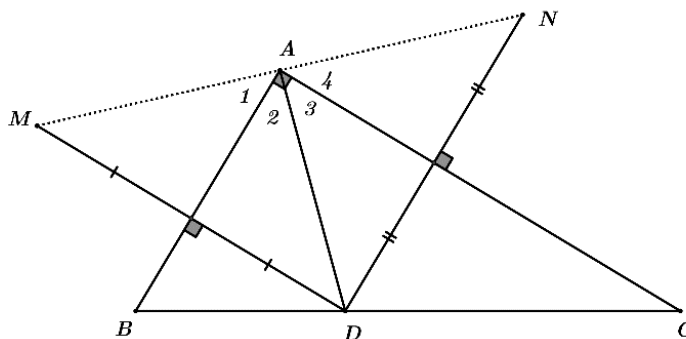
Từ đó suy ra M và N đối xứng qua A và $MN = 2AD$.

b) Vẽ $AH \perp BC$, ta có $AD \geq AH$, do đó $MN = 2AD \geq 2AH$.

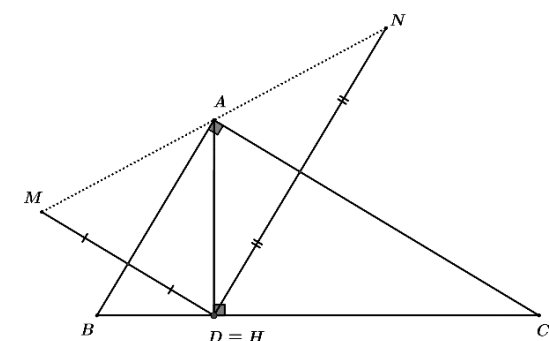
Vậy MN ngắn nhất là bằng $2AH$ khi $D \equiv H$ (h.7.7).

Dựa vào quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu ta có $AD \leq AC$ suy ra $MN = 2AD \leq 2AC$.

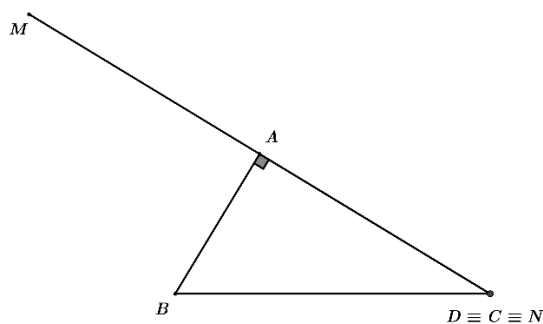
Do đó MN dài nhất là bằng $2AC$ khi $D \equiv C$ (h.7.8).



Hình 7.6



Hình 7.7



Hình 7.8

C. Bài tập vận dụng

* Đối xứng trục

7.1. Cho tam giác ABD . Vẽ điểm C đối xứng với A qua BD . Vẽ các đường phân giác ngoài tại các đỉnh A, B, C, D của tứ giác $ABCD$ chúng cắt nhau tạo thành tứ giác $EFGH$.

- Xác định dạng của tứ giác $EFGH$;
- Chứng minh rằng BD là trục đối xứng của tứ giác $EFGH$.

7.2. Cho tam giác nhọn ABC . Gọi D là điểm nằm giữa B và C . Vẽ các điểm M và N đối xứng với D lần lượt qua AB và AC .

- Chứng minh rằng góc MAN luôn có số đo không đổi;
- Xác định vị trí của D để MN có độ dài ngắn nhất.

7.3. Cho tam giác nhọn ABC . Gọi D, E, F lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, CA, AB . Xác định vị trí của D, E, F để chu vi tam giác DEF nhỏ nhất.

7.4. Cho hai điểm A, B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ xy . Hãy tìm trên xy hai điểm C và D sao cho $CD = a$ cho trước và chu vi tứ giác $ABCD$ nhỏ nhất.

7.5. Cho tam giác ABC , đường phân giác AD và một điểm M ở trong tam giác. Vẽ các điểm N, P, A' đối xứng với M lần lượt qua AB, AC và AD .

- Chứng minh rằng N và P đối xứng qua AA' ;
- Gọi B', C' là các điểm đối xứng với M lần lượt qua các đường phân giác của góc B , và góc C . Chứng minh rằng ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

7.6. Cho tứ giác $ABCD$ với một điểm M nằm giữa A và B . Chứng minh rằng $MC + ND$ nhỏ hơn số lớn nhất trong hai tổng $AC + AD, BC + BD$.

* Đối xứng tâm

- 7.1.** Cho tam giác ABC và O là một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng với O qua D, E, F. Chứng minh rằng ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.
- 7.2.** Cho góc xOy khác góc bẹt và một điểm G ở trong góc đó. Dựng điểm $A \in Ox$, điểm $B \in Oy$ sao cho G là trọng tâm của tam giác OAB.
- 7.3.** Cho tam giác ABC. Vẽ điểm D đối xứng với A qua điểm B. Vẽ điểm E đối xứng với B qua C. Vẽ điểm F đối xứng với C qua A. Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác DEF có cùng một trọng tâm.
- 7.4.** Dựng hình bình hành ABCD biết vị trí trung điểm M của AB, trung điểm N của BC và trung điểm P của CD.
- 7.5.** Dựng tứ giác ABCD biết $AD = AB = BC$ và ba điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, AB và BC (biết M, N, P không thẳng hàng).
- 7.6.** Cho một hình vuông gồm 4×4 ô vuông. Trong mỗi ô viết một trong các số 1, 2, 3, 4. Chứng minh rằng tồn tại một hình bình hành có đỉnh là tâm của bốn ô vuông sao cho tổng hai số ở hai đỉnh đối diện là bằng nhau.

CHUYÊN ĐỀ 8. VẼ HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN**A. Kiến thức cần nhớ**

Nhiều bài toán trong chương tứ giác cần phải vẽ hình phụ thì mới giải được. Vẽ hình phụ để tạo thêm sự liên kết giữa giả thiết và kết luận từ đó dễ tìm ra cách giải. Một số cách vẽ hình phụ thường dùng trong chương này là:

1. Nếu đề bài có hình thang thì từ một đỉnh có thể vẽ thêm một đường thẳng:

- song song với một cạnh bên;
- song song với một đường chéo;
- vuông góc với đáy.

Khi vẽ như vậy, một đoạn thẳng đã được dời song song với chính nó từ vị trí này đến một vị trí khác thuận lợi hơn trong việc liên kết với các yếu tố khác, từ đó giải được bài toán.

2. Vẽ thêm hình bình hành để chứng minh hai đường thẳng song song, chứng minh quan hệ về độ dài, chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng, tính số đo góc,...

3. Vẽ thêm trung điểm của đoạn thẳng để vận dụng định lý đường trung bình của tam giác, của hình thang, định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông. Cũng có thể vẽ thêm đường thẳng song song để tạo ra đường trung bình của tam giác, hình thang.

Dùng định lý đường trung bình có thể chứng minh các quan hệ song song, thẳng hàng, các quan hệ về độ dài,...

4. Vẽ điểm đối xứng với một điểm cho trước qua một đường thẳng hoặc qua một điểm. Nhờ cách vẽ này ta cũng có thể dời một đoạn thẳng, một góc từ vị trí này sang vị trí khác thuận lợi cho việc chứng minh.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong một hình thang tổng hai cạnh bên lớn hơn hiệu hai cạnh đáy.

Giải (h.8.1)

** Tìm cách giải*

Xét hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), ta phải chứng minh $AD + BC > CD - AB$.

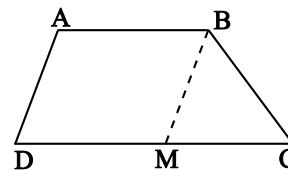
Điều phải chứng minh rất gần với bất đẳng thức tam giác. Điều này gợi ý cho ta vẽ hình phụ để có $AD + BC$ là tổng các độ dài hai cạnh của một tam giác.

** Trình bày lời giải*

Vẽ $BM \parallel AD$ ($M \in CD$) ta được $DM = AB$ và $BM = AD$.

Xét $\triangle BMC$ có $BM + BC > MC \Rightarrow AD + BC > DC - DM$

hay $AD + BC > CD - AB$ (đpcm).



Hình 8.1

Trường hợp hai cạnh bên song song thì hai đáy bằng nhau, bài toán hiển nhiên đúng.

Ví dụ 2. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), hai đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AB = 5\text{cm}$, $CD = 12\text{cm}$ và $AC = 15\text{cm}$. Tính độ dài BD.

Giải (h.8.2)

* *Tìm cách giải*

Ba đoạn thẳng AB, AC và CD đã biết độ dài nhưng ba đoạn thẳng này không phải ba cạnh của một tam giác nên không tiện sử dụng. Ta sẽ dời song song đường chéo AC đến vị trí BE thì tam giác BDE vuông tại B biết độ dài hai cạnh, dễ dàng tính được độ dài cạnh thứ ba BD.

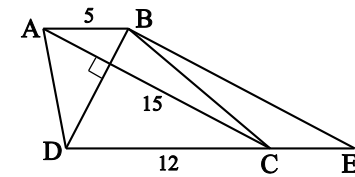
* *Trình bày lời giải*

Vẽ $BE \parallel AC$ ($E \in \text{tia DC}$).

Khi đó $BE = AC = 15\text{cm}$; $CE = AB = 5\text{cm}$.

Ta có $BE \perp BD$ (vì $AC \perp BD$).

Xét $\triangle BDE$ vuông tại B có $BD = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8(\text{cm})$.



Hình 8.2

Ví dụ 3. Hình thang ABCD có $A = D = 90^\circ$. Biết $AB = 3\text{cm}$; $BC = 2\sqrt{2}\text{cm}$ và $CD = 5\text{cm}$. Chứng minh rằng $B = 3C$.

Giải (h.8.3)

* *Tìm cách giải*

Nếu dời song song đoạn thẳng AD tới vị trí BH thì được $\triangle BHC$ vuông tại H. Ta dễ dàng tính được $HC = HB$, do đó tính được góc C, góc B.

* *Trình bày lời giải*

Vẽ $BH \perp CD$ ($H \in CD$) thì $BH \parallel AD$, do đó

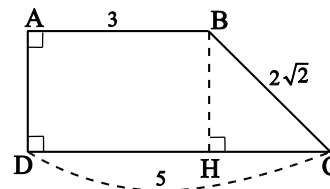
$$DH = AB = 3\text{cm}$$

suy ra $HC = 5 - 3 = 2(\text{cm})$.

Xét $\triangle BHC$ vuông tại H, áp dụng định lý Py-ta-go ta có

$$HB = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2(\text{cm}).$$

Vậy $\triangle HBC$ vuông cân $\Rightarrow C = 45^\circ$ do đó $\angle ABC = 135^\circ$ suy ra $\angle ABC = 3C$.



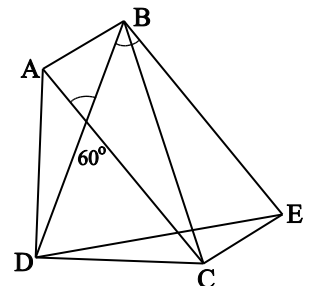
Hình 8.3

Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD, hai đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $\angle AOB = 60^\circ$ và $AC = BD = a$. Chứng minh rằng $AB + CD \geq a$.

Giải (h.8.4)

* *Tìm cách giải*

Từ điều phải chứng minh ta thấy cần vận dụng bất đẳng thức tam giác. Do đó cần vẽ hình phụ để tạo ra một tam giác có hai cạnh lần lượt bằng hai cạnh AB, CD và cạnh thứ ba bằng đường chéo AC



Nếu vẽ thêm hình bình hành $ABEC$ thì các yêu cầu trên được thỏa mãn.

*** Trình bày lời giải**

Hình 8.4

Vẽ hình bình hành $ABEC$, ta được $BE \parallel AC$ suy ra $\angle DBE = \angle AOB = 60^\circ$;

$$BE = AC = a; AB = CE.$$

Tam giác DBE là tam giác đều $\Rightarrow DE = a$.

Xét ba điểm C, D, E ta có: $CE + CD \geq DE$ hay $AB + CD \geq a$ (Dấu “=” xảy ra khi điểm C nằm giữa D và E hay $DC \parallel AB$. Khi đó tứ giác $ABCD$ là hình thang cân).

Ví dụ 5: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Vẽ $AH \perp BD$. Gọi K và M lần lượt là trung điểm của BH và CD . Tính số đo của góc AKM .

Giải (h.8.5)

*** Tìm cách giải**

Bài toán có cho hai trung điểm K và M nhưng chưa thể vận dụng trực tiếp được.

Ta vẽ thêm trung điểm N của AB để vận dụng định lý đường trung bình của hình chữ nhật, đường trung bình của hình tam giác.

*** Trình bày lời giải**

Gọi N là trung điểm của AB thì MN là đường trung bình của hình chữ nhật $ABCD \Rightarrow MN \parallel AD$.

Mặt khác, $AN \parallel DM$ nên tứ giác $ANMD$ là hình bình hành. Hình bình hành này có $\angle D = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật. Suy ra hai đường chéo AM và DN cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường:

$$OA = OM = ON = OD.$$

Xét $\triangle ABH$ có NK là đường trung bình nên $NK \parallel AH \Rightarrow NK \perp BD$ (vì $AH \perp BD$).

Do đó $\triangle KDN$ vuông tại K .

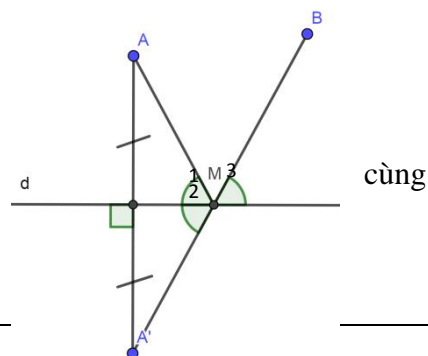
Ví dụ 6: Cho hai điểm A và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d . Tìm trên d một điểm M sao cho hai tia MA, MB tạo với đường thẳng d hai góc nhọn bằng nhau.

Giải (h.8.6)

*** Tìm cách giải**

Giả sử đã tìm được điểm $M \in d$ sao cho $\angle 1 = \angle 2$.

Vẽ điểm A' đối xứng với A qua d thì $\angle 1 = \angle 3$, suy ra $\angle 2 = \angle 3$ (bằng $\angle 1$). Do đó ba điểm A', M, B thẳng hàng.



Hình 8.5

*** Trình bày lời giải**

- Vẽ điểm A' đối xứng với A qua d ;
- Vẽ đoạn thẳng $A'B$ cắt đường thẳng d tại M ;
- Vẽ đoạn thẳng MA ta được $M_1 = M_2$.

Hình 8.6

Thật vậy, do A' đối xứng với A qua d nên $M_1 = M_3$.

Mặt khác, $M_2 = M_3$ (đối đỉnh) nên $M_1 = M_2$.

C. Bài tập vận dụng**• Vẽ thêm đường thẳng song song**

8.1. Chứng minh rằng nếu một hình thang có hai cạnh bên bằng nhau thì đó là hình thang cân hoặc hình bình hành.

8.2. Cho hình thang có hai đáy không bằng nhau. Chứng minh rằng tổng hai góc kề đáy lớn nhỏ hơn tổng hai góc kề đáy nhỏ.

8.3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $BD \perp CD$. Cho biết $AB + CD = BD = a$. Tính độ dài AC .

8.4. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), đường cao bằng h và tổng hai đáy bằng $2h$. Tính góc xen giữa hai đường chéo.

8.5. Chứng minh rằng trong một hình thang thì tổng các bình phương của hai đường chéo bằng tổng các bình phương của hai cạnh bên cộng với hai lần tích của hai cạnh đáy.

• Vẽ thêm hình bình hành

8.6. Cho tam giác ABC . Dựng ra ngoài tam giác này các tam giác đều ABD , BCE , CAF . Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác DEF trùng với trọng tâm của tam giác ABC .

8.7. Cho tam giác đều ABC . Trên cạnh BC lấy điểm M . Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với AB cắt AB tại H , cắt đường thẳng vuông góc với AC vẽ từ C tại điểm K . Gọi N là trung điểm của BM . Chứng minh rằng tam giác ANK có số đo các góc tỉ lệ với 1, 2, 3.

8.8. Dựng tứ giác $ABCD$ sao cho $AB = 2,5cm$; $BC = 3cm$; $CD = 4,5cm$; $DA = 3,5cm$ và góc nhọn giữa hai đường thẳng AD, BC là 40° .

• Vẽ thêm trung điểm – Tạo đường trung bình

8.9. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $A = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{2}CD$. Vẽ $DH \perp AC$. Gọi K là trung điểm của HC .

Tính số đo góc BCD .

8.10. Cho hình vuông $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và CD . Chứng minh rằng tam giác MNB vuông cân.

8.11. Cho tam giác ABC cân tại A , đường phân giác BM . Từ M vẽ một đường thẳng vuông góc với BM cắt đường thẳng BC tại D . Chứng minh rằng $BD = 2CM$.

8.12. Cho tứ giác $ABCD$, $CAD = CBD = 90^\circ$. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của C và D trên đường thẳng AB . Chứng minh rằng $AF = BE$.

8.13. Cho đường thẳng xy . Vẽ tam giác ABC trên một nửa mặt phẳng bờ xy . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Từ A, B, C và G vẽ các đường thẳng song song với nhau cắt xy lần lượt tại A', B', C' và G' . Chứng minh rằng:

$$AA' + BB' + CC' = 3GG'$$

8.14. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M và D sao cho $AM = AD$. Từ A và M vẽ các đường thẳng vuông góc với BD . Chúng cắt BC lần lượt tại E và F . Chứng minh rằng

$$AE = \frac{BD + MF}{2}$$

8.15. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC . Chứng minh rằng:

a) Các đường thẳng AA', BB', CC', DD' cùng đi qua một điểm.

b) Điểm này chia AA', BB', CC', DD' theo cùng một tỉ số.

8.16. Cho tam giác ABC và một điểm O nằm trong tam giác sao cho $ABO = ACO$. Vẽ $OH \perp AB, OK \perp AC$. Chứng minh rằng đường trung trực của HK đi qua một điểm cố định.

• **Vẽ thêm hình đối xứng**

8.17. Cho góc xOy có số đo bằng 60° và một điểm A ở trong góc đó sao cho A cách Ox là 2cm và cách Oy là 1cm .

a) Tìm một điểm B trên Ox và một điểm C trên Oy sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

b) Tính độ dài nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC .

8.18. Dựng tam giác biết một đỉnh, trọng tâm và hai đường thẳng đi qua hai đỉnh còn lại.

CHUYÊN ĐỀ 9. TOÁN QUỸ TÍCH**A. Kiến thức cần nhớ****1. Định nghĩa**

Quỹ tích của những điểm có tính chất **T** nào đó là tập hợp tất cả những điểm có tính chất **T** đó.

2. Các quỹ tích cơ bản

- Quỹ tích các điểm cách đều hai đầu của một đoạn thẳng cố định là đường thẳng trung trực của đoạn thẳng đó. (1)

- Quỹ tích các điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó. (2)

- Quỹ tích các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng h . (3)

- Quỹ tích những điểm cách một điểm O cố định một khoảng R không đổi là đường tròn tâm O , bán kính R . (4)

3. Cách giải bài toán tìm quỹ tích các điểm có chung tính chất T nào đó

a) *Phần thuận*: Chứng minh rằng nếu điểm M có tính chất **T** thì điểm M thuộc một hình H nào đó.

b) *Phần đảo*: Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc hình H thì điểm M có tính chất **T**.

c) *Kết luận*: Quỹ tích của điểm M là hình H .

4. Một số lưu ý khi giải bài toán tìm quỹ tích

a) *Tìm hiểu đề bài*:

Cần xét xem:

- Yếu tố nào cố định (vì trong các quỹ tích cơ bản đều có nói đến yếu tố cố định như điểm, đoạn thẳng, góc,...)

- Yếu tố nào không đổi (thường là khoảng cách không đổi, góc có số đo không đổi,...);

- Yếu tố nào chuyển động (điểm nào có vị trí thay đổi, liên quan đến điểm phải tìm quỹ tích như thế nào?).

d) *Dự đoán quỹ tích*

Vẽ nháp vài vị trí của điểm cần tìm quỹ tích (thường là vẽ ba vị trí).

- Nếu ba điểm này thẳng hàng thì ta dự đoán quỹ tích là đường thẳng (đường thẳng song song, đường trung trực, tia phân giác,...).

- Nếu ba điểm không thẳng hàng thì quỹ tích có thể là đường tròn.

c) *Giới hạn quỹ tích*

Có nhiều bài toán quỹ tích cần tìm chỉ là một phần của hình H , phần còn lại không thỏa mãn điều kiện của bài toán, ta phải loại trừ phần này. Làm như vậy gọi là tìm giới hạn của quỹ tích.

Việc tìm giới hạn của quỹ tích thường làm au phần thuận, trước phần đảo.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC và D là một điểm đi động trên cạnh BC . Vẽ $DE \parallel AB$, $DF \parallel AE$ ($E \in AC, F \in AB$). Gọi M là trung điểm của EF . Tìm quỹ tích của điểm M .

Giải (h.9.1)

a) Phân thuận

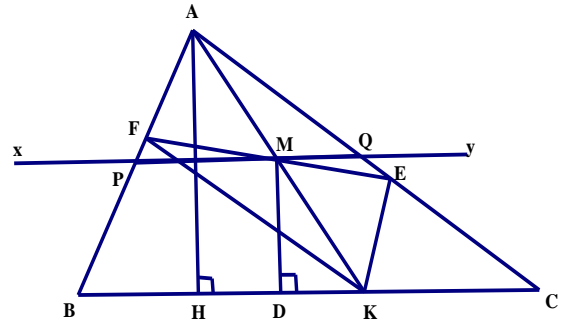
Tứ giác $ADEF$ có $DE \parallel AF$, $DF \parallel AE$ nên là hình bình hành.

Suy ra AD và EF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Vậy trung điểm M của EF cũng là trung điểm của AD .

Vẽ $MK \perp BC, AH \perp BC$.

Do AH cố định nên AH có độ dài không đổi.



Hình.9.1

Xét $\triangle AHD$ có MK là đường trung bình, $MK = \frac{1}{2}AH$ (không đổi). Điểm M cách đường thẳng BC cố định một khoảng $\frac{1}{2}AH$ không đổi nên điểm M nằm trên đường thẳng $xy \parallel BC$ và cách BC một khoảng $\frac{1}{2}AH$ (xy nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A).

Giới hạn: Khi điểm D đi động tới điểm B thì điểm M đi động tới trung điểm P của AB . Khi điểm D đi động tới điểm C thì điểm M đi động tới điểm Q của AC . Vậy điểm M chỉ nằm trên đường trung bình PQ của $\triangle ABC$.

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kỳ trên đoạn PQ . Vẽ tia AM cắt BC tại D . Vẽ $DE \parallel AB$, $DF \parallel AE$ ($E \in AC, F \in AB$). Ta phải chứng minh M là trung điểm của EF .

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm M là đường trung bình PQ của $\triangle ABC$.

Nhận xét: Điểm M là trung điểm của EF . Đây là *tính chất ban đầu* của điểm M , chưa phải là *tính chất cơ bản* theo quỹ tích (1),(2),(3),(4). Do đó chưa thể vận dụng để trả lời điểm M nằm trên hình nào.

Ta đã giải quyết vấn đề này bằng cách biến đổi tính chất ban đầu của điểm M lần lượt như sau:

M là trung điểm của EF (tính chất ban đầu)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AD (tính chất T)

$\Rightarrow M$ cách đường thẳng BC cố định một khoảng không đổi $\frac{1}{2}AH$ (đây mới là tính chất cơ bản của điểm M)

$\Rightarrow M$ nằm trên đường thẳng $xy \parallel BC$ và cách BC một khoảng $\frac{1}{2}AH$.

Như vậy ta phải chuyển *tính chất ban đầu* của điểm M qua các tính chất trung gian đến *tính chất cơ bản* của điểm M rồi theo các quỹ tích cơ bản trả lời điểm M nằm trên hình nào.

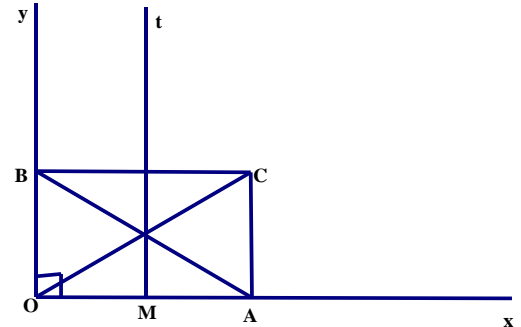
Ví dụ 2. Cho góc vuông xOy , điểm A cố định trên tia Ox , điểm B di động trên tia Oy . Vẽ hình chữ nhật $AOBC$. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo AB và OC . Tìm quỹ tích điểm M .

Giải (h.9.2)

a) Phân thuận

M là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật nên $MO = MA$.

Điểm M cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng OA cố định nên điểm M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OA .



Hình.9.2

Giới hạn: Khi điểm B tiến dần tới điểm O thì điểm C tiến dần tới điểm A khi đó điểm M tiến dần tới điểm M_1 là trung điểm của OA . Khi điểm B ra xa vô tận thì điểm M cũng ra xa vô tận. Vậy M nằm trên tia M_1t thuộc đường trung trực của OA , tia này nằm trong góc xOy , trừ điểm M_1 .

b) Phân đảo

Lấy điểm M bất kỳ trên tia M_1t . Vẽ tia AM cắt tia Oy tại B . Vẽ hình chữ nhật $AOBC$. Ta phải chứng minh M là giao điểm của hai đường chéo.

Thật vậy xét $\triangle AOB$ có $M_1t \parallel OB$ (vì cùng vuông góc với OA).

Mặt khác, $M_1O = M_1A$, nên $MA = MB$. Vậy M là trung điểm của AB .

$\Rightarrow M$ cũng là trung điểm của OC (vì $AOBC$ là hình chữ nhật).

Vậy M là giao điểm của hai đường chéo.

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm M là tia M_1t thuộc đường trung trực của OA , tia này nằm trong góc xOy , trừ điểm M_1 .

Ví dụ 3: Cho góc vuông xOy . Điểm A cố định trên tia Ox sao cho $OA = 2cm$. Điểm B di động trên tia Oy . Vẽ Tam giác ABM vuông cân tại M trong đó M và O thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB . Tìm quỹ tích điểm M .

Giải (h.9.3)

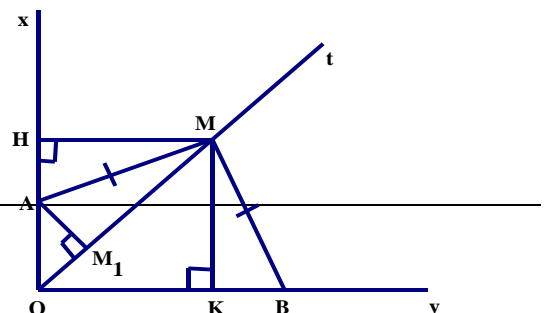
a) Phân thuận

Vẽ $MH \perp Ox, MK \perp Oy$ ta được $HMK = 90^\circ$

Mặt khác, $AMB = 90^\circ$ nên $HMA = KMB$

(hai góc có cạnh tương ứng cùng nhọn)

$\triangle HMA = \triangle KMB$ (cạnh huyền – góc nhọn).



Suy ra $MH = MK$

Điểm M nằm trong góc xOy và cách đều hai cạnh của góc đó nên điểm M nằm trên tia phân giác của xOy .

Hình.9.3

Giới hạn: Khi điểm B trùng với điểm O thì điểm M trùng với điểm M_1 (M_1 nằm trên tia Ot và $OM_1 = \sqrt{2}cm$). Khi điểm B ra xa vô cùng thì điểm M ra xa vô cùng. Vậy M nằm trên tia M_1t .

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kỳ trên tia M_1t . Từ điểm M vẽ một đường thẳng vuông góc với AM cắt tia Oy tại B . Ta phải chứng minh $\triangle AMB$ vuông cân tại M .

Thật vậy, vẽ $MH \perp Ox, MK \perp Oy$ ta có: $MH = MK$ và $HMK = 90^\circ \Rightarrow HMA = KMB$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn)

Do đó: $\triangle HMA = \triangle KMB$ (g.c.g) $\Rightarrow MA = MB$

$\triangle AMB$ vuông tại M có $MA = MB$ nên là tam giác vuông cân.

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm M là tia M_1t là tia phân giác của góc xOy .

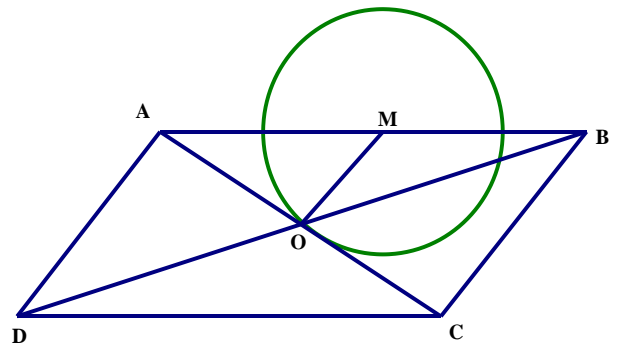
Ví dụ 4: Cho hình bình hành $ABCD$ cạnh AB cố định, $BC = 2cm$. Tìm quỹ tích điểm giao điểm O của hai đường chéo.

Giải (h.9.4)

a) Phần thuận

Gọi M là trung điểm của AB .

Do AB cố định nên M là điểm cố định. O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành nên $\Rightarrow OA = OC$. Vậy OM là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow OM = \frac{1}{2}BC = 1cm$



Hình.9.4

Điểm O cách điểm M cố định một khoảng $1cm$ nên điểm O nằm trên đường tròn tâm M , bán kính $1cm$.

Giới hạn: Vì ba điểm O, A, B không thẳng hàng nên điểm O nằm trên đường tròn tâm M bán kính $1cm$.

b) Phần đảo

Lấy điểm O bất kỳ trên đường tròn tâm M , bán kính $1cm$ thì $OM = 1cm$. Vẽ điểm C đối xứng với A qua O , vẽ điểm D đối xứng với B . Ta phải chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình bình hành và $BC = 2cm$. Thật vậy, tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình

hành. OM là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $OM = \frac{1}{2}BC = BO = 2.1 = 2cm$

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm O là đường tròn tâm M , bán kính $1cm$ trừ giao điểm của đường tròn này với đường thẳng AB .

C. Bài tập vận dụng

*) Đường thẳng song song

9.1 Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau và cách nhau $2cm$. Tìm quỹ tích những điểm M có tổng khoảng cách đến a và b là $4cm$.

9.2 Cho góc vuông xOy và một điểm A cố định trên tia Ox sao cho $OA = a$. Điểm B di động trên tia Oy . Vẽ vào trong góc vuông này tam giác ABC vuông cân tại A . Tìm quỹ tích điểm C .

9.3 Cho đoạn thẳng AB và một điểm C nằm giữa A và B . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tam giác DAC và EBC vuông cân tại D và E . Gọi M là trung điểm của DE . Tìm quỹ tích của điểm M khi điểm C di động giữa A và B .

9.4 Cho đoạn thẳng AB và một điểm C nằm giữa A và B . Vẽ các tam giác đều DAC và EBC trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB . Gọi M là trung điểm của DE . Tìm quỹ tích của điểm M khi điểm C di động giữa A và B .

9.5 Cho tam giác ABC cân tại A . Một điểm D di động trên đáy BC . Đường thẳng vuông góc với BC vẽ từ D cắt các đường thẳng AB , AC lần lượt tại E và F . Gọi M là trung điểm của EF . Tìm quỹ tích của điểm M .

*) Đường trung trực và đường thẳng vuông góc

9.5 Cho góc vuông xOy và một điểm A ở trong góc đó. Một góc vuông đỉnh A quay quanh A , một cạnh cắt Ox tại B , cạnh kia cắt Oy tại C . Gọi M là trung điểm của BC . Tìm quỹ tích của điểm M .

9.7 Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là một điểm ở trong hình chữ nhật hoặc trên các cạnh của nó.

1) Chứng minh rằng: $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$;

2) Tìm quỹ tích điểm M nếu $MA + MC = MB + MD$

9.8 Cho tam giác đều ABC . Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ tia $Bx \perp BC$ và trên đó lấy một điểm D . Vẽ tam giác đều CDM (M và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ CD). Tìm quỹ tích của điểm M khi D di động trên tia Bx .

* Tia phân giác

9.9. Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E di động. Trên tia đối của tia BA lấy điểm F di động sao cho $DE = BF$. Vẽ hình bình hành $ECFM$. Hỏi điểm M di động trên đường nào.

9.10. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi D và E lần lượt là các điểm di động trên hai cạnh AB và BC sao cho $BD = BE$. Từ E vẽ một đường thẳng vuông góc với DE cắt AC tại F . Gọi M là trung điểm của DF . Tìm quỹ tích của điểm M .

9.11. Cho góc xOy có số đo bằng 60° . Một hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a ; $B = 60^\circ$, đỉnh B di động trên tia Ox , đỉnh D di động trên tia Oy , hai điểm A và O thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ BD . Tìm quỹ tích của điểm A .

* Đường tròn

9.12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 4 cm . Tia Ox nằm giữa hai tia DA và DC . Vẽ tia phân giác của góc ADx cắt AB tại E , tia phân giác của góc CDx cắt BC tại F . Tia Dx cắt EF tại M . Hỏi khi tia Dx quay quanh D từ vị trí DA đến vị trí DC thì điểm M di động trên đường nào?

9.13. Cho góc vuông xOy . Một đoạn thẳng $AB = 2a$ không đổi, có $A \in Ox$ và $B \in Oy$. Tìm quỹ tích trung điểm M của AB .

9.14. Cho hình bình hành $ABCD$ cạnh CD cố định, $AC = 2\text{ cm}$. Tìm quỹ tích của đỉnh B .

MỤC LỤC

CHUYÊN ĐỀ 10. ĐA GIÁC – ĐẶC GIÁC ĐỀU	2
CHUYÊN ĐỀ 11. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC	7
CHUYÊN ĐỀ 12. PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH	15

CHƯƠNG II. ĐA GIÁC – DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

CHUYÊN ĐỀ 10. ĐA GIÁC – ĐẶC GIÁC ĐỀU

A. Kiến thức cần nhớ

1. Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.
2. Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.
3. *Bổ sung*
 - Tổng các góc trong của đa giác n cạnh ($n > 2$) là $(n-2).180^\circ$.
 - Số đường chéo của một đa giác n cạnh ($n > 2$) là $\frac{(n-3)n}{2}$.
 - Tổng các góc ngoài của đa giác n cạnh ($n > 2$) là 360° (tại mỗi đỉnh chỉ chọn một góc ngoài).
 - Trong một đa giác đều, giao điểm O của hai đường phân giác của hai góc kề một cạnh là tâm của đa giác đều. Tâm O cách đều các đỉnh, cách đều các cạnh của đa giác đều. Có một đường tròn tâm O đi qua các đỉnh của đa giác đều gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Tìm số cạnh của một đa giác biết số đường chéo hơn số cạnh là 7.

Lời giải

* **Tìm cách giải.** Bài này biết mối liên hệ giữa số đường chéo và số cạnh nên hiển nhiên chúng ta đặt số cạnh của đa giác là n biểu thị số đường chéo là $\frac{n(n-3)}{2}$ từ đó ta tìm được số cạnh.

* **Trình bày lời giải**

Đặt số cạnh của đa giác là n ($n \geq 3$) thì số đường chéo là $\frac{n(n-3)}{2}$ theo đề bài ta có $\frac{n(n-3)}{2} - n = 7$

$$\Leftrightarrow n^2 - 5n - 14 = 0 \Leftrightarrow (n+2)(n-7) = 0.$$

Vì $n \geq 3$ nên $n-7=0 \Leftrightarrow n=7$. Vậy số cạnh của đa giác là 7.

Ví dụ 2. Tổng tất cả các góc trong và một góc ngoài của một đa giác có số đo là $47058,5^\circ$. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

Giải

* **Tìm cách giải.** Nếu ta đặt n là số cạnh, α là số đo một góc ngoài của đa giác thì $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ và $(n-2).180^\circ$ là một số nguyên.

Do đó suy ra $(n-2).180^\circ + \alpha = 47058,5^\circ$, từ đó ta có α là số dư của $47058,5^\circ$ chia cho 180° . Bằng cách suy luận như vậy, chúng ta có lời giải sau:

* **Trình bày lời giải**

Gọi n là số cạnh của đa giác ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$).

Tổng số đo các góc trong của đa giác bằng $(n-2).180^\circ$.

Vì tổng các góc trong và một trong các góc ngoài của đa giác có số đo là $47058,5^\circ$ nên ta có

$$(n-2).180^\circ + \alpha = 47058,5^\circ \quad (\alpha \text{ là số đo một góc ngoài của đa giác với } 0^\circ < \alpha < 180^\circ)$$

$$\Rightarrow (n-2).180^\circ + \alpha = 261.180^\circ + 78,5^\circ \Rightarrow n-2 = 261 \Rightarrow n = 263.$$

Vậy số cạnh của đa giác là 263.

Ví dụ 3. Tổng số đo các góc của một đa giác n - cạnh trừ đi góc A của nó bằng 570° . Tính số cạnh của đa giác đó và A .

Giải

* **Tìm cách giải.** Theo công thức tính tổng các góc trong, ta có $(n-2).180^\circ - A = 570^\circ$. Quan sát và nhìn nhận, ta có thể nhận thấy chỉ có thêm điều kiện là $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ và $0^\circ < A < 180^\circ$. Từ đó ta có lời giải sau

* **Trình bày lời giải**

$$\text{Ta có } (n-2).180^\circ - A = 570^\circ \Leftrightarrow A = (n-2).180^\circ - 570^\circ.$$

$$\text{Vì } 0^\circ < A < 180^\circ \Rightarrow 0^\circ < (n-2).180^\circ - 570^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow 570^\circ < (n-2).180^\circ < 750^\circ \Leftrightarrow \frac{19}{6} < n-2 < \frac{25}{6}$$

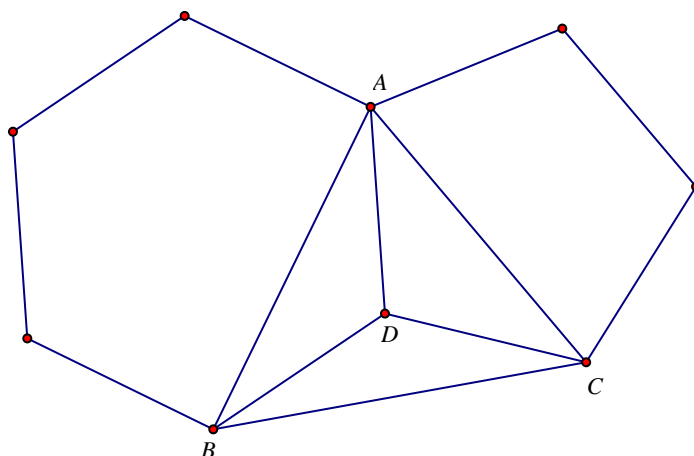
$$\Leftrightarrow 5\frac{1}{6} < n < 6\frac{1}{6}. \text{ Vì } n \in \mathbb{N} \text{ nên } n = 6.$$

$$\text{Đa giác đó có 6 cạnh và } A = (6-2).180^\circ - 570^\circ = 150^\circ.$$

Ví dụ 4. Một lục giác đều và một ngũ giác đều chung cạnh AD (như hình vẽ). Tính các góc của tam giác ABC .

Giải

* **Tìm cách giải.** Vì AD là cạnh của lục giác đều và ngũ giác đều, nên dễ dàng nhận ra $\triangle ABD$, $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ là các tam giác cân đỉnh D và tính được số đo các góc ở đỉnh. Do vậy $\triangle ABC$ sẽ tính được số đo các góc.



* **Trình bày lời giải**

Theo công thức tính góc của đa giác đều, ta có

$$\angle ADB = \frac{(6-2).180^\circ}{6} = 120^\circ \Rightarrow \angle DAB = \angle DBA = 30^\circ.$$

$$\angle ADC = \frac{(5-2).180^\circ}{5} = 108^\circ \Rightarrow \angle DAC = \angle DCA = 36^\circ;$$

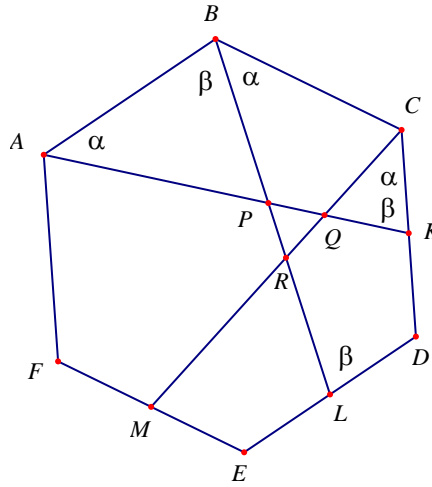
$$\text{Suy ra } \angle BDC = 360^\circ - 120^\circ - 180^\circ = 132^\circ.$$

$$\text{Ta có } \triangle BDC \text{ (} DB = DC \text{) cân tại } D. \text{ Do đó } \angle DBC = \angle DCB = \frac{180^\circ - 132^\circ}{2} = 24^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \angle BAC = 30^\circ + 36^\circ = 66^\circ; \angle ABC = 30^\circ + 24^\circ = 54^\circ; \angle BCA = 24^\circ + 36^\circ = 60^\circ.$$

Ví dụ 5. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi M, L, K lần lượt là trung điểm của EF, DE, CD . Gọi giao điểm của AK với BL và CM lần lượt là P, Q . Gọi giao điểm của CM và BL là R . Chứng minh tam giác PQR là tam giác đều.

Giải



Các tứ giác $ABCK, BCDL, CDEM$ có các cạnh và các góc đối một bằng nhau. Các góc của lục giác đều bằng 120° .

Đặt $BAK = \alpha \Rightarrow CBL = DCM = \alpha$; $LBA = \beta \Rightarrow CKA = EMC = DLB = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 120^\circ$.

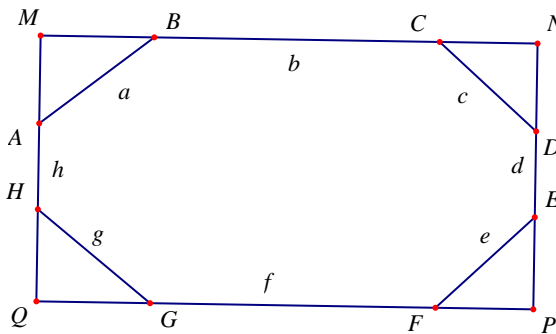
Trong tam giác CKQ có $CQK + \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow CQK = 60^\circ$.

Trong tam giác PBA có $APB + \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow APB = 60^\circ$.

Từ đó suy ra $RQP = RPQ = 60^\circ$. Vậy $\triangle PQR$ đều.

Ví dụ 6. Cho bát giác $ABCDEFGH$ có tất cả các góc bằng nhau, và độ dài các cạnh là số nguyên. Chứng minh rằng các cạnh đối diện của bát giác bằng nhau.

Giải



Các góc của bát giác bằng nhau, suy ra số đo của mỗi góc là $\frac{(8-2) \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$.

Kéo dài các cạnh AH và BC cắt nhau tại M . Ta có: $MAB = MBA = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, suy ra tam giác MAB là tam giác vuông cân.

Tương tự các tam giác CND, EBF, GQH cũng là các tam giác vuông cân, suy ra $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DE = d, EF = e, FG = f, GH = g, HA = h$. Từ các tam giác vuông cân, theo định lý Py – ta – go ta có: $MB = \frac{a}{\sqrt{2}}, CN = \frac{c}{\sqrt{2}}$ nên $MN = \frac{a}{\sqrt{2}} + b + \frac{c}{\sqrt{2}}$ tương tự $PQ = \frac{e}{\sqrt{2}} + f + \frac{g}{\sqrt{2}}$.

Do $MN = PQ$ nên $\frac{a}{\sqrt{2}} + b + \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}} + f + \frac{g}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(a + c - e - g) = f - b$.

Do f, b là các số nguyên nên vế phải của đẳng thức trên là số nguyên, do đó vế trái là số nguyên. Vế trái chỉ có thể bằng 0 tức là $f = b$ hay $BC = FG$. Tương tự ta có $AB = EF, CD = GH, DE = HA$.

Nhận xét. Dựa vào tính chất số hữu tỷ, số vô tỷ chúng ta đã giải được bài toán trên. Cũng với kỹ thuật đó, chúng ta có thể giải được bài thi hay và khó sau: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Lấy E, F thuộc các cạnh $AB; G, H$ thuộc cạnh $BC; I, J$ thuộc cạnh $CD; K, M$ thuộc cạnh DA sao cho hình 8 - giác $EFGHIJKM$ có các góc

bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình 8 – giác $EFGHIJKM$ là các số hữu tỉ thì $EF = IJ$ (Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên tỉnh Hưng Yên, năm học 2009-2010)

C. Bài tập vận dụng

10.1. Số đường chéo của một đa giác lớn hơn 14, nhưng nhỏ hơn 27. Hỏi đa giác có bao nhiêu cạnh?

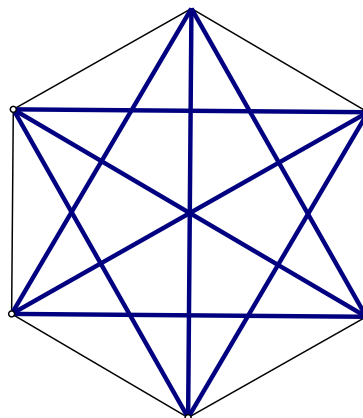
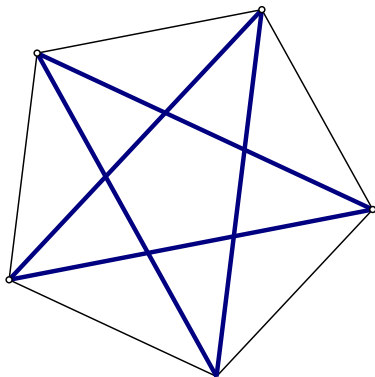
10.2. Tổng số đo các góc của một đa giác n – cạnh trừ đi góc A của nó bằng 2570° . Tính số cạnh của đa giác đó và A.

10.3. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn và M là điểm bất kì nằm trong tam giác. Gọi $A_1; B_1; C_1$ là các điểm đối xứng với M lần lượt qua trung điểm của các cạnh BC, CA, AB .

a) Chứng minh các đoạn $AA_1; BB_1; CC_1$ cùng đi qua một điểm.

b) Xác định vị trí điểm M để lục giác $AB_1CA_1BC_1$ có các cạnh bằng nhau.

10.4. Một ngũ giác đều có 5 đường chéo và nhóm 5 đường chéo này chỉ có một loại độ dài (ta gọi một loại độ dài là một nhóm các đường chéo bằng nhau). Một lục giác đều có 9 đường chéo và nhóm 9 đường chéo này có hai loại độ dài khác nhau (hình vẽ).



10.5. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có tất cả các cạnh bằng nhau và $ABC = 2DBE$. Hãy tính ABC .

10.6. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có các cạnh bằng nhau và $A = B = C$

a) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thang cân;

b) chứng minh ngũ giác $ABCDEF$ là ngũ giác đều.

10.7. Cho ngũ giác $ABCDE$, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, EA và I, J lần lượt là trung điểm của MP, NQ . Chứng minh rằng IJ song song với ED và $IJ = \frac{ED}{4}$.

- 10.8.** Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi A', B', C', D', E', F' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA . Chứng minh rằng $A'B'C'D'E'F'$ là lục giác đều.
- 10.9.** Cho lục giác lồi $ABCDEF$ có các cặp cạnh đối AB và DE ; BC và EF ; CD và AE vừa song song vừa bằng nhau. Lục giác $ABCDEF$ có nhất thiết là lục giác đều hay không?
- 10.10.** Chứng minh rằng trong bốn ngũ giác lồi bất kì luôn tìm được ba đường chéo có độ dài là ba cạnh của một tam giác.
- 10.11.** Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh của một ngũ giác lồi bé hơn tổng độ dài các đường chéo của nó.
- 10.12.** Muốn phủ kín mặt phẳng bởi những đa giác đều bằng nhau sao cho hai đa giác đều nhau thì có chung một cạnh. Hỏi các đa giác đều này có thể nhiều nhất bao nhiêu cạnh?
- 10.13.** Cho lục giác có tất cả các góc bằng nhau, các cạnh đối không bằng nhau. Chứng minh rằng $|BC - EF| = |DE - AB| = |AF - CD|$. Ngược lại nếu có 6 đoạn thẳng thỏa mãn điều kiện ba hiệu trên bằng nhau và khác 0 thì chúng có thể lập được một lục giác có các góc bằng nhau.
- 10.14.** Chứng minh rằng trong một lục giác bất kì, luôn tìm được một đỉnh sao cho ba đường chéo xuất phát từ đỉnh đó có thể lấy làm ba cạnh của một tam giác.
- 10.15.** Cho lục giác $ABCDEF$ có tất cả các cạnh bằng nhau $A + C + E = B + D + F$. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối của lục giác song song với nhau.

CHUYÊN ĐỀ 11. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC**A. Kiến thức cần nhớ**

1. Mỗi đa giác có một diện tích xác định. Diện tích đa giác là một số dương có các tính chất sau:

- Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
- Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chúng thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.
- Hình vuông có độ dài bằng 1 thì có diện tích là 1.

2. Các công thức tính diện tích đa giác

- Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó $S = a.b$ (a, b là kích thước hình chữ nhật).
- Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó $S = a^2$ (a là độ dài cạnh hình vuông).
- Diện tích hình vuông có đường chéo dài bằng d là $\frac{1}{2}d^2$.
- Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích hai cạnh góc vuông $S = \frac{1}{2}a.b$ (a, b là độ dài hai cạnh góc vuông).
- Diện tích hình tam giác bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó $S = \frac{1}{2}a.h$ (a, h là độ dài cạnh và chiều cao tương ứng)
- Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao: $S = \frac{1}{2}(a+b).h$ (a, b là độ dài hai đáy, h là độ dài đường cao)
- Diện tích hình bình hành bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó $S = a.h$ (a, h là độ dài một cạnh và đường cao tương ứng)
- Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích hai đường chéo $S = \frac{1}{2}d_1.d_2$ ($d_1; d_2$ là độ dài hai đường chéo tương ứng)
- Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo $S = \frac{1}{2}d_1.d_2$ ($d_1; d_2$ là độ dài hai đường chéo tương ứng)

3. Bổ sung

- Hai tam giác có chung một cạnh (hoặc một cặp cạnh bằng nhau) thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đường cao ứng với cạnh đó.
- Hai tam giác có chung một đường cao (hoặc một cặp đường cao bằng nhau) thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai cạnh ứng với đường cao đó.
- $ABCD$ là hình thang ($AB // CD$). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O thì $S_{AOD} = S_{BOC}$.
- Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.
- Hai hình chữ nhật có cùng chiều cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy.
- Tam giác đều cạnh a có diện tích là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12cm$, $AD = 6,8cm$. Gọi H, I, E, K là các trung điểm tương ứng của BC, HC, DC, EC .

- Tính diện tích tam giác DBE .
- Tính diện tích tam giác $EHIK$.

Giải

* **Tìm cách giải.** Dễ dàng tính được diện tích hình chữ nhật $ABCD$. Mặt khác, đề bài xuất hiện nhiều yếu tố trung điểm nên chúng ta có thể vận dụng tính chất: hai tam giác có chung đường cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai cạnh đáy ứng với đường cao đó. Từ đó rút ra nhận xét: đường trung tuyến của tam giác chia tam giác ấy thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Từ nhận xét quan trọng đó, chúng ta lần lượt tính được diện tích các tam giác BCD , BCE , DBE , BEH , ECH , HCK , CKI , ...

* **Trình bày lời giải**

a) $ABCD$ là hình chữ nhật nên

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6,8 = 40 \text{ cm}^2$$

E là trung điểm của CD , suy ra:

$$S_{BDE} = S_{BCE} = \frac{1}{2} S_{BCD} = 20,4 \text{ cm}^2$$

b) H là trung điểm

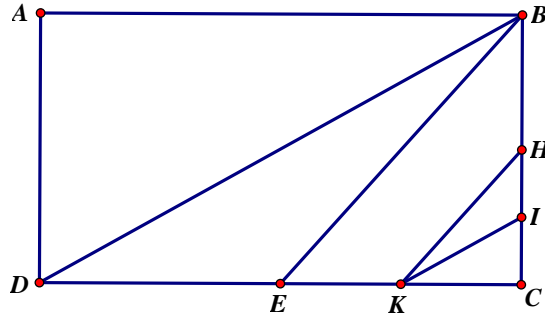
$$BC \Rightarrow S_{CHE} = \frac{1}{2} S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 20,4 = 10,2 \text{ cm}^2$$

$$K \text{ là trung điểm } CE \Rightarrow S_{HCK} = \frac{1}{2} S_{CHE} = 5,1 \text{ cm}^2$$

I là trung điểm CH

$$\Rightarrow S_{CKI} = \frac{1}{2} S_{HCK} = 2,55 \text{ cm}^2$$

$$\text{Vậy } S_{EHIK} = S_{CHE} - S_{CKI} = 10,2 - 2,55 = 7,65 \text{ cm}^2 .$$



Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 24 cm^2 . Lấy điểm E thuộc BC và F thuộc CD sao cho diện tích tam giác ABE và ADF lần lượt là 4 cm^2 và 9 cm^2 . Tính diện tích tam giác AEF .

(Olympic Toán, Châu Á- Thái Bình Dương, năm 2001)

Giải

* **Tìm cách giải.** Quan sát hình vẽ, suy luận rất tự nhiên: muốn tính diện tích tam giác AEF chúng ta chỉ cần tính diện tích tam giác CEF .

Nhận thấy không thể và cũng không cần tính cụ thể độ dài CE và CF . Chúng ta biết rằng, nên chỉ cần tìm mối quan hệ giữa CE và BC ; CF và CD . Phân tích như vậy, chúng ta chỉ cần tìm mối quan hệ giữa BE và BC ; DF và CD .

Mặt khác hình chữ nhật $ABCD$ và tam giác vuông ABE có chung cạnh AB đồng thời biết diện tích của chúng nên dễ dàng tìm được mối quan hệ giữa BE và BC . Tương tự như vậy hình chữ nhật $ABCD$ và tam giác vuông ADF có chung cạnh AD , đồng thời biết diện tích của chúng nên dễ dàng tìm được mối quan hệ giữa DF và CD . Từ đó ta có lời giải sau:

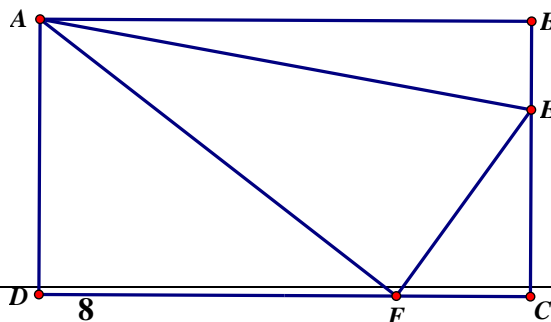
* **Trình bày lời giải**

Ta có: $S_{ABCD} = 24 \text{ cm}^2$ suy ra:

$$S_{ABC} = S_{ACD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 12 \text{ cm}^2$$

$\triangle ABC$ và $\triangle ABE$ có chung đường cao AB

$$\text{nên } \frac{BE}{BC} = \frac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \frac{4}{12}$$



$$\text{hay } \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CE}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle ADF \text{ và } \triangle ADC \text{ có chung đường cao } AD \text{ nên } \frac{DF}{DC} = \frac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \frac{9}{12}$$

$$\text{hay } \frac{DF}{DC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{1}{4}.$$

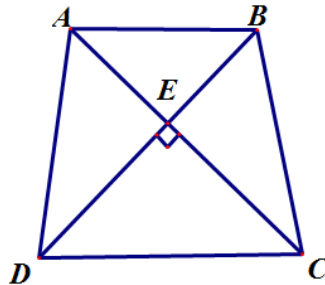
$$\text{Ta có: } \frac{S_{CEF}}{S_{ABCD}} = \frac{CE \cdot CF}{2 \cdot BC \cdot CD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow S_{CEF} = \frac{1}{12} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{12} \cdot 24 = 2 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Do vậy } S_{AEF} = S_{ABCD} - S_{ABE} - S_{ADF} - S_{CEF} \Rightarrow S_{AEF} = 24 - 4 - 9 - 2 = 9 \text{ cm}^2.$$

Ví dụ 3. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $BD = 7 \text{ cm}$; $\angle ABD = 45^\circ$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

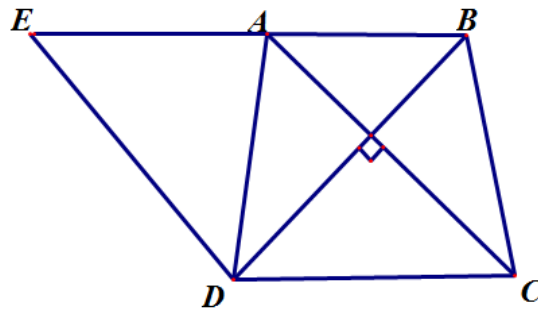
(Olympic Toán Châu Á – Thái Bình Dương 2007)

Giải



Cách 1. Nối AC cắt BD tại E . $\triangle ABE$ vuông cân
 $\Rightarrow BE \perp AC$. Diện tích hình thang là:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} BD^2 = \frac{49}{2} \text{ cm}^2$$



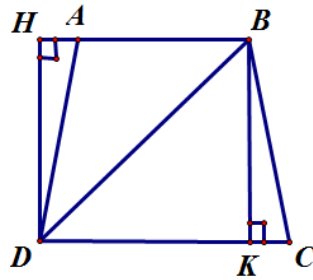
Cách 2. Kéo dài tia BA lấy điểm E sao cho $AE = CD$, ta được:

$\triangle AED = \triangle CDB$ (c.g.c) suy ra:

$\angle AED = \angle CDB = 45^\circ$. Từ đó suy ra:

$\triangle BDE$ vuông cân tại D .

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABD} + S_{CDB} = S_{ABD} + S_{AED} \\ &= S_{DBE} = \frac{1}{2} BD^2 = \frac{49}{2} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$



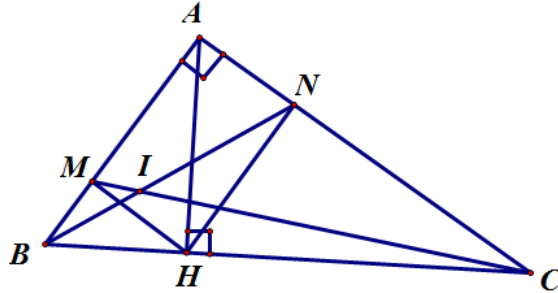
Cách 3. Kẻ $DH \perp AB$, $BK \perp CD$. Do $AB \parallel CD$ nên $HDK = 90^\circ$ mà DB là phân giác HDK (vì $BDK = 45^\circ$)
 $\Rightarrow HDKB$ là hình vuông mà $\Delta HAD = \Delta KCB$ (cạnh huyền – góc nhọn)

suy ra $S_{HDA} = S_{BCK}$ nên $S_{ABCD} = S_{ABKD} + S_{CKB} = S_{ABKD} + S_{AHD} = S_{DHBK}$

$$= BK^2 = \frac{BD^2}{2} = \frac{49}{2} \text{ cm}^2.$$

Ví dụ 3. Cho ΔABC vuông tại A . AH là đường cao. Gọi M , N là hình chiếu của H trên AB , AC . Gọi I là giao điểm của BN và CM . Chứng minh: $S_{BIC} = S_{AMIN}$.

Giải



Ta có: ΔANH và ΔBNH có chung HN và đường cao hạ từ A và B bằng nhau nên

$$S_{ANH} = S_{BNH} \Rightarrow S_{ANH} + S_{CNH} = S_{BNH} + S_{CNH}$$

$$\Rightarrow S_{AHC} = S_{BNC} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } MA = HN \text{ nên } S_{AHC} = S_{AMC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$S_{BNC} = S_{AMC} \Rightarrow S_{BNC} - S_{NIC} = S_{AMC} - S_{NIC}$$

$$\text{Vậy } S_{BIC} = S_{AMIN}.$$

Nhận xét.

Kĩ thuật so sánh S_{BIC} với S_{AMIN} ta so sánh S_{BNC} với S_{AHC} từ đó dẫn đến so sánh S_{BHN} và S_{AHN} .

Ví dụ 4. Gọi M , N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và CD của tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$S_{ABCD} < \frac{1}{2} \cdot (AM + AN)^2.$$

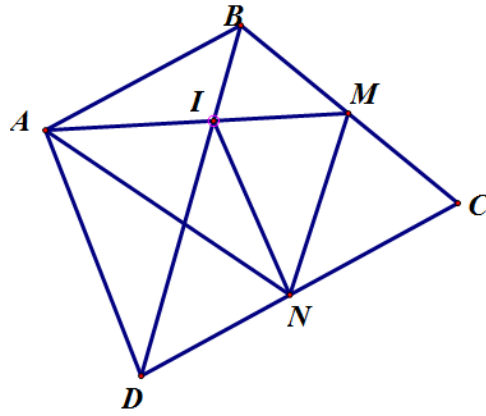
Giải

* **Tìm cách giải.** Nhận thấy về phải của phần kết luận có độ dài hai cạnh của tam giác AMN , mặt khác dễ thấy

$$S_{AMN} \leq \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(AM + AN)^2}{4} \quad (\text{vận dụng kết quả } ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}).$$

Do vậy chúng ta cần biến đổi S_{ABCD} theo S_{AMN} . Định hướng cuối cùng là $S_{ABCD} \leq 4 \cdot S_{AMN}$.

* **Trình bày lời giải**



$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 2.S_{AMC} + 2.S_{ANC} \\ = 2.(S_{AMC} + S_{ANC}) = 2.S_{AMCN} = 2.S_{AMN} + 2.S_{CMN}$$

Gọi giao điểm AM và BD là I

$$\Rightarrow S_{CMN} = S_{IMN} < S_{AMN} \Rightarrow S_{ABCD} < 4.S_{AMN} = 4.\frac{1}{2}.AM.NH \leq 2.AM.AN \leq 2.\frac{(AM + AN)^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra } S_{ABCD} < \frac{1}{2}.(AM + AN)^2.$$

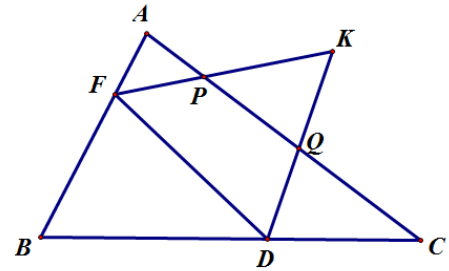
Ví dụ 5. Cho tam giác ABC với D là điểm thuộc cạnh BC và F là điểm thuộc cạnh AB . Điểm K đối xứng với điểm B qua DF . Biết rằng K , B nằm khác phía so với AC . Cạnh AC cắt FK tại P và DK tại Q . Tổng diện tích của các tam giác, PKQ và QDC là $10cm^2$. Nếu ta cộng tổng diện tích này với diện tích tứ giác $DFPQ$ thì bằng $\frac{2}{3}$ diện tích tam giác ABC . Tính diện tích tam giác ABC theo cm^2 .

(Olympic Toán học Trẻ Quốc tế tại Hàn Quốc KIMC 2014 (Malaysia đề nghị))

Giải

Ta có:

$$S_{DFPQ} = S_{ABC} - (S_{BFD} + S_{APF} + S_{CDQ}) = S_{ABC} - (S_{DKF} + S_{APF} + S_{CDQ}) \\ = S_{ABC} - (S_{DFPQ} + S_{KPQ} + S_{APF} + S_{CDQ}) \\ = S_{ABC} - \frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \\ \Rightarrow S_{KPQ} + S_{APF} + S_{CDQ} = \frac{1}{3}S_{ABC} \\ \Rightarrow S_{ABC} = 3.10 = 30cm^2.$$



Ví dụ 6: Chín đường thẳng có cùng tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

(Thi vô địch CHLB Nga – năm 1972)

Giải

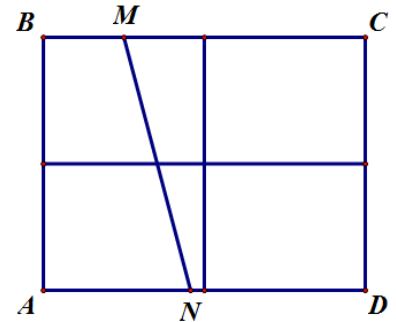
* **Tìm cách giải:** Chứng minh tồn tại ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm, mà không chỉ ra được cụ thể tường minh đó là điểm nào, chúng ta liên tưởng tới khả năng vận dụng nguyên lý Dirichle. Trong

trường hợp này, chúng ta cần chỉ ra 9 đường thẳng mà mỗi đường thẳng phải đi qua ít nhất 1 trong 4 điểm cố định nào. Từ đó nếu mỗi điểm có nhiều nhất chỉ có 2 đường thẳng đi qua thì nhiều nhất chỉ có $4 \cdot 2 = 8$ đường thẳng (nhỏ hơn 9). Vô lý.

*** Trình bày lời giải:**

Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông ABCD. Bởi vì nếu thế không thể tạo ra hai tứ giác mà là tam giác và ngũ giác.

Giả sử một đường thẳng cắt các cạnh BC và AD tại các điểm M và N. Các hình thang ABMN và CDMN có các đường cao bằng nhau do đó tỉ số diện tích của chúng bằng tỉ số các đường trung bình. Tức là MN chia đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh AB



và CD theo tỉ số $\frac{2}{3}$. Tổng số các điểm chia các đường trung bình của hình vuông theo tỉ số $\frac{2}{3}$ là 4.

Bởi số đường thẳng đã cho là 9 và đều phải đi qua một trong số bốn điểm nói trên, nên có một điểm thuộc ít nhất 3 đường thẳng. Tức là có ít nhất ba đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Ví dụ 7: Bên trong hình vuông có cạnh bằng 10 có 1000 điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là các điểm đó hoặc các đỉnh hình vuông, tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{50}{1001}$.

Giải

*** Tìm cách giải:** Nhận thấy rằng hình vuông có diện tích $10 \cdot 10 = 100$. Suy luận một cách tự nhiên, chúng ta nghĩ một cách từ 1000 điểm và 4 đỉnh nối với nhau như thế nào để tạo thành các tam giác không có điểm chung trong. Khi đó tổng diện tích các tam giác tạo thành có diện tích bằng 100. Chúng ta sẽ lập luận diện tích nhỏ nhất của một tam giác tạo thành thỏa mãn yêu cầu đề bài.

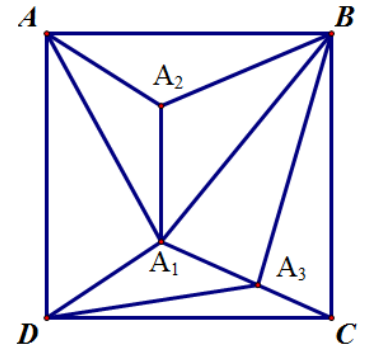
*** Trình bày lời giải**

Gọi 1000 điểm trong hình vuông cạnh bằng 10 là $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$.

Bước thứ nhất, ta nối A_1 với các đỉnh của hình vuông, ta được bốn tam giác.

Xét điểm A_k với $k = 2, 3, 4, \dots, 1000$. Nếu A_k nằm trong một tam giác đã tạo ra (chẳng hạn A_2 ở hình vẽ), ta nối A_2 với ba đỉnh của tam giác đó, số tam giác tăng thêm hai (từ 1 thành 3), nếu A_k thuộc một cạnh chung của hai tam giác tạo ra (chẳng hạn A_3 ở hình vẽ), ta nối A_3 với các đỉnh đối diện với cạnh chung, số tam giác cũng tăng thêm hai (từ 2 thành 4)

Như vậy, sau bước thứ nhất ta được tam giác. Trong 999 bước còn lại, mỗi bước tăng thêm hai tam giác. Tổng cộng ta có: $4 + 2 \cdot 999 = 2002$ tam giác



Tổng diện tích của 2002 tam giác đó bằng 100. Do đó tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{100}{2002} = \frac{50}{1001}$

Nhận xét. Từ cách giải trên, chúng ta có thể giải được bài toán tổng quát sau:

- Bên trong một hình vuông có cạnh là a cho n điểm. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là các điểm đó hoặc các đỉnh hình vuông, tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{a^2}{2n+2}$.

- Bên trong một đa giác lồi n cạnh có diện tích là S lấy m điểm. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là các điểm đó hoặc các đỉnh đa giác, tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{S}{2m+n-2}$.

Ví dụ 8: chứng minh rằng hai hình chữ nhật cùng kích thước $a \times b$ được xếp sao cho chúng cắt nhau tại 8 điểm thì diện tích phần chung lớn hơn nửa diện tích một hình chữ nhật.

Giải

Vẽ CM, CN (như hình vẽ) $\Rightarrow CM = CN$.
Suy ra CA là tia phân giác góc MAN và góc MCN . Chứng minh tương tự, ta có: BD là phân giác của EBF .
Dựa vào cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc, ta có:
 $MAN = EBF$ nên $CAE = DBF$.
Từ đó suy ra $AC \perp BD$.

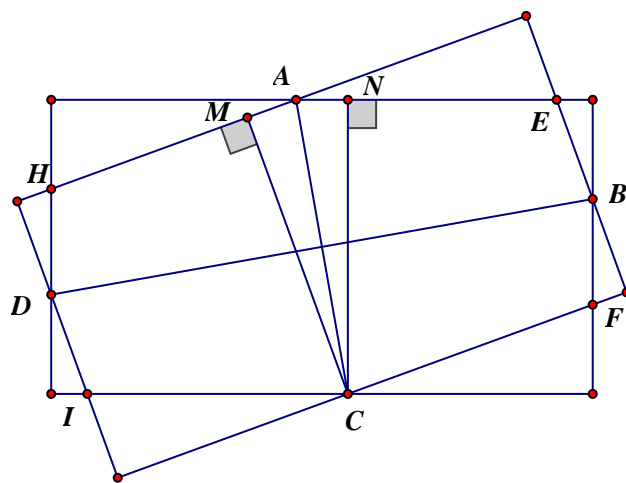
$$\text{Do đó } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

$$S_{AEBFCDIH} > S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD > \frac{1}{2} CN \cdot BD > \frac{1}{2} ab$$

Nhận xét: Sử dụng kỹ thuật của chuyên đề tam giác đồng dạng. Các bạn có thể giải được bài toán sau: Cho hai hình chữ nhật cùng kích thước $a \times b$. Một hình chữ nhật các cạnh tô màu đỏ, một hình chữ nhật các cạnh tô màu xanh, được xếp sao cho chúng cắt nhau tại 8 điểm. Chứng minh rằng hình bát giác có tổng các cạnh màu đỏ bằng tổng các cạnh tô màu xanh.

C. Bài tập vận dụng

- 11.1.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $CD = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$. Gọi H là hình chiếu của C trên BD . Tính diện tích tam giác ADH .
- 11.2.** Cho hình thang $ABCD$ có độ dài hai đáy là $AB = 5\text{cm}$, $CD = 15\text{cm}$, độ dài hai đường chéo là $AC = 16\text{cm}$, $BD = 12\text{cm}$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.
- 11.3.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí điểm D, E sao cho tứ giác $BDEC$ có diện tích nhỏ nhất.
- 11.4.** Cho tam giác ABC có diện tích là S , trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = 2BD$. Gọi E là trung điểm của AC và I là giao điểm CD và BE . Tính đường tròn tam giác IBC .
- 11.5.** Cho tứ giác lồi $ABCD$. Qua trung điểm K của đường chéo BD dựng đường thẳng song song với đường chéo AC , đường này cắt AD tại E . Chứng minh rằng CE chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau (biết E nằm giữa A và D).
- 11.6.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và K sao cho $AM = CK$. Trên đoạn AD lấy điểm P bất kì. Đoạn thẳng MK lần lượt cắt PB và PC tại E và F . Chứng minh rằng:
 $S_{PEF} = S_{BME} + S_{CKF}$.
- 11.7.** Cho tam giác ABC có các trung tuyến AD và BE vuông góc với nhau tại O . Biết rằng $AC = b$; $BC = a$. Tính đường tròn hình vuông có cạnh là a .
- 11.8.** Đặt một hình vuông nhỏ vào bên trong một hình vuông lớn rồi nối 4 đỉnh của hình vuông lớn hơn tương ứng theo thứ tự với 4 đỉnh của hình vuông nhỏ (như hình vẽ).
Chứng minh rằng: $S_{AMNB} + S_{CDQP} = S_{ADQM} + S_{BCPN}$.



11.9. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao. Trên AB, AC lấy K, L sao cho $AK = AL = AH$. Chứng minh rằng $S_{AKL} \leq \frac{1}{2} S_{ABC}$.

11.10. Cho tứ giác ABCD. Gọi M; N lần lượt là trung điểm AB; CD. Gọi P; Q lần lượt là trung điểm BM và DN. Chứng minh rằng

$$S_{MPNQ} = \frac{1}{4} S_{ABCD}.$$

11.11. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên cạnh AB lấy hai điểm M, N sao cho $AM = MN = NB$ và P là trung điểm cạnh CD. Gọi O là giao điểm của ND và MP. Biết đường tròn tam giác DOP lớn hơn diện tích tam giác MON là 7cm^2 . Tính diện tích hình chữ nhật ABCD.

11.12. Cho tứ giác ABCD có $AC = 10\text{cm}$, $BD = 12\text{cm}$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, biết $\angle AOB = 30^\circ$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

11.13. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, P, N, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, AD; O là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh:

a) $S_{AOQ} + S_{BOP} = S_{MPQ}$

b) $S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$

11.14. Cho một hình bình hành và 13 đường thẳng, mỗi đường thẳng đều chia hình bình hành thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{5}$. Chứng minh rằng trong 13 đường thẳng đó, có ít nhất bốn đường thẳng cùng đi qua một điểm.

11.15. Bên trong một hình vuông có cạnh bằng 1 cho 1000 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng trong số các tam giác có đỉnh là 3 trong 1000 điểm đó, tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{998}$.

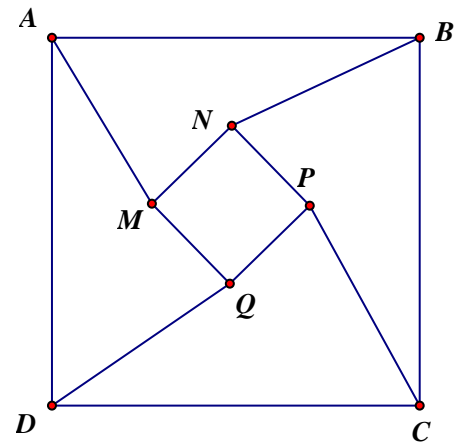
11.16. Cho 37 điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng, nằm ở bên trong một hình vuông có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng luôn tìm được năm điểm trong 37 điểm đó thỏa mãn: Các tam giác được tạo bởi ba trong năm điểm đó có diện tích không quá $\frac{1}{18}$.

11.17. Cho một đa giác lồi. Chứng minh rằng tồn tại một hình bình hành có diện tích không quá hai lần diện tích đa giác sao cho các đỉnh của đa giác nằm trong hoặc trên biên của hình bình hành.

11.18. Cho lục giác lồi ABCDEF có các cặp cạnh đối song song. Chứng minh $S_{ACE} \geq \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$.

11.19. Cho tứ giác ABCD. Gọi I, E, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, đường thẳng CI cắt BH và DE lần lượt tại M và N, đường thẳng AG cắt DE và BH lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng: $S_{MNPQ} = S_{IBM} + S_{CEN} + S_{DGP} + S_{AHQ}$.

11.20. Cho tam giác ABC, gọi M, N, D lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và P là điểm tùy ý nằm ngoài tam giác. Chứng minh rằng trong ba tam giác PAM, PBN, PCD luôn tồn tại một tam giác có diện tích bằng tổng diện tích hai tam giác còn lại.



CHUYÊN ĐỀ 12. PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH

A. Kiến thức cần nhớ

1. Ta đã biết một số công thức tính diện tích của đa giác như công thức tính diện tích hình tam giác, hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, ... Khi ấy biết độ dài của một số yếu tố, ta có thể tính được diện tích của những hình ấy. Ngược lại nếu biết quan hệ diện tích của hai hình chẳng hạn biết hai tam giác có diện tích bằng nhau và có hai đáy bằng nhau thì suy ra được các chiều cao tương ứng bằng nhau. Như vậy các công thức tính diện tích cho ta các quan hệ về độ dài của các đoạn thẳng.

2. Để so sánh hai độ dài nào đó bằng phương pháp diện tích, ta có thể làm theo các bước sau:

- Xác định quan hệ diện tích giữa các hình.
- Sử dụng các công thức diện tích để biểu diễn mỗi quan hệ đó bằng một đẳng thức có chứa độ dài.
- Biến đổi đẳng thức vừa tìm được ta có quan hệ về độ dài giữa hai đoạn thẳng sẵn so sánh.

3. Một số biện pháp thực hiện:

- Sử dụng trực tiếp công thức tính diện tích tam giác.
- Sử dụng tính chất: Nếu hai tam giác có cùng chiều cao thì tỉ số hai đáy tương ứng bằng tỉ số hai diện tích. Ngược lại, nếu hai tam giác có cùng đáy thì tỉ số hai chiều cao tương ứng bằng tỉ số hai diện tích.
- Sử dụng tính chất: Nếu một tam giác và một hình bình hành có cùng đáy và cùng chiều cao (ứng với đáy đó) thì diện tích tam giác bằng nửa tđc hình bình hành.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, một đường thẳng cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}$$

Giải

Áp dụng tính chất hai tam giác có cùng đường cao, ta có:

$$\frac{S_{AMN}}{S_{AMC}} = \frac{AN}{AC}; \frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AMN}}{S_{AMC}} \cdot \frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}$$

(điều phải chứng minh).

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC và $\Delta A'B'C'$ có $A = A'$. Chứng minh rằng: $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{A'B' \cdot A'C'}{AB \cdot AC}$.

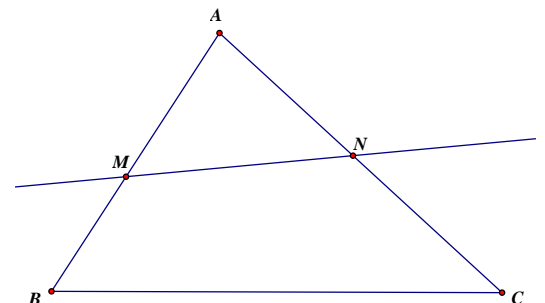
Giải

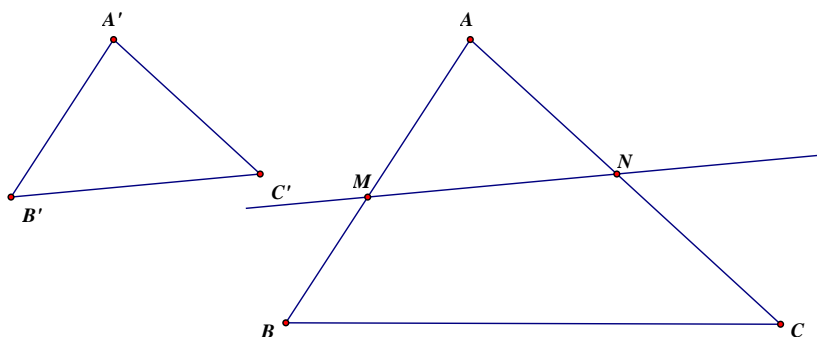
Trên đường thẳng AB, AC lấy 2 điểm M và N sao cho $AM = A'B', AN = A'C'$.

Từ đó suy ra: $\Delta A'B'C' = \Delta AMN$ (c.g.c).

Chứng minh tương tự ví dụ 1, ta có: $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}$

$$\text{Từ đó suy ra: } \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{A'B' \cdot A'C'}{AB \cdot AC}$$

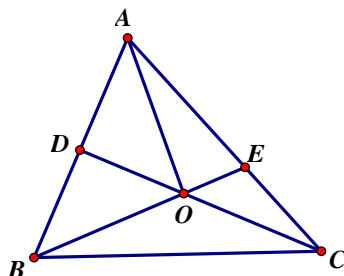




Nhận xét. Ví dụ 1; 2 là một kết quả đẹp về tỉ số diện tích. Chúng được vận dụng trong nhiều bài toán về sau. Bạn nên nhớ tính chất này.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, gọi D là trung điểm AB, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = 2 \cdot EC$. Gọi O là giao điểm của CD và BE. Chứng minh rằng:

- a) $S_{BOC} = S_{AOC}$
b) $BO = 3 \cdot EO$



Tìm cách giải : Vì D là trung điểm của AB nên suy ngay ra được $S_{ADC} = S_{BDC}$; $S_{AOD} = S_{BOD}$

Nên dễ dàng dẫn đến $S_{BOC} = S_{AOC}$. Nhận thấy rằng BO, CO là hai cạnh của tam giác BOC, COE có chung đường cao kẻ từ C. Do đó để so sánh BO và CO, ta so sánh diện tích tam giác BOC và COE. Từ câu a, ta so sánh diện tích tam giác AOC và COE, hiển nhiên ta cần so sánh AC và AE. Từ đó ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Ta có: $AD = BD$ nên $S_{AOD} = S_{BOD}$; $S_{CAD} = S_{CBD}$. Suy ra: $S_{CAD} - S_{AOD} = S_{CBD} - S_{BOD}$

Hay $S_{BOC} = S_{AOC}$. Áp dụng tỉ số diện tích hai tam giác có chung chiều cao, ta có:

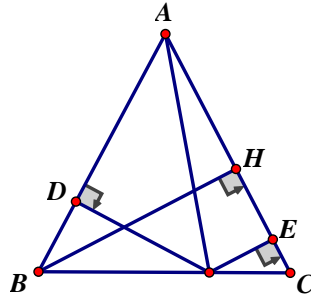
$$\frac{S_{OEC}}{S_{OAC}} = \frac{EC}{EA} = \frac{1}{3} \text{ mà } \frac{S_{OEC}}{S_{BOC}} = \frac{OE}{OB} = \frac{1}{3} \Rightarrow OB = 3 \cdot OE$$

Nhận xét . Để chứng minh $OB = 3 \cdot OE$ là chúng ta chứng minh $S_{BOC} = 3 \cdot S_{OEC}$. Phương pháp diện tích để tìm tỉ số đoạn thẳng, ta tìm tỉ số diện tích của 2 tam giác nhận 2 đoạn thẳng ấy làm cạnh.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân đỉnh A, một điểm M thuộc cạnh BC, kẻ MD vuông góc với cạnh AB, ME vuông góc với AC. Chứng minh rằng tổng MD+ME không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên cạnh BC.

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy khi điểm M di động trên cạnh BC thì quan hệ MD vuông góc với AB , ME vuông góc với AC là không đổi, nên dễ dàng nhận biết được tổng diện tích hai tam giác ABM và ACM là không đổi. Do vậy chúng ta nghĩ tới phương pháp diện tích.

Trình bày lời giải

Kẻ $BH \perp AC \Rightarrow H$ cố định, suy ra BH không đổi. Ta có:

$$S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot DM + \frac{1}{2} AC \cdot ME = \frac{1}{2} AC \cdot BH \Rightarrow \frac{1}{2} AB(DM + ME) = \frac{1}{2} AC \cdot BH$$

(vì $AB = AC$)

Do đó: $DM + ME$ không phụ thuộc vào vị trí của M trên BC .

Nhận xét

Ngoài cách giải trên, chúng ta còn có cách giải khác như sau: Kẻ MI vuông góc với BH . Chúng ta chứng minh được $MI = BI$, $ME = IH$, từ đó suy ra $DM + ME = BH$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên cạnh BC .

Tam giác ABC đều sẽ là trường hợp đặc biệt của tam giác cân, do vậy với kỹ thuật trên chúng ta giải được bài toán sau: Cho tam giác đều ABC . Một điểm M bất kỳ thuộc miền trong hoặc trên cạnh tam giác ABC . Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ điểm M đến các cạnh tam giác ABC không phụ thuộc điểm vào điểm M .

Nếu cho điểm M chuyển động trên tia đối của tia CB ta có: $S_{ABM} - S_{ACM} = S_{ABC}$

Với kỹ thuật trên chúng ta giải được bài toán sau: Cho tam giác ABC cân đỉnh A . Một điểm M tùy ý trên tia đối của tia CB . Kẻ MD vuông góc với cạnh AB , ME vuông góc với AC . Chứng minh rằng hiệu $MD - ME$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M .

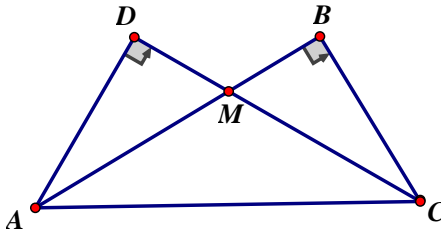
Bản chất của cách giải là dùng diện tích kết hợp với $AB = AC$ để chứng minh kết quả trên bằng độ dài đường cao ứng với cạnh bên. Với tương tự chúng ta giải được bài toán sau: Cho tam giác đều ABC , một điểm M nằm ở miền trong góc A , nhưng nằm ngoài tam giác ABC . Kẻ MD vuông góc với cạnh AB , MK vuông góc với BC . Chứng minh rằng: $MD + ME - MK$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M .

Ví dụ 5. Một hình chữ nhật bằng giấy được gấp theo đường chéo AC như hình vẽ. Diện tích của hình chữ nhật được bằng $\frac{5}{8}$ của diện tích ban đầu. Biết diện tích tam giác AMC là 18cm^2

Tính diện tích hình chữ nhật ban đầu

Chứng tỏ độ dài AM gấp 3 lần độ dài BM

Giải



Tìm cách giải. Nhận thấy rằng khi gấp tờ giấy hình chữ nhật theo đường chéo thì phần tờ giấy xếp chồng lên nhau chính là phần tam giác AMC . Mặt khác diện tích hình nhận được bằng $\frac{5}{8}$ của diện tích ban đầu. Từ đó

suy ra câu b, nhận thấy AM , BM lần lượt là độ dài hai cạnh của hai tam giác AMC , BMC có chung đường cao kẻ từ C . Do vậy muốn so sánh AM và BM chúng ta nên đi so sánh diện tích tam giác AMC và diện tích tam giác BMC .

• **Trình bày lời giải.**

- a) Khi gấp tờ giấy hình chữ nhật theo đường chéo thì phần tờ giấy xếp chồng lên nhau chính là phần tam giác AMC . Do vậy diện tích hình nhận được so với diện tích hình chữ nhật ban đầu giảm đi đúng bằng diện tích tam giác MAC . Tức là giảm đi 18cm^2 . Diện tích hình nhận được bằng $\frac{5}{8}$ diện tích hình chữ

nhật ban đầu nên diện tích tam giác AMC bằng $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ (diện tích hình chữ nhật)

Do đó diện tích hình chữ nhật là $18 : \frac{3}{8} = 48(\text{cm}^2)$

- b) Diện tích tam giác ABC là $48 : 2 = 24(\text{cm}^2)$

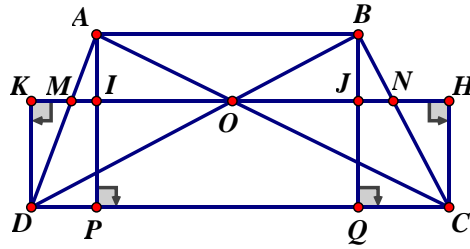
Diện tích tam giác MBC là $24 - 18 = 6(\text{cm}^2)$

Hai tam giác MBC và AMC có chung đường cao BC nên $\frac{S_{AMC}}{S_{MBC}} = \frac{AM}{MB} = \frac{18}{6} = 3$

Suy ra $AM = 3MB$

Ví dụ 6. Cho hình thang $ABCD(AB//CD)$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Qua O kẻ đường thẳng d song song với CD . Đường thẳng d cắt AD và BC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng $OM = ON$

Giải



- Tìm cách giải. Khi nói về diện tích hình thang thì đặc trưng là tam giác AOD ; BOC là có diện tích bằng nhau. Khai thác yếu tố này, ta có: $S_{NOM} + S_{DOM} = S_{BON} + S_{CON}$

Từ nhận xét trên ta muốn so sánh OM và ON chúng ta đi so sánh tổng các đường cao ứng với cạnh OM và ON

Trình bày lời giải

Kẻ AP vuông góc CD và cắt MN tại I , BQ vuông góc với CD và cắt MN tại J ; DK vuông góc với MN tại K ; CH vuông góc với MN tại H ta có: $S_{ACD} = \frac{1}{2}CD \cdot AP$; $S_{BCD} = \frac{1}{2}CD \cdot PQ$

Mà $AP = BQ$ nên $S_{ACD} = S_{BCD} \Rightarrow S_{AOC} = S_{BOC}$

Mặt khác

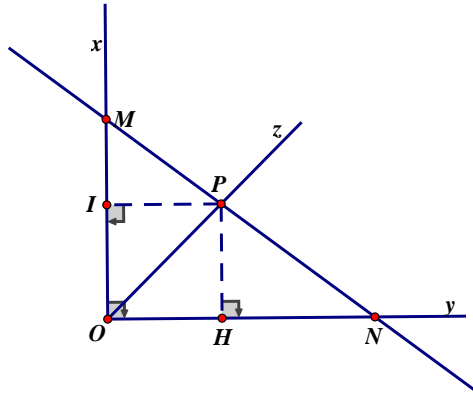
$$S_{AOD} = S_{AOM} + S_{DOM} = \frac{1}{2}OM \cdot AI + \frac{1}{2}OM \cdot DK = \frac{1}{2}OM(AI + DK) = \frac{1}{2}OM \cdot AP$$

$$S_{BOC} = S_{BON} + S_{CON} = \frac{1}{2}ON \cdot BJ + \frac{1}{2}ON \cdot CH = \frac{1}{2}ON(BJ + CH) = \frac{1}{2}ON \cdot BQ$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{2}OM \cdot AP = \frac{1}{2}ON \cdot BQ \Rightarrow OM = ON$$

Ví dụ 7. Cho $\angle xOy = 90^\circ$ có tia Oz là phân giác lấy điểm P cố định thuộc tia Oz (P khác O). Qua P kẻ đường thẳng bất kì cắt Ox , Oy tại M , N . Chứng minh khi d thay đổi thì $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ không đổi.

Giải



Kẻ $PI \perp Ox, PH \perp Oy$

Ta có $PI = PH$ và không đổi, ta có : $S_{OPM} + S_{OPN} = S_{OMN}$

$$\text{Nên : } \frac{1}{2} OM \cdot PI + \frac{1}{2} ON \cdot PH = \frac{1}{2} OM \cdot ON$$

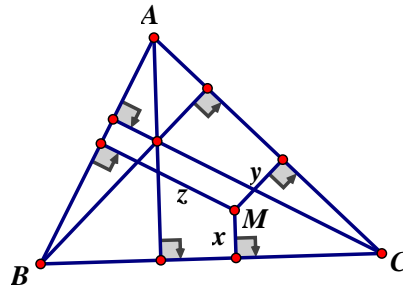
$$\text{Chia 2 vế cho } \frac{1}{2} OM \cdot ON$$

$$\text{Ta có : } \frac{PI}{ON} + \frac{PH}{OM} = 1$$

Do $PI = PH$, nên ta có : $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ không đổi.

Ví dụ 8. Trong tam giác ABC gọi h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao ứng với các cạnh BC, CA, AB . Gọi x, y, z là khoảng cách từ điểm M thuộc miền trong tam giác đến BC, CA, AB . Chứng minh rằng : $\min(h_a, h_b, h_c) \leq x + y + z \leq \max(h_a, h_b, h_c)$

Giải



Giả sử $h_a \leq h_b \leq h_c \Rightarrow c \leq b \leq a$

Mà

$$2S = ax + by + cz \leq ax + ay + az \Rightarrow x + y + z \geq \frac{2S}{a} = h_a \quad (1)$$

$$2S = ax + by + cz \geq cx + cy + cz \Rightarrow x + y + z \leq \frac{2S}{c} = h_a \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

C. Bài tập vận dụng

12.1 Cho hình vuông $ABCD$ và E là điểm trên cạnh AD sao cho $S_{ABCD} = 144(\text{cm}^2)$ và $S_{ABE} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$

Tính độ dài đoạn AE .

(Olimpic toán tuổi thơ toàn quốc năm 2014- 2015)

12.2 Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Một đường thẳng song song với hai đáy cắt AD ở E , MN ở I , BC ở F . Chứng minh: $IE = IF$.

12.3. Cho tam giác ABC . Qua điểm O tùy ý nằm trong tam giác ta kẻ các đường thẳng AO ; BO ; CO cắt BC , CA , AB lần lượt tại M, N và P . Chứng minh rằng: $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP} = 1$.

12.4. Cho $\triangle ABC$ trung tuyến AM . Một đường thẳng song song với BC , cắt cạnh AB, AC và AM tại D, E, F . Chứng minh $FD = FE$.

12.5. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên BC lấy điểm I và trên AB lấy điểm K sao cho $AI = CK$. Gọi O là giao điểm của AI và CK . Chứng minh OD là tia phân giác của góc AOC .

12.6. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB < CD$. Lấy điểm M trên CD sao cho BM chia $ABCD$ thành hai phần có diện tích bằng nhau. Gọi N là trung điểm AD . Chứng minh $MN \parallel BC$.

12.7. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng BC, CA, AB . Các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng NP, PM, MN . Biết rằng $YZ \parallel BC$; $ZX \parallel CA$; $XY \parallel AB$. Chứng minh $\frac{XP}{XN} = \frac{MB}{MC}$.

12.8. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = 3DA$, trên CB lấy điểm E sao cho $BE = 4EC$. Gọi F là giao điểm của AE và CD . Chứng minh rằng $FD = FC$.

12.9. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Trên hai cạnh AB và CD ta lần lượt lấy hai điểm

12.14. Cho lục giác $ABCDEF$, mỗi đường chéo AD, BE, CF chia lục giác thành hai phần bằng nhau có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

12.15. Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi các trung điểm của AB, BC, CD, DE, EF, FA lần lượt là L, M, N, Q, R . Biết mỗi đoạn LP, MQ, NR đồng quy.

12.16. Cho tứ giác $ABCD$ có E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC . Đường thẳng EF cắt các đường thẳng AB, CD lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng $MA \cdot NC = MB \cdot ND$

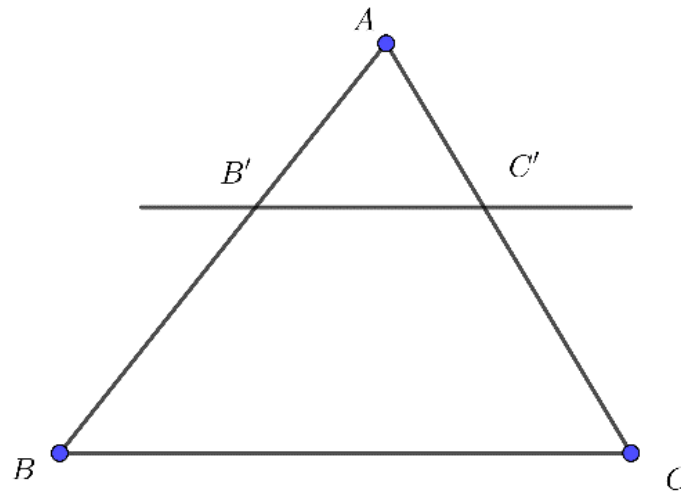
CHƯƠNG III. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

CHUYÊN ĐỀ 13. ĐỊNH LÝ TA-LÉT TRONG TAM GIÁC	2
CHUYÊN ĐỀ 14. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC.....	17
CHUYÊN ĐỀ 15. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC.....	29
CHUYÊN ĐỀ 16. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG	45
CHUYÊN ĐỀ 17. ĐỊNH LÝ MENELAUS, ĐỊNH LÝ CE – VA, ĐỊNH LÝ VAN – OBEN	55

CHUYÊN ĐỀ 13. ĐỊNH LÝ TA-LÉT TRONG TAM GIÁC**A. Kiến thức cần nhớ**

- Tỷ số của hai đoạn thẳng: tỷ số của hai đoạn thẳng là tỷ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.
- Đoạn thẳng tỉ lệ: Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng AB và CD nên có tỉ lệ thức.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ hay } \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$



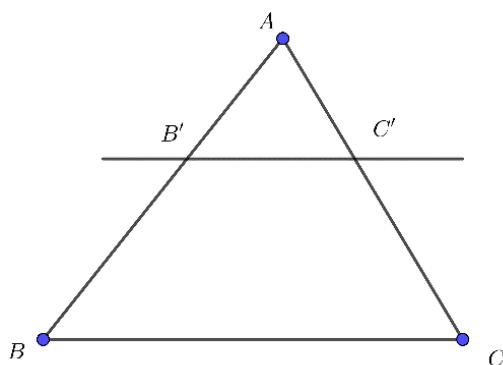
- Định lý Ta-let trong tam giác. Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ:

Trong hình bên:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \\ B'C' // BC \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{AC'}{AC}; \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}; \frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC}$$

1. Định lý Ta-lét đảo. Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

Trong hình bên: $\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \\ \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C} \end{array} \right\} \Rightarrow B'C' // BC.$



2. Hệ quả của định lý ta-lét. Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

E và F sao cho $\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF}$. Chứng minh rằng nếu đường chéo AC đi qua trung điểm I của đoạn thẳng EF thì AC chia đôi diện tích của tứ giác $ABCD$.

12.10. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và hai đường phân giác BD và CE . Lấy điểm I bất kì trên đoạn thẳng DE . Chứng minh rằng: $\frac{S_{IBC}}{S_{IAB} + S_{IAC}} = \sqrt{2}$.

12.11. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và ba đường cao ứng với ba cạnh lần lượt có độ dài là h_a , h_b , h_c . Gọi r là khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác của tam giác đến mỗi cạnh của tam giác. Chứng minh rằng $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

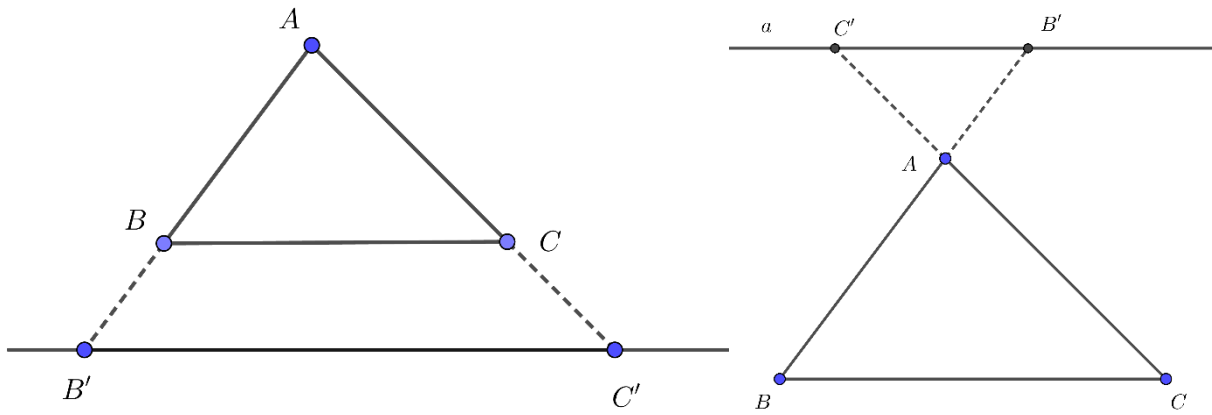
12.12. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác AD , BE , CF cùng cắt nhau tại I . Chứng minh rằng $\frac{AI^2}{AB \cdot AC} + \frac{BI^2}{BA \cdot BC} + \frac{CI^2}{CA \cdot CB} = 1$.

12.13. Hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ cắt nhau tại O , chia tứ giác thành bốn tam giác có đỉnh O là OAB , OBC , OCD , OAD . Biết số đo diện tích của các tam giác này là các số nguyên. Chứng minh rằng tích các số đo diện tích của các tam giác đó là một số chính phương.

Trong hình trên: $\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \\ B'C' \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

Chú ý: Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$



B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Từ một điểm E trên cạnh BC ta kẻ đường thẳng Ex song song với AM và cắt tia CA, BA lần lượt tại F và G.

Chứng minh: $EF + EG = 2AM$.

Giải

* Tìm cách giải.

- Để chứng minh $EF + EG = 2AM$, suy luận thông thường là dựng đoạn thẳng trên tia EF, EG bằng đoạn thẳng AM, rồi biến đổi cộng trừ đoạn thẳng. Chẳng hạn trong ví dụ này, qua A kẻ đường thẳng song song với BC, cắt EF tại I. Dễ dàng nhận thấy $EI = AM$, do vậy chỉ cần chứng minh $GI = IF$ là xong. Tuy nhiên để chứng minh $GI = IF$ bằng cách ghép vào hai tam giác bằng nhau là khó khăn, chính vì vậy chúng ta chứng minh tỉ số bằng nhau có cùng mẫu số. Quan sát kỹ nhận thấy GI và IF có thể đặt trên mẫu số là IE!

Từ đó vận dụng định lý và hệ quả Ta-lét để chứng minh $\frac{FI}{IE} = \frac{IG}{IE}$ là xong.

- Ngoài cách trên, chúng ta có thể biến đổi kết luận thành tổng tỉ số và chứng minh $\frac{EF}{AM} + \frac{EG}{AM} = 2$ là xong.

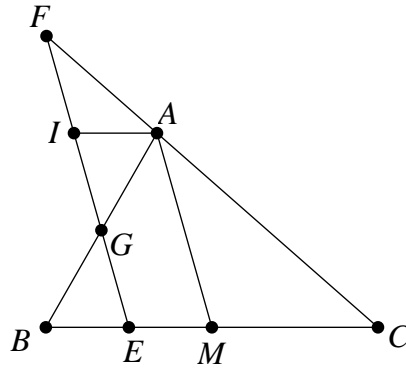
Do đó vận dụng định lý Ta-lét và biến đổi linh hoạt tỷ lệ thức là yêu cầu tất yếu trong dạng toán này.

* Trình bày lời giải

Cách 1. Giả sử E thuộc đoạn BM.

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại I. Ta có AMEI là hình bình hành, suy ra $EI = AM$.

Áp dụng định lý Ta-lét, xét $\triangle EFC$ có AI // CE.



$$AM \parallel EF \Rightarrow \frac{IF}{IE} = \frac{FA}{AC} = \frac{EM}{MC} \quad (1)$$

Xét $\triangle GED$ có $AI \parallel BE, AM \parallel GE$

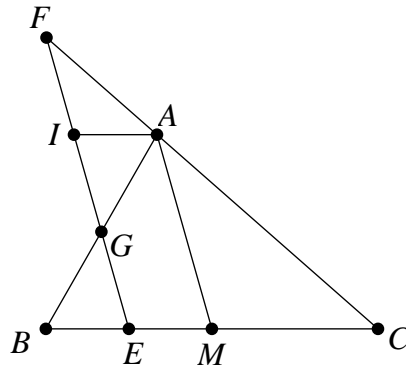
$$\Rightarrow \frac{IG}{IE} = \frac{AG}{AB} = \frac{EM}{BM} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), kết hợp với $BM = MC$

Suy ra $IG = IF$

Ta có: $EF + EG = EI + IF + EI - IG = 2EI = 2AM$

Cách 2.



Giả sử E thuộc đoạn BM

Theo hệ quả định lý Ta-lét:

$$\text{Xét } \triangle EFC \text{ có } EF \parallel AM \Rightarrow \frac{EF}{AM} = \frac{EC}{CM} \quad (3)$$

$$\text{Xét } \triangle ABM \text{ có } EG \parallel AM \Rightarrow \frac{EG}{AM} = \frac{BE}{BM} \quad (4)$$

Cộng vế theo vế (3) và (4) ta có:

$$\frac{EF}{AM} + \frac{EG}{AM} = \frac{EC}{CM} + \frac{BE}{BM} \text{ hay } \frac{EF+EG}{AM} = \frac{BC}{BM} = 2$$

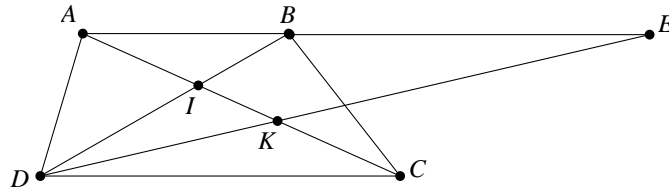
Suy ra $EF + EG = 2.AM$

Ví dụ 2. Cho hình thang ABCD ($AB // CD$). Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = CD$. Gọi giao điểm của AC với DB và DE theo thứ tự là I và K. Chứng minh hệ thức $\frac{AK}{KC} = \frac{AC}{CI}$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy rằng chúng ta không thể chứng minh trực tiếp $\frac{AK}{KC} = \frac{AC}{CI}$, do vậy nên sử dụng tỉ số trung gian. Khai thác $BE = CD$ và $AB // CD$ rất tự nhiên chúng ta vận dụng hệ quả định lý Ta-let.

Trình bày lời giải



Đặt $AB = a$, $BE = CD = b$. Theo hệ quả định lý Ta-let

$$\text{Ta có } AE // CD \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AE}{CD} = \frac{a+b}{b} \quad (1)$$

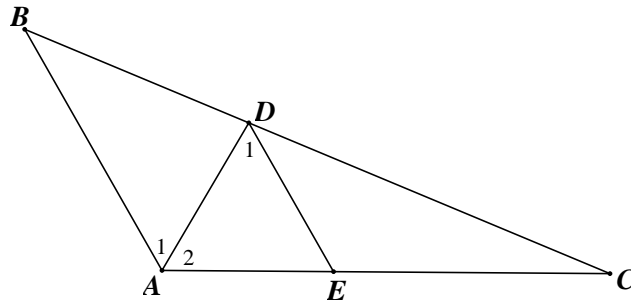
$$AB // CD \Rightarrow \frac{AI}{CI} = \frac{AB}{CD} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{AI+CI}{CI} = \frac{a+b}{b} \Rightarrow \frac{AC}{CI} = \frac{a+b}{b} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{AK}{KC} = \frac{AC}{CI}$$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $A = 120^\circ$, AD là đường phân giác. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}$.

Giải



Kẻ $DE \parallel AB$, ta có:

$D_1 = A_1 = 60^\circ$; $A_2 = 60^\circ$ nên tam giác ADE đều. Suy ra $AD = AE = DE$.

Áp dụng hệ quả định lý Ta – lét: $\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC}$ hay $\frac{AD}{AB} = \frac{CE}{AC}$.

Mặt khác $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AC}$ nên $\frac{AD}{AB} + \frac{AD}{AC} = \frac{CE}{AC} + \frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1$

Suy ra $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}$.

Nhận xét. Những bài toán chứng minh đẳng thức có nghịch đảo độ dài đoạn thẳng, bạn nên biến đổi và chứng minh hệ thức tương đương có tỉ số của hai đoạn thẳng.

Ví dụ 4. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M và N.

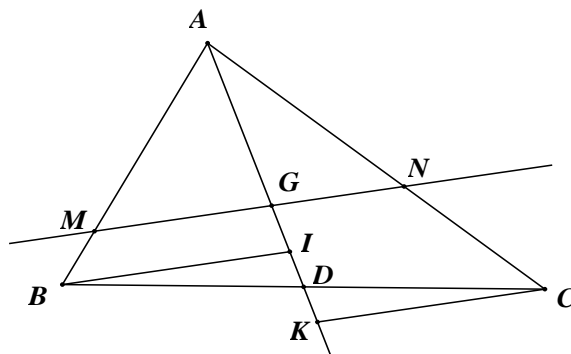
Chứng minh rằng: a) $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3$; b) $\frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = 1$.

* **Tìm cách giải.** Để tạo ra tỉ số $\frac{AB}{AM}$; $\frac{AC}{AN}$ chúng ta cần vận dụng định lý Ta – lét, mà hình vẽ chưa có yếu tố song song do vậy chúng ta cần kẻ thêm yếu tố song song. Kẻ đường thẳng song song với MN từ B và C vừa khai thác được yếu tố trọng tâm, vừa tạo ra được tỉ số yêu cầu.

* **Trình bày lời giải**

Trường hợp 1: Nếu $MN \parallel BC$, thì lời giải giản đơn (dành cho bạn đọc)

Trường hợp 2: Xét MN không song song với BC.



a) Gọi giao điểm của AG và BC là D $\Rightarrow BD = CD$.

Kẻ $BI \parallel CK \parallel MN$ ($I, K \in AD$)

Xét $\triangle BDI$ và $\triangle CDK$ có $BD = CD$; $\angle IBD = \angle KCD$;

IDB = KDC nên $\triangle BDI = \triangle CDK$ (g-c-g) $\Rightarrow DI = DK$

Áp dụng định lý Ta – lét, ta có: $\frac{AB}{AM} = \frac{AI}{AG}$ (vì $MG \parallel BI$); $\frac{AC}{AN} = \frac{AK}{AG}$ (vì $GN \parallel CK$).

Suy ra $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{2AD}{AG} = 3$ (1) (vì $AD = \frac{3}{2}AG$).

b) Xét $\frac{BM}{AM} + \frac{GI}{AG}$; $\frac{CN}{AN} = \frac{KG}{AG}$

Hay $\frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = \frac{GI + GK}{AG} = \frac{2GD}{AG} = 1$, suy ra $\frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = 1$.

Nhận xét. Từ kết quả (1), chúng ta thấy rằng bởi G là trọng tâm nên $\frac{2AD}{AG} = 3$. Vậy nếu G không phải là trọng tâm thì ta có bài toán sau:

- Một đường bất kỳ cắt AB, AC và đường trung tuyến AD của tam giác ABC lần lượt tại M, N và G. Chứng

minh rằng: $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{2AD}{AG}$.

- Nếu thay yếu tố trung tuyến bằng hình bình hành, ta có bài toán sau: Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng bất kỳ cắt AB, AD và AC lần lượt tại M, N và G. Chứng minh rằng: $\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} = \frac{AC}{AG}$.

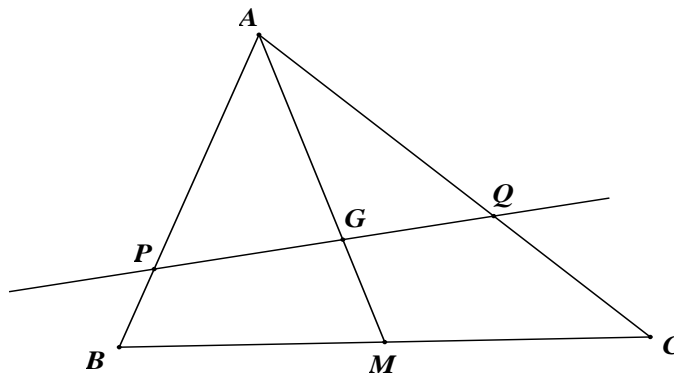
Ví dụ 5. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng: $\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$ (Olympic Toán, Tây Ban Nha, năm 1995)

Giải

* **Tìm cách giải.** Vẽ hình xong và quan sát, chúng ta nhận thấy tỉ số $\frac{PB}{PA}$; $\frac{QC}{QA}$ đã có ở câu b, ví dụ 4 và có kết

quả là $\frac{PB}{PA} + \frac{QC}{QA} = 1$. Do vậy khai thác yếu tố này, kết hợp với bất đẳng thức đại số cho lời giải đẹp

* **Trình bày lời giải**



Dựa vào ví dụ 4, ta có: $\frac{PB}{PA} + \frac{QC}{QA} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức $(x + y)^2 \geq 4xy$;

Ta có: $1 = \left(\frac{BP}{AP} + \frac{CQ}{AQ} \right)^2 \geq 4 \cdot \frac{BP}{PA} \cdot \frac{QC}{QA}$ hay $\frac{BP}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$.

Ví dụ 6. Cho ABCD là hình bình hành có tâm O. Gọi M, N là trung điểm BO; AO. Lấy F trên cạnh AB sao cho FM cắt cạnh BC tại E và tia FN cắt cạnh AC tại K. Chứng minh rằng:

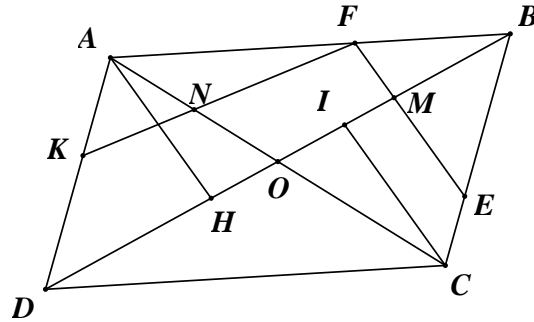
a) $\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4$; b) $BE + AK \geq BC$.

Giải

* **Tìm cách giải.** Với phân tích và suy luận như câu a, ví dụ 4 thì câu a, ví dụ này không quá khó. Tương tự câu

a, chúng ta có kết quả: $\frac{AD}{AK} + \frac{AB}{AF} = 4$ và suy ra $\frac{AD}{AK} + \frac{AB}{AF} + \frac{AB}{BF} + \frac{BC}{BE} = 8$

Đề liên kết được $BE + AK$ với nhau, mà với suy luận trên thì BE, AK cũng nằm ở mẫu số, do đó chúng ta liên tưởng tới bất đẳng thức đại số $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ sẽ cho chúng ta yêu cầu. Với suy luận đó, chúng ta có lời giải sau:



* **Trình bày lời giải**

a) Kẻ $CI \parallel AH \parallel EF$ (với $I, H \in BD$)

Xét $\triangle AOH$ và $\triangle COI$ có $\angle AOH = \angle COI$ (đối đỉnh); $OA = OC$; $\angle HAO = \angle ICO$ (so le trong)

$\Rightarrow \triangle AOH = \triangle COI$ (c.g.c) $\Rightarrow OH = OI$. Áp dụng định lý Ta - lét, ta có:

$$\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = \frac{BH}{BM} + \frac{BI}{BM} = \frac{BH + BI}{BM} = \frac{BO + OH + BO + OI}{BM} = \frac{2 \cdot BO}{BM} = 4.$$

b) Tương tự ta có:

$$\frac{AD}{AK} + \frac{AB}{AF} = 4 \Rightarrow \frac{AD}{AK} + \frac{AB}{AF} + \frac{AB}{BF} + \frac{BC}{BE} = 8$$

$$\Rightarrow BC \left(\frac{1}{AK} + \frac{1}{BE} \right) + AB \left(\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} \right) = 8 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ (với $x, y > 0$)

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} \geq \frac{4}{AF + BF} = \frac{4}{AB} \Rightarrow AB \left(\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} \right) \geq 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $BC \left(\frac{1}{AK} + \frac{1}{BE} \right) \leq 4$

$$\text{Mà } \frac{1}{AK} + \frac{1}{BE} \geq \frac{4}{AK + BE} \Rightarrow BC \left(\frac{1}{AK} + \frac{1}{BE} \right) \geq \frac{4BC}{AK + BE}$$

$$\Rightarrow \frac{4BC}{AK + BE} \leq 4 \Rightarrow AK + BE \geq BC.$$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC nhọn có AH là đường cao. Trên AH, AB, AC lần lượt lấy điểm D, E, F sao cho $EDC = FDB = 90^\circ$. Chứng minh rằng: $EF \parallel BC$.

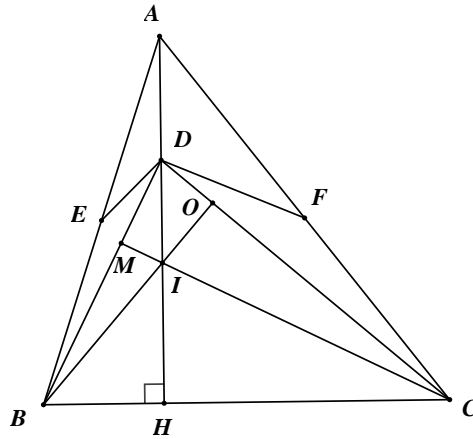
(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2011 – 2012)

Giải

*** Tìm cách giải.** Để chứng minh $EF \parallel BC$, suy luận một cách tự nhiên chúng ta cần vận dụng định lý Ta – lét đảo. Do vậy cần chứng minh tỉ lệ thức $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$. Nhận thấy để định hướng tỉ lệ thức ấy cũng như khái thác

được $EDC = FDB = 90^\circ$ chúng ta cần kẻ $BO \perp CD$; $CM \perp DB$, để có các đường thẳng song song rồi vận dụng định lý Ta – lét. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

*** Trình bày lời giải**



Kẻ $BO \perp CD$; $CM \perp DB$. BO và CM cắt nhau tại $I \Rightarrow D$ là trung trực của $\triangle BIC \Rightarrow DI \perp BC \Rightarrow I, D, A$ thẳng hàng.

$$DE \parallel BI \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{AB}{AE}.$$

$$IC \parallel FD \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{AC}{AF} \text{ suy ra } \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} \Rightarrow EF \parallel BC \text{ (Định lý Ta - lét đảo).}$$

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có BM là đường trung tuyến. Lấy điểm F trên cạnh BC sao cho $FB = 2.FC$. Chứng minh $AF \perp BM$.

Giải

* **Tìm cách giải.** Nhận thấy từ $FB = 2.FC$ suy ra: $\frac{BF}{FC} = 2$ mang tính chất trọng tâm tam giác. Do vậy nếu gọi

G là trọng tâm tam giác, AH là đường trung tuyến thì dễ dàng nhận được $GF \parallel AC$ và $AH \perp BC$ nên G là trực tâm tam giác ABF . Do đó ta có lời giải sau:

* **Trình bày lời giải**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và AG kéo dài cắt BC tại $H \Rightarrow AH$ là đường trung tuyến của tam giác ABC

Mặt khác $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $AH \perp BC$

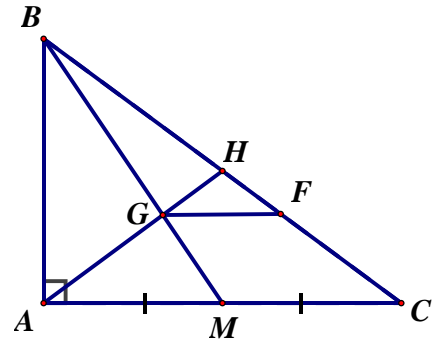
Ta có: $\frac{BG}{GM} = 2$ (Vì G là trọng tâm).

Và $\frac{BF}{FC} = 2$ (gt)

$\Rightarrow \frac{BG}{GM} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow FG \parallel AC$ (theo định lý Ta lét đảo).

$\Rightarrow FG \perp AB$

nên G là trực tâm của $\triangle ABF \Rightarrow BG \perp AF$ hay $BM \perp AF$.



Ví dụ 9: Cho tam giác ABC . Biết tồn tại điểm M, N lần lượt trên cạnh AB, AC sao cho $2\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{CN}$ và $\angle BNM = \angle ANC$. Chứng minh tam giác ABC vuông.

Giải

Cách 1: Gọi P là trung điểm của AM , Q là giao điểm của AN với CP .

Ta có: $\frac{BM}{PM} = 2\frac{BM}{AM} = \frac{BN}{CN}$

$\Rightarrow MN \parallel CP$ (định lý Talets đảo)

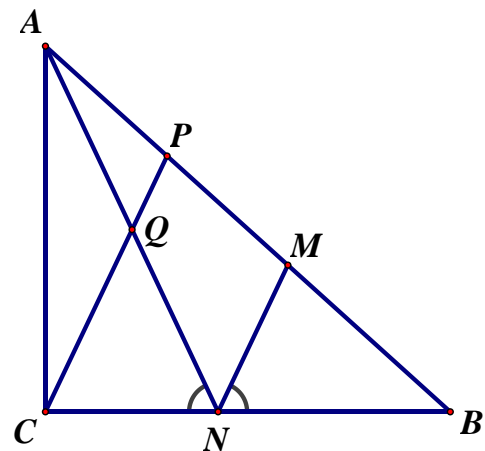
$\Rightarrow \angle QCN = \angle MNB = \angle ANC$

$\Rightarrow \triangle QCN$ cân tại Q

Mặt khác $PA = PM$, $PQ \parallel MN$

$\Rightarrow QA = QN$ nên $QA = QC = QN$

$\Rightarrow \triangle CAN$ vuông tại $C \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C .



Cách 2: Dựng D là điểm đối xứng của N qua C

$$\Rightarrow ND = CN + CD = 2CN.$$

$$\text{Ta có } 2 \frac{BM}{AM} = \frac{BN}{CN} \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{BN}{2CN} = \frac{BN}{DN}$$

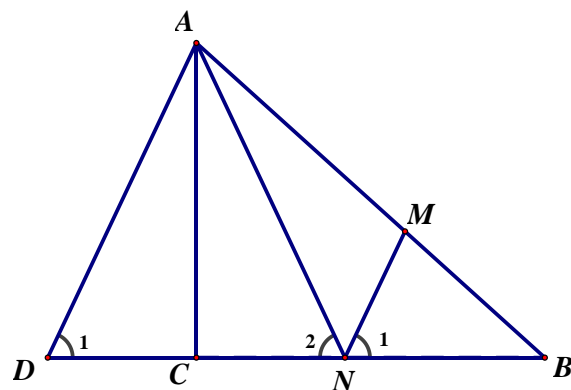
$\Rightarrow MN \parallel AD$ (định lý Talét đảo).

$$\Rightarrow D = N_1 = N_2$$

$\Rightarrow \triangle AND$ cân.

Do đó đường trung tuyến AC cũng là đường cao.

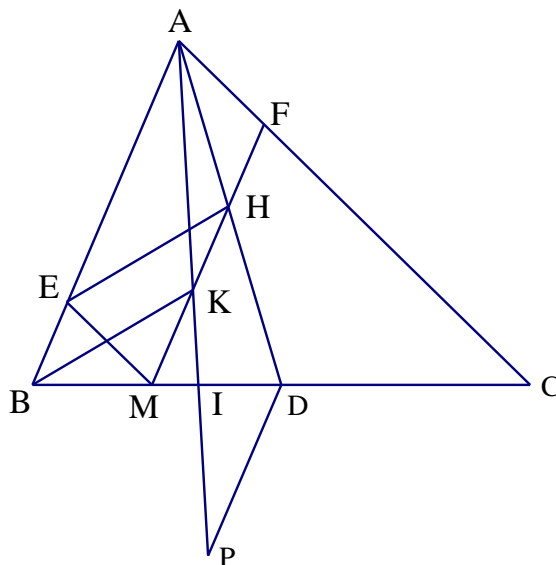
Vậy $AC \perp CB \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C .



Ví dụ 10: Cho tam giác ABC có AD là đường trung tuyến. Gọi M là điểm tùy ý thuộc khoảng BD . Lấy E thuộc AB và F thuộc AC sao cho $CM \parallel EA; CM \parallel AB$.

Gọi H là giao điểm của MF và AD . Đường thẳng qua B song song với EH cắt MF tại K . Đường thẳng AK cắt BC tại I . Tính tỉ số $\frac{IB}{ID}$?

Giải



Qua D kẻ đường thẳng song song với AB , cắt tia AI tại P . Áp dụng định lý Ta-let, cho các đoạn thẳng song song ta có:

$$DP \parallel AB \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{AB}{DP} = \frac{AB}{HK} \cdot \frac{HK}{DP} \quad (1).$$

$$ME \parallel AC \Rightarrow \frac{AB}{HK} = \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BM} \quad (2).$$

$$HK \parallel DP \text{ và } MH \parallel AB \Rightarrow \frac{HK}{DP} = \frac{AH}{AD} = \frac{BM}{BD} \quad (3).$$

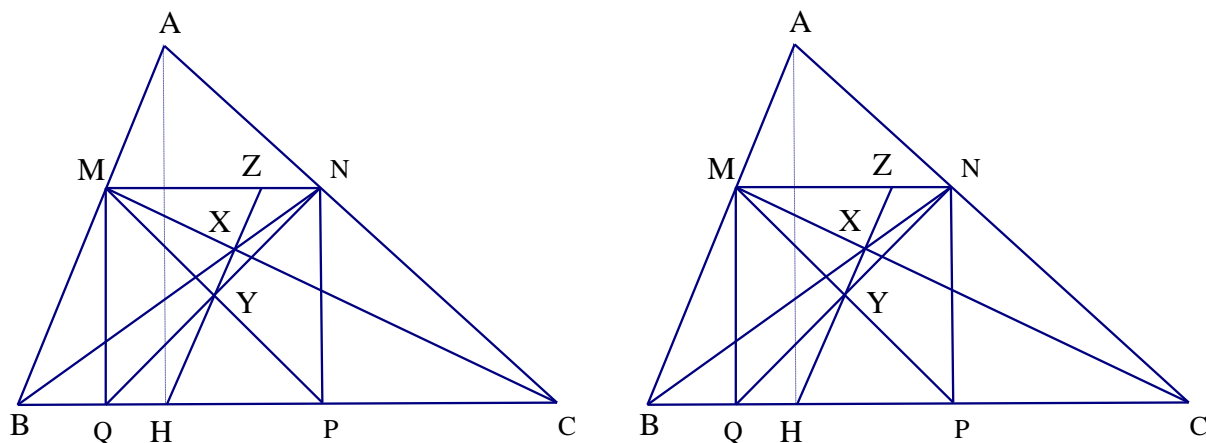
$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra: } \frac{IB}{ID} = \frac{BC}{BM} \cdot \frac{BM}{BD} = \frac{BC}{BD} = 2. \text{ Vậy } \frac{IB}{ID} = 2.$$

Ví dụ 11. Cho $\triangle ABC$ nhọn. Hình chữ nhật $MNPQ$ thay đổi thỏa mãn M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC . Gọi giao điểm của BN với CM là X của QN với PM là Y . Gọi H là giao điểm của XY với BC . Chứng minh rằng đường thẳng AH vuông góc với BC .

Giải

Tìm cách giải. Bài toán có nhiều yếu tố song song, do vậy để chứng minh đường thẳng AH vuông góc với BC , chúng ta nên chứng minh AH song song với NP hoặc MQ . Với định hướng ấy chúng ta tìm cách vận dụng định lý Ta-let đảo. Chẳng hạn nếu chứng minh AH song song với NP , chúng ta cần chứng minh $\frac{HP}{HC} = \frac{AN}{AC}$. Bằng cách vận dụng định lý Ta-lét cùng hệ quả và biến đổi khéo léo các dãy tỉ số bằng nhau, chúng ta sẽ có lời giải đẹp.

Trình bày lời giải



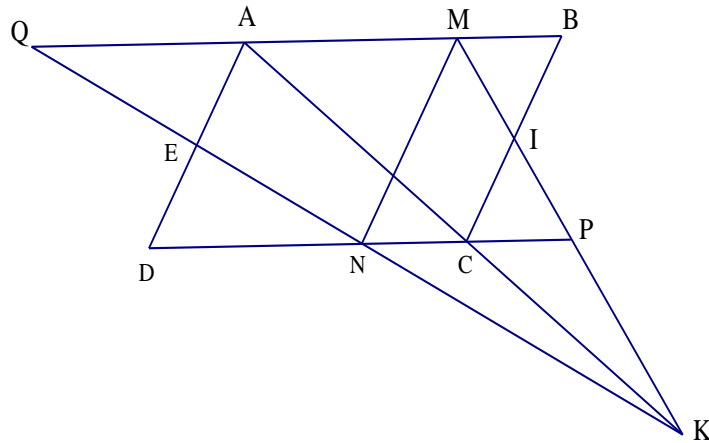
Gọi Z là giao điểm của XY với MN vì tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật, $HP = ZM$ và $MN \parallel BC$ nên:

$$\frac{HP}{HC} = \frac{ZM}{HC} = \frac{XM}{XC} = \frac{MN}{CB} = \frac{AN}{AC}$$

Do đó $AH \parallel NP$ (định lý Ta-Let đảo) mà $NP \perp BC$ nên $AH \perp BC$.

Ví dụ 12. Cho hình bình hành $ABCD$ có I ; E là trung điểm của BC ; AD . Qua điểm M tùy ý trên AB kẻ đường thẳng MI cắt đường thẳng AC tại K . Đường thẳng KE cắt CD tại N .

Chứng minh rằng: $AD = MN$.

Giải

Gọi P là giao điểm của đường thẳng MI và CD

Gọi Q là giao điểm của đường thẳng KN và AB .

Nhận thấy: $\triangle IBM = \triangle ICP$ (g.c.g) nên $BM = CP$.

Ta có theo định lý Ta-lét $AM \parallel CP$ nên $\frac{AM}{MB} = \frac{AM}{CP} = \frac{KA}{KC}$ (1).

Nhận thấy $\triangle EAQ = \triangle EDN$ (g.c.g) nên $DN = AQ$.

Theo định lý Ta-lét, ta có: $AQ \parallel CN$ nên $\frac{DN}{NC} = \frac{AQ}{NC} = \frac{KA}{KC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} \Rightarrow \frac{AM}{AM + MB} = \frac{DN}{DN + NC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC}$ suy ra $AM = DN$.

Do đó $ADNM$ là hình bình hành suy ra $AD = MN$.

Bài tập vận dụng

13.1. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AC = 24$ cm. Điểm E thuộc cạnh AB sao cho $AE = \frac{1}{2}EB$. Điểm F là trung điểm của BC . Gọi I, K thứ tự là giao điểm của AC với DE, DF . Tính các độ dài AI, IK, KC .

13.2. Cho tam giác ABC có BC là cạnh lớn nhất. Trên cạnh BC lấy các điểm D, E sao cho $BD = BA$; $CE = CA$. Đường thẳng qua D song song với AB cắt AC tại M . Đường thẳng qua E song song với AC cắt AB tại N . Chứng minh $AM = AN$.

(Tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán., TP Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)

13.3. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I là trung điểm của AH . Đường vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng BI tại D . Chứng minh rằng $DA = DC$.

13.4. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên đường chéo AC lấy một điểm I . Tia DI cắt đường thẳng AB tại M , cắt đường thẳng BC tại N . Chứng minh rằng:

a) $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} = \frac{CB}{CN}$.

b) $ID^2 = IM.IN$.

13.5. Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài hai tam giác ABD và ACE vuông cân tại B và E . Gọi H là giao điểm của AB và CD ; K là giao điểm của AC và BE . Chứng minh rằng:

a) $AH = AK$.

b) $AH^2 = BH.CK$.

13.6. Cho hình vuông $ABCD$, điểm E thuộc cạnh BC . Gọi F là giao điểm của AE và CD , G là giao điểm của DE và BF .

a) Gọi I và K theo thứ tự là giao điểm của AB và CG và DG . Chứng minh rằng IE song song với BD

b) Chứng minh rằng AE vuông góc với CG .

13.7. Cho tam giác ABC và D là một điểm tùy ý trên AC . Gọi G là trọng tâm $\triangle ABD$. Gọi E là giao điểm của CG và BD . Tính $\frac{EB}{ED} - \frac{CA}{CD}$.

13.8. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm E thuộc cạnh AB , điểm F thuộc cạnh BC . Gọi I là giao điểm của CE và AD , gọi K là giao điểm của AF và DC . Chứng minh rằng EF song song với IK .

13.9. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC kéo dài về phía C lấy điểm M . Một đường thẳng Δ đi qua M cắt các cạnh CA, AB lần lượt tại N và P . Chứng minh rằng $\frac{BM}{BP} - \frac{CM}{CN}$ không đổi khi M và Δ thay đổi.

(Thi học sinh Toán 9, tỉnh An Giang, năm học 2009 – 2010)

13.10. Giả sử O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E, F, H lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C và O đến AD . Chứng minh rằng: $AD.BE.CF \leq AC.BD.OH$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

13.11. Cho tam giác ABC vuông tại A . Các tứ giác $MNPQ$ và $AXYZ$ là các hình vuông sao cho $M \in AB$; $Q, P \in BC$; $N \in AC$; X, Y, Z tương ứng thuộc AB, BC, AC . Chứng minh $MN < AX$.

13.12. Gọi M là điểm bất kì trên đường trung tuyến trên đường trung tuyến AD của tam giác ABC . Gọi P là giao điểm của BM và AC , gọi Q là giao điểm của CM và AB . Chứng minh $PQ \parallel BC$.

13.13. Cho tam giác ABC có $AB < BC$, đường phân giác BE và đường trung tuyến BD (E, D thuộc AC). Đường thẳng vuông góc với BE qua C cắt BE, BD lần lượt tại F, G . Chứng minh rằng đường thẳng DF chia đôi đoạn thẳng GE .

13.14. Cho tam giác ABC . Lấy điểm O nằm trong tam giác, các tia BO và CO cắt AC và AB lần lượt tại M và N . Vẽ hình bình hành $BOCF$. Qua N kẻ đường thẳng song song với BM cắt AF tại E . Chứng minh rằng :

a) $MONE$ là hình bình hành;

$$b) \frac{AE}{AF} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} = \frac{OM \cdot ON}{OB \cdot OC}.$$

13.15. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn CD . Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường chéo BD tại M và cắt CD tại I . Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt cạnh CD tại K . Qua K kẻ đường thẳng song song với BD cắt BC tại P . Chứng minh rằng: $MP \parallel DC$.

13.16. Cho tam giác ABC có CM là trung tuyến. Qua điểm Q trên AB vẽ đường thẳng d song song với CM . Đường thẳng d cắt AC , BC lần lượt tại P, R . Chứng minh rằng nếu $QA \cdot QB = QP \cdot QR$ thì tam giác ABC vuông tại C .

13.17. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Một điểm P thuộc cạnh BC . Các đường thẳng qua P theo thứ tự song song với CG và BG cắt AB , AC lần lượt tại E và F . Gọi giao điểm của BG và CG với EF lần lượt là I, J . Chứng minh rằng:

a) $EI = IJ = JF$;

b) PG đi qua trung điểm của EF .

13.18. Cho hình thang $ABCD$ ($AD < CD$, $AB \parallel CD$) có đường chéo AC bằng cạnh bên AD . Một đường thẳng d đi qua trung điểm E của CD cắt BD và BC tại $M; N$. Gọi $P; Q$ là giao điểm của $AM; AN$ với CD . Chứng minh $MAD = QAC$.

13.19. Cho tam giác ABC . M là điểm thuộc BC . Chứng minh rằng $MA \cdot BC < MC \cdot AB + MB \cdot AC$.

13.20. Cho tam giác nhọn ABC có $A = 45^\circ$, các đường cao BD và CE cắt nhau ở H . Đường vuông góc với AB tại B cắt AC ở I . Đường vuông góc với AC tại C cắt AB ở K . Gọi F là giao điểm của BD và CK , G là giao điểm của FH và AI . Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác AIK .

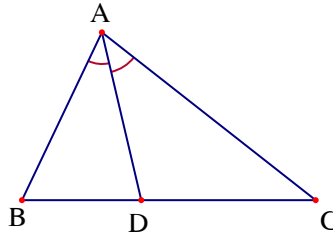
13.21. Đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác ABC cắt cạnh AB tại M , cạnh AC tại N và tia CB tại P . Chứng minh rằng: $\frac{AB^2}{AM \cdot BM} + \frac{AC^2}{AN \cdot CN} - \frac{BC^2}{BP \cdot CP} = 9$.

13.22. Cho tam giác ABC với điểm M thuộc miền trong tam giác. Gọi I, J, K thứ tự là giao điểm của các tia AM, BM, CM với các cạnh BC, CA, AB . Đường thẳng qua M và song song với BC cắt IK, IJ tại $E; F$. Chứng minh: $ME = MF$.

CHUYÊN ĐỀ 14. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

Kiến thức cần nhớ

1. Định lý



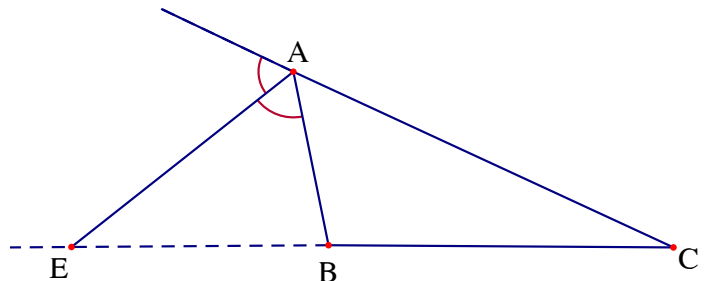
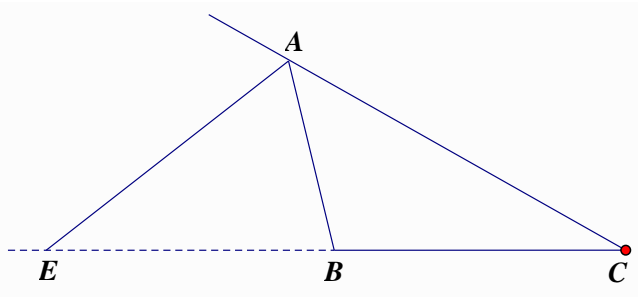
Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \\ \angle BAD = \angle CAD \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

2. Chú ý

- Định lý vẫn đúng đối đường phân giác góc ngoài của tam giác.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \ (AB \neq AC) \\ \angle BAE = \angle CAE \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$



* Các định lý trên có định lý đảo

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AD \text{ là đường phân giác trong của tam giác}$$

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE \text{ là đường phân giác ngoài của tam giác}$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho $\triangle ABC$, trung tuyến BM cắt phân giác CD tại P . Chứng minh rằng $\frac{PC}{PD} - \frac{AC}{BC} = 1$.

Giải

Dựa vào định lý Ta-let $\frac{PC}{PD} - \frac{AC}{BC} = 1 \Leftrightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{AC}{BC} + 1$

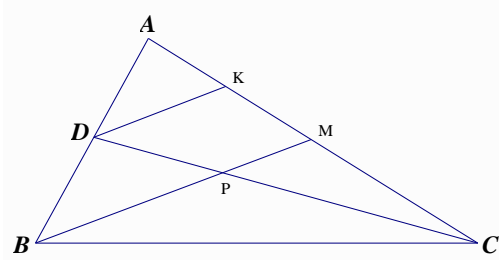
Do CD là phân giác của ΔABC nên $\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{DA}{DB} + 1 = \frac{AC}{BC} + 1 \Leftrightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{BC} + 1$

Vì vậy chỉ cần chứng minh $\frac{PC}{PD} = \frac{AB}{DB}$

Cách 1:

Vẽ $DK \parallel BM$ (K thuộc AM).

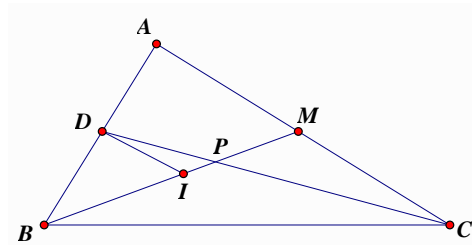
Theo định lí Ta-lét ta có: $\frac{PC}{PD} = \frac{MC}{MK} = \frac{MA}{MK} = \frac{AB}{DB}$



Cách 2:

Vẽ $DI \parallel AC$ (I thuộc BM).

Theo định lí Ta-lét ta có: $\frac{PC}{PD} = \frac{MC}{DI} = \frac{MA}{DI} = \frac{AB}{DB}$



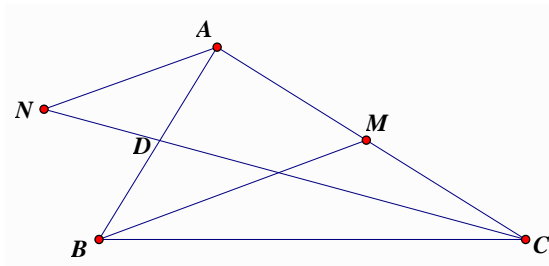
Cách 3:

Vẽ $AN \parallel BM$ (N thuộc tia CD).

Do $MA = MC \Rightarrow PC = PN \Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{PN}{PD}$

Mặt khác $\frac{ND}{PD} = \frac{DA}{DB}$ (do $AN \parallel BP$)

$\Rightarrow \frac{PN}{PD} = \frac{DN}{PD} + 1 = \frac{DA}{DB} + 1 = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{AB}{DB}$



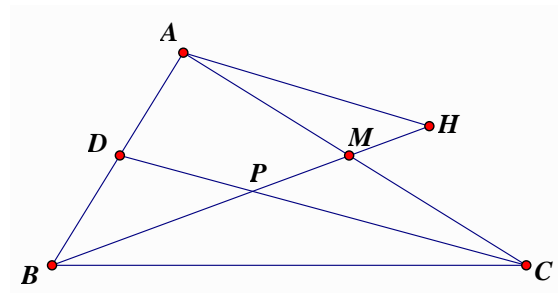
Cách 4:

Vẽ $AH \parallel CD$ (H thuộc tia BM).

Ta có $\Delta AMH = \Delta CMP$ (g.c.g)

$\Rightarrow PC = AH \Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{AH}{PD}$

Mặt khác do $PD \parallel AH$



nên theo hệ quả của định lý Ta-let ta có:

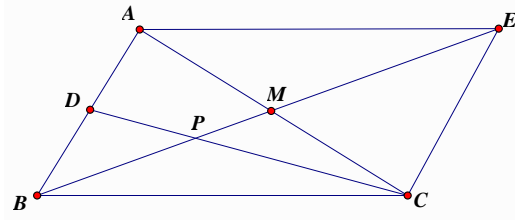
$$\frac{AH}{PD} = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{AB}{DB}$$

Cách 5:

Trên tia đối của tia MB lấy điểm E sao cho MB = ME

$\Rightarrow ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow AB \parallel CE$ và $AB = CE$

Theo hệ quả của định lý Ta-let ta có: $\frac{PC}{PD} = \frac{CE}{BD} = \frac{AB}{DB}$



Ví dụ 2: Cho $\triangle ABC$ cân tại A và góc A = 36° . Chứng minh rằng: $AB^2 = AB \cdot BC + BC^2$

Giải

***Tìm cách giải:** Phân tích đề bài, chúng ta thu được $B = C = 72^\circ$, nhận thấy $72^2 = 2 \cdot 36^\circ$ do đó chúng ta nên kẻ phân giác góc B (hoặc góc C) là suy luận tự nhiên. Từ đó vận dụng tính chất đường phân giác trong tam giác và biến đổi linh hoạt tỉ lệ thức ta được lời giải hay.

*** Trình bày lời giải.**

Kẻ phân giác BD của góc ABC ($D \in AC$), khi đó $B_1 = B_2 = 36^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại D và $\triangle BCD$ cân tại B $\Rightarrow AD = BC = BD$

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ABC ta có:

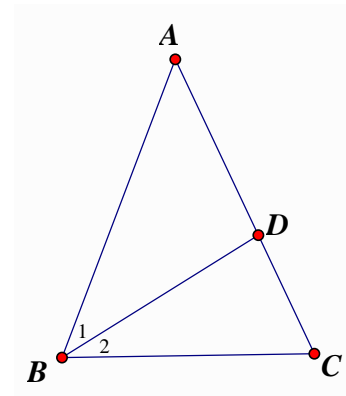
$$\frac{BA}{BC} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{BC}{AC - AD}$$

$$\text{Mà } AB = AC, AD = BC \Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{BC}{BA - BC}$$

$$\Leftrightarrow BA^2 - BA \cdot BC = BC^2 \Leftrightarrow AB^2 = AB \cdot BC + BC^2$$

Nhận xét: Tương tự chúng ta giải được bài toán sau:

Cho $\triangle ABC$ cân tại A có góc A = 108° . Chứng minh rằng: $AB^2 = BC^2 - AB \cdot BC$.

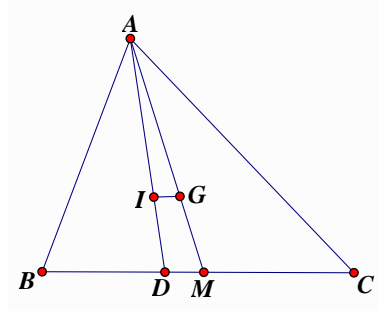


Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G và I là giao điểm của 3 đường phân giác trong. Biết rằng $IG \parallel BC$. Chứng minh rằng $AB + AC = 2 \cdot BC$

***Tìm cách giải:** Nhận thấy để khai thác $IG \parallel BC$ chúng ta nên kẻ đường phân giác góc A và trung tuyến ứng với cạnh BC thì sẽ vận dụng được giả thiết.

Từ suy luận đó chúng ta có kết quả $\frac{AI}{ID} = 2$. Mặt khác tỉ số $\frac{AI}{ID}$ kết hợp với giao điểm ba đường phân giác trong cho phép chúng ta liên tưởng tới khả năng vận dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ABD, ACD. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

***Trình bày lời giải:**



Gọi D, M lần lượt là giao điểm của AI, AG với BC.

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ABD, ACD ta có:

$$\frac{IA}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{CA}{CD} = \frac{AB+AC}{BD+CD} = \frac{AB+AC}{BC}$$

$$IG \parallel BC \Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{GA}{GM} = 2 \Rightarrow \frac{AB+AC}{BC} = 2$$

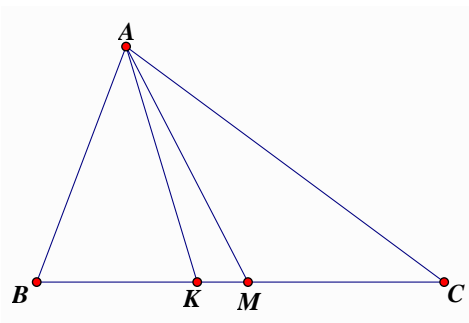
hay $AB + AC = 2.BC$

Nhận xét: Với kỹ thuật và lối tư duy trên, chúng ta có thể giải được bài toán đảo sau:

Biết $AB + AC = 2.BC$. Chứng minh rằng: $IG \parallel BC$

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có tỉ số giữa hai cạnh chung đỉnh là 3: 2. Vẽ đường trung tuyến AM và đường phân giác AK. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác AKM và AKB.

Giải

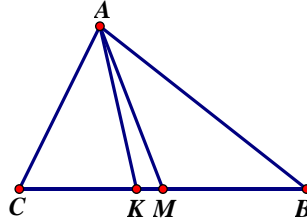


Trường hợp 1: Xét $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$

Chú ý rằng $KM = \frac{KB - KC}{2}$ và $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$

$$\text{Ta có: } \frac{S_{AKM}}{S_{AKB}} = \frac{KM}{KB} = \frac{KB - KC}{2KB} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{KC}{KB} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{AC}{AB} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

Trường hợp 2: Xét $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$



Chú ý rằng: $KM = \frac{KC - KB}{2}$ và $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$

$$\text{Ta có: } \frac{S_{AKM}}{S_{AKB}} = \frac{KM}{KB} = \frac{KC - KB}{2KB} = \frac{1}{2} \left(\frac{KC}{KB} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{AC}{AB} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = \frac{1}{4}$$

Nhận xét: Bài này dễ bỏ sót trường hợp.

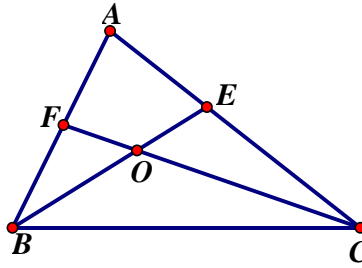
Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có BE và CF là 2 đường phân giác cắt nhau tại O . Chứng minh rằng nếu $OB \cdot OC = \frac{1}{2} BE \cdot CF$ thì $\triangle ABC$ vuông tại A .

Giải

* **Tìm cách giải.** Với giả thiết $OB \cdot OC = \frac{1}{2} BE \cdot CF$ và chứng minh $\triangle ABC$ vuông tại A , dễ dàng nhận thấy từ mối quan hệ độ dài mà chứng minh tam giác vuông tất yếu chúng ta phải nghĩ đến định lý Py-ta-go đảo. Do đó chúng ta cần biểu diễn $OB \cdot OC = \frac{1}{2} BE \cdot CF$ thông qua các cạnh của tam giác ABC . Định hướng cuối cùng là:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

* **Trình bày lời giải:**



Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BF}{BF + FA} = \frac{BC}{BC + AC}$$

$$\frac{BF}{c} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow BF = \frac{ac}{a+b}$$

$$\frac{OF}{OC} = \frac{BF}{BC} = \frac{c}{a+b} \Rightarrow \frac{OF}{OC + OF} = \frac{a+b+c}{a+b} \Rightarrow \frac{CF}{OC} = \frac{a+b+c}{a+b}$$

Tương tự, ta có: $\frac{BE}{OB} = \frac{a+b+c}{a+b}$

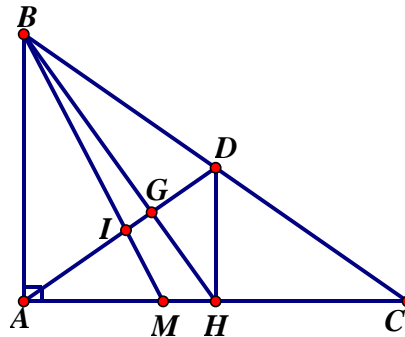
$$\text{Từ giả thiết } OB \cdot OC = \frac{1}{2} BE \cdot CF \Rightarrow \frac{BE \cdot CF}{OB \cdot OC} = 2 \Rightarrow \frac{(a+b+c)^2}{(a+c)(a+b)} = 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 2a^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$a^2 = b^2 + c^2$, suy ra $\triangle ABC$ vuông tại A .

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC vuông tại A có G là trọng tâm, BM là đường phân giác. Biết rằng $GM \perp AC$. Chứng minh BM vuông góc với trung tuyến AD .

Giải



Cách 1: (Không dùng tính chất đường phân giác). Gọi I là giao điểm của BM và AD , H là trung điểm AC
 $\Rightarrow DH \parallel AB$ và $DH = \frac{1}{2}AB$ (vì DH là đường trung bình $\triangle ABC$)

Lại có $GM \parallel AB$ (cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow GM \parallel DH$. Áp dụng hệ quả định lý Talet:

$$\text{Xét } \triangle ADH \text{ có } GM \parallel DH \Rightarrow \frac{GM}{DH} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{GM}{DH} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Xét } \triangle ABI \text{ có } GM \parallel AB \Rightarrow \frac{GI}{AI} = \frac{GM}{AB} = \frac{GH}{BH} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{GI + AI}{AI} = \frac{1+3}{3} \Rightarrow AI = \frac{3}{4}AG = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}AD \Rightarrow AI = \frac{AD}{2} \Rightarrow I \text{ là trung điểm của } AD$$

$\triangle ABD$ có BI vừa là đường phân giác, vừa là đường trung tuyến, suy ra $\triangle ABD$ cân tại B nên BI vừa là đường cao, vừa là đường phân giác. Do đó $BM \perp AD$.

$$\text{Cách 2: } \triangle ADH \text{ có } GM \parallel DH \Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3AM = 2AH = AC = AM + MC \text{ hay } MC = 2AM.$$

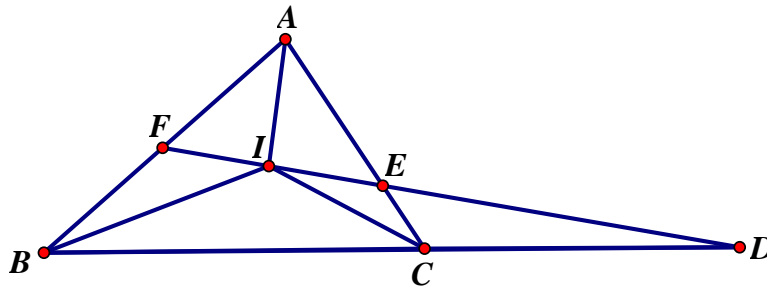
$$\text{Áp dụng tính chất đường phân giác trong } \triangle ABC, \text{ ta có: } \frac{BC}{AB} = \frac{MC}{MA} = 2 \Rightarrow AB = \frac{BC}{2} = BD$$

Vậy $\triangle ABD$ cân tại B nên BI vừa là đường phân giác vừa là đường cao.

Do đó $BM \perp AD$.

Ví dụ 7: Cho tam giác ABC có I là giao điểm 3 đường phân giác. Đường thẳng qua I cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F sao cho DE nằm cùng phía đối với I . Chứng minh rằng: $\frac{BC}{ID} + \frac{AC}{IE} = \frac{AB}{IF}$

Giải



Áp dụng tính chất đường phân giác trong và ngoài tam giác, ta có:

$$\frac{BD}{ID} = \frac{BF}{IF}; \frac{CE}{IE} = \frac{CD}{ID}; \frac{AF}{IF} = \frac{AE}{IE}$$

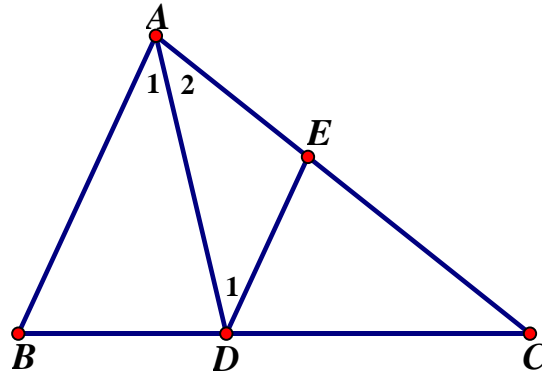
Ta có: $\frac{BC}{ID} = \frac{BD}{ID} - \frac{CD}{ID} = \frac{BF}{IF} - \frac{CE}{IE}$ (1)

Ta có: $\frac{AC}{IE} = \frac{AE}{IE} + \frac{CE}{IE} = \frac{AF}{IF} + \frac{CE}{IE}$ (2)

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, suy ra: $\frac{BC}{ID} + \frac{AC}{IE} = \frac{BF}{IF} + \frac{AF}{IF} = \frac{AB}{IF}$.

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC , đường phân giác AD . Đặt $AC = b, AB = c$. Chứng minh rằng: $AD < \frac{2bc}{b+c}$

Giải



Cách 1: Qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC ở E .

Ta có: $D_1 = A_1 = A_2$ nên $AE = DE$. Ta tính DE theo b và c

Do $DE \parallel AB$ nên theo định lý Talet thì: $\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC}$ (1)

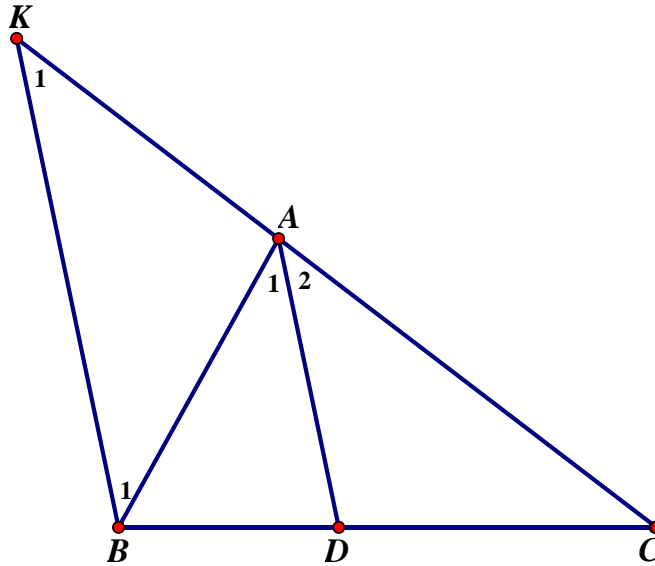
Theo tính chất đường phân giác $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

Nên $\frac{DC}{DC+DB} = \frac{b}{b+c}$. Tức là: $\frac{DC}{BC} = \frac{b}{b+c}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DE}{c} = \frac{b}{b+c}$. Do đó $DE = \frac{bc}{b+c}$

Tam giác ADE có: $AD < AE + DE = 2DE = \frac{2bc}{b+c}$

Cách 2: (không dùng tính chất đường phân giác). Qua B kẻ đường thẳng song song với AD , cắt đường thẳng AC ở K .



Ta có: $K_1 = A_2; B_1 = A_1 \Rightarrow K_1 = B_1 \Rightarrow \triangle ABK$ cân tại K nên $AK = AB = c$

Do $BK \parallel AD$ nên theo định lý Talet thì: $\frac{AD}{BK} = \frac{AC}{KC} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow AD = \frac{b}{b+c} BK$ (1)

Tam giác ABK có $BK < AB + AK = 2c$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AD < \frac{2bc}{b+c}$

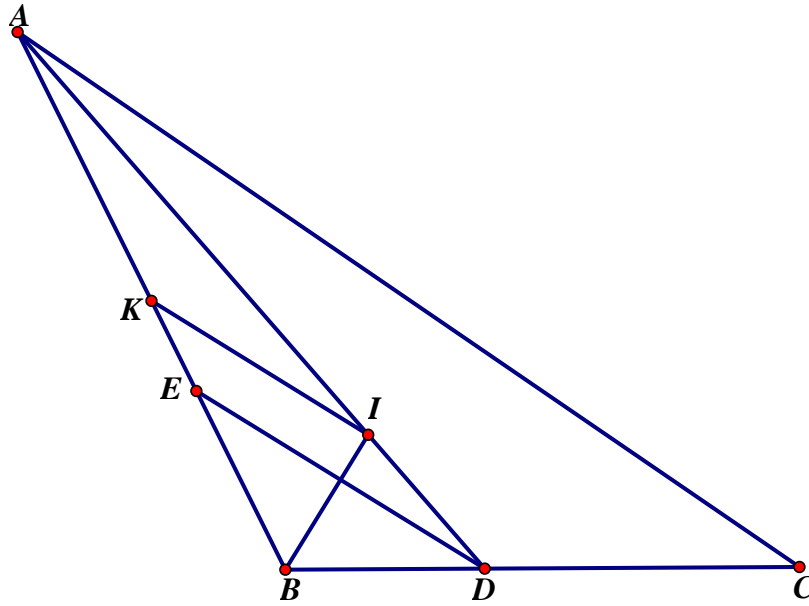
Nhận xét: từ kết luận bài toán, suy ra: $\frac{1}{AD} > \frac{b+c}{2bc} \Rightarrow \frac{1}{AD} > \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Tương tự như vậy đối với đường phân giác góc B và góc C , thì chúng ta giải được bài toán hay và khó sau. Cho tam giác ABC . Gọi l_a, l_b, l_c là độ dài đường phân giác góc A, B và C . Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$. Chứng

minh rằng: $\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Ví dụ 9: Cho $\triangle ABC$ có AD là đường phân giác, I là giao điểm 3 đường phân giác và K là trung điểm AB . Biết $KIB = 90^\circ$. Chứng minh rằng: $AB + AC = 3BC$.

Giải



Trên BA lấy điểm E sao cho $BE = BD$

Ta có: $\triangle BDE$ cân tại B có BI là đường phân giác nên $BI \perp DE$

$$\text{Do đó } DE \parallel KI (\perp BI), \frac{KE}{KA} = \frac{DI}{AI} \quad (1)$$

Áp dụng tính chất đường phân giác trong $\triangle ABD$, $\triangle ACD$

$$\text{Ta có: } \frac{BD}{BA} = \frac{ID}{IA} = \frac{CD}{CA} \quad (2)$$

$$\text{Do đó } \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA} = \frac{BC}{BA + CA} \quad (3)$$

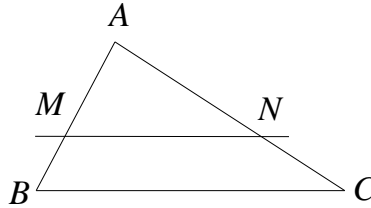
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{KE}{KA} = \frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BA} = \frac{BE}{2.KA}. \text{ Hay } 2KE = BE$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra: } \frac{BC}{BA + CA} = \frac{1}{3} \Rightarrow AB + AC = 3.BC$$

C. Bài tập vận dụng

14.1. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Biết rằng $BC = 10\text{cm}$ và $AB = 3AC$. Tính độ dài BD và CD.

14.2. Gọi AI là đường phân giác của tam giác ABC; IM, IN thứ tự là các đường phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: $AN.BI.CM = BN.IC.AM$

CHUYÊN ĐỀ 15. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC**A. Kiến thức cần nhớ****1. Khái niệm hai tam giác đồng dạng***a. Định nghĩa*

$\Delta A'B'C'$ được gọi là đồng dạng với ΔABC nếu:

$$A' = A; B' = B; C' = C \text{ và } \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

b. Tính chất

- Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó.
- Nếu $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ thì $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
- Nếu $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$ và $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$ thì $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

c. Định lý

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC \\ MN // BC \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

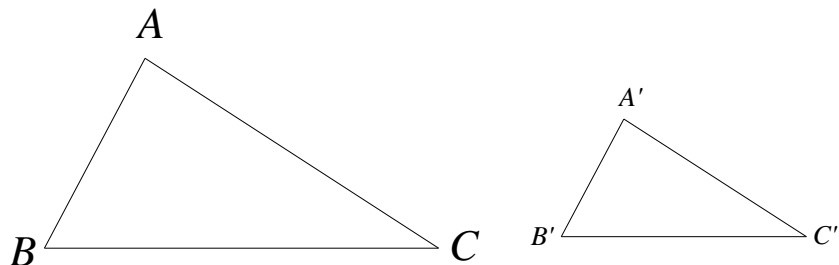
Chú ý: Định lý cũng đúng cho trường hợp đường thẳng cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.

2. Trường hợp đồng dạng thứ nhất

Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \\ \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

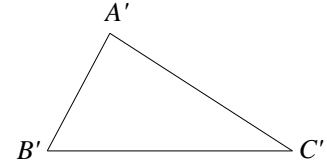
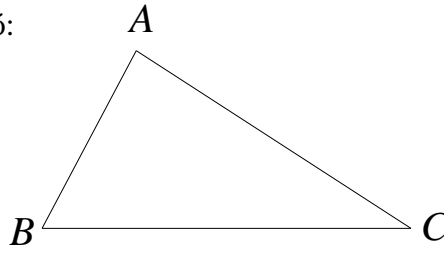
**3. Trường hợp đồng dạng thứ hai**

Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đó đồng dạng.

Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$$A = A'; \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$



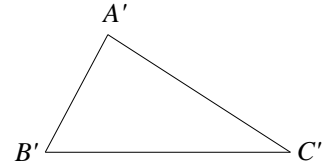
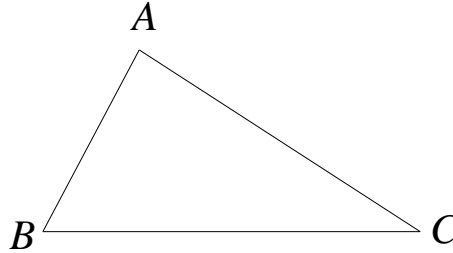
4. Trường hợp đồng dạng thứ ba

Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$$A = A'; B = B'$$

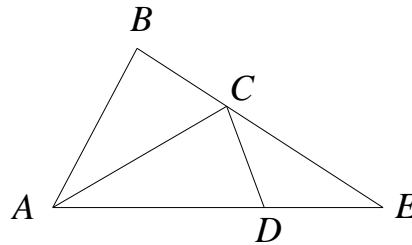
$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$



B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $BAC = CAD$ và $ABC = ACD$. Hai tia AD và BC cắt nhau tại E . Chứng minh rằng $AB.DE = BC.CE$.

Giải



❖ **Tìm cách giải.** Để chứng minh đẳng thức tích, thông thường chúng ta biến đổi chúng dưới dạng tổng tỉ lệ thức và chứng minh tỉ lệ thức ấy. Vậy để chứng minh $AB.DE = BC.CE$ chúng ta cần chứng minh

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CE}{DE}. \text{ Nhận thấy tỉ số } \frac{AB}{BC} \text{ có thể vận dụng được tính chất đường phân giác và ta có } \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE}. \text{ Do vậy}$$

chúng ta cần chứng minh $\frac{CE}{DE} = \frac{AE}{CE}$. Từ đó chúng ta tìm cách chứng minh $\Delta CDE \sim \Delta ACE$, vậy chỉ cần

chứng minh $ECD = BAC$ là xong.

❖ **Trình bày lời giải.**

Vì $BAC + CBA = ECA$ (góc ngoài tam giác) và $ABC = ACD$ nên $ECD = BAC$

$$\text{Do đó } \Delta CDE \sim \Delta ACE (g.g), \text{ suy ra } \frac{CE}{DE} = \frac{AE}{CE} \quad (1)$$

Trong $\triangle ABE$ có AC là đường phân giác suy ra $\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow AB.DE = BC.CE$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có điểm D nằm giữa A và C . Qua C dựng CE vuông góc với đường thẳng BD tại E . Chứng minh:

a) $\triangle ADE \sim \triangle BDC$.

b) $AB.CE + AE.BC = AC.BE$.

Giải

❖ Tìm cách giải.

- $\triangle ADE$ và $\triangle BDC$ có $\angle ADE = \angle BDC$; để tìm một cặp góc nữa bằng nhau thật khó khăn. Do đó chúng ta tìm cách tìm cách chứng minh cặp cạnh kề với cặp góc trên tỉ lệ thông qua hai tam giác khác. Chẳng hạn cần có $\frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DC}$ chúng ta nên chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle ECD$.

- Để chứng minh $AB.CE + AE.BC = AC.BE$, ta có vế trái là một tổng nên vế phải ta cần tách thành một tổng: $AC.BE = AC.x + AC.y$ với $x + y = BE$. Do vậy ta chọn điểm F thuộc BD khi đó $x = BF$, $y = FE$ và chứng minh $AB.CD = AC.BF$, $AD.BC = AC.FE$. Từ đó chúng ta chỉ cần chọn điểm F sao cho $\triangle ABF \sim \triangle ACE$, $\triangle AFE \sim \triangle ABC$ là xong.

❖ Trình bày lời giải.

a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ECD$ có $\angle ADB = \angle EDC$; $\angle BAD = \angle CED = 90^\circ$ (gt)

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ECD (g.g) \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DC}$$

$$\triangle ADE \text{ và } \triangle BDC \text{ có } \angle ADE = \angle BDC; \frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DC}$$

Suy ra $\triangle ADE \sim \triangle BDC$

b) **Cách 1.** Gọi M là giao điểm AB và CE .

Xét $\triangle MBE$ và $\triangle MCA$, ta có M chung;

$$\angle MEB = \angle MAC (= 90^\circ) \Rightarrow \triangle MBE \sim \triangle MCA (g.g) \Rightarrow \frac{MB}{ME} = \frac{MC}{MA}$$

Xét $\triangle MAE$ và $\triangle MCB$ có $\frac{MB}{ME} = \frac{MC}{MA}$, M chung $\Rightarrow \triangle MAE \sim \triangle MCB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow MEA = MBC$$

Lấy $F \in BE$ sao cho $AF \perp AE$. Xét $\triangle ABF$ và $\triangle ACE$ có:

$$BAF = CAE (= 90^\circ - DAF); ABF = ACE (= 90^\circ - M)$$

$$\Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle ACE (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CE} \Rightarrow AB.CE = AC.BF \quad (1)$$

Xét $\triangle AFE$ và $\triangle ABC$ có

$$EAF = BAC (= 90^\circ); AEF = ACB \text{ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)}$$

$$\Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle ABC (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow AE.BC = AC.EF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cộng vế với vế:

$$AB.CE + AE.BC = AC(BF + EF) = AC.BE$$

Cách 2. Gọi J là điểm trên cạnh AC sao cho $ABJ = EBC$.

Xét $\triangle ABJ$ và $\triangle EBC$ có:

$$BAC = BEC = 90^\circ; ABJ = EBC$$

$$\Rightarrow \triangle ABJ \sim \triangle EBC (g.g)$$

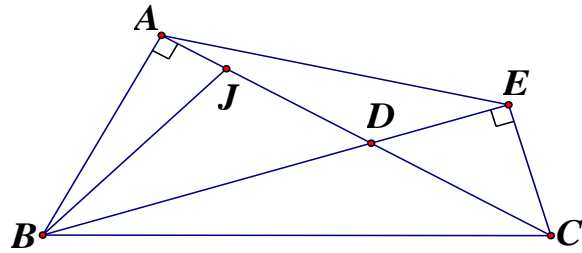
$$\Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{AJ}{CE} \Rightarrow AB.CE = BE.AJ \quad (3)$$

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle JBC$ có:

$$ABE = JBC; AEB = JCB \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle JBC \Rightarrow \frac{AE}{JC} = \frac{BE}{BC}$$

$$\Rightarrow AE.BC = BE.JC \quad (4)$$

Từ (3) và (4) cộng vế với vế: $AB.CE + AE.BC = BE(AJ + JC) = BE.AC$



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $AB = 2cm$; $AC = 3cm$; $BC = 4cm$. Chứng minh rằng

$$BAC = ABC + 2.ACB$$

Giải

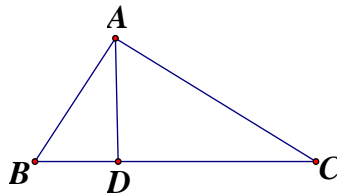
Tìm cách giải. Về mặt suy luận, muốn chứng minh một góc BAC thành tổng các góc như đề bài. Ta có hai cách nghĩ:

Cách 1. Trong góc BAC dựng một góc BAD hoặc DAC bằng góc ABC và chứng minh phần còn lại bằng $2.AC B$. Tuy nhiên cách này vẫn gặp khó khăn bởi còn hệ số 2.

Cách 2. Trong góc BAC dựng một góc BAD bằng góc ACB và chứng minh phần còn lại bằng $DAC = ABC + ACB$. Cách này có tính khả thi. Thật vậy, ta viết $BAC = ABC + ACB$ nên nếu lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BAD = ACB$, thì dễ dàng nhận thấy $ADC = BAD + ABC$ hay $ADC = ACB + ABC$ nên chúng ta chỉ cần chứng minh tam giác ACD cân tại C là xong.

Với suy luận như trên, chúng ta có hai cách trình bày như sau:

*** Trình bày lời giải**



Cách 1. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm D sao cho $BAD = ACB$ suy ra $\triangle ABD \sim \triangle CBA (g.g)$. Suy ra

$$\frac{BD}{BA} = \frac{AB}{CB} \Rightarrow \frac{BD}{2} = \frac{2}{4} \Rightarrow BD = 1cm \Rightarrow CD = BC - BD = 3cm$$

$\Rightarrow CD = AC$ nên $\triangle ACD$ cân tại C , do vậy $DAC = ADC$

Mà $ADC = ABC + BAD$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

Suy ra: $BAC = BAD + DAC = ACB + ADC = ACB + ABC + BAD$

Do đó $BAC = ABC + 2.AC B$

Cách 2. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm D sao cho $BD = 1\text{ cm}$

$\Rightarrow CD = BC - BD = 3cm \Rightarrow CD = AC$ nên tam giác ACD cân tại C

Do vậy $DAC = ADC$ (1)

$\triangle ABD$ và $\triangle CBA$ có $\angle ABD$ chung và $\frac{BD}{BA} = \frac{AB}{CB} = \frac{1}{2}$

Suy ra $\triangle ABD \sim \triangle CBA (c.g.c)$

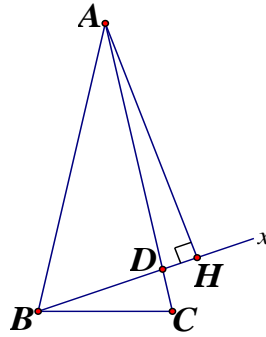
$\Rightarrow BAD = BCA$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $BAC = BAD + DAC = ACB + ADC = ACB + ABC + BAD$

Do đó $BAC = ABC + 2.ACB$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC ($AB = AC$) có góc ở đỉnh bằng 20° ; cạnh đáy $BC = a$; cạnh bên $AB = b$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Giải



Cách 1. Dựng tia Bx ở nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A sao cho $CBx = 20^\circ$; Tia Bx cắt AC ở D; kẻ $AH \perp Bx$. Tam giác ABC cân tại A, ta có:

$$A = 20^\circ \Rightarrow B = C = 80^\circ \Rightarrow ABH = ABC - CBx = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$$

$$\text{Suy ra: } \triangle ABH \text{ có } ABH = 60^\circ; AHB = 90^\circ \Rightarrow BH = \frac{AB}{2} = \frac{b}{2}$$

$$\text{Ta có: } AH^2 = AB^2 - BH^2 \text{ (định lý Pi - ta - go)} \Rightarrow AH^2 = b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{3b^2}{4}$$

$$\triangle BDC \text{ có } BCD = 80^\circ; CBD = 20^\circ \Rightarrow BDC = 80^\circ \Rightarrow \triangle BCD \text{ cân tại B} \Rightarrow BD = BC = a$$

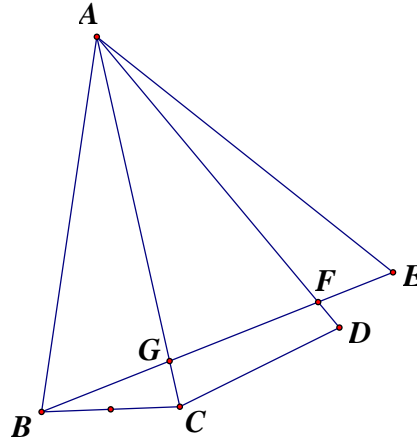
$$\text{Do đó } DH = BH - BD = \frac{b}{2} - a$$

$$\text{Nhận thấy: } \triangle ABC \sim \triangle BDC (g.g) \Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow CD = \frac{BC^2}{AC} = \frac{a^2}{b}, \text{ mà } AD = AC - CD = b - \frac{a^2}{b}$$

$$\text{Và } AD^2 = AH^2 + DH^2 = \frac{3b^2}{4} + \left(\frac{b}{2} - a\right)^2 = b^2 - ab + a^2$$

$$\text{Vậy } \left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 = b^2 - ab + a^2 \Leftrightarrow b^4 + a^4 - 2a^2b^2 = b^4 - ab^3 + a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow a(a^3 + b^3) = 3a^2b^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2$$

Cách 2.

Dựng tam giác ABE đều sao cho E và C nằm cùng phía so với AB. Dựng $\triangle ACD$ cân tại A sao cho D, E nằm cùng phía với AC và $CAD = 20^\circ \Rightarrow \triangle ABC = \triangle ACD = \triangle ADE (c.g.c)$

Gọi F và G là giao điểm của BE với AD; AC. Khi đó $BG = EF = a$. Vì $ABE = 60^\circ$ nên $CBG = BAC = CBE = 20^\circ$ và $\triangle CBG$ cân tại B.

$$\Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle CBG (g.g) \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{CG}{BG} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{CG}{a} \Rightarrow CG = \frac{a^2}{b}$$

$$\text{Ta có: } AG = AC - CG = b - \frac{a^2}{b}$$

$$\text{Ta có: } FG \parallel CD \text{ nên theo định lý Ta - lét, ta có: } \frac{GF}{CD} = \frac{AG}{AC} \Rightarrow \frac{GF}{a} = \frac{b - \frac{a^2}{b}}{b} \Rightarrow GF = \frac{ab^2 - a^3}{b^2}$$

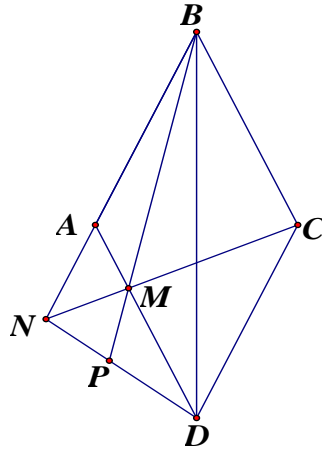
$$\text{Mà } BE = BG + GF + FE \Rightarrow b = 2a + \frac{ab^2 - a^3}{b^2} \Leftrightarrow b^3 = 2ab^2 + ab^2 - a^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2$$

Ví dụ 5. Cho hình thoi ABCD, có $A = 60^\circ$. Gọi M là một cạnh thuộc cạnh AD. Đường thẳng CM cắt đường thẳng AB tại N.

a) Chứng minh $AB^2 = DM.BN$

b) BM cắt DN tại P. Tính góc BPD .

Giải



a) Ta có: $AM \parallel BC$ (do $AD \parallel BC$), suy ra $\triangle NAM \sim \triangle NBC \Rightarrow \frac{NA}{AM} = \frac{NB}{BC}$

Hay $\frac{NA}{AM} = \frac{NB}{AB}$ (1) (vì $BC = AB$)

Ta có: $NA \parallel DC$ (Do $AB \parallel DC$),

suy ra $\triangle NAM \sim \triangle CDM \Rightarrow \frac{NA}{AM} = \frac{CD}{DM}$ Hay $\frac{NA}{AM} = \frac{AB}{DM}$ (2) (vì $CD = AB$)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{NA}{AB} = \frac{AB}{DM}$ hay $AB^2 = DM \cdot BN$

b) Từ $\frac{NB}{AB} = \frac{AB}{DM} \Rightarrow \frac{NB}{BD} = \frac{BD}{DM}$

Xét $\triangle BND$ và $\triangle DBM$ có $\frac{NB}{BD} = \frac{BD}{DM}$ và $\angle NBD = \angle BDM = 60^\circ$

Suy ra $\triangle BND \sim \triangle DBM$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle MBD = \angle BND \Rightarrow \angle MBD + \angle MBN = \angle BND + \angle MBN = 60^\circ$

Mà $\angle BPD = \angle BND + \angle MBN$ nên $\angle BPD = 60^\circ$

Nhận xét. Với kỹ thuật như trên, bạn có thể giải bài toán sau. Cho hình thoi ABCD có $\angle A = 60^\circ$ vẽ đường thẳng qua C cắt tia đối của tia BA tại M và cắt tia đối của tia DA tại N. Gọi K là giao điểm của DM và BN. Tính số đo $\angle MKB$

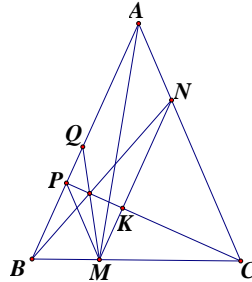
Ví dụ 6. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Lấy M tùy ý thuộc BC, kẻ MN song song với AB (với $N \in AC$), kẻ MP song song với AC (với $P \in AB$). Gọi O là giao điểm của BN và CP. Chứng minh rằng $\angle OMP = \angle AMN$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy $\angle BPM = \angle MNC \Rightarrow \angle QPM = \angle ANM$

Do đó $OMP = AMN \Leftrightarrow \triangle QPM \sim \triangle ANM$. Mặt khác chúng ta thấy $\triangle QPM$ và $\triangle ANM$ khó có thể tìm thêm được một cặp góc nữa bằng nhau. Do vậy chúng ta nên tìm cách biến đổi thêm hai cặp cạnh kề với hai góc OMP ; AMN tỉ lệ là xong.

Trình bày lời giải



Giả sử $MB \leq MC$. Gọi Q là giao điểm MO và AB; K là giao điểm CP và MN

Vì MNAP là hình bình hành nên $QPM = ANM$ (1)

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên suy ra $\triangle PBM$ cân tại P và $\triangle NCM$ cân tại N.

Do đó $PB = PM = AN$ và $NC = NM = AP$

kết hợp với $MN \parallel AP$, suy ra: $\frac{PQ}{PM} = \frac{PQ}{PB} = \frac{KM}{KN} = \frac{PB}{PA} = \frac{NA}{NM}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\triangle QPM \sim \triangle ANM$ (c.g.c) $\Rightarrow QMP = AMN$ hay $OMP = AMN$ (đpcm)

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có $B = 2.C$, $AB = 4cm$, $AC = 8cm$. Tính độ dài cạnh BC?

Giải

Tìm cách giải. Khai thác giả thiết, từ $B = 2.C$ chúng ta cần dựng thêm yếu tố phụ để vận dụng điều này được. Chúng ta có hai hướng giải:

- Cách 1. Kẻ đường phân giác BD của góc B để khai thác được góc bằng nhau.
- Cách 2. Từ đỉnh C dựng thêm một góc bằng góc B, Với hai hướng đó chúng ta có hai lời giải sau:

Trình bày lời giải:

Cách 1. Kẻ đường phân giác BD của tam giác ABC.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADB$ có A chung và $ACB = ABD \left(= \frac{ABC}{2} \right)$

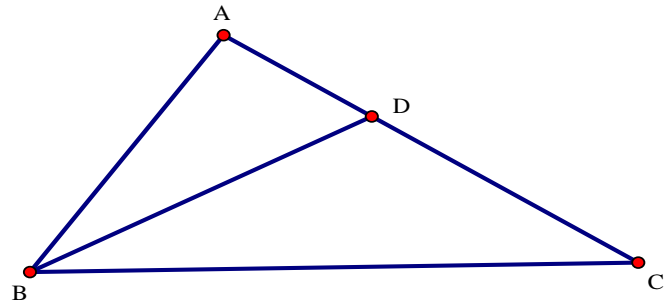
Suy ra $\triangle ABC$ đồng dạng $\triangle ADB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{4^2}{8} = 2(\text{cm}).$$

$$\Rightarrow CD = 6(\text{cm}).$$

$\triangle ABC$ có đường phân giác BD nên:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot CD}{AD} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12(\text{cm}).$$



Cách 2. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A dựng tia Cx sao cho

$$\angle BCx = \angle ACB \Rightarrow \angle ACB = \angle ABC$$

Gọi I là giao điểm của Cx với đường thẳng AB .

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ACE$ có A chung ,

$$\angle ABC = \angle ACE (= 2\angle ACB)$$

Suy ra $\triangle ABC$ đồng dạng $\triangle ACE$ (g.g)

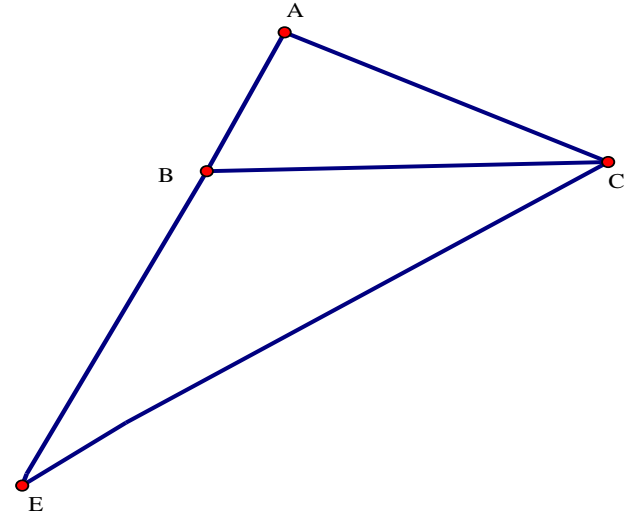
$$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE = \frac{AC^2}{AB} = \frac{8^2}{4} = 16(\text{cm}).$$

$$\Rightarrow BE = 12(\text{cm})$$

$$\text{Từ } \angle ABC = 2\angle ACB = 2\angle BCE$$

Suy ra $\triangle BCE$ cân tại B

$$\text{Do đó } \Rightarrow BC = BE = 12(\text{cm})$$



Ví dụ 8. Cho tam giác ABC có $AB = 2\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$, $BC = 2,5\text{cm}$. Chứng minh rằng $B = 2C$.

Giải.

Tìm tòi cách giải. Bài toán này có nét đảo của ví dụ 7, do đó hoàn toàn tự nhiên chúng ta cũng nghĩ tới việc kẻ thêm yếu tố phụ. Để chứng minh $B = 2C$, chúng ta cũng có hai hướng sau.

Cách 1. Dựng phân giác BD và chứng tỏ $\angle ABD = C$.

Cách 2. Từ đỉnh C dựng thêm một góc bằng góc B và chứng minh cặp góc bằng nhau.

Vì bài toán biết khá nhiều độ dài đoạn thẳng nên chúng ta chứng minh cặp góc bằng nhau bằng cách chứng minh hai tam giác đồng dạng theo trường hợp cạnh góc cạnh.

* **Trình bày lời giải.**

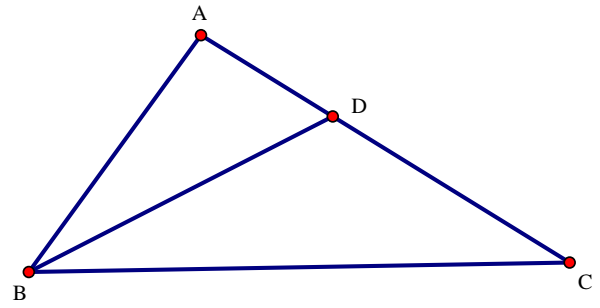
Cách 1. Kẻ đường phân giác BD của tam giác ABC suy ra:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AD+DC} = \frac{AB}{AB+BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{3} = \frac{2}{2+2.5} \Rightarrow AD = \frac{4}{3}(\text{cm})$$

Ta có: $\frac{AB}{AD} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$

Suy ra: $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$



Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADB$ có A chung, $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$ suy ra $\triangle ABC$ đồng dạng $\triangle ADB$ (c.g.c).

Do đó $\angle ACB = \angle ABD$, vậy $\angle ABC = 2C$.

Cách 2. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BC$, suy ra

$$\angle ABC = 2\angle BEC = 2\angle BCE$$

Ta có: $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}; \frac{AC}{AE} = \frac{3}{2+2.5} = \frac{2}{3}$

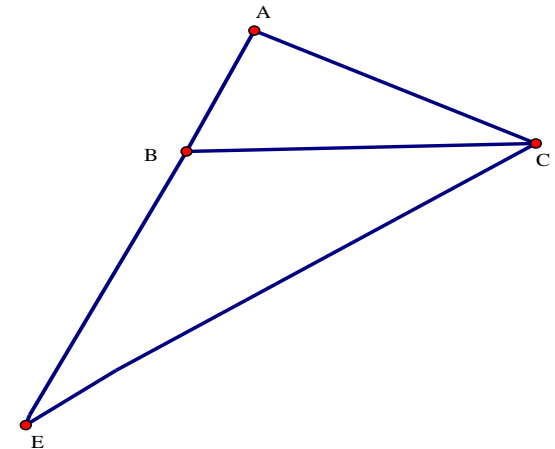
Suy ra $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AC}$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ACE$ có A chung, $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AC}$ suy ra $\triangle ABC$ đồng dạng $\triangle ADB$ (c.g.c).

Do đó $\angle ACE = \angle ABC$

suy ra $\angle ACE = 2\angle BCE \Rightarrow \angle ACB = \angle BCE$

Hay $\angle ABC = 2\angle ACB$.



Ví dụ 9. Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$ và $B = 20^\circ$. Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh AC và AB sao cho $\angle ABE = 10^\circ$ và $\angle ACF = 30^\circ$. Tính $\angle CFE$.

(Thi Olympic Toán quốc tế Đài Loan TAIMC, năm 2012)

Giải

* **Tìm tòi cách giải.** Những bài toán tính số đo thường khó, trước hết chúng ta nên vẽ hình chính xác, sau đó phân tích giả thiết để dự đoán kỹ thuật kẻ thêm yếu tố phụ. Trong giả thiết ta nhận thấy $\angle ACF = 30^\circ \Rightarrow FC = 2FA$. Từ $B = 20^\circ \Rightarrow C = 70^\circ$, khi đó $\angle BCF = 40^\circ$ chúng ta có liên tưởng gì góc 40° này với góc 20° và 30° ở đề bài không? Với suy nghĩ ấy ta lấy điểm G trên AB sao cho $\angle BCG = 20^\circ$ khi đó bài toán tạo nên những yếu tố mới: CF là phân giác góc $\angle ACG$, tam giác BCG cân tại G . Với hình vẽ chính xác chúng ta hoàn toàn có thể dự đoán được CG song song với EF . Từ đó định hướng để chứng minh dự đoán ấy bằng định lý Ta lét đảo.

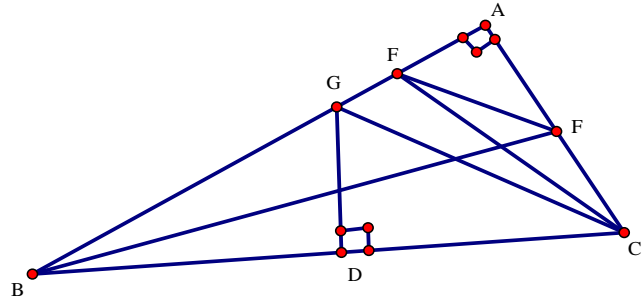
Trình bày lời giải.

Xét $\triangle ABC$ có $A = 90^\circ$ và $B = 20^\circ \Rightarrow C = 70^\circ$

$\triangle ACF$ có $A = 90^\circ$ và $ACF = 30^\circ \Rightarrow FC = 2AF$

Gọi D là trung điểm của BC và G là điểm nằm trên AB sao cho GD vuông góc với BC .

Do đó $\triangle ABC$ đồng dạng $\triangle DBG$



$$\Rightarrow \frac{BD}{BG} = \frac{BA}{BC}; \angle GCB = \angle GBC = 20^\circ \Rightarrow \angle GCF = 20^\circ$$

Mặt khác CG và BE lần lượt là tia phân giác của BCF và ABC nên $\frac{FC}{FG} = \frac{BC}{BG}; \frac{BA}{BC} = \frac{AE}{EC}$

$$\text{Do đó } \frac{AF}{FG} = \frac{\frac{1}{2}FC}{FG} = \frac{\frac{1}{2}BC}{BG} = \frac{BD}{BG} = \frac{BA}{BC} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AF}{FG} = \frac{AE}{EC}$$

Từ đó ta có: $CG \parallel EF$ (định lý Ta lét đảo) $\Rightarrow \angle CFE = \angle GCF = 20^\circ$.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC có $3A + 2B = 180^\circ$. Tính số đo các cạnh của tam giác biết số đo ấy là ba số tự nhiên liên tiếp.

Giải.

Vì $3A + 2B = 180^\circ = A + B + C \Rightarrow C = 2A + B \Rightarrow C > A$ và $C > B \Rightarrow AB > BC; AB > AC$

Trên AB lấy điểm D sao cho $AD = AC \Rightarrow D$ nằm giữa A và B .

Ta có: $\triangle ACD$ cân tại A nên $\angle ADC = \frac{180^\circ - A}{2}$

Mà $3A + 2B = 180^\circ \Rightarrow 180^\circ - A = 2(A + B)$

$$\Rightarrow \angle ADC = \frac{2(A + B)}{2} = (A + B)$$

$$\Rightarrow \angle CDB = 180^\circ - \angle ADC = C$$

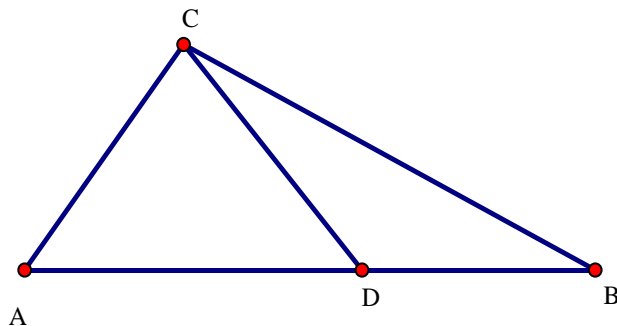
Vậy $\triangle ABC$ đồng dạng $\triangle CBD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow BC^2 = AB \cdot BD = AB \cdot (AB - AC)$$

(*)

Do AB, BC, CA là ba số nguyên liên tiếp và $AB = \max\{AB, BC, CA\}$ nên

$$AB = BC + 1 \text{ hoặc } AB = BC + 2.$$



Trường hợp 1. Nếu $AB = BC + 1$ thì $AC = BC - 1$ thay vào (*) ta có $BC^2 - 2 \cdot BC - 2 = 0$, không tồn tại BC là số nguyên.

Trường hợp 2. Nếu $AB = BC + 2$ thì $AC = BC + 1$ thay vào (*) ta có $BC^2 - BC - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (BC - 2)(BC + 1) = 0 \Leftrightarrow BC = 2 \text{ (vì } BC > 0 \text{)}.$$

Vậy $BC = 2$; $AC = 3$ và $AB = 4$..

Nhận xét Vận dụng kĩ thuật trên, bạn có thể làm được bài toán đảo.

Cho tam giác MNP thỏa mãn $NP^2 + MN.MP - MN^2 = 0$. Chứng minh rằng $3.M + 2.N = 180^\circ$.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC nhọn có hai đường cao BE và CF . Kẻ FI và EJ cùng vuông góc với BC (I, J thuộc BC). Các điểm K, L lần lượt thuộc AB, AC sao cho $KI \parallel AC$, $IJ \parallel AB$. Chứng minh rằng ba đường thẳng EI, FJ, KL đồng quy.

Giải.

Gọi O là giao điểm của EI và FJ , ta có:

$$\angle KFI = \angle FCB \text{ (cùng phụ với góc } \angle IFC) = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle LJC = \angle EIJ \text{ (1)}$$

$$\text{Lại có : } \angle IKF = \angle ELJ \text{ (cùng bù với góc } \angle BAC) \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\triangle KFI$ đồng dạng $\triangle LJE$ (g.g)

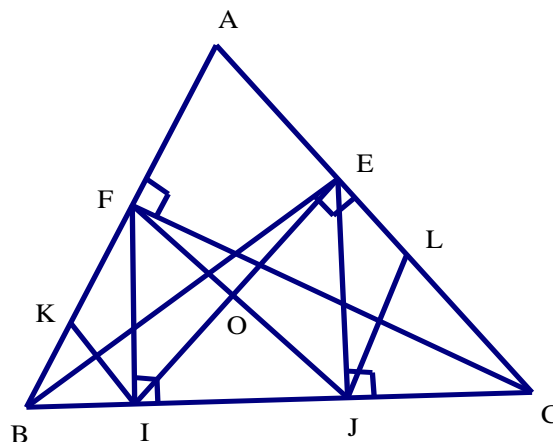
$$\Rightarrow \frac{KF}{LJ} = \frac{FI}{EJ} \text{ (3)}$$

Xét $\triangle KFI$ và $\triangle JOE$ có $\angle FIO = \angle EJO$ (so le trong)

$\angle FOI = \angle JOE$ (đối đỉnh) nên $\triangle KFI$ đồng dạng $\triangle JOE$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{FO}{OJ} = \frac{FI}{EJ} \text{ (4)}$$

$$\text{Lại có } \angle KFO = \angle LJO \text{ (so le trong) (5)}$$



Từ (3), (4) và (5) suy ra $\triangle KFO$ và $\triangle LJO$ (c.g.c). Do đó $\angle FOK = \angle JOL$, mà hai góc này ở vị trí đối đỉnh. Suy ra K, L, O thẳng hàng, tức là EI, FJ, KL đồng quy.

Ví dụ 12. Cho hình thang $ABCD$ ($CD > AB$) với $AB \parallel CD$ và $AB \perp BD$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau ở G . Trên đường thẳng vuông góc với AC tại C lấy điểm E sao cho $CE = AG$ và đoạn thẳng GE không cắt đường thẳng CD . Trên đoạn thẳng CD lấy điểm F sao cho $DF = GB$.

a) Chứng minh $\triangle FDG$ đồng dạng với $\triangle ECG$.

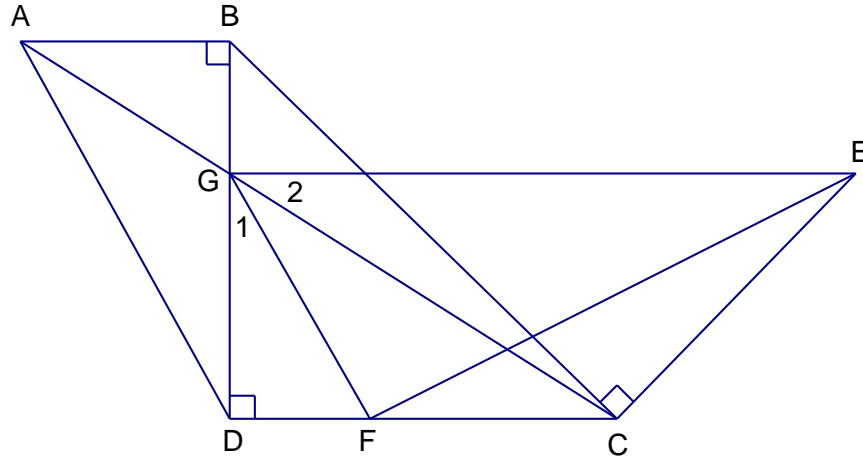
b) Chứng minh $GF \perp EF$.

(Thi tuyển học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Quảng An, năm học 2008 - 2009)

Giải

a) Ta có: $AB \parallel CD \Rightarrow \frac{BG}{AG} = \frac{GD}{GC}$. Mà $CE = AG$; $DF = GB \Rightarrow \frac{DF}{CE} = \frac{GD}{GC}$

Xét $\triangle FDG$ và $\triangle ECG$ có: $\frac{DF}{CE} = \frac{GD}{GC}$; $\angle GDF = \angle GCE$ nên $\triangle FDG \sim \triangle ECG$ (c.g.c)



b) $\triangle FDG \sim \triangle ECG \Rightarrow G_1 = G_2$; $\frac{GD}{GF} = \frac{GC}{GE}$

Xét $\triangle GDC$ và $\triangle GFE$ có: $\frac{GD}{GF} = \frac{GC}{GE}$; $\angle GDC = \angle GFE$ (vì $G_1 = G_2$)

$\Rightarrow \triangle GDC \sim \triangle GFE$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle GFE = \angle GDC = 90^\circ$. Do đó $GF \perp FE$

C. Bài tập vận dụng

15.1. Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh rằng: $AE.AC = AF.AB$

b) Chứng minh rằng: $\triangle AEF \sim \triangle ABC$

c) Chứng minh rằng H là giao điểm của ba đường phân giác trong của $\triangle DEF$

15.2. Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo AC lớn hơn BD . Gọi H, K là hình chiếu của C trên đường thẳng AB, AD . Chứng minh rằng: $\triangle CHK \sim \triangle BCA$

15.3. Cho tam giác ABC vuông góc tại A có đường phân giác BD cắt đường cao AH tại I . Chứng minh $AD.BD = BI.DC$

15.4. Cho tam giác ABC , đường phân giác CD . Chứng minh rằng $CD^2 < CA.CB$

15.5. Cho tam giác đều ABC . Trên tia BA lấy điểm E (A nằm giữa B và E). Gọi D là điểm đối xứng với E qua đường thẳng BC . Gọi F là giao điểm của đường thẳng CD và AB . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{BC} = \frac{1}{BD} + \frac{1}{BF}$$

15.6. Cho hình bình hành $ABCD$ có góc A tù. Từ A , vẽ các đường thẳng vuông góc với BC, CD cắt CD, BC tương ứng tại E và F . Đường thẳng qua A vuông góc với BD , cắt EF tại M . Chứng minh $ME = MF$

15.7. Cho tam giác đều ABC , gọi M là trung điểm của BC . Một góc xMy bằng 60° quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E . Chứng minh:

- $BD.CE = \frac{BC^2}{4}$;
- $DM; EM$ lần lượt là tia phân giác của các góc BDE và CED ;
- Chu vi tam giác ADE không đổi.

15.8. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M . Vẽ BH vuông góc với CM . Nối DM . Gọi HN vuông góc với DH ($N \in BC$).

- Chứng minh rằng tam giác DHC đồng dạng với tam giác NHB .
- Chứng minh rằng $AM.NB = NC.MB$.

15.9. Cho tam giác ABC thỏa mãn $AB = 2.AC$ và $A = 2.B$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác vuông.

15.10. Cho $\triangle ABC$ nhọn có AH là đường cao, lấy điểm M thuộc đoạn BC , kẻ MK vuông góc với AB và ML vuông góc với AC . Đường thẳng qua A và vuông góc với AM cắt MK, ML tại E và F . Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với CE cắt AH tại I . Chứng minh rằng:

- $\triangle AIB$ đồng dạng $\triangle MCE$;
- $\frac{EM}{FM} = \frac{MI}{KM}$ và $\frac{BM}{FM} = \frac{AI}{AC}$;
- AH, BF, CE đồng qui.

15.11. Cho tam giác ABC có các trung tuyến AD, BE thỏa mãn điều kiện $CAD = CBE = 30^\circ$. Chứng minh ABC là tam giác đều.

15.12. Cho $\triangle ABC$. Gọi P là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác. Một đường thẳng đi qua P vuông góc với CP , cắt AC và BC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng:

- $\frac{AM}{BN} = \left(\frac{AP}{BP}\right)^2$;
- $\frac{AM}{AC} + \frac{BN}{BC} + \frac{CP^2}{AC.BC} = 1$.

15.13. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại E .

- Chứng minh rằng hai tam giác BEC và ADC đồng dạng. Tính độ dài BE theo $m = AB$.
- Gọi M là trung điểm của đoạn BE . Chứng minh rằng hai tam giác BHM và BEC đồng dạng. Tính số đo của góc AHM .

- Tia AM cắt BC tại G . Chứng minh: $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$.

15.14. Trong tam giác ABC , các điểm D, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho: $AFE = BFD, BDF = CDE, CED = AEF$.

- Chứng minh rằng: $BDF = BAC$.
- Cho $AB = 5, BC = 8, CA = 7$. Tính độ dài đoạn BD .

- 15.15.** Cho $ABCD$ là hình bình hành. Giả sử $MAB = MCB$. Chứng minh rằng $MBC = MDC$.
- 15.16.** Giả sử D là một điểm nằm trong tam giác nhọn ABC sao cho $ADB = ACB + 90^\circ$ và $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Chứng minh $\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \sqrt{2}$.
- 15.17.** Cho tam giác ABC cân tại A . Từ điểm M thuộc cạnh BC vẽ $MB \perp AB$; $MQ \perp AC$; ($P \in AB$; $Q \in AC$). Vẽ $PE \perp PQ$; $QE \perp PQ$ ($E, F \in BC$). Chứng minh rằng: $BE = CF$.
- 15.18.** Cho tam giác ABC nhọn có đường cao BE , CF . Qua A vẽ các đường thẳng song song với BE , CF lần lượt cắt các đường thẳng CF , BE tại P và Q . Chứng minh rằng: PQ vuông góc với trung tuyến AM .
- 15.19.** Cho tam giác ABC cân tại A có $BAC = 20^\circ$. Dựng tam giác đều BDC sao cho D , A cùng phía với BC . Dựng tam giác DEB cân tại D có $EDB = 80^\circ$ và C , E cùng phía so với DB . Chứng minh tam giác AEC cân tại E .
- 15.20.** Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$. Lấy điểm D thuộc đoạn thẳng AC sao cho $CD = 2 \cdot AD$. Gọi E là điểm thuộc đoạn thẳng BD sao cho $CED = ABC$. Gọi F là điểm đối xứng với C và A . Chứng minh rằng $DEF = 2 \cdot ABC$.

CHUYÊN ĐỀ 16. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. Kiến thức cần nhớ.

1. Hai tam giác vuông đồng dạng nếu:

- Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia;
- Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia;
- Nếu cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.

2. Tỉ số hai đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng:

- Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.
- Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

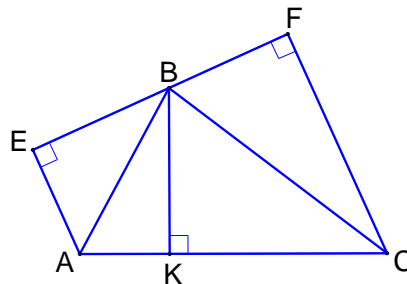
B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao CK . Dựng ra phía ngoài tam giác ABC hai tam giác CAE và CBF tương ứng vuông góc tại E ; F và thỏa mãn $\angle ACE = \angle CBA$; $\angle BCF = \angle CAB$. Chứng minh rằng $CK^2 = AE \cdot BF$.

Lời giải

Tìm cách giải. Để chứng minh $CK^2 = AE \cdot BF$ chúng ta không thể vận dụng định lý Ta-let hay xét một cặp tam giác đồng dạng là xong ngay được. Do vậy, chúng ta suy luận để tạo ra CK^2 , chúng ta cần ghép CK vào hai cặp tam giác đồng dạng. Mỗi cặp tam giác đồng dạng đó đều biểu thị CK dưới dạng biểu thức (chứa AE hoặc BF). Dễ dàng nhận thấy có hai cặp tam giác đồng dạng thỏa mãn điều kiện trên.

Trình bày lời giải



$\triangle ACK$ và $\triangle CBF$ có

$$\angle CKA = \angle BFC = 90^\circ; \angle CAK = \angle BCF \Rightarrow \triangle ACK \sim \triangle CBF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CK}{CA} = \frac{BF}{BC} \quad (1).$$

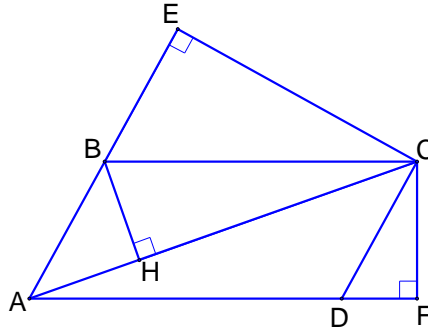
$$\text{Tương tự, ta có } \triangle BCK \sim \triangle CAE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CK}{CB} = \frac{AE}{AC} \quad (2).$$

$$\text{Nhân từng vế của (1) và (2) ta được: } \frac{CK}{CA} \cdot \frac{CK}{CB} = \frac{BF}{BC} \cdot \frac{AE}{AC} \Rightarrow CK^2 = AE \cdot BF.$$

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ ($AC > BD$). Vẽ CE vuông góc với AB tại E , vẽ CF vuông góc với AD tại F . Chứng minh rằng $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

Lời giải

Tìm cách giải. Để chứng minh $AB.AE + AD.AF = AC^2$, ta có vế trái là một tổng nên vế phải ta cần tách ra một tổng: $AB.AE + AD.AF = AC.x + AC.y$ với $x + y = AC$. Do vậy ta chọn điểm H thuộc AC khi đó $x = AH$, $y = HC$ và chứng minh $AB.AE = AC.AH$, $AD.AF = AC.CH$. Từ đó chúng ta chỉ cần chọn điểm H sao cho $\triangle ABH \sim \triangle ACE$ là xong. Nhận thấy tam giác ACE vuông tại E , nên tất yếu cần kẻ thêm BH vuông góc với AC .

Trình bày lời giải

Vẽ $BH \perp AC (H \in AC)$

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACE$ có $\angle AHB = \angle AEC = 90^\circ$;

$\angle BAC$ chung.

$$\text{Suy ra } \triangle ABH \sim \triangle ACE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AE} \Rightarrow AB.AE = AC.AH \quad (1)$$

Xét $\triangle CBH$ và $\triangle ACF$ có $\angle BCH = \angle CAF$ (so le trong); $\angle CHB = \angle CFB (= 90^\circ)$

$$\text{Suy ra } \triangle CBH \sim \triangle ACF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{CH}{AF} \Rightarrow BC.AF = AC.CH \quad (2)$$

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$$AB.AE + BC.AF = AC.AH + AC.CH \Rightarrow AB.AE + AD.AF = AC(AH + CH) = AC^2.$$

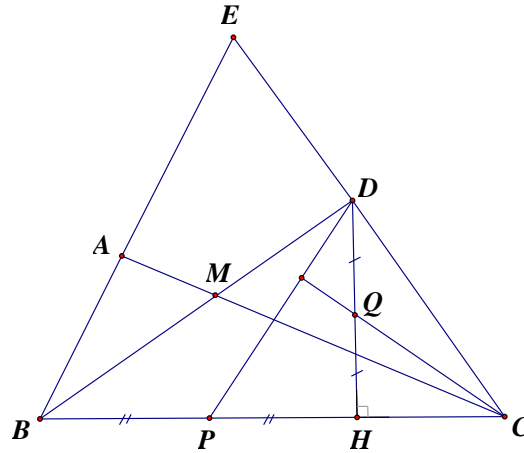
Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A . Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AC . Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với BM , đường thẳng này cắt tia BM tại D , cắt tia BA tại E .

a) Chứng minh: $EA.EB = ED.EC$.

b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh AC thì tổng $BM.BD + CM.CA$ có giá trị không đổi.

c) Kẻ $DH \perp BC$, ($H \in BC$). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, DH . Chứng minh $CQ \perp PD$.

Giải



a) Chứng minh $EA.EB = ED.EC$.

Xét $\triangle EBD$ và $\triangle ECA$ có : $EDB = EAC = 90^0$, BEC chung nên $\triangle EBD \sim \triangle ECA$ (g-g)

Từ đó suy ra $\frac{EB}{EC} = \frac{ED}{EA} \Rightarrow EA.EB = ED.EC$.

b) Kẻ MI vuông góc với BC ($I \in BC$).

Ta có: $\triangle BIM$ và $\triangle BDC$ có $BIM = BDC = 90^0$, MBC chung nên:

$$\triangle BIM \sim \triangle BDC \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BI}{BD} \Rightarrow BM.BD = BC.BI \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \triangle ACB \sim \triangle ICM \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{CI}{CA} \Rightarrow CM.CA = BC.CI \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, suy ra:

$$BM.BD + CM.CA = BI.BC + CI.BC = BC(BI + CI) = BC^2 \text{ (không đổi).}$$

$$\text{c) Xét } \triangle BHD \sim \triangle DHC \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{BH}{DH} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{2.HP}{2.HQ} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{HP}{HQ} = \frac{HD}{HC}$$

$$\Rightarrow \triangle HPQ \sim \triangle HQC \text{ (c-g-c)} \Rightarrow PDH = QCH$$

$$\text{Mà } HDP + DPC = 90^0 \Rightarrow HCQ + DPC = 90^0 \Rightarrow CQ \perp PD.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC . Lấy điểm E, F, P lần lượt thuộc AB, AC, BC sao cho $BEFP$ là hình bình hành. Biết rằng diện tích $\triangle AEF$ và CFP lần lượt là $16cm^2; 25cm^2$. Tính diện tích $\triangle ABC$.

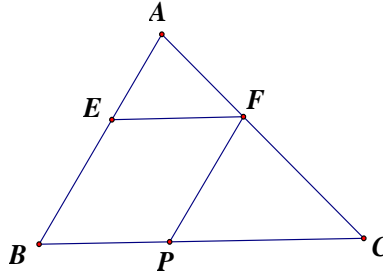
Giải

- **Tìm cách giải.** Khi vẽ hình xong, chúng ta có hai hướng suy luận:

Vì tam giác AEF , FPC cùng đồng dạng với tam giác ABC nên chúng ta tìm mối liên hệ giữa tỷ số hai tam giác đồng dạng.

Hướng thứ hai, để tính diện tích tam giác ABC , nên chúng ta tìm cách tính diện tích hình bình hành. Nhận thấy tam giác BEF và BPF có diện tích bằng nhau, mặt khác tam giác AEF và BEF có chung đường cao kẻ từ F ; tam giác BPF và CPF có chung đường cao kẻ từ F . Sử dụng tính chất đó, kết hợp với định lý Ta-lét, chúng ta có lời giải hay.

• **Trình bày lời giải**



Cách 1. Ta có: $\triangle AEF \sim \triangle ABC$; $\triangle FPC \sim \triangle ABC$ nên:

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{EF}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{S_{AEF}}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{EF}{BC}$$

$$\frac{S_{FPC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CP}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{S_{FPC}}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{CP}{BC}$$

Từ đó suy ra $\frac{\sqrt{S_{AEF}} + \sqrt{S_{FPC}}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{EF}{BC} + \frac{CP}{BC} = 1$

Hay $\sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_{AEF}} + \sqrt{S_{FPC}} = 4 + 5 \Rightarrow S_{ABC} = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$.

Cách 2. Đặt $S_{BEF} = S_{BEP} = x \text{ cm}^2$

Tam giác AEF và BEF có chung đường cao kẻ từ F , suy ra: $\frac{S_{FAE}}{S_{FBE}} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{AE}{BE}$;

Tam giác BPF và CPF có chung đường cao kẻ từ F , suy ra: $\frac{S_{FBP}}{S_{FPC}} = \frac{BP}{CP} \Rightarrow \frac{x}{25} = \frac{BP}{CP}$.

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có: $\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC} = \frac{BP}{CP} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{x}{25} \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = 20$.

Vậy $S_{ABC} = 16 + 20 + 20 = 56 = 81 \text{ cm}^2$.

Nhận xét. Từ kết quả

$$\sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_{AEF}} + \sqrt{S_{FPC}} \Rightarrow S_{ABC} = (a+b)^2 \Rightarrow S_{BEFP} = (a+b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab$$

Từ đó ta có thể giải được bài toán sau:

Cho tam giác ABC . Lấy điểm E, F, P lần lượt thuộc AB, AC, BC sao cho $BEFP$ là hình bình hành. Đặt $S_{AEF} = a^2$; $S_{CFP} = b^2$ (với $a, b > 0$).

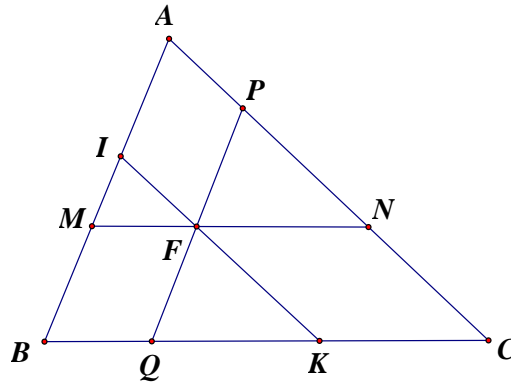
a) Tính diện tích hình bình hành $BEFP$.

b) Xác định vị trí điểm E, F, P trên AB, AC, BC để diện tích hình bình hành $BEFP$ đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC . Qua điểm F nằm trên tam giác kẻ $MN \parallel BC$; $PQ \parallel AB$; $IK \parallel AC$, ($I, M \in AB$; $N, P \in AC$; $Q, K \in BC$) Biết rằng: $S_{IMF} = 9cm^2$; $S_{PFN} = 16cm^2$; $S_{FQK} = 25cm^2$. Tính diện tích ΔABC .

Giải

- **Tìm cách giải.** Với lối tư duy như ví dụ trên, chúng ta hoàn toàn nghĩ tới hai cách giải. Song trong ví dụ này sẽ trình bày một cách giải, mà bản chất của bài toán vận dụng kết quả $\frac{MF}{BC} + \frac{QK}{BC} + \frac{FN}{BC} = 1$ kết hợp với tỷ số diện tích của hai tam giác đồng dạng.
- **Trình bày lời giải**



Nhận thấy $BMFQ, CNFK$ là hình bình hành.

Ta có: $\Delta FQK \sim \Delta ABC$; $\Delta IMF \sim \Delta ABC$; $\Delta PFN \sim \Delta ABC$

$$\text{Thì } \frac{\sqrt{S_{IMF}}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{MF}{BC}; \quad \frac{\sqrt{S_{FQK}}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{QK}{BC} \quad \text{và} \quad \frac{\sqrt{S_{PFN}}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{FN}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_{IMF}} + \sqrt{S_{FQK}} + \sqrt{S_{PFN}}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{MF + QK + FN}{BC} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_{IMF}} + \sqrt{S_{FQK}} + \sqrt{S_{PFN}} = 3 + 5 + 4 = 12 \Rightarrow S_{ABC} = 144cm^2.$$

Nhận xét. Như vậy với cách giải trên, chúng ta hoàn toàn được bài toán tổng quát sau: Cho tam giác ABC . Qua điểm F nằm trong tam giác kẻ $MN \parallel BC$; $PQ \parallel AB$; $IK \parallel AC$ ($I, M \in AB$; $N, P \in AC$; $Q, K \in BC$).

Đặt $S_{IMF} = a^2$; $S_{PFN} = b^2$; $S_{PQK} = c^2$ ($a, b, c > 0$). Chứng minh rằng: $S_{ABC} = (a + b + c)^2$.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC . Qua điểm F nằm trong tam giác kẻ $MN \parallel BC$; $PQ \parallel AB$; $IK \parallel AC$ ($I, M \in AB$; $N, P \in AC$; $Q, K \in BC$). Đặt diện tích tam giác ABC là S .

Tìm vị trí điểm F để tổng $T = S_{APQF} + S_{CNFK} + S_{MPQF}$ đạt giá trị lớn nhất.

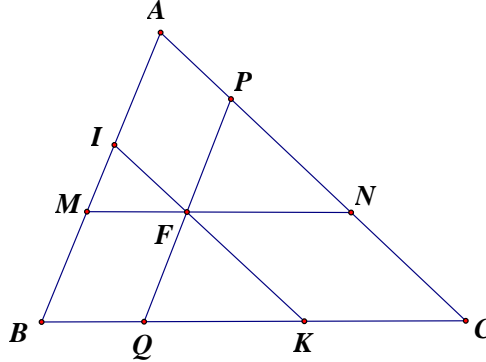
Giải

- **Tìm cách giải.** Tương tự ví dụ trên, chúng ta đặt:

$$S_{IMF} = a^2; S_{PFN} = b^2; S_{FQK} = c^2 \quad (a, b, c > 0)$$

Chúng ta hoàn toàn biểu thị tổng $T = S_{APFI} + S_{MPQF} + S_{CNFK}$ theo a, b, c . Vậy hiển nhiên để tìm giá trị lớn nhất chúng ta dùng cực trị đại số với chú ý rằng $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$.

- **Trình bày lời giải**



$$\text{Đặt } S_{IMP} = a^2; S_{PFN} = b^2; S_{FQK} = c^2 \quad (a, b, c > 0)$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_{IMF}} + \sqrt{S_{FQK}} + \sqrt{S_{PFN}}$$

$$\text{Hay } S_{ABC} = (a + b + c)^2 \Rightarrow S_2 + S_{MPQF} + S_{CNFK} = S_{ABC} - (S_{IMK} + S_{PFN} + S_{FQK})$$

$$T = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$T = 2(ab + bc + ca) \leq \frac{2}{3} \cdot (a + b + c)^2 = \frac{2}{3} \cdot S$$

Vậy $T = \frac{2}{3} \cdot S$ khi $a = b = c$ hay F là trọng tâm của tam giác ABC .

Ví dụ 7. Cho tấm bìa hình thang $ABCD$ có $A = D = 90^\circ$, $AD = 24cm$; $AB = 32cm$; $CD = 64cm$. Gấp tấm bìa lại để cho hai điểm C và B trùng nhau. Tính độ dài của nếp gấp.

Giải

• **Tìm cách giải.** Trước hết chúng ta hãy vẽ và xác định đường nếp gấp: Gọi M là độ dài trung điểm BC , qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC , cắt CD tại N , Độ dài nếp gấp cần tính chính là độ dài đoạn thẳng MN . Từ đề bài $A = D = 90^\circ$, $AD = 24cm$; $AB = 32cm$; $CD = 64cm$, dễ dàng tính được độ dài BC bằng định lý Py-ta-go. Từ đó tính được độ dài CM . Do vậy để tính được CM trong tam giác vuông CMN , chúng ta chỉ cần tính được độ dài hai cạnh của một tam giác vuông đồng dạng với tam giác vuông CMN là xong. Từ đó, chúng ta có hai cách vẽ thêm đường phụ:

Cách 1: Vì $A = D = 90^\circ$ nên chỉ cần gọi giao điểm DA và CB là E . Sau đó tính độ dài cạnh của tam giác vuông CDE .

Cách 2. Kẻ BF vuông góc với CD , khi đó $\triangle MCN \sim \triangle FCB$. Bài toán cũng được giải.

* Trình bày lời giải

Gọi M là trung điểm của BC , qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC , cắt CD tại N . Độ dài nếp gấp cần tính chính là độ dài đoạn thẳng MN .

Cách 1. Gọi E là giao điểm của AD và BC ; F là chân đường vuông góc kẻ từ B tới CD .

Dễ thấy F là trung điểm của CD , từ đó ta có:

$$BC^2 = BF^2 + FC^2 = 24^2 + 32^2 = 1800$$

$$\text{Suy ra } BC = 42 \Rightarrow MC = 21 (cm).$$

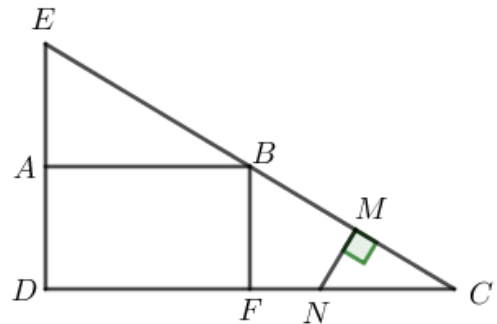
Suy ra B và A lần lượt là trung điểm của CE và DE ,

$$\text{Suy ra } DE = 2AD = 48cm.$$

Ta nhận thấy $\triangle MCN \sim \triangle DCE$.

$$\text{Nên } \frac{MC}{DC} = \frac{MN}{DE} \Rightarrow \frac{21}{64} = \frac{MN}{48} \Rightarrow MN = 15cm$$

Vậy độ dài nếp gấp là $15cm$.



Cách 2. Ta có: $\triangle MCN \sim \triangle FCB$ suy ra: $\frac{MC}{CF} = \frac{MN}{BF} \Rightarrow \frac{21}{32} = \frac{MN}{24} \Rightarrow MN = 15cm$.

Vậy độ dài nếp gấp là $15cm$.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên AB lấy điểm D và trên BC lấy điểm E sao cho hình chiếu của DE lên BC bằng $\frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng đường vuông góc với DE tại E luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Gọi M, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và A trên BC . Giả sử đường thẳng qua E vuông góc với DE cắt đường thẳng AH tại N .

Ta có: $BH = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BM = HE$.

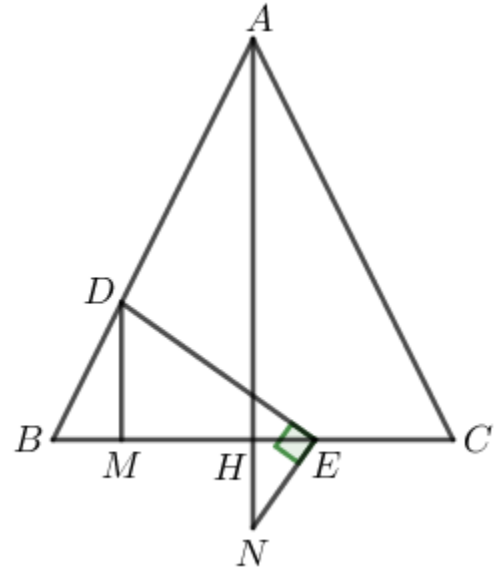
Mặt khác ta có: $HNE = MED$ (cùng phụ với HEN);

$DME = NHE$, nên $\triangle HNE \sim \triangle MED$.

$$\Rightarrow \frac{HN}{ME} = \frac{HE}{DM} \Rightarrow \frac{2HN}{BC} = \frac{HE}{DM} \Rightarrow \frac{2HN}{BC} = \frac{BM}{DM}.$$

$$\text{Mặt khác ta có: } \frac{BM}{DM} = \frac{BH}{HA} \Rightarrow \frac{2HN}{BC} = \frac{BH}{HA} \Rightarrow HN = \frac{BH \cdot BC}{2HA}$$

Vậy điểm N là điểm cố định.



Nhận xét: Điểm mấu chốt của bài là khai thác điều kiện “Hình chiếu của DE bằng $\frac{1}{2}BC$ ” để từ đó xác định việc kẻ thêm đường phụ.

C. Bài tập vận dụng

16.1. Cho tam giác ABC có hai góc B và C thỏa mãn điều kiện $B - C = 90^\circ$. Kẻ đường cao AH . Chứng minh rằng: $AH^2 = BH \cdot CH$.

16.2. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Chứng minh rằng: $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$.

16.3. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90^\circ$), đường cao AD , trục tâm H . Chứng minh hệ thức: $CD^2 = DH \cdot DA$.

16.4. Cho tứ giác $ABCD$ có $ABD = ACD = 90^\circ$. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của B, C trên cạnh AD . Gọi M là giao điểm của CI và BK , O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng $OM \perp AD$.

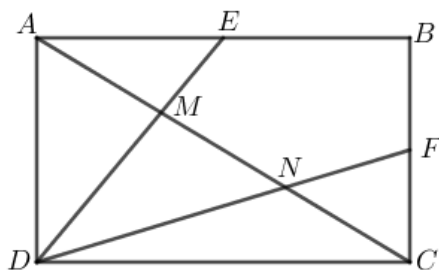
16.5. Cho $\triangle ABC$ cố định có các góc B, C nhọn và hình chữ nhật $MNPQ$ thay đổi nhưng luôn có M, N trên cạnh BC còn P, Q lần lượt trên cạnh AC và AB . Xác định vị trí của các đỉnh P, Q sao cho hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

16.6. Cho tam giác ABC vuông tại A . Hình chữ nhật $MNPQ$ thay đổi thỏa mãn M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC . Gọi giao điểm của BN với MQ là K , của CM với NQ là L . Chứng minh rằng $KAB = LAC$.

16.7. Cho tam giác ABC vuông tại A . Một hình vuông nội tiếp tam giác ABC với D thuộc cạnh AB , E thuộc cạnh AC và F, G thuộc cạnh BC . Gọi H là giao điểm của BE và DG , I là giao điểm của CD và EF . Chứng minh rằng $IE = HG$.

16.8. Cho hình vuông $ABCD$, F là trung điểm của AD và E là trung điểm của FD . Các đường thẳng BE và CF cắt nhau tại G . Tính tỉ số diện tích của tam giác EFG với diện tích hình vuông $ABCD$.

16.9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $150cm^2$ (như hình vẽ). gọi E, F là trung điểm AB và BC . Gọi M, N là giao điểm của DE, DF với AC . Tính tổng diện tích phần tô đậm.

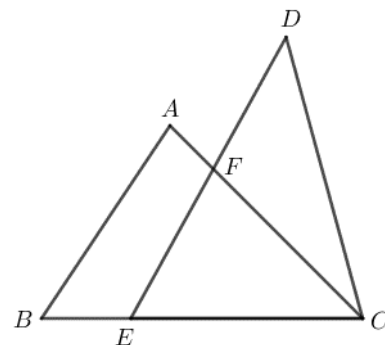


16.10. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$. Tính tỉ số $\frac{HB}{HC}$.

16.11. Cho tam giác nhọn ABC có AD, BE, CF là các đường cao cắt nhau tại H . Chứng minh rằng:

$$\frac{HB \cdot HC}{AB \cdot AC} + \frac{HC \cdot HA}{BC \cdot BA} + \frac{HA \cdot HB}{CA \cdot CB} = 1.$$

16.12. Trong hình vẽ dưới đây các tam giác ABC và CDE có diện tích bằng nhau và F là giao điểm của CA và DE . Biết AB song song với DE , $AB = 9cm$ và $EF = 6cm$. Tính độ dài theo cm của DE .
(Olympic Toán học trẻ quốc tế Bulgaria (BICMC), năm 2013 – Philippines đề nghị)



16.13. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi Q, E lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi M là giao điểm của DE và CQ . Gọi I là giao điểm của AM và BC . Chứng minh rằng $AM = 4MI$.

16.14. Giả sử AD, BE và CF là các đường phân giác của tam giác ABC . Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi diện tích của tam giác DEF bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC .

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, tỉnh Hòa Bình, năm học 2013 – 2014)

16.15. Cho tam giác ABC vuông cân, $A = 90^\circ$, CM là trung tuyến. Từ A vẽ đường thẳng vuông góc với MC cắt BC ở H . Tính tỉ số $\frac{BH}{HC}$.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên ĐHKHTN Hà Nội, năm học 1989 – 1990)

16.16. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Biết rằng chu vi tam giác ABH, ACH lần lượt là $30(cm), 40(cm)$. Tính chu vi tam giác ABC .

16.17. Cho $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ có chu vi lần lượt là $50cm$ và $60cm$. Diện tích ΔABC lớn hơn diện tích $\Delta A'B'C'$ là $33cm^2$. Tính diện tích mỗi tam giác.

16.18. Qua điểm M thuộc cạnh BC của tam giác ABC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và AC , chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí điểm M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.

(Thi học sinh giỏi lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2014 – 2015)

CHUYÊN ĐỀ 17. ĐỊNH LÝ MENELAUS, ĐỊNH LÝ CE – VA, ĐỊNH LÝ VAN – OBEN**A. Kiến thức cần nhớ****1. Định lý Menelaus.**

- Menelaus sinh khoảng năm 70 và mất năm 130, những gì được biết về cuộc đời ông rất ít, thông qua một số tác phẩm khoa học của những người sau. Chỉ biết chung chung rằng ông có một thời là sinh viên trường Đại học Alexandrie cổ đại, rồi làm cán bộ giảng dạy cũng ở đó và về sau thành nhà thiên văn học ở La Mã. Trong hình học có một định lý nổi tiếng mang tên ông: định lý Menelaus.

- *Định lý:* Cho tam giác ABC và ba điểm A', B', C' (không trùng với các đỉnh của tam giác) lần lượt trên các đường thẳng BC, CA và AB sao cho hoặc cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh, hoặc một trong ba điểm nằm trên phần kéo dài của một cạnh và hai điểm còn lại nằm trên hai cạnh của tam giác.

Điều kiện cần và đủ để A', B', C' thẳng hàng là $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

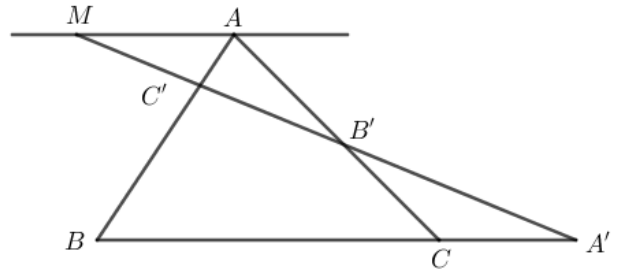
Giải

Trường hợp 1. Nếu trong ba điểm A', B', C' có đúng 2 điểm thuộc cạnh của tam giác ABC , chẳng hạn là B' và C' .

- Nếu A', B', C' thẳng hàng. Qua A kẻ đường song song với BC cắt $B'C'$ tại M , ta có:

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{AM}{A'B}; \quad \frac{B'C}{B'A} = \frac{A'C}{AM}.$$

Vậy $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{AM}{A'B} \cdot \frac{A'C}{AM} \cdot \frac{A'B}{A'C} = 1$.



- Ngược lại, nếu $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.

Gọi A'' là giao điểm của $B'C'$ với BC .

Theo phần thuận: $\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$. Suy ra: $\frac{A''B}{A''C} = \frac{A'B}{A'C}$.

Do B', C' lần lượt thuộc cạnh CA, AB nên A'' nằm ngoài cạnh BC .

Vậy $\frac{A''B}{A''C} = \frac{A'B}{A'C}$ và A', A'' cùng nằm ngoài đoạn BC .

Suy ra $A'' \equiv A'$. Vậy ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

2. Định lý Ce-Va.

Ce-Va là kĩ sư người Ý nhưng yêu toán học. Ông sinh năm 1648, mất năm 1734. Thời thanh niên Ce-Va theo học ở đại học Pise rồi giúp việc cho quận công vùng Mantoue. Công trình nghiên cứu của ông về Hình học và Cơ học. Đời sau biết đến tên ông qua một định lý về hình học mang tên ông: Định lý Ce-Va.

Định Lí: Cho ba điểm A, E, F nằm trên ba cạnh tương ứng BC, CA, AB của tam giác ABC (không trùng với ba đỉnh của tam giác) khi đó ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$.

Giải

- Xét đường thẳng AD, BE, CF đồng quy

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC , đường thẳng này cắt đường thẳng BE, CF tại Q và P .

Áp dụng định lí Talet ta có:

$$\frac{FA}{FB} = \frac{AP}{BC}; \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AQ}$$

$$\frac{AP}{CD} = \frac{AQ}{BD} \left(= \frac{AM}{MD} \right) \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{CD}{BD}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{AQ}{AP} \cdot \frac{BC}{AQ} \cdot \frac{AP}{BC} = 1$$

$$\text{Ngược lại nếu: } \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$$

Gọi M là giao điểm của BE và CF . Gọi D' là giao điểm của AM với BC . Theo phần thuận ta có:

$$\frac{D'B}{D'C} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1 \Rightarrow \frac{D'B}{D'C} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \frac{D'B}{D'B + D'C} = \frac{DB}{DB + DC}$$

$$\Rightarrow \frac{D'B}{BC} = \frac{DB}{BC} \Rightarrow BD' = BD \Rightarrow D \equiv D'. \text{ Vậy } AD, BE, CF \text{ đồng quy.}$$

3. Định lí Van Oben

Van Oben (Van Aubel) sinh ngày 20.11.1830 tại Maastricht (Hà Lan), mất ngày 03.02.1906 tại Anwerpen (Bi). Ông nghiên cứu và dạy Toán cho các lớp dự bị đại học Atheneum, Maastricht (Hà Lan) và đại học Gent (Bi). Trong quá trình nghiên cứu ông công bố nhiều tính chất, định lí đặc sắc về tam giác và tứ giác. Sau đây là một số định lí đặc sắc mang tên ông.

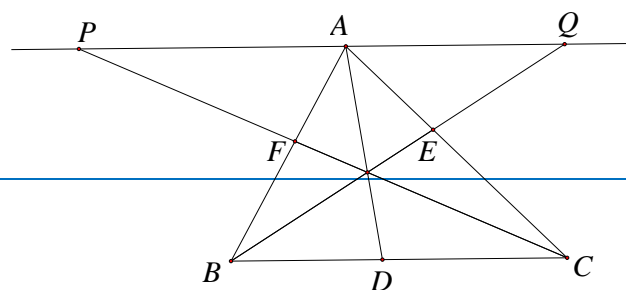
Định lí: Cho M là điểm trong tam giác ABC . Gọi D, E, F theo thứ tự là giao điểm của AM, BM, CM với các cạnh BC, AC, AB . Khi đó thì $\frac{AM}{MD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$.

Giải

Cách 1: Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng BM, CM tại Q và P .

Áp dụng hệ quả định lí Talet ta có:

$$AP \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{AP}{BC}$$



$$AQ // BC \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AQ}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{AQ + AP}{BC} = \frac{PQ}{BC}$$

Mặt khác $PQ // BC \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{PM}{MB} = \frac{AM}{MD}$ từ đó suy ra $\frac{AM}{MD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}$

Cách 2: áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle ABD$ và ba điểm F, M, C thẳng hàng ta có:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{MD}{AM} = 1 \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{CD}{BC} \cdot \frac{AM}{MD} \quad (1)$$

Áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle ACD$ và ba điểm E, M, B thẳng hàng ta có:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{BC}{BD} \cdot \frac{MD}{AM} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{BD}{BC} \cdot \frac{MA}{MD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{AM}{MD} \cdot \left(\frac{CD}{BC} + \frac{BD}{BC} \right) = \frac{AM}{MD}$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1 (mở rộng Van – Oben). Cho tam giác ABC . Trên tia đối của tia BA lấy điểm K , trên tia đối của tia CA lấy điểm N . Gọi E là giao điểm của CK và BN ; Gọi M là giao điểm của AE và BC . Chứng minh rằng:

$$\frac{AE}{EM} = \frac{AK}{KB} + \frac{AN}{NC}.$$

Giải

* **Tìm cách giải:** Với cách suy luận như chứng minh định lí Van Oben chúng ta cũng có thể chứng minh được bằng hai cách.

* **Trình bày lời giải**

Cách 1: Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng BN, CK lần lượt tại P và Q

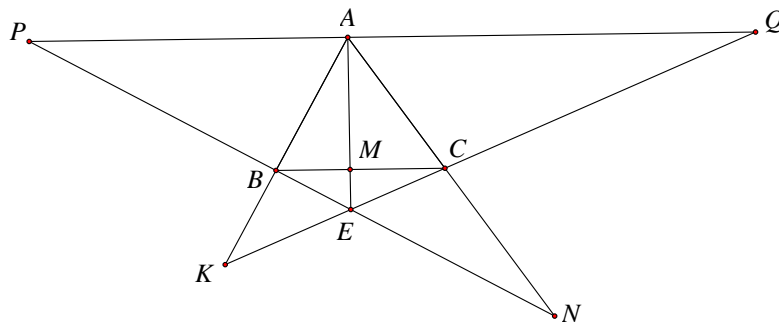
Áp dụng hệ quả định lí Talet ta có:

$$AQ // BC \Rightarrow \frac{AK}{KB} = \frac{AQ}{BC}$$

$$AP // BC \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AP}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AK}{KB} + \frac{AN}{NC} = \frac{AQ + AP}{BC} = \frac{PQ}{BC}$$

Mặt khác $PQ // BC$



$$\Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{PE}{BE} = \frac{AE}{ME}. \text{ Từ đó suy ra } \frac{AE}{EM} = \frac{AK}{KB} + \frac{AN}{AC}$$

Cách 2: Áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle ABM$ và ba điểm K, E, C thẳng hàng ta có: $\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BC}{CM} \cdot \frac{ME}{AE} = 1$

$$\Rightarrow \frac{AK}{KB} = \frac{CM}{BC} \cdot \frac{AE}{ME} \quad (1)$$

Áp dụng định lí Menelaus cho $\triangle ACM$ và ba điểm E, N, B thẳng hàng ta có:

$$\frac{AN}{NC} \cdot \frac{BC}{BM} \cdot \frac{ME}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{EA}{ME} \quad (2)$$

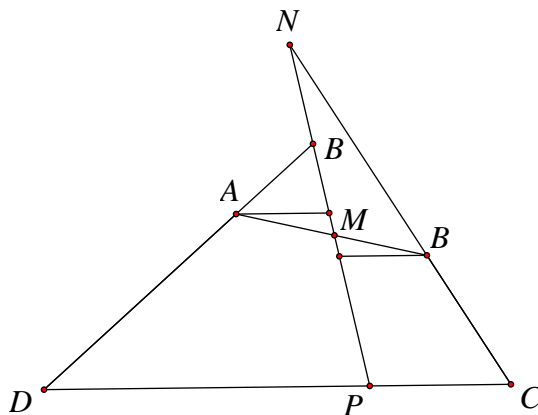
$$\text{Từ (1) và (2) ta suy ra } \frac{AK}{KB} + \frac{AN}{NC} = \frac{AE}{ME} \cdot \left(\frac{CM}{BC} + \frac{BM}{BC} \right) = \frac{AE}{ME}$$

Ví dụ 2: (Định lí Menelaus trong tứ giác) Cho tứ giác $ABCD$ đường thẳng d cắt AB, BC, CD, DA tại M, N, P, Q .

Chứng minh: $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$.

***Tìm cách giải:** Tương tự như chứng minh định lí Menelaus trong tam giác, chúng ta có nhiều cách chứng minh. Sau đây là một cách.

***Trình bày lời giải**



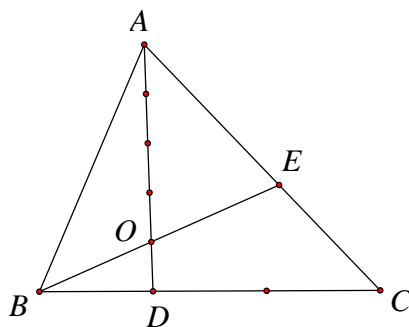
Từ A, B vẽ $AE \parallel BF \parallel CD (E, F \in d)$

$$\text{Theo hệ quả định lí Talet ta có: } \frac{MA}{MB} = \frac{AE}{BF}; \frac{NB}{NC} = \frac{BF}{CP}; \frac{QD}{QA} = \frac{DP}{AE}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = \frac{AE}{BF} \cdot \frac{BF}{CP} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{DP}{AE} = 1$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC . Trên cạnh BC lần lượt lấy điểm D sao cho $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$. Lấy điểm O trên đoạn AD sao cho $\frac{AO}{OD} = 4$. Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng AC và BO . Tính tỉ số $\frac{AE}{EC}$.

Giải



Từ $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{BC}{BD} = 3$.

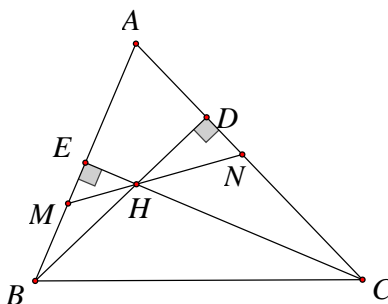
Áp dụng định lí Menelaus trong $\triangle ABC$ với ba điểm B, O, E thẳng hàng, ta có:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{BC}{BD} \cdot \frac{OD}{OA} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{EC} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{4}{3}$$

Nhận xét: Ngoài cách vận dụng định lí, chúng ta có thể kẻ thêm đường thẳng song song để vận dụng định lí Talet.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC nhọn có BD và CE là đường cao. H là trực tâm. Qua H kẻ đường thẳng cắt các cạnh AB, AC tại M, N . Chứng minh rằng: $\left(\frac{HM}{HN}\right)^2 = \frac{BM \cdot EM}{DN \cdot CN}$.

Giải



Áp dụng định lí Menelaus cho B, H, D thẳng hàng với $\triangle AMN$ ta có: $\frac{HM}{HN} \cdot \frac{DN}{DA} \cdot \frac{AB}{BM} = 1$ (1)

Áp dụng định lí Menelaus cho C, H, E thẳng hàng với $\triangle AMN$ ta có: $\frac{HM}{HN} \cdot \frac{CN}{CA} \cdot \frac{AE}{EM} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) nhân vế ta có: $\frac{HM^2}{HN^2} \cdot \frac{DN}{DA} \cdot \frac{CN}{CA} \cdot \frac{AB}{BM} \cdot \frac{AE}{EM} = 1$ (3)

Mặt khác $\triangle AEC \sim \triangle ADB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AB \cdot AE = AC \cdot AD$$

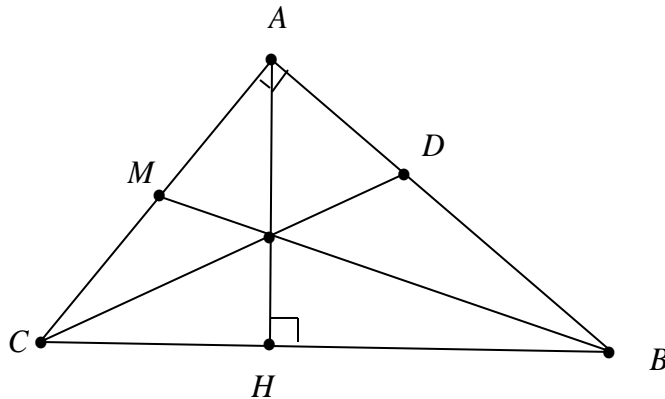
Thay vào (3) suy ra $\frac{HM^2}{HN^2} \cdot \frac{DN \cdot CN}{BM \cdot EM} = 1$ hay $\left(\frac{HM}{HN}\right)^2 = \frac{BM \cdot EM}{DN \cdot CN}$ (đpcm)

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH , trung tuyến BM , phân giác CD cắt nhau tại điểm O . Chứng minh rằng $BH = AC$.

Giải

Tìm cách giải. Để chứng minh $BH = AC$ bằng cách ghép vào hai tam giác là không khả thi bởi không khai thác được tính đồng quy của giả thiết. Để khai thác giả thiết này, chúng ta liên tưởng tới định lý Ce-va. Vận dụng định lý Ce-va, chúng ta suy được $\frac{BH}{HC} \cdot \frac{DA}{DB} = 1$. Đã xuất hiện BH song chưa có AC . Để xuất hiện AC , chúng ta vận dụng tiếp yếu tố giả thiết CD là phân giác. Từ đó chúng ta suy ra được: $BH \cdot AC = HC \cdot BA$. Để có $BH = AC$ phần cuối cùng là chứng minh $HC \cdot BC = AC^2$.

Trình bày lời giải



Theo định lý Ce-va ta có: $\frac{BH}{HC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{DA}{DB} = 1$

mà $MA = MC$ nên $\frac{BH}{HC} \cdot \frac{DA}{DB} = 1$ (1)

Vì CD là phân giác nên $\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{BH}{HC} \cdot \frac{AC}{BC} = 1 \Rightarrow BH \cdot AC = HC \cdot BC$ (3)

Nhận thấy $\triangle ABC \sim \triangle HAC (g.g) \Rightarrow \frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = BC.HC$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $BH.AC = AC^2$ hay $BH = AC$.

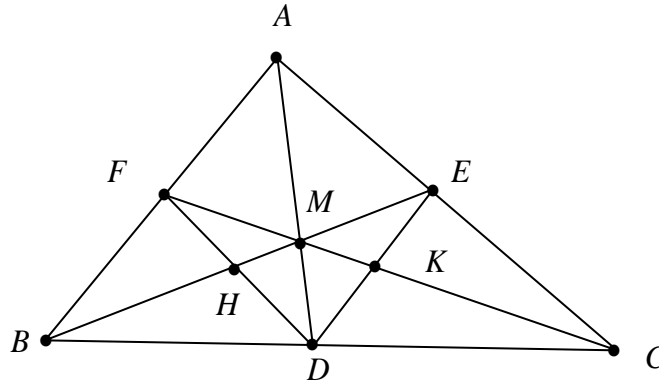
Ví dụ 6: Cho tam giác ABC có điểm M nằm trong tam giác. Các tia AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F . Gọi H là giao điểm của DF và BM . Gọi K là giao điểm của CM và DE . Chứng minh rằng AD, BK, CH đồng quy.

Giải

Tìm cách giải. Để chứng minh AD, BK, CH đồng quy, dễ dàng nghĩ tới việc vận dụng định lý Ce-va đảo trong tam giác MBC . Để vận dụng định lý Ce-va, chúng ta cần chứng minh $\frac{KM}{KC} \cdot \frac{BH}{HM} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$. Muốn xuất hiện tỉ số

$\frac{KM}{KC}; \frac{BH}{HM}; \frac{CD}{BD}$ chúng ta cần linh hoạt tìm kiếm các tam giác để vận dụng định lý Menelaus hoặc Ce-va.

Trình bày lời giải



Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác $AMC; AMB$

Ta có: $\frac{KM}{KC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{DA}{DM} = 1; \frac{BH}{HM} \cdot \frac{DM}{DA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$

Suy ra: $\frac{KM}{KC} = \frac{EA}{EC} \cdot \frac{DM}{DA}; \frac{BH}{HM} = \frac{FB}{FA} \cdot \frac{DA}{DM}$ (1)

Áp dụng định lý Ce-va trong tam giác ABC , ta có:

$\frac{CD}{BD} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} = 1 \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{EC}{AE} \cdot \frac{FA}{BF}$ (2)

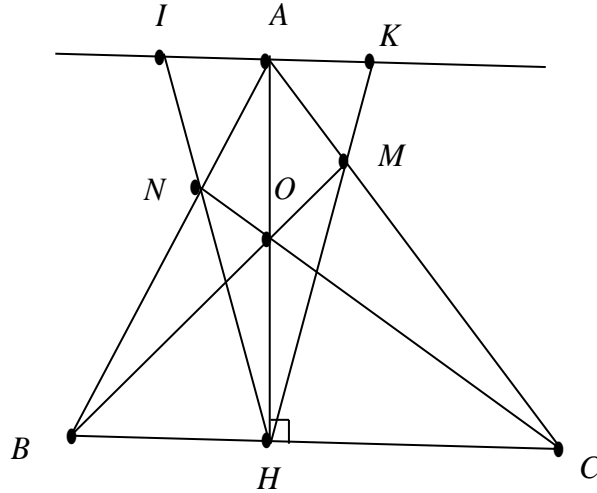
Từ (1) và (2) nhân vế với vế ta được:

$\frac{KM}{KC} \cdot \frac{BH}{HM} \cdot \frac{CD}{BD} = \frac{EA}{EC} \cdot \frac{DM}{DA} \cdot \frac{FB}{FA} \cdot \frac{DA}{DM} \cdot \frac{EC}{AE} \cdot \frac{FA}{BF} \Rightarrow \frac{KM}{KC} \cdot \frac{BH}{HM} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$

Theo định lý Ce-va đảo ta có AD, BK, CH đồng quy.

Ví dụ 7: Cho tam giác ABC nhọn có AH là đường cao. Lấy điểm O tùy ý thuộc AH (O khác $A; H$). Các tia BO và CO cắt $AC; AB$ tương ứng tại $M; N$. Chứng minh rằng: HA là tia phân giác của MHN .

Giải



Cách 1. Qua A kẻ đường thẳng xy song song với BC . Gọi $I; K$ lần lượt là giao điểm của các tia $HN; HM$ với đường thẳng xy .

Theo hệ quả định lý Ta-let, ta có: $\frac{AI}{BH} = \frac{AN}{BN}; \frac{AK}{CH} = \frac{AM}{MC}$.

Áp dụng định lý Ce-va trong $\triangle ABC$ đối với ba đường thẳng đồng quy $AH; BM; CN$ ta có:

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BH}{CH} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{AI}{BH} \cdot \frac{BH}{CH} \cdot \frac{CH}{AK} = 1 \Rightarrow \frac{AI}{AK} = 1 \Leftrightarrow AI = AK.$$

Xét $\triangle HKI$ có $HA \perp IK$; $AI = AK \Rightarrow \triangle HIK$ cân tại $H \Rightarrow HA$ là đường phân giác MHN .

Cách 2. Xét trường hợp $\triangle ABC$ ($AC > AB$).

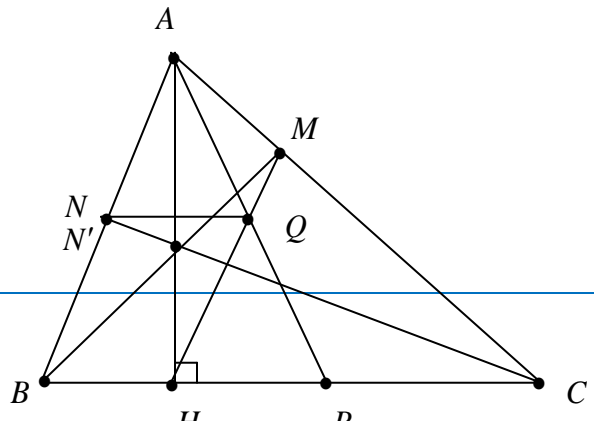
Dựng $\triangle ABP$ cân tại A có AH là đường cao. AP cắt HM tại Q . Gọi N' đối xứng với Q qua AH . Vì A, Q, P thẳng hàng suy ra A, N', B thẳng hàng. Khi đó HA là đường phân giác của QHN' và $\frac{QA}{QP} = \frac{N'A}{N'B}$.

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ACP$ với ba biếm thẳng hàng H, Q, M ta có:

$$\frac{HP}{HC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{QA}{QP} = 1 \Rightarrow \frac{HB}{HC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{N'A}{N'B} = 1,$$

theo định lý đảo của Ce-va thì AH, BM, CN' đồng quy.

Theo giả thiết AH, BM, CN đồng quy



$\Rightarrow N \equiv N'$. Vậy HA là đường phân giác MHN .

Xét trường hợp $\triangle ABC$ ($AC < AB$)

Chứng minh tương tự như trên

Xét trường hợp $\triangle ABC$ ($AC = AB$) Dễ chứng minh.

Ví dụ 8: Giả sử O là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC các tia AO, BO, CO lần lượt cắt BC, AC, AB tại M, N, P . Chứng minh rằng: $\frac{AO \cdot AP}{OP} \cdot \frac{BO \cdot BM}{OM} \cdot \frac{CO \cdot CN}{ON}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm O .

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy phần kết luận của chúng ta là một tích các tỉ số nên chúng ta liên tưởng tới hai định lý có thể dùng là Menelaus hoặc Ce-va. Nhận thấy nếu muốn có $\frac{AO \cdot AP}{OP}$ thì $\frac{AO}{OP}$ hay $\frac{AP}{OP}$ không thể xuất hiện được nếu vận dụng định lý trên (bởi cả hai định lý đều không xuất hiện tỉ số trên). Song nếu đảo mẫu số, tức là $\frac{AO \cdot AP}{OM}$ thì tỉ số $\frac{AO}{OM}$ có thể xuất hiện được nhờ vận dụng định lý Menelaus trong tam giác AMC hoặc AMB . Nhận thấy ý tưởng đó khả thi. Tiếp tục biểu diễn các tỉ số $\frac{BO}{ON}; \frac{CO}{OP}$ một cách tương tự, chúng ta có một lời giải hay.

Trình bày lời giải

Áp dụng định lý Menelaus trong:

$\triangle AMC$ với ba điểm B, O, N thẳng hàng ta có:

$$\frac{AO}{OM} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1 \Rightarrow \frac{AO}{OM} = \frac{BC}{BM} \cdot \frac{AN}{CN} \quad (1)$$

$\triangle BCN$ với ba điểm A, O, M thẳng hàng ta có:

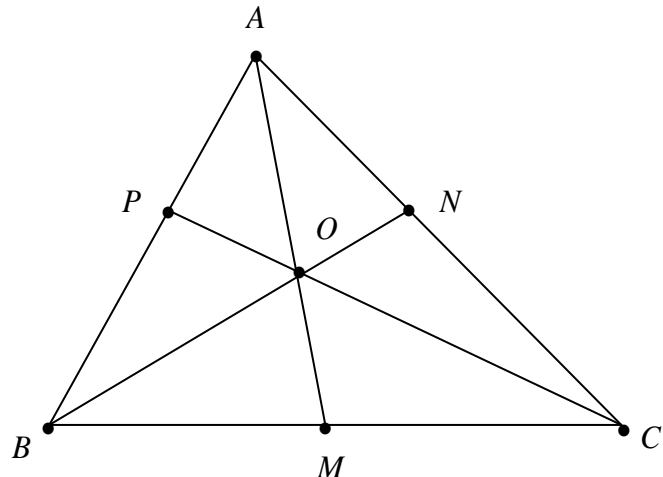
$$\frac{BO}{ON} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{CM}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{BO}{ON} = \frac{AC}{AN} \cdot \frac{BM}{CM} \quad (2)$$

Xét $\triangle ACP$ với ba điểm B, O, N thẳng hàng ta có:

$$\frac{CO}{OP} \cdot \frac{BP}{BA} \cdot \frac{AN}{NC} = 1 \Rightarrow \frac{CO}{OP} = \frac{AB}{BP} \cdot \frac{NC}{AN} \quad (3)$$

Từ (1); (2); (3) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{AO \cdot AP}{OP} \cdot \frac{BO \cdot BM}{OM} \cdot \frac{CO \cdot CN}{ON} &= \frac{AO}{OM} \cdot \frac{BO}{ON} \cdot \frac{CO}{OP} \cdot AP \cdot BM \cdot CN \\ &= \frac{BC}{BM} \cdot \frac{AN}{CN} \cdot \frac{AC}{AN} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{AB}{BP} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot AP \cdot BM \cdot CN \end{aligned}$$



$$= BC.AC.AB. \frac{BM.AP.CN}{CM.BP.NA} \quad (4)$$

Mặt khác, áp dụng định lý Ce-va đối với $\triangle ABC$ có ba đường thẳng AM, BN, CP đồng quy ta có:

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AP}{BP} = 1 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra: $\frac{AO.AP}{OP} \cdot \frac{BO.BM}{OM} \cdot \frac{CO.ON}{ON} = BC.AC.AB$

Không phụ thuộc vào vị trí điểm O .

Ví dụ 9: Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm H, M, N sao cho AH, BM, CN đồng quy tại G . Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của HN và BM ; HM và CN . Tia AP và tia AQ cắt BC lần lượt tại E và F . Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = 3 \cdot \left(\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC} \right)$

Giải

Tìm cách giải. Định hướng và sự lựa chọn định lý để vận dụng là vấn đề quan trọng, nó quyết định sự thành công của bài toán. Trong bài toán này, nhận thấy có nhiều đường đồng quy, mặt khác phân kết luận lại xuất hiện tổng các tỉ số nên việc vận dụng định lý Van-Oben là điều mà chúng ta nên nghĩ tới. Để xuất hiện $\frac{AP}{PE}$ nên vận dụng định lý Van-Oben trong tam giác ABH đối với AE, BG, HN đồng quy. Để xuất hiện $\frac{AQ}{QF}$ nên vận dụng định lý Van-Oben trong tam giác ACH đối với AF, CG, HM đồng quy. Sau đó, vì vế phải chỉ xuất hiện $\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}$, chúng ta vận dụng định lý Van-Oben trong tam giác ABC đối với AH, CN, BM đồng quy. Từ đó chúng ta có lời giải hay.

Trình bày lời giải

Áp dụng định lý Van-Oben trong tam giác ABH với AE, BG, HN đồng quy tại P , ta có:

$$\frac{AP}{PE} = \frac{AN}{NB} + \frac{AG}{GH} \quad (1)$$

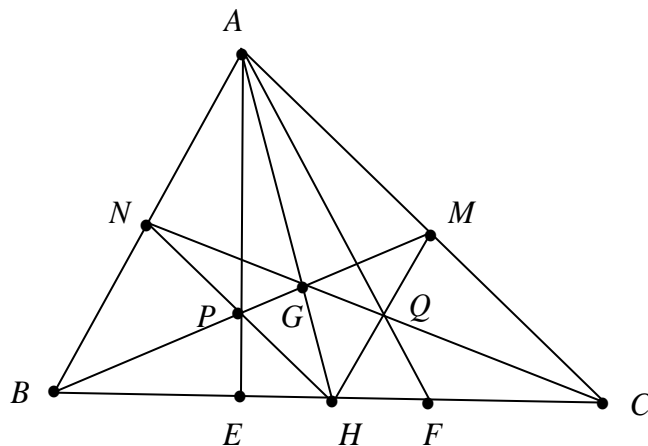
Áp dụng định lý Van-Oben trong tam giác ACH

với AF, CG, HM đồng quy tại Q , ta có:

$$\frac{AQ}{QF} = \frac{AM}{MC} + \frac{AG}{GH} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, ta được:

TRANG 115-118



$$\frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = \frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC} + 2 \cdot \frac{AG}{GH}$$

Áp dụng định lý Van – Oben cho $\triangle ABC$ với AH, BM, CN đồng quy tại G , ta có: $\frac{AG}{GH} = \frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = 3 \left(\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC} \right)$ (Điều phải chứng minh).

Nhận xét. Từ kết luận của bài toán, chúng ta nhận thấy:

- Áp dụng định lý Van – Oben cho $\triangle ABC$ với AH, BM, CN đồng quy tại G , ta có $\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC} = \frac{AG}{GH}$ (4) do đó chúng ta giải được bài toán sau: Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác lần lượt lấy ba điểm H, M, N sao cho AH, BM, CN đồng quy tại G . Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của HN và BM ; HM và CN . Tia AP và tia AQ cắt BC lần lượt tại E và F . Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = 6 \frac{AN}{NB}$

- Trường hợp G là trung điểm của AH thì $\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC} = 1$ (4). Do đó chúng ta giải được bài toán sau: Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy ba điểm H, M, N sao cho AH, BM, CN đồng quy tại G . Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của HN và BM ; HM và CN . Tia AP và tia AQ cắt BC lần lượt tại E và F . Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PE} + \frac{AQ}{QF} = 3$

C. Bài tập vận dụng

17.1. Cho tam giác ABC . Trên cạnh BC, CA lần lượt lấy điểm D và E thỏa mãn $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$. Gọi O là giao điểm của AD và BE . Tính tỷ số $\frac{AO}{OD}$ và $\frac{BO}{OE}$.

17.2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Có đường cao AH , đường trung tuyến BM và phân giác CD đồng quy tại O .

Chứng minh rằng: $\frac{BC}{AC} = \frac{BH}{CH}$.

17.3. Cho tam giác ABC có đường cao AH , đường trung tuyến BM và đường phân giác CD đồng quy. Đặt a, b, c lần lượt là độ dài ba cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng: $(a+b)(a^2+b^2-c^2) = 2a^2b$.

17.4. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), M là trung điểm của BC . Một đường thẳng qua M và song song với đường phân giác AD của góc BAC cắt AC, AB lần lượt ở E và F . Chứng minh rằng $CE = BF$.

17.5. Cho tam giác ABC , lấy điểm E thuộc cạnh AB và điểm F thuộc cạnh AC . Gọi AM là đường trung tuyến của tam giác ABC . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để EF song song với BC là AM, BF và CE đồng quy.

17.6. Cho tam giác ABC có trung tuyến AD . Trên AD lấy điểm K sao cho $\frac{AK}{KD} = 3$. Hỏi đường thẳng BK chia diện tích tam giác ABC theo tỉ số nào?

17.7. Cho tứ giác $ABCD$. Cạnh AB cắt CD kéo dài tại E , cạnh BC cắt AD kéo dài tại I . Đường chéo AC cắt BD và EI lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng $\frac{MA}{MC} = \frac{NA}{NC}$.

17.8. Cho tam giác ABC . Lấy K thuộc cạnh AB và T thuộc tia đối tia BC . Gọi F là giao điểm của TK với AC , O là giao điểm của BF với CK . Gọi E là giao điểm của AO với BC . Chứng minh rằng: $\frac{TB}{TC} = \frac{EB}{EC}$.

17.9. Cho tam giác ABC có D là điểm bất kì nằm trong tam giác. Lấy điểm M tùy ý thuộc AD . Gọi giao điểm của BM và AC là E ; gọi giao điểm CM và AB là F . Các tia DE và CF giao nhau tại K ; các tia DF và BE giao nhau tại H . Chứng minh rằng CH, AD, BK đồng quy.

17.10. Cho tam giác nhọn ABC có ba đường cao AD, BM, CN cắt nhau tại H . Chứng minh rằng:

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HM}{BM} + \frac{HN}{CN} = \frac{DB}{DC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB}.$$

17.11. Từ điểm I thuộc miền trong tam giác ABC , kẻ AI cắt BC tại D . Qua điểm I kẻ MN, PQ và RS lần lượt song song với BC, AB, AC (M, S thuộc AB ; Q, R thuộc BC ; N, P thuộc AC). Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} a) & \frac{IM}{IN} = \frac{DB}{DC} \\ b) & \frac{IM}{IN} \cdot \frac{IP}{IQ} \cdot \frac{IR}{IS} = 1 \end{aligned}$$

17.12. Cho tam giác ABC vuông tại C có đường cao CK . Vẽ đường phân giác CE của tam giác ACK . Đường thẳng qua B song song với CE cắt đường thẳng CK tại F . Chứng minh rằng đường thẳng EF chia đoạn thẳng AC thành hai phần bằng nhau.

17.13. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm K . Qua K kẻ đường thẳng song song với AD . Trên đường thẳng đó lấy điểm L bên trong hình bình hành, trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $AM = KL$. Chứng minh rằng ba đường thẳng CL, DK, BM đồng quy.

17.14. Cho tam giác ABC không cân có CD là đường phân giác. Lấy điểm O thuộc đường thẳng CD (O khác C và D). Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng AO, BO với BC và AC . Gọi P là giao điểm của đường thẳng MN và AB . Chứng minh rằng CD vuông góc với CP .

17.15. Cho tam giác ABC có điểm O nằm trong tam giác. Các đường thẳng AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Qua O kẻ đường thẳng song song với BC , cắt DF, DE lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng: $OM = ON$.

17.16. Cho tam giác ABC có điểm M nằm trong tam giác. Gọi D, E, F thứ tự là giao điểm của đường thẳng AM, BM, CM với các cạnh BC, AC, AB . Chứng minh rằng trong các tỉ số $\frac{AM}{ND}, \frac{BM}{ME}, \frac{CM}{MF}$, có ít nhất một tỉ số không lớn hơn 2 và ít nhất một tỉ số không nhỏ hơn 2.

(Thi vô địch Toán Quốc tế, IMO – năm 1961)

17.17. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Lấy M thuộc tia đối của tia CA . Tia MI cắt đường thẳng AB tại N . Trên tia đối của tia BC lấy điểm E , tia EN cắt AC tại P . Tia PI cắt đường thẳng AB tại Q . Gọi F là giao điểm của tia QM và IC . Chứng minh $IE = IF$.

17.18. Cho tam giác ABC , trên ba cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho AA', BB', CC' đồng quy tại K . Gọi M, N lần lượt là giao điểm của $A'C'$ và BB' ; $A'B'$ và CC' . Tia AM , tia AN lần lượt cắt BC tại $E; F$. Chứng minh rằng:

a) EN, FM, AA' đồng quy tại I

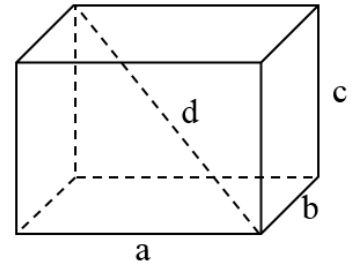
b) $IA.KA' = 3.IA'.KA$

CHƯƠNG IV. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG – HÌNH CHÓP ĐỀU

CHUYÊN ĐỀ 18. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT	2
CHUYÊN ĐỀ 19. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG	8
CHUYÊN ĐỀ 20. HÌNH CHÓP ĐỀU	13

CHUYÊN ĐỀ 18. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT**A. Kiến thức cần nhớ****1. Hình hộp chữ nhật**

- Hình 18.1 cho ta hình ảnh của một hình hộp chữ nhật.
- Hình hộp chữ nhật có 6 mặt, 8 đỉnh và 12 cạnh.
- Hình lập phương có 6 mặt là những hình vuông.



Hình 18.1

2. Diện tích xung quanh và thể tích của hình hộp chữ nhật

- * Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bằng chu vi đáy nhân với chiều cao.

$$S_{xq} = 2(a + b) \cdot c$$

- * Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

$$S_{tp} = 2(ab + bc + ca)$$

- * Thể tích của hình hộp chữ nhật bằng tích của ba kích thước.

$$V = abc$$

- * Đặc biệt đối với hình lập phương thì:

$$S_{xq} = 4a^2$$

$$S_{tp} = 6a^2$$

$$V = a^3$$

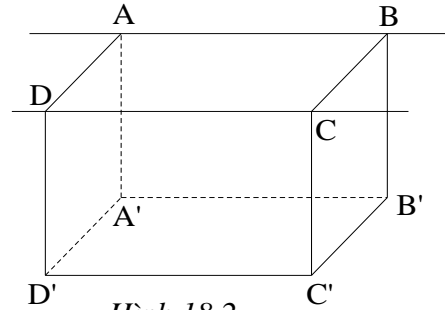
3. Tính chất đường chéo của hình hộp chữ nhật

- * Bốn đường chéo của hình hộp chữ nhật cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
- * Bình phương của mỗi đường chéo bằng tổng các bình phương của ba kích thước.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

4. Quan hệ vị trí của hai đường thẳng phân biệt trong không gian (h.18.2)

- **Cắt nhau:** Nếu hai đường thẳng có một điểm chung.
Ví dụ: AB và BC.
- **Song song:** Nếu hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
Ví dụ: AB và CD.
- **Chéo nhau:** Nếu hai đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng nào.
Ví dụ: AB và CC'.



Hình 18.2

Nhận xét. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song.

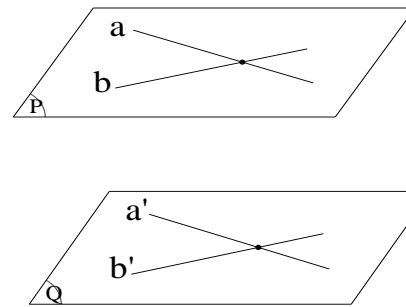
5. Quan hệ song song của đường thẳng và mặt phẳng (h.18.2)

- Đường thẳng song song với mặt phẳng khi chúng không có điểm chung.
Ví dụ: $AB \parallel mp(A'B'C'D')$.
- Nếu $AB \not\subset mp(P); A'B' \subset mp(P)$ và $AB \parallel A'B'$ thì $AB \parallel mp(P)$.

Nhận xét. Nếu $A, B \in mp(P)$ thì đường thẳng AB nằm trọn trong $mp(P)$.

6. Quan hệ song song của hai mặt phẳng (h.18.3)

- Hai mặt phẳng song song khi chúng không có điểm chung.
- Nếu $mp(P)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau a và b, $mp(Q)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau a' và b' trong đó $a \parallel a'$ và $b \parallel b'$ thì $mp(P) \parallel mp(Q)$.
- Nếu $mp(P)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau a và b
Mà $a \parallel mp(Q)$ và $b \parallel mp(Q)$ thì $mp(P) \parallel mp(Q)$

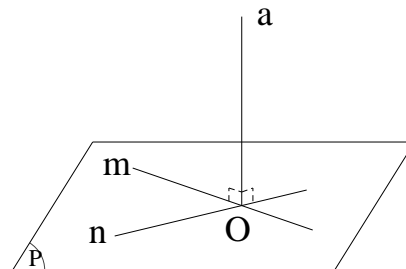


Hình 18.3

Nhận xét. Hai mặt phẳng có điểm chung thì chúng cắt nhau theo một đường thẳng đi qua điểm chung ấy, gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.

7. Quan hệ vuông góc (h.18.4)

- Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng thì ta nói đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.
- Nếu đường thẳng $a \perp mp(P)$ tại điểm O thì đường thẳng a vuông góc với mọi đường thẳng qua O và nằm trong $mp(P)$.
- Nếu $a \in mp(P)$ và $a \perp mp(Q)$ thì $mp(P) \perp mp(Q)$.



Hình 18.4

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và $C'D'$. Chứng minh $MN \parallel mp(BCC'B')$.

Giải (h.18.5)

*** Tìm cách giải**

Muốn chứng minh $MN \parallel mp(BCC'B')$ ta phải chứng minh MN song song với một đường thẳng của mặt phẳng $(BCC'B')$.

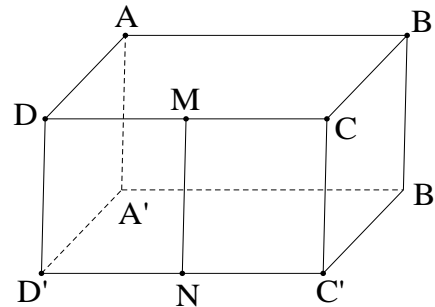
*** Trình bày lời giải**

Xét tứ giác $MCC'N$ có $MC \parallel NC'$ và $MC = NC'$.

Vậy tứ giác $MCC'N$ là hình bình hành, suy ra $MN \parallel CC'$.

Đường thẳng MN không nằm trong mặt phẳng $(BCC'B')$ còn đường thẳng CC' nằm trong mặt phẳng $(BCC'B')$

mà $MN \parallel CC'$ nên $MN \parallel mp(BCC'B')$.



Hình 18.5

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho $AE = DE = \frac{2}{3}DD'$, $BG = CH = \frac{1}{3}CC'$. Chứng minh rằng $mp(ADHG) \parallel mp(EFC'B')$.

Giải (h.18.6)

*** Tìm cách giải**

Để chứng minh $mp(ADHG) \parallel mp(EFC'B')$ ta tìm cách chứng minh hai đường thẳng cắt nhau của $mp(ADHG)$ tương ứng song song với hai đường thẳng cắt nhau của $mp(EFC'B')$.

*** Trình bày lời giải**

Tứ giác BCHG có $BG = CH$, $BG \parallel CH$ nên là hình bình hành, suy ra $HG \parallel BC$.

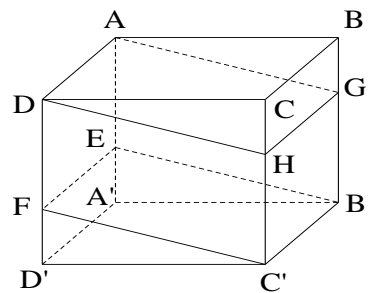
Mặt khác $BC \parallel B'C'$ nên $HG \parallel B'C'$.

Tứ giác DHC'F có $DF \parallel HC'$ và $DF = HC'$ nên là hình bình hành, suy ra $DH \parallel FC'$.

Xét $mp(ADHG)$ có HG và DH cắt nhau tại H.

Xét $mp(EFC'B')$ có $B'C'$ và FC' cắt nhau tại C' .

Từ đó suy ra $mp(ADHG) \parallel mp(EFC'B')$.



Hình 18.6

Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $ADC'B'$ là hình chữ nhật.

b) Tính diện tích của hình chữ nhật $ADC'B'$ biết: $AB = 12$, $AC' = 29$, $DD' = 16$.

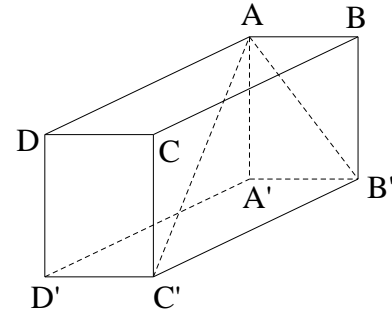
Giải (h.18.7)

a) Tứ giác $ADD'A'$ là hình chữ nhật, suy ra $AD \parallel A'D'$ và $AD = A'D'$.

Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật, suy ra $B'C' \parallel A'D'$ và $B'C' = A'D'$.

Do đó $AD \parallel B'C'$ và $AD = B'C'$

Vậy tứ giác $ADC'B'$ là hình bình hành.



Hình 18.7

Ta có: $AD \perp DD'$ và $AD \perp DC$ nên $AD \perp mp(DCC'D')$. Suy ra $AD \perp DC'$. Do đó hình bình hành $ADC'B'$ là hình chữ nhật.

b) Xét $\triangle DD'C$ vuông tại D' có $D'C = \sqrt{DD'^2 + D'D^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$.

Xét $\triangle ADC'$ vuông tại D có $AD = \sqrt{AC'^2 - DC'^2} = \sqrt{29^2 - 20^2} = 21$.

Vậy diện tích hình chữ nhật $ADC'B'$ là: $S = DC' \cdot AD = 20 \cdot 21 = 420$ (đvdt).

Ví dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $mp(DCC'D') \perp mp(CBB'C')$.

b) Trong số sáu mặt của hình hộp chữ nhật, có bao nhiêu cặp mặt phẳng vuông góc với nhau?

Giải (h.18.8)

* **Tìm cách giải**

Muốn chứng minh $mp(DCC'D')$ vuông góc với $mp(CBB'C')$ ta cần chứng minh một đường thẳng của $mp(DCC'D')$ vuông góc với hai đường thẳng giao nhau của $mp(CBB'C')$.

* **Trình bày lời giải**

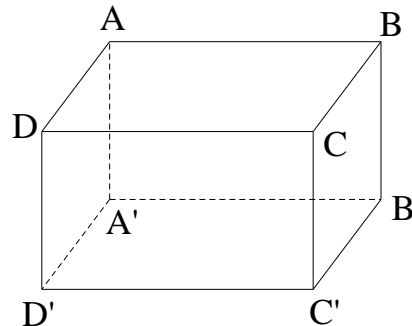
a) Vì $DD'C'C$ là hình chữ nhật nên $D'C' \perp CC'$.

Vì $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật nên $D'C' \perp B'C'$.

Vậy $D'C'$ vuông góc với hai đường giao nhau của $mp(CBB'C')$, do đó $D'C' \perp mp(CBB'C')$.

Mặt khác, $D'C' \subset mp(DCC'D')$ nên $mp(DCC'D') \perp mp(CBB'C')$.

b) Chứng minh tương tự như câu a), ta được các cặp mặt có chung một cạnh thì vuông góc với nhau. Hình hộp chữ nhật có 12 cạnh nên có 12 cặp mặt vuông góc với nhau.



Hình 18.8

Ví dụ 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Diện tích các mặt $ABCD$, $BCC'B'$ và $DCC'D'$ lần lượt là $108cm^2$, $72cm^2$, $96cm^2$.

a) Tính thể tích của hình hộp.

b) Tính độ dài đường chéo của hình hộp.

Giải (h.18.9)*** Tìm cách giải**

Diện tích các mặt đã cho là tích của hai kích thước.
 Thể tích của hình hộp là tích của ba kích thước. Vì vậy ta cần sử dụng các tích của từng cặp hai kích thước để đưa về tích của ba kích thước.

*** Trình bày lời giải**

a) Gọi độ dài các cạnh AB, BC, CC' lần lượt là a, b, c .

Ta có : $ab = 108$ (1) ; $bc = 72$ (2) ; $ca = 96$ (3)

Suy ra: $ab.bc.ca = 108.72.96$ hay $(abc)^2 = 746496$.

Do đó $abc = \sqrt{746496} = 864(\text{cm})^3$.

Vậy thể tích của hình hộp là $V = 864(\text{cm})^3$. (4)

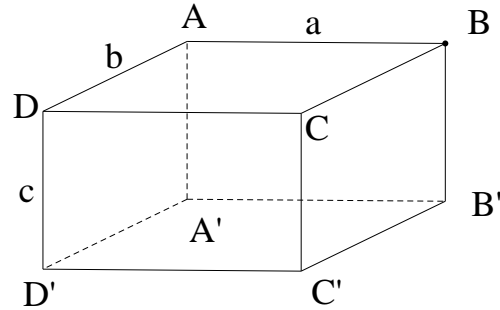
b) Từ (4) và (1) ta có: $c = \frac{abc}{ab} = \frac{864}{108} = 8(\text{cm})$.

Từ (4) và (2) ta có: $a = \frac{abc}{bc} = \frac{864}{72} = 12(\text{cm})$.

Từ (4) và (3) ta có: $b = \frac{abc}{ac} = \frac{864}{96} = 9(\text{cm})$.

Vậy đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài là:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 9^2 + 8^2} = 17(\text{cm}).$$



Hình 18.9

C. Bài tập vận dụng**• Quan hệ song song. Quan hệ vuông góc**

18.1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $mp(ACD') \parallel mp(A'C'B)$.

b) Chứng minh rằng $mp(CDB')$ và $mp(BCD')$ cắt nhau. Tìm giao tuyến của chúng.

18.2. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Chứng minh rằng $mp(DBB'D')$ vuông góc với $mp(ACC'A')$.

18.3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Tìm giao tuyến m của hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(DBB'D')$.

b) Chứng minh giao tuyến $m \perp mp(A'B'C'D')$.

c) Chứng minh $mp(BDD'B') \perp mp(A'B'C'D')$.

• Các mặt – Các đỉnh của hình hộp chữ nhật

18.4. Người ta ghép 480 hình lập phương nhỏ cạnh 1cm thành một hình hộp chữ nhật kích thước 8x12x5cm rồi sơn tất cả sáu mặt của hình hộp chữ nhật này. Hỏi:

a) Có bao nhiêu hình lập phương nhỏ cạnh 1cm không được sơn mặt nào?

b) Có bao nhiêu hình lập phương nhỏ cạnh 1cm có ít nhất một mặt được sơn?

18.5. Một hình lập phương cạnh n đơn vị ($n \in \mathbb{N}; n \geq 2$), cả 6 mặt đều được sơn màu xanh. Người ta chia hình lập phương này thành n^3 hình lập phương cạnh 1 (đơn vị). Cho biết số hình lập phương nhỏ cạnh 1 (đơn vị) không được sơn mặt nào là 27. Tính:

a) Giá trị của n ;

- b) Số hình lập phương nhỏ được sơn ba mặt;
- c) Số hình lập phương nhỏ được sơn hai mặt;
- d) Số hình lập phương nhỏ được sơn đúng một mặt.

18.6. Một chiếc hộp hình lập phương cạnh 6cm được đặt trên mặt bàn. Tính quãng đường ngắn nhất mà con kiến phải bò trên mặt hộp từ trung điểm M của $C'D'$ đến đỉnh A.

18.7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

- a) Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu của nó là hai đỉnh của hình hộp chữ nhật?
- b) Chứng tỏ rằng các đoạn thẳng nói trên, chỉ có tối đa 7 giá trị khác nhau về độ dài.

Bài 18.8 Người ta ghi vào sáu mặt của một hình lập phương các số tự nhiên từ 1 đến 6. Sau đó cứ mỗi lượt, ta cộng thêm cùng một số tự nhiên vào hai mặt của hình lập phương đó. Hỏi sau một số lượt, có thể xảy ra sáu số bằng nhau ở sáu mặt của hình lập phương được không?

Độ dài – Diện tích - Thể tích

18.9 Một hình hộp chữ nhật có các kích thước bằng 8, 9, 12. Tính độ dài lớn nhất của một đoạn thẳng có thể đặt trong hình hộp chữ nhật đó.

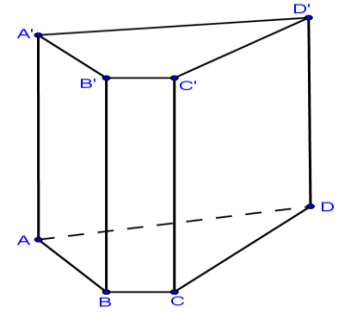
18.10. Một hình hộp chữ nhật có tổng ba kích thước bằng 61 cm và đường chéo bằng 37cm. Tính diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật đó.

18.11 Đường chéo của một hình lập phương dài hơn đường chéo mỗi mặt của nó là 1cm. Tính diện tích toàn phần và thể tích hình lập phương đó.

CHUYÊN ĐỀ 19. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG**A. Kiến thức cần nhớ****1. Mô tả hình lăng trụ đứng.**

Trong hình bên cho ta hình ảnh một hình lăng trụ đứng.

- Các mặt bên là những hình chữ nhật.
- Các mặt bên song song và bằng nhau.
- Hai đáy là hai đa giác nằm trong hai mặt phẳng song song.
- Các cạnh bên cũng như các mặt bên đều vuông góc với hai mặt phẳng đáy.

**2. Diện tích xung quanh – Thể tích của hình lăng trụ đứng**

- Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng chu vi đáy nhân với chiều cao.

$$S_{xq} = 2ph$$

(p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao)

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}}$$

- Thể tích của hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.

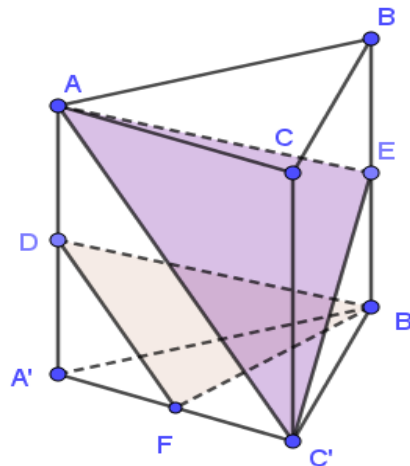
$$V = S.h$$

(S là diện tích đáy, h là chiều cao)

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của AA', BB', CC' . Chứng minh rằng $mp(AEC') \parallel mp(DB'F)$.

Giải



Tìm cách giải: Muốn chứng minh $mp(AEC') \parallel mp(DB'F)$ ta chứng minh hai đường thẳng giao nhau của $mp(AEC')$ tương ứng song song với hai đường thẳng giao nhau của $mp(DB'F)$.

Trình bày lời giải.

Ta có: $AD \parallel EB'$ và $AD = EB'$ nên tứ giác $AEB'D$ là hình bình hành. Suy ra $AE \parallel DB'$. (1)

Xét $\triangle AC'A'$ có DF là đường trung bình nên $DF \parallel AC'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $mp(AEC') \parallel mp(DB'F)$.

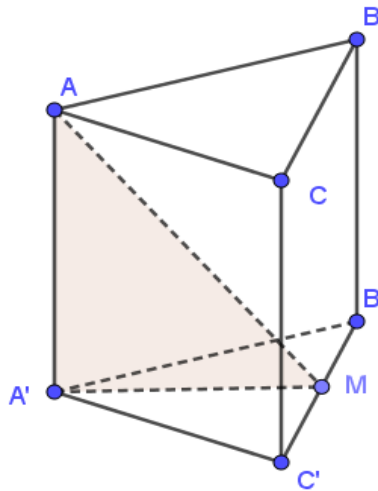
Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A .

a) Chứng minh rằng $mp(ABB'A') \parallel mp(ACC'A')$.

b) Gọi M là điểm bất kì trên cạnh $B'C'$. Chứng minh rằng $mp(AA'M) \perp mp(A'B'C')$.

c) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh $B'C'$ để độ dài AM nhỏ nhất.

Giải



Tìm hướng giải: Muốn chứng minh $mp(ABB'A') \parallel mp(ACC'A')$ ta chứng minh một đường thẳng của mặt này vuông góc với mặt kia.

Trình bày lời giải

a) Ta có $AB \perp AA'$ và $AB \perp AC$ nên $AB \perp mp(ACC'A')$. Mặt khác $AB \subset (ABB'A')$ nên $mp(ABB'A') \parallel mp(ACC'A')$.

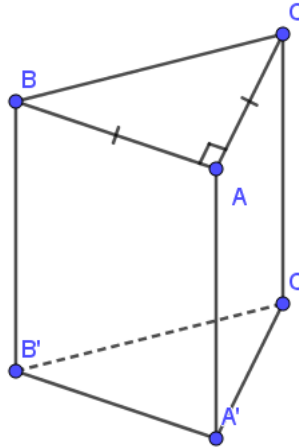
b) Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên $AA' \perp mp(A'B'C')$. Mặt khác $AA' \subset mp(AA'M)$ nên $mp(AA'M) \perp mp(A'B'C')$.

c) Xét $\triangle AA'M$ vuông tại A' ta có: $AM^2 = AA'^2 + A'M^2$ trong đó AA' không đổi. Vậy AM nhỏ nhất $\Leftrightarrow A'M$ nhỏ nhất.

Xét $mp(A'B'C')$ có $A'M$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A'M \perp B'C'$.

Vậy để độ dài AM nhỏ nhất thì M phải là hình chiếu của A trên $B'C'$.

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đáy là hình tam giác vuông cân tại A . Biết hình trụ này có chiều cao là 4m, và thể tích là 18m^3 . Tính diện tích toàn phần của nó.

Giải

Ta có $V = S.h \Rightarrow S = \frac{V}{h}$. Vậy diện tích đáy của hình lăng trụ này là $S = \frac{18}{4} = 4,5 \text{ (m}^2\text{)}$.

Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $S = \frac{1}{2} AB^2$.

Do đó $S = \frac{1}{2} AB^2 = 4,5 \Rightarrow AB^2 = 9 \Rightarrow AB = 3$ suy ra $BC = 3\sqrt{2} \text{ (m)}$.

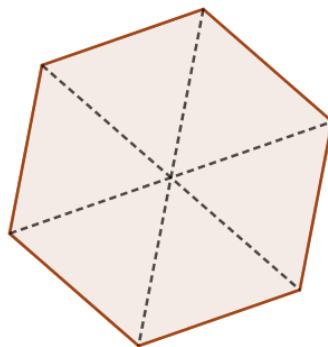
Diện tích xung quanh của hình lăng trụ là

$$S_{xq} = 2ph = (3 + 3 + 3\sqrt{2}) \cdot 4 = 24 + 12\sqrt{2} \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích toàn phần

$$S_{tp} = 24 + 12\sqrt{2} + 9 = 33 + 12\sqrt{2} \approx 50 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Ví dụ 4 Một hình lăng trụ đều (tức là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều) có tất cả 18 cạnh, mỗi cạnh dài $4\sqrt{3}$ cm. Tính thể tích của hình lăng trụ đó.

Giải**Tìm cách giải**

Để tìm thể tích hình lăng trụ đứng khi đã biết chiều cao, ta cần tính diện tích đáy. Đáy là một đa giác đều, đã biết độ dài mỗi cạnh nên cần biết số cạnh là song.

Trình bày lời giải

Gọi số cạnh của một đáy là n . Khi đó số cạnh bên là n . Suy ra tổng số cạnh của hình lăng trụ đứng là $n + n + n = 3n$. Theo đề bài, ta có $3n = 18 \Rightarrow n = 6$.

Vậy hình lăng trụ đứng đã cho là hình lăng trụ lục giác đều. Có thể coi diện tích đáy là tổng diện tích của 6 tam giác đều, mỗi cạnh bằng $4\sqrt{3}$ cm.

Do đó, diện tích đáy là $S = \frac{(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 72\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$

Thể tích hình trụ $V = S.h = 72\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 864 \text{ (cm}^3\text{)}$

C. Bài tập vận dụng.

Chứng minh song song, vuông góc, tính chiều cao.

19.1 Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi E và G lần lượt là trọng tâm tam giác ABB' và ACC' . Trong mặt bên $ABB'A'$ vẽ $EM // BB'$ ($M \in AB$). Trong mặt bên $ACC'A'$ vẽ $GN // CC'$ ($N \in AC$). Chứng minh rằng $mp(MNGE) // mp(BCC'B')$.

19.2 Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $AB = AC = 10\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$. Gọi M là trung điểm $B'C'$.

- Chứng minh rằng $B'C' \perp mp(AA'M)$.
- Cho biết $AM = 17\text{cm}$. Tính diện tích toàn phần của hình lăng trụ.

19.3 Một hình lăng trụ đều có tổng số mặt, số đỉnh và số cạnh là 26. Biết thể tích của hình lăng trụ là 540cm^3 , diện tích xung quanh là 360cm^2 . Tính chiều cao của hình lăng trụ đó.

19.4 Hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a , góc nhọn 30° . Cho biết diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng bằng hai lần diện tích xung quanh của nó. Tính chiều cao của hình lăng trụ đứng.

Tính diện tích, thể tích.

19.5 Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 5\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$ và chiều cao $AA' = 10\text{cm}$. Biết diện tích xung quanh của hình trụ là 300cm^2 . Tính diện tích của nó.

19.6 Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi với các đường chéo bằng 16cm và 30cm . Diện tích toàn phần của hình lăng trụ là 2680cm^2 , tính thể tích của nó.

19.7 Hình lăng trụ ngũ giác đều $ABCDE.A'B'C'D'E'$ có cạnh đáy bằng a . Biết hiệu giữa các diện tích xung quanh của hai hình lăng trụ đứng $ABCE.A'B'C'E'$ và $CDE.C'D'E'$ là $4a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đã cho.

19.8 Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Biết $B = AD = a$, $BCD = 45^\circ$ và $AC' = 3a$. Tính

- Thể tích hình lăng trụ đứng;
- Diện tích toàn phần hình lăng trụ đứng.

19.9 Có một tấm bạt hình chữ nhật kích thước $a \times b$, ($a > b$). Dùng tấm bạt này để dựng một chiếc lều trại có dạng hình lăng trụ đứng, hai đáy (tức là hai cửa) là hai tam giác vuông cân. Cả tấm bạt thành hai mái lều sát mặt đất.

- Chứng minh rằng dù căng tấm bạt theo chiều dài hay rộng thì diện tích mặt đất bên trong lều là như nhau.
- Trong hai trường hợp trên, trường hợp nào có thể tích không khí bên trong lớn hơn.

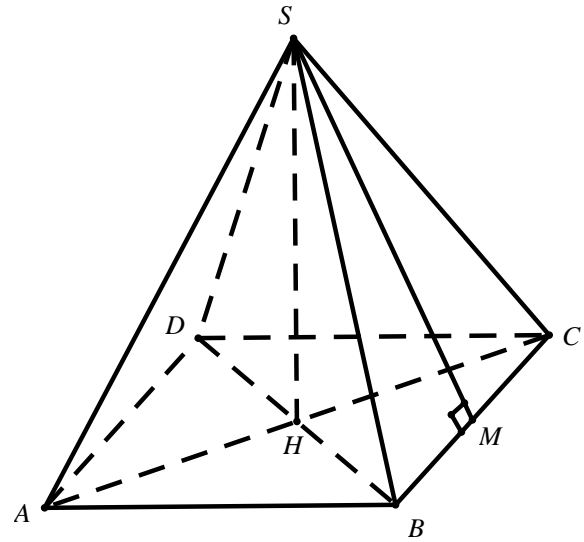
19.10 Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Biết thể tích là 1280cm^3 và chiều cao là 20cm . Tính giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh.

19.11 Một chiếc đèn lồng có dạng hình lăng trụ đứng, chiều cao 40 cm và đáy là lục giác đều cạnh 18cm .

- Tính diện tích giấy bóng kính để làm mặt xung quang của đèn.
- Tính thể tích của đèn.
- Nếu giữ nguyên chiều cao của đèn thì phải giảm độ dài cạnh đáy bao nhiêu lần để thể tích đèn giảm đi hai lần.

CHUYÊN ĐỀ 20. HÌNH CHÓP ĐỀU**A. Kiến thức cần nhớ****1. Mô tả hình chóp – hình chóp đều.**

- Hình chóp có đáy là một đa giác
Các mặt bên là những tam giác chung đỉnh. Đường thẳng đi qua đỉnh của vuông góc với mặt phẳng đáy được gọi là đường cao của hình chóp.
- Hình chóp đều là hình chóp có mặt đáy là một đa giác đều, các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.
- Trong hình chóp đều, chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy, ví dụ SH. Đường cao của mỗi mặt bên vẽ từ đỉnh S gọi là trung đoạn của hình chóp, ví dụ SM

**2. Hình chóp cụt đều.**

Cắt hình chóp đều bằng một mặt phẳng song song với đáy. Phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy gọi là hình chóp cụt đều (Hình 20.2).

Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là hình thang cân.

3. Diện tích xung quanh của hình chóp đều

- Diện tích xung quanh của hình chóp đều bằng tích của nửa chu vi đáy và trung đoạn của hình chóp.

$$S_{xq} = p.d$$

(p: là nửa chu vi đáy, d là trung đoạn)

- Diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều bằng:

+ Diện tích một mặt bên nhân với số mặt bên.

+ Diện tích xung quanh của hình chóp đều trừ đi diện tích xung quanh của hình chóp đều nhỏ hoặc

$$S_{xq} = (p + p').d$$

(Trong đó: p, p' là nửa chu vi đáy lớn, đáy nhỏ.
d: là trung đoạn của mặt bên.)

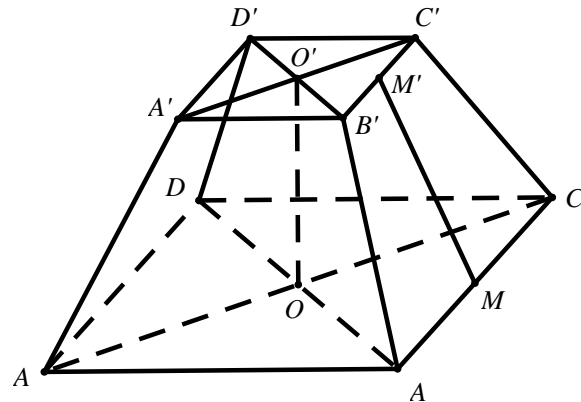
4. Thể tích hình chóp đều.

$$V = \frac{1}{3} S.h$$

(S là diện tích đa giác đáy; h là chiều cao)

- Thể tích của chóp cụt đều lớn trừ đi thể tích của hình chóp đều nhỏ; hoặc

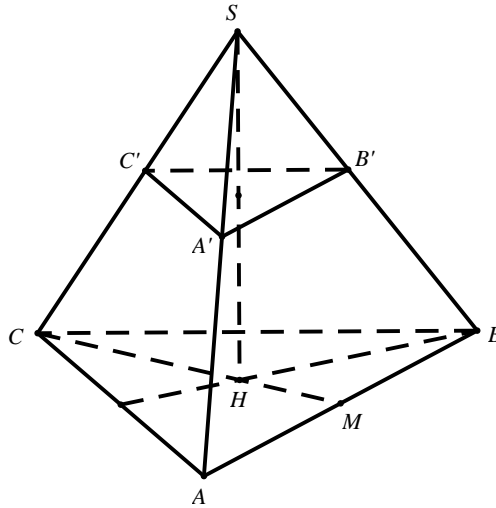
$$V = \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}) h$$



(Trong đó: S_1, S_2 là diện tích hai đáy, h là chiều cao)**B. Một số bài toán ví dụ**

Ví dụ 1. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, đường cao SH . Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' ; sao cho $SA' = SB' = SC'$. Chứng minh rằng:

- a) $mp(A'B'C') \parallel mp(ABC)$. b) $mp(SCH) \perp mp(SAB)$.

Giải*** Tìm hướng giải**

Muốn chứng minh $mp(A'B'C') \parallel mp(ABC)$ ta chứng minh hai cạnh của $\Delta A'B'C'$ tương ứng song song với hai cạnh của ΔABC .

*** Trình bày lời giải**

- a) Xét ΔSAC có $SA = SC; SA' = SC'$ nên $\frac{SA}{SA'} = \frac{SC}{SC'} \Rightarrow A'C' \parallel SA$ (1).

Chứng minh tương tự, ta được: $A'B' \parallel AB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $mp(A'B'C') \parallel mp(ABC)$.

- b) Xét ΔABC có H là giao điểm của ba đường trung tuyến. Gọi M là trung điểm của AB , ta có:
 $CM \perp AB; SM \perp AB$. Vậy $AB \perp mp(SCM)$.

Mặt khác $AB \subset mp(SAB)$ nên $mp(SAB) \perp mp(SCM)$ hay $mp(SAB) \perp mp(SCH)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều và SA là đường cao của hình chóp. Gọi M là trung điểm của BC .

- a) Chứng minh rằng $mp(SAM) \perp mp(SBC)$.

- b) Cho biết $\angle SAM = 30^\circ$, chứng minh rằng diện tích tam giác BSC bằng tổng diện tích của các tam giác ABS và ACS .

Giải*** Tìm cách giải**

Vì $BC \subset mp(SBC)$ nên muốn chứng minh $mp(SBC) \perp mp(SAM)$, ta chỉ cần chứng minh BC vuông góc với AM và SM .

*** Trình bày lời giải**

a) $SA \perp mp(ABC) \Rightarrow SA \perp AB; SA \perp AC.$

$$\Delta SAB = \Delta SAC (c.g.c) \Rightarrow SB = SC.$$

Xét ΔSBC cân tại $S \Rightarrow SM \perp BC$;

Xét ΔABC đều $\Rightarrow AM \perp BC$. Suy ra $BC \perp mp(SAM)$.

Mặt khác $BC \subset mp(SBC)$ nên $mp(SBC) \perp mp(SAM)$

b) Xét ΔSAM vuông tại A , $\angle SAM = 30^\circ$ nên $SA = \frac{1}{2} SM$ hay

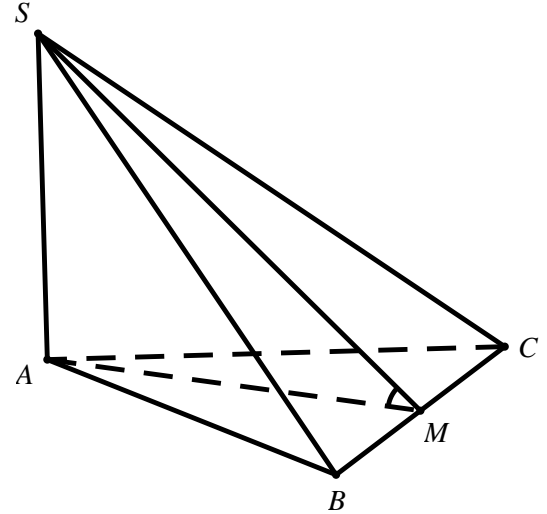
$$SM = 2SA.$$

Diện tích ΔBCS là $\frac{1}{2} BC \cdot SM = \frac{1}{2} BC \cdot 2SA = BC \cdot SA$. (1).

Tổng diện tích các ΔABS và ΔACS là:

$$\frac{1}{2} AB \cdot SA + \frac{1}{2} AC \cdot SA = \frac{1}{2} SA (AB + AC) = SA \cdot BC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.



Ví dụ 3. Cho hình chóp cắt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

Giải

Gọi S là đỉnh của hình chóp sinh ra hình chóp cắt. Vì $mp(MNPQ) \parallel mp(ABCD)$ nên hình chóp cắt $ABCD.MNPQ$ là hình chóp cắt đều. Các mặt bên của nó đều là hình thang cân.

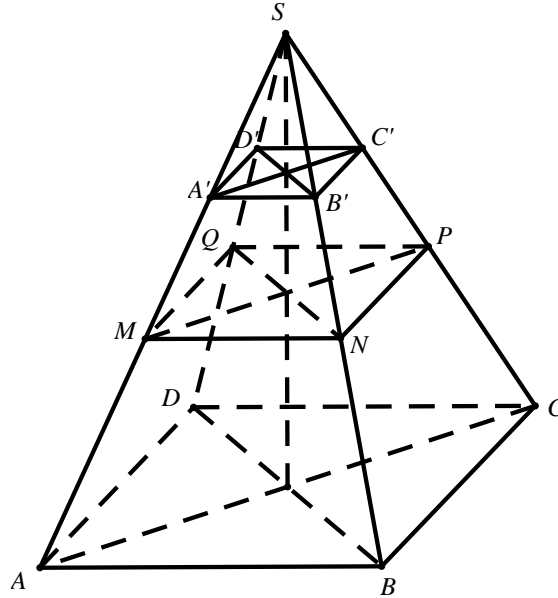
Suy ra $NP \parallel BC; MQ \parallel AD$.

Mặt khác $BC \parallel AD$ nên $NP \parallel MQ$.

Chứng minh tương tự ta được $MN \parallel PQ$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Xét $\triangle SBC$ có $NP \parallel BC$ nên $\frac{BC}{NP} = \frac{SB}{SN}$. (1)



Xét $\triangle SAB$ có $MN \parallel AB$ nên $\frac{AB}{MN} = \frac{SB}{SN}$. (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{BC}{NP} = \frac{AB}{MN}$, mà $BC = AB$ nên $NP = MN$.

Hình bình hành $MNPQ$ có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi.

Hai đường thẳng MP và AC cùng nằm trong mặt phẳng (SAC) và hai đường thẳng này không có điểm chung (vì nằm trong hai mặt phẳng song song) nên $MP \parallel AC$. Chứng minh tương tự, ta được $NQ \parallel BD$.

Ta có: $\frac{AC}{MP} = \frac{SC}{SP} = \frac{SB}{SN} = \frac{BD}{NQ}$. Vì $AC = BD$ nên $MP = NQ$.

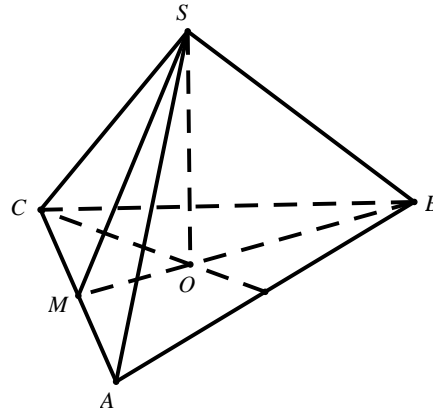
Hình thoi $MNPQ$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.

Ví dụ 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy là 12 cm, độ dài cạnh bên là 8 cm. Hãy tính:

a) Thể tích của hình chóp;

b) Diện tích toàn phần của hình chóp.

Giải



* **Tìm hướng giải**

Để tính thể tích và diện tích toàn phần của hình chóp đều khi đã biết độ dài của cạnh đáy và cạnh bên, ta cần tính chiều cao và trung đoạn của hình chóp.

* **Trình bày lời giải**

a) Gọi M là trung điểm của AC và O là giao điểm của ba đường trung tuyến của $\triangle ABC$

Ta có BM là đường cao của tam giác đều nên:

$$BM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$BO = \frac{2}{3}BM = 4\sqrt{3}$$

$\triangle SBO$ vuông tại O nên ta có:

$$SO^2 = SB^2 - OB^2 = 8^2 - (4\sqrt{3})^2 = 16$$

$$\Rightarrow SO = 4(\text{cm})$$

$$\text{Diện tích } \triangle ABC \text{ là } \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

$$\text{Thể tích của hình chóp là: } V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}36\sqrt{3}.4 = 48\sqrt{3}(\text{cm}^3)$$

b) Tam giác SMA vuông tại M nên

$$SM^2 = SA^2 - MA^2 = 8^2 - 6^2 \Rightarrow SM = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}(\text{cm}).$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình chóp là: } S_{xq} = p.d = \frac{12.3}{2}.2\sqrt{7} = 36\sqrt{7}(\text{cm}^2).$$

$$\text{Diện tích toàn phần của hình chóp là: } S_{tp} = 36\sqrt{7} + 36\sqrt{3} = 36(\sqrt{7} + \sqrt{3}) \approx 157,6(\text{cm}^2).$$

$$\text{b) Tam giác SMA vuông tại M nên } SM^2 = SA^2 - MA^2 = 8^2 - 6^2 \Rightarrow SM = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}(\text{cm}).$$

Diện tích xung quanh của hình chóp là: $S_{xq} = p.d = \frac{12.3}{2} . 2\sqrt{7} = 36\sqrt{7} \text{ (cm}^2\text{)}.$

Diện tích toàn phần của hình chóp là: $S_{tp} = 36\sqrt{7} + 36\sqrt{3} = 36(\sqrt{7} + \sqrt{3}) \approx 157,6 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Ví dụ 5. Cho hình chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng 17cm , cạnh đáy lớn bằng 28cm , cạnh đáy nhỏ bằng 12cm . Tính diện tích xung quanh của hình chóp cắt.

Giải (h.20.7)

*** Tìm hướng giải**

Để tính diện tích xung quanh của hình chóp cắt đều khi đã biết độ dài cạnh đáy lớn, độ dài cạnh đáy nhỏ còn phải tính chiều cao của mặt bên

*** Trình bày lời giải**

Trong mặt bên $A'B'BA$ vẽ $A'H \perp AB$ ta được:

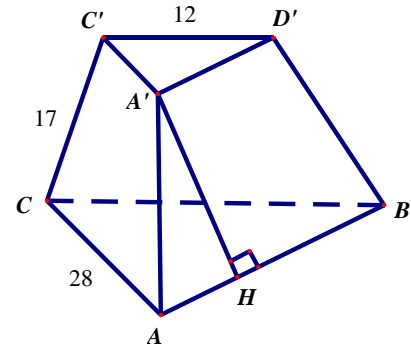
$$AH = \frac{AB - A'B'}{2} = \frac{28 - 12}{2} = 8 \text{ (cm)}.$$

Xét $\triangle A'AH$ vuông tại H , ta có:

$$A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \Rightarrow A'H = 15 \text{ (cm)}.$$

Diện tích xung quanh của hình chóp cắt là :

$$S_{xq} = \frac{(12 + 28).15}{2} . 3 = 900 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 20.7

C. Bài tập vận dụng

• Chứng minh song song, vuông góc. Tính chiều cao

20.1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Trên các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt lấy các điểm A', B', C', D' sao cho $SA' = SB' = SC' = SD'$. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm A', B', C', D' cùng thuộc một mặt phẳng. Có nhận xét gì về mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và mp $(ABCD)$.

b) $mp(SAC) \perp mp(SBD)$.

20.2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Cho biết $SA \perp SC$. Chứng minh rằng các mặt bên là những tam giác đều.

20.3. Cho hình chóp $S.ABC$, cả bốn mặt là những tam giác đều có cạnh bằng a . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SC, SB, AB, AC . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

20.4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, các mặt bên là những tam giác vuông cân tại S .

a) Chứng minh rằng mỗi mặt bên vuông góc với hai mặt còn lại.

b) Gọi độ dài mỗi cạnh đáy là a . Tính chiều cao của hình chóp.

20.5. Một hình chóp cắt tứ giác đều có diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy. Biết cạnh đáy lớn bằng 6cm , cạnh đáy nhỏ bằng 4cm . Tính chiều cao của hình chóp cắt đều.

20.6. Cho hình chóp cắt tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh $AB = a$, $A_1B_1 = b$ ($a > b$). Một mặt phẳng song song với hai đáy của hình chóp cắt các cạnh AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 lần lượt tại A_2 , B_2 , C_2 , D_2 và chia hình chóp cắt lớn thành hai hình chóp cắt nhỏ có diện tích xung quanh bằng nhau. Gọi c là cạnh của hình vuông $A_2B_2C_2D_2$. Chứng minh $c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

• **Tính diện tích, thể tích**

20.7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{10}$. Tính thể tích hình chóp.

20.8. Cho hình chóp lục giác đều $S.ABCDEF$ có $AD = 2a$ và diện tích tam giác SAD là a^2 . Tính diện tích xung quanh của hình chóp.

20.9. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên đều bằng a . Chứng minh rằng khi các cạnh bên vuông góc với nhau từng đôi một thì diện tích xung quanh sẽ lớn nhất.

20.10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên dài $5cm$ và diện tích xung quanh bằng $48cm^2$. Tính thể tích hình chóp.

20.11. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng $17cm$ và chiều cao bằng $15cm$. Gọi A' , B' , C' lần lượt là trung điểm của SA , SB , SC . Tính thể tích hình chóp cắt $A'B'C'.ABC$.

20.12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Từ hình lập phương này cắt ra hình chóp $C.BDC'$. Chứng minh rằng:

a) Hình chóp $C.BDC'$ là hình chóp đều.

b) Tỷ số giữa diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình chóp là $\sqrt{3}$.

c) Tỷ số giữa thể tích hình chóp và thể tích hình lập phương là $\frac{1}{6}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Chương 1. TỨ GIÁC

CHUYÊN ĐỀ 1. TỨ GIÁC	- 2 -
CHUYÊN ĐỀ 3. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, HÌNH THANG	- 15 -
CHUYÊN ĐỀ 4. HÌNH BÌNH HÀNH	- 23 -
CHUYÊN ĐỀ 5. HÌNH CHỮ NHẬT	- 29 -
CHUYÊN ĐỀ 6. HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG	- 37 -
CHUYÊN ĐỀ 7. ĐỐI XỨNG TRỤC. ĐỐI XỨNG TÂM	- 45 -
CHUYÊN ĐỀ 8. VẼ HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN TRONG CHƯƠNG TỨ GIÁC	- 54 -
CHUYÊN ĐỀ 9. TOÁN QUỸ TÍCH	- 63 -

CHUYÊN ĐỀ 1. TỨ GIÁC

1.1.

Trường hợp hai góc ngoài tại hai đỉnh kề nhau (h. 1.5)

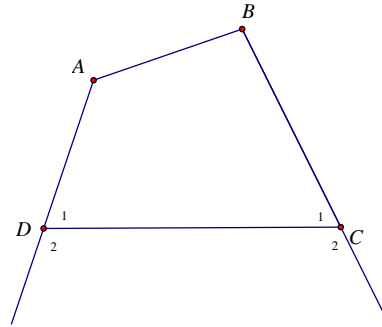
Gọi C_1, D_1 là số đo hai góc trong, C_2, D_2 là số đo hai góc ngoài tại hai đỉnh kề nhau là C và D .

Ta có:

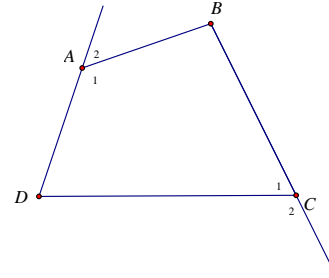
$$C_2 + D_2 = (180^\circ - C_1) + (180^\circ - D_1) = 360^\circ - (C_1 + D_1). \quad (1)$$

$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ có: } A + B = 360^\circ - (C_1 + D_1). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $C_2 + D_2 = A + B$.



Hình 1.5



Hình 1.6

Trường hợp hai góc ngoài tại hai đỉnh đối nhau (h 1.6)

Chứng minh tương tự, ta được: $A_2 + B_2 = C + D$.

1.2. (h.1.7)

Ta có:

Gọi $CDx + DCy = A + B = 220^\circ$ (bài 1.1).

$$\Rightarrow \frac{CDx + CDy}{2} = 110^\circ.$$

Do đó $C_2 + D_2 = 110^\circ$.

Xét $\triangle CKD$ có:

$$CKD = 180^\circ - (D_2 + C_2) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

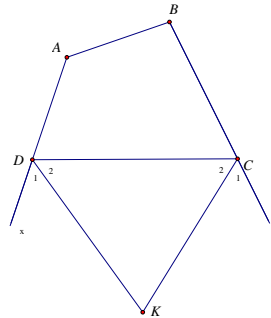
1.3. (h.1.8)

Tứ giác $ABCD$ có: $B + D = 360^\circ - (A + C) = 360^\circ - 2C$.

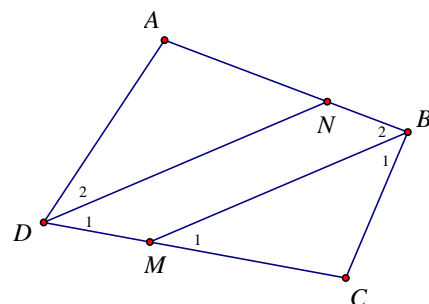
Vì $B_1 = B_2; D_1 = D_2$ nên

$$B_1 + D_1 = 180^\circ - C \Rightarrow B_1 + D_1 + C = 180^\circ. \quad (1)$$

Xét $\triangle BCM$ có $B_1 + M_1 + C = 180^\circ. \quad (2)$



Hình 1.7



Từ (1) và (2) suy ra $D_1 = M_1 \Rightarrow DN \parallel BM$.

Hình 1.8

1.4. (h.1.9)

Vẽ đường phân giác của C và D chúng cắt nhau tại E .

Xét $\triangle ECD$ có: $\angle CED = 180^\circ - \frac{110^\circ + 130^\circ}{2} = 60^\circ$.

$\triangle ADE = \triangle CDE (c.g.c) \Rightarrow \angle AED = \angle CED = 60^\circ$.

$\triangle BCE = \triangle DCE (c.g.c) \Rightarrow \angle BEC = \angle CED = 60^\circ$.

$\Rightarrow \angle AEB = 180^\circ$

Do đó A, E, B thẳng hàng.

Vậy $\angle BAD = \angle EAD = \angle ECD = 65^\circ$.

Do đó $\angle ABC = 360^\circ - (65^\circ + 110^\circ + 130^\circ) = 55^\circ$.

1.5. (h.1.10)

Giả sử tứ giác $ABCD$ có CD là cạnh lớn nhất.

Ta sẽ chứng minh CD nhỏ hơn tổng của ba cạnh còn lại.

(1)

Thật vậy, xét $\triangle ADC$ có $CD < AD + AC$.

Do đó $CD < AD + AB + BC$.

Ta thấy nếu các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10 thì không thỏa mãn điều kiện (1) nên không có tứ giác nào mà các cạnh tỉ lệ với 1, 3, 5, 10.

1.6. (h.1.11)

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

Xét $\triangle AOB, \triangle COD$ vuông tại O , ta có:

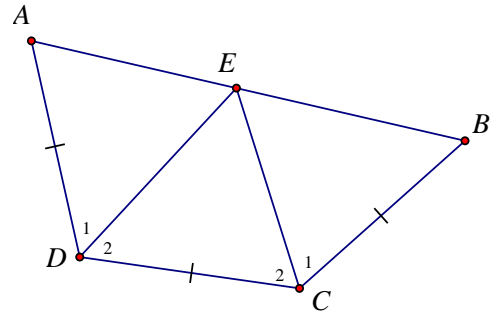
$$AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2.$$

Tương tự ta được: $BC^2 + AD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$.

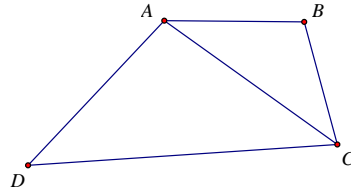
Do đó: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Suy ra $3^2 + 6^2 = 6.6^2 + AD^2 \Rightarrow AD^2 = 1,44 \Rightarrow AD = 1,2$.

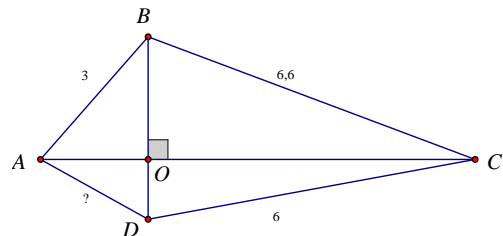
1.7. (h.1.12)



Hình 1.9



Hình 1.10



Hình 1.11

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của tứ giác $ABCD$.

Gọi độ dài các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là a, b, c, d .

Vận dụng bất đẳng thức tam giác ta được:

$$OA + OB > a, OC + OD > c.$$

$$\text{Do đó } (OA + OC) + (OB + OD) > a + c$$

$$\text{hay } AC + BD > a + c \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } AC + BD > b + d \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } AC + BD > \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Xét các $\triangle ABC$ và $\triangle ADC$ ta có:

$$AC < a + b; AC < c + d \Rightarrow 2AC < a + b + c + d. \quad (3)$$

$$\text{Tương tự } 2BD < a + b + c + d. \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } AC + BD < a + b + c + d.$$

Từ các kết quả trên ta được điều phải chứng minh.

1.8.

Trước tiên ta chứng minh bài toán phụ:

Cho $\triangle ABC, A \geq 90^\circ$. Chứng minh rằng $BC^2 \geq AB^2 + AC^2$.

Giải (h.1.13)

Vẽ $BH \perp AC$.

Vì $A \geq 90^\circ$ nên H nằm trên tia đối của tia AC .

Xét $\triangle HBC$ và $\triangle HBA$ vuông tại H , ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= HB^2 + HC^2 = (AB^2 - HA^2) + (HA + AC)^2 \\ &= AB^2 - HA^2 + HA^2 + AC^2 + 2.HA.AC = AB^2 + AC^2 + 2.HA.AC \end{aligned}$$

Vì $HA.AC \geq 0$ nên $BC^2 \geq AB^2 + AC^2$

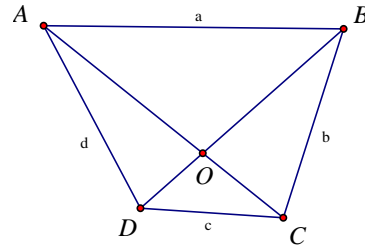
(dấu “=” xảy ra khi $H \equiv A$ tức là khi $\triangle ABC$ vuông)

Vận dụng kết quả trên để giải bài toán đã cho

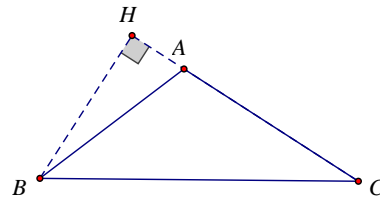
Trường hợp tứ giác $ABCD$ là tứ giác lồi (h.1.14)

Ta có $A + B + C + D = 360^\circ$

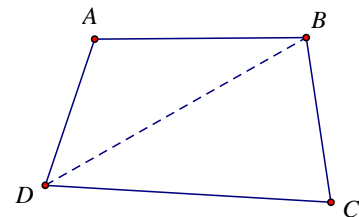
Suy ra trong bốn góc này phải có một góc lớn hơn hoặc bằng 90° , giả sử $A \geq 90^\circ$.



Hình 1.12



Hình 1.13



Hình 1.14

Xét $\triangle ABD$ ta có: $BD^2 \geq AB^2 + AD^2 > 10^2 + 10^2 = 200$

$$\Rightarrow BD > \sqrt{200} \Rightarrow BD > 14.$$

Trường hợp tứ giác $ABCD$ là tứ giác lõm (h.1.15)

Nối CA , ta có: $\angle ACD + \angle ACB + \angle BCD = 360^\circ$.

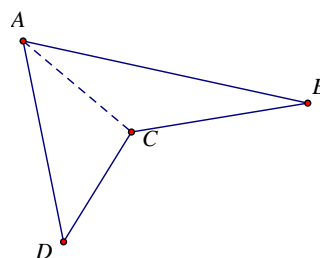
Suy ra trong ba góc này phải có một góc lớn hơn hoặc bằng 120° .

Giả sử $\angle ACB \geq 120^\circ \Rightarrow \angle ACB$ là góc tù.

Xét $\triangle ACB$ có: $AB^2 \geq AC^2 + BC^2 > 10^2 + 10^2 = 200$

$$\Rightarrow AB > \sqrt{200} \Rightarrow AC > 14.$$

Vậy luôn tồn tại hai điểm đã cho có khoảng cách lớn hơn 14.



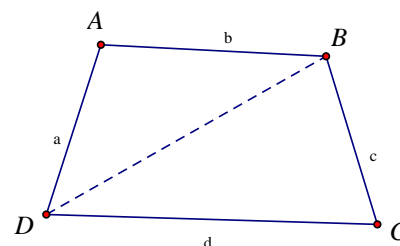
Hình 1.15

1.9. (h.1.16)

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử không có hai cạnh nào của tứ giác bằng nhau. Ta có thể giả sử $a < b < c < d$.

Ta có $a + b + c > BD + c > d$.



Hình 1.16

Do đó: $a + b + c + d > 2d$. Ta đặt $a + b + c + d = S$ thì $S > 2d$ (*)

Ta có: $S : a \Rightarrow S = m.a$ ($m \in \mathbb{N}$) (1)

$S : b \Rightarrow S = n.b$ ($n \in \mathbb{N}$) (2)

$S : c \Rightarrow S = p.c$ ($p \in \mathbb{N}$) (3)

$S : d \Rightarrow S = q.d$ ($q \in \mathbb{N}$) (4)

Từ (4) và (*) $\Rightarrow qd > 2d$ do đó $q > 2$

Vì $a < b < c < d$ nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $m > n > p > q > 2$

Do đó $q \geq 3; p \geq 4; n \geq 5; m \geq 6$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\frac{1}{m} = \frac{a}{S}; \frac{1}{n} = \frac{b}{S}; \frac{1}{p} = \frac{c}{S}; \frac{1}{q} = \frac{d}{S}$

Ta có: $\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a+b+c+d}{S} = 1$

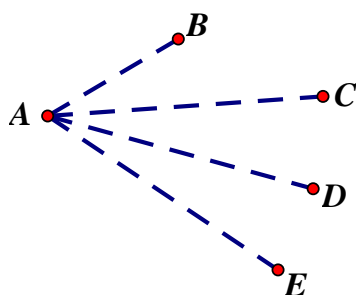
Từ đó $\frac{19}{20} \geq 1$, vô lý.

Vậy, điều giả sử là sai, suy ra tồn tại hai cạnh của tứ giác bằng nhau.

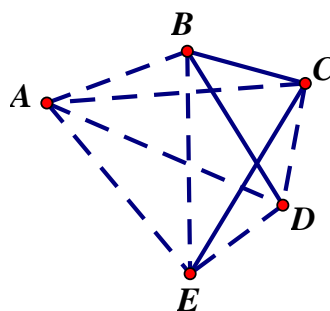
1.10. Coi mỗi người như một điểm, ta có chín điểm A, B, C, \dots . Nối hai điểm với nhau ta được một đoạn thẳng. Ta tô màu xanh nếu hai người không quen nhau, ta tô màu đỏ nếu hai người quen nhau. Ta sẽ chứng minh tồn tại một tứ giác có các cạnh và đường chéo cùng tô màu đỏ.

Xét hai trường hợp:

* Trường hợp có một điểm là đầu mút của bốn đoạn thẳng màu xanh là AB, AC, AD, AE vẽ nét đứt (h.1.17)



Hình 1.17



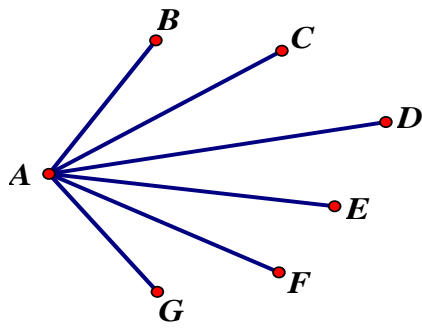
Hình 1.18

Xét tam giác ABC có hai đoạn thẳng AB, AC màu xanh nên đoạn thẳng BC màu đỏ vì bất kì tam giác nào cũng có một đoạn thẳng màu đỏ. Tương tự các đoạn thẳng CD, DE, EB, BD, CE cũng có màu đỏ (nét vẽ liền) (hình 1.18). Do đó, tứ giác $BCDE$ có các cạnh và đường chéo được tô đỏ, nghĩa là tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.

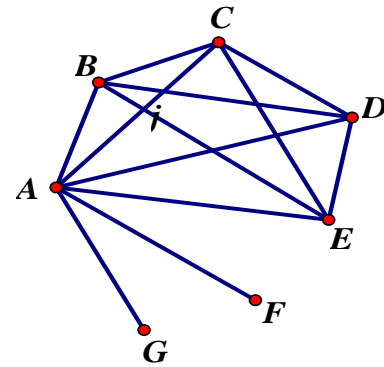
* Trường hợp mọi điểm đều là đầu mút của nhiều nhất là ba đoạn thẳng màu xanh. Không thể mọi điểm đều là đầu mút của ba đoạn thẳng màu xanh vì khi đó số đoạn thẳng màu xanh là $\frac{9 \cdot 3}{2} \notin N$.

Như vậy, tồn tại một điểm là đầu mút của nhiều nhất là hai đoạn thẳng màu xanh, chẳng hạn đó là điểm A , do đó A là đầu mút của ít nhất là sáu đoạn thẳng màu đỏ, giả sử đó là AB, AC, AD, AE, AF, AG (h. 1.19)

Trong sáu điểm B, C, D, E, F, G tồn tại ba điểm là đỉnh của một tam giác có ba cạnh cùng màu (đây là bài toán cơ bản về phương pháp tô màu) chẳng hạn đó là $\triangle BCD$ (h. 1.20)



Hình 1.19

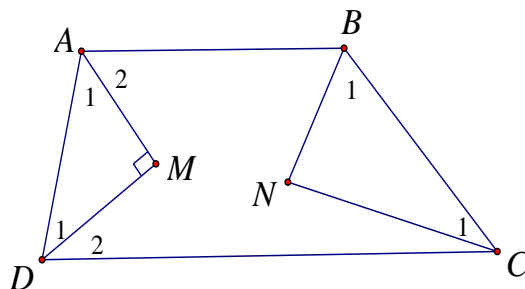


Hình 1.20

Trong $\triangle BCD$ có một cạnh màu đỏ (theo đề bài) nên ba cạnh của $\triangle BCD$ cùng màu đỏ. Khi đó, tứ giác $ABCD$ là tứ giác có các cạnh và đường chéo được tô đỏ, nghĩa là tồn tại một nhóm bốn người đôi một quen nhau.

CHUYÊN ĐỀ 2. HÌNH THANG. HÌNH THANG CÂN. DỰNG HÌNH THANG

2.1 (h.2.11)



a) Xét $\triangle MAD$ có: $M = 90^\circ$

$$\Rightarrow A_1 + D_1 = 90^\circ \Rightarrow \frac{A + D}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow A + D = 180^\circ \Rightarrow AB \parallel CD$$

Vậy tứ giác ABCD là hình thang.

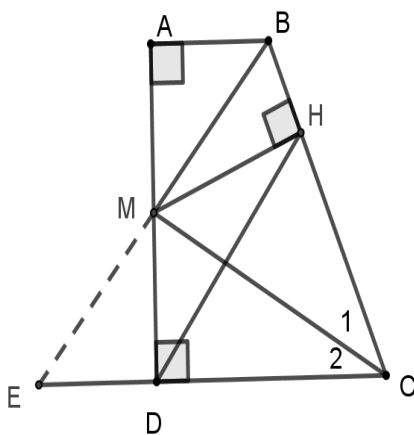
b) Ta có: $ABC + BCD = 180^\circ$ (hai góc kề với một cạnh bên)

$$\Rightarrow \frac{ABC + BCD}{2} = 90^\circ \text{ hay } B_1 + C_1 = 90^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle NBC \text{ có: } N = 180^\circ - (B_1 + C_1) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Vậy $NB \perp NC$

2.2.



a) Gọi E là giao điểm của tia BM với tia CD

$$\triangle ABM = \triangle DEM \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow AB = DE \text{ và } MB = ME$$

$\triangle CBE$ có CM vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên là tam giác cân

$$\Rightarrow CB = CE \Rightarrow CB = CD + DE \Rightarrow CB = CD + AB \text{ (vì } AB = DE \text{)}.$$

b) $\triangle CBE$ cân tại $C, CM \perp BM$ (1)

$\Rightarrow C_1 = C_2 \Rightarrow MH = MD$ (tính chất điểm nằm trên tia phân giác).

$\triangle HCM = \triangle DCM$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow CH = CD \Rightarrow \triangle CHD$ cân

$\Rightarrow CM \perp DH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BM \parallel DH$ do đó tứ giác $MBHD$ là hình thang.

2.3. (h.2.13)

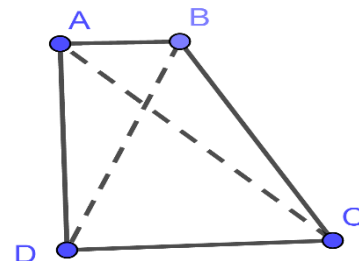
Xét hình thang $ABCD$ vuông tại A và D .

Giả sử $AB \leq CD$, áp dụng định lý Py-ta-go ta có:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2; BD^2 = AD^2 + AB^2.$$

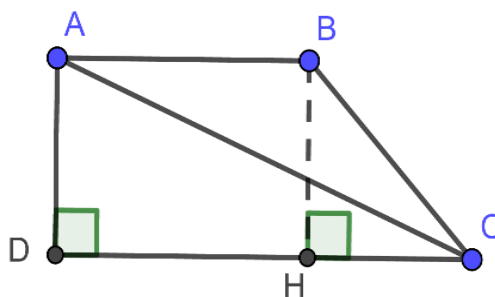
$$\text{Suy ra } AC^2 - BD^2 = (AD^2 + DC^2) - (AD^2 + AB^2).$$

$$\text{Do đó } AC^2 - BD^2 = CD^2 - AB^2.$$



Hình 2.13

2.4. (h.2.14)



Vẽ $BH \perp CD$ ta được $AB = DH; BH = AD = 20$.

• Xét $\triangle BHC$ vuông tại H có:

$$HC^2 = BC^2 - BH^2 = 29^2 - 20^2 = 441 \Rightarrow HC = 21.$$

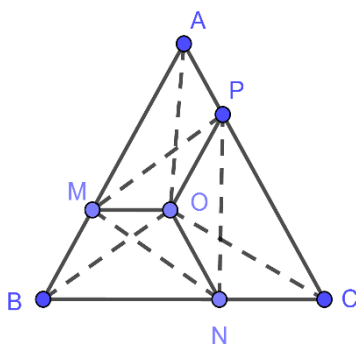
• Xét $\triangle ADC$ vuông tại D có:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 52^2 - 20^2 = 2034 \Rightarrow CD = 48.$$

$$\text{Do đó } DH = CD - HC = 48 - 21 = 27 \Rightarrow AB = 27.$$

Nhận xét: Bài này đã vẽ thêm đường cao BH của hình thang. Đó là một cách vẽ hình phụ thường dùng khi giải bài toán về hình thang.

2.5.



Tứ giác $MONB$ có $OM \parallel BC$ nên là hình thang. Hình thang này có $MBN = ONB (= ABC)$ nên là hình thang cân.

Chứng minh tương tự ta được các tứ $ONCP$; $OMAP$ cũng là hình thang cân.

Suy ra: $MN = OB$; $NP = OC$; $MP = OA$.

Do đó $\triangle MNP$ là tam giác đều $\Leftrightarrow MN = MP = NP$

$\Leftrightarrow OB = OC = OA \Leftrightarrow O$ là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle ABC$.

Trong tam giác đều, giao điểm của ba đường trung trực cũng là giao điểm của ba đường cao, ba đường trung tuyến.

Chiều cao h của tam giác đều cạnh a được tính theo công thức: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow OA = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó chu vi của $\triangle MNP$ là: $\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = a\sqrt{3}$.

2.6. (h.2.16)

Trên nửa mặt phẳng bờ CD có chứa A vẽ Cx sao cho $DCx = ADC$.

Tia Cx cắt tia AB tại E .

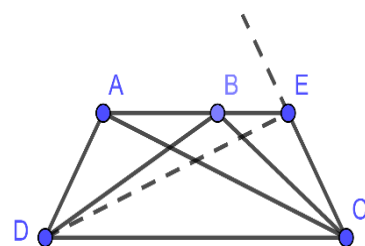
Khi đó hình thang $AECD$ là hình thang cân.

$\Rightarrow AC = DE$ và $DAB = CEB$.

Xét $\triangle ABD$ có góc DBE là góc ngoài nên

$DBE > DAB \Rightarrow DBE > CEB$ (vì $DAB = CEB$).

Do đó $DBE > DEB \Rightarrow DE > BD \Rightarrow AC > BD$.

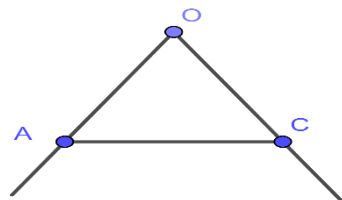


Hình 2.16

2.7. • Xét trường hợp $OA = OC$ (h.2.17)

$\triangle AOC$ là tam giác cân.

Vì $O > 60^\circ$ nên $A = C < 60^\circ \Rightarrow AC > OA = OC$.



Do đó $2AC > OA + OC \Rightarrow AC > \frac{OA + OC}{2}$.

Hình 2.17

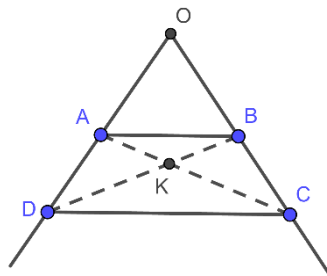
• Xét trường hợp $OA < OC$ (h.2.18)

Trên tia Ox lấy điểm D , trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OB = OA; OC = OD$.

Các $\triangle OAB; \triangle OCD$ cân tại O nên:

$$\angle OAB = \angle ODC = \frac{180^\circ - \angle O}{2} \Rightarrow AB \parallel CD$$

\Rightarrow Tứ giác $ABCD$ là hình thang.



Hình 2.18

Mặt khác $\angle OCD = \angle ODC$ nên $ABCD$ là hình thang cân
 $\Rightarrow AC = BD$.

Gọi K là giao điểm của AC và BD . Ta có: $AC = AK + KC; BD = BK + KD$.

$$\Rightarrow AC + BD = (AK + BK) + (KC + KD). \quad (1)$$

$$\text{Vì } AK + BK > AB; KC + KD > CD. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{BF}{BM} = \frac{CE}{CM}$. Do đó $BF = CE$ (do $BM = CM$)

Cách 2: (dùng menelaus)

Xét tam giác ABC với ba điểm F, E, M thẳng hàng, ta có: $\frac{EA}{EC} \cdot \frac{MC}{MB} \cdot \frac{FB}{FA} = 1$ (4)

Do $\angle AEF = \angle AFE = \frac{\angle BAC}{2}$ nên $\triangle AFE$ cân ở A . Suy ra $AE = AF$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra: $BF = CE$. Điều phải chứng minh.

2.8.(h.2.19)

Qua A vẽ một đường thẳng song song với CD cắt tia CB tại B' . Hình thang cân.

• Vậy nếu B' trùng với B thì tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

• Nếu B' không trùng với B , ta có $AC = B'D$.

Mặt khác, $AC = BD$ nên $B'D = BD$.

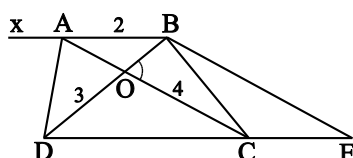
Do đó $\triangle DBB'$ cân $\Rightarrow \angle DB'B = \angle DBB' = 90^\circ$, vô lí.

Vậy B' trùng với B và tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

2.9. (h.2.20)

a) Phân tích

Vẽ $BE \parallel AC$ ($E \in$ tia DC) ta được



$$\angle DBE = 110^\circ, BE = AC = 4\text{cm}, CE = AB = 2\text{cm}.$$

- $\triangle BDE$ dựng được ngay (c.g.c);
- Điểm A thỏa mãn hai điều kiện: A nằm trên tia Bx // DE và cách B là 2cm.
- Điểm C thỏa mãn hai điều kiện: C nằm trên tia ED và cách E là 2cm.

b) Cách dựng

- Dựng $\triangle BDE$ sao cho $\angle DBE = 110^\circ$, $BD = 3\text{cm}$, $BE = 4\text{cm}$.
- Dựng tia Bx // DE và trên đó đặt $BA = 2\text{cm}$ (hai tia Bx và ED cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ BE).
- Trên tia ED đặt $EC = 2\text{cm}$.
- Nối AD, BC ta được hình thang ABCD phải dựng.

c) Chứng minh

Tứ giác ABCD theo cách dựng có $AB \parallel CD$ nên là hình thang.

Xét hình thang ABEC có $AB = EC = 2\text{cm}$ nên $AC \parallel BE$ và $AC = BE = 4\text{cm}$.

$$\angle DOC = \angle DBE = 110^\circ \Rightarrow \angle BOC = 70^\circ.$$

Hình thang ABCD theo cách dựng có

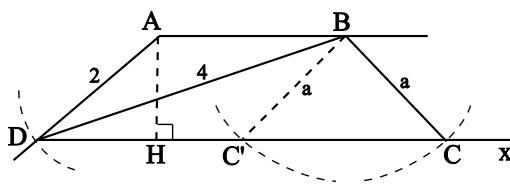
$$AB = 2\text{cm}, BD = 3\text{cm}, AC = 4\text{cm} \text{ và } \angle BOC = 70^\circ.$$

d) Biện luận

Bài toán có một nghiệm hình.

2.10. (h.2.21)

Cách dựng



Hình 2.21

- Dựng $\triangle ABD$ sao cho $\angle A = 120^\circ$, $AD = 2$, $DB = 4$.
- Dựng tia Dx // AB (hai tia Dx và AB cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ AD).
- Dựng cung tròn tâm B, bán kính a cắt Dx tại C.
- Nối BC ta được hình thang ABCD phải dựng.

Biện luận

$$\text{Vẽ } AH \perp CD \text{ thì } \angle DAH = 30^\circ. \text{ Do đó } DH = \frac{1}{2}AD = 1\text{ cm} \Rightarrow AH = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

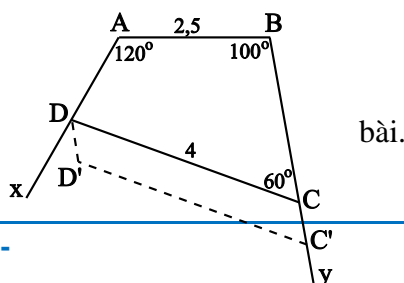
- Nếu $a < \sqrt{3}$ thì đường tròn (B; a) không cắt tia Dx nên bài toán không có nghiệm hình.
- Nếu $a = \sqrt{3}$ thì đường tròn (B; a) có chung với tia Dx một điểm, bài toán có một nghiệm hình.
- Nếu $\sqrt{3} < a < 4$ thì đường tròn (B; a) cắt tia Dx tại hai điểm C và C', bài toán có hai nghiệm hình.
- Nếu $a \geq 4$ thì đường tròn (B; a) cắt tia Dx tại một điểm $C \neq D$ nên bài toán có một nghiệm hình.

2.11. (h.2.22)

a) Phân tích

Giả sử ta đã dựng được tứ giác ABCD thỏa mãn đề

Ta thấy $AB = 2,5\text{cm}$ dựng được ngay.



Trên tia BC lấy điểm C'. Vẽ đoạn thẳng C'D' // CD và C'D' = CD. Khi đó $C' = C = 60^\circ$ và $DD' // CC'$.
 Hình 2.22

b) Cách dựng

- Dựng $AB = 2,5\text{cm}$.
- Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB dựng các tia Ax và By sao cho

$$BAx = 120^\circ, \quad ABy = 100^\circ.$$

- Trên tia By lấy điểm C'.
- Dựng đoạn thẳng C'D' sao cho $BC'D' = 60^\circ$ và $C'D' = 4\text{cm}$.
- Dựng $DD' = BC'$ ($D \in Ax$).
- Dựng $DC // D'C'$ ($C \in By$).

Tứ giác ABCD là tứ giác phải dựng.

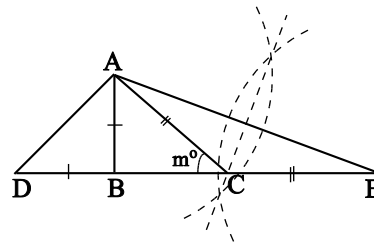
Các bước còn lại, bạn đọc tự giải.

2.12. (h.2.23)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được $\triangle ABC$ thoả mãn đề bài.

Trên tia đối của tia BC lấy điểm D; trên tia đối của



Hình 2.23

cho $BD = BA$, $CE = CA$.

Khi đó $DE = DB + BC + CE = BA + BC + CA = 8\text{cm}$.

$\triangle ABD$ vuông cân tại B nên $D = 45^\circ$.

Góc ACB là góc ngoài của tam giác cân CAE nên $ACB = 2E \Rightarrow E = \frac{m^\circ}{2}$.

- $\triangle ADE$ dựng được (g.c.g).
- Điểm B thoả mãn hai điều kiện: B nằm trên đoạn thẳng DE và $AB \perp DE$.
- Điểm C thoả mãn hai điều kiện: C nằm trên đoạn thẳng DE và nằm trên đường trung trực của AE (vì C cách đều hai đầu đoạn thẳng AE).

b) Cách dựng

- Dựng $\triangle ADE$ sao cho $DE = 8\text{cm}$; $D = 45^\circ$ và $E = \frac{m^\circ}{2}$.
- Dựng $AB \perp DE$ ($B \in DE$).
- Dựng đường trung trực của AE cắt DE tại C.
- Nối AC ta được $\triangle ABC$ phải dựng.

c) Chứng minh

$\triangle ABD$ vuông tại B có $D = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân $\Rightarrow BA = BD$.

Điểm C nằm trên đường trung trực của AE nên $CA = CE$.

$\triangle ABC$ có $AB + BC + CA = BD + BC + CE = DE = 8\text{cm}$;

$$B = 90^\circ \text{ và } \angle ACB = 2E = 2 \cdot \frac{m^\circ}{2} = m^\circ.$$

d) Biện luận

- Nếu $m \geq 90$ thì bài toán không có nghiệm hình.
- Nếu $0 < m < 90$ thì bài toán có một nghiệm hình.

CHUYÊN ĐỀ 3. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, HÌNH THANG

3.1. (h.3.7)

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $AC \perp BD$ và $OA = OC$.

Xét $\triangle ABD$ có MN là đường trung bình

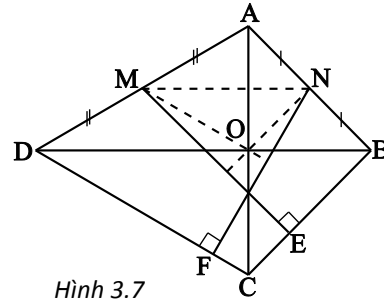
$\Rightarrow MN \parallel BD$ và $OA \perp MN$ (vì $OA \perp BD$).

Xét $\triangle ABC$ có ON là đường trung bình

$\Rightarrow ON \parallel BC$ và $ON \perp ME$ (vì $ME \perp BC$).

Xét $\triangle ACD$ có OM là đường trung bình $\Rightarrow OM \parallel CD$ và $OM \perp NF$ (vì $NF \perp CD$).

Xét $\triangle OMN$ có OA, ME, NF là ba đường cao nên chúng đồng quy.



Hình 3.7

3.2. (h.3.8)

Gọi O là trung điểm của BC.

Xét $\triangle EBC$ có OM là đường trung bình

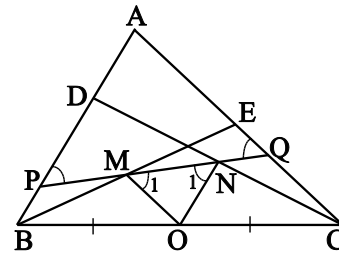
$\Rightarrow OM \parallel CE$ và $OM = \frac{CE}{2}$.

Xét $\triangle DBC$ có ON là đường trung bình

$\Rightarrow ON \parallel BD$ và $ON = \frac{BD}{2}$.

Ta có $M_1 = AQP$; $N_1 = APQ$ (so le trong).

$\triangle APQ$ cân tại A $\Leftrightarrow Q = P \Leftrightarrow N_1 = M_1 \Leftrightarrow OM = ON \Leftrightarrow CE = BD$.



Hình 3.8

3.3. (h.3.9)

- a) Gọi D và E thứ tự là giao điểm của AH và AK với đường thẳng BC.

$\triangle ABD$ có BH vừa là đường phân giác, vừa là đường cao nên $\triangle ABD$ là tam giác cân $\Rightarrow HA = HD$.

Tương tự ta có $KA = KE$.

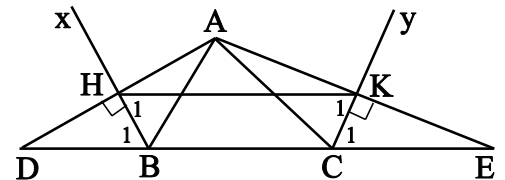
Xét $\triangle ADE$ có HK là đường trung bình nên $HK \parallel DE \Rightarrow HK \parallel BC$.

Do đó tứ giác BCKH là hình thang.

- b) Ta có $H_1 = B_1$; $K_1 = C_1$ (so le trong).

Hình thang BCKH là hình thang cân $\Leftrightarrow H_1 = K_1 \Leftrightarrow B_1 = C_1$

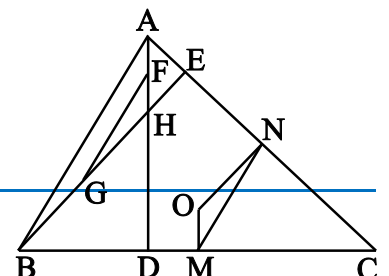
$\Leftrightarrow \angle ABD = \angle ACE \Leftrightarrow \angle ABC = \angle ACB \Leftrightarrow \triangle ABC$ cân tại A.



3.4. (h.3.10)

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CA.

Gọi F và G lần lượt là trung điểm của AH và BH.



Ta có MN là đường trung bình của $\triangle ABC$; FG là đường trung bình của $\triangle ABH$.

Suy ra $MN \parallel AB$ và $MN = \frac{1}{2} AB$.

$FG \parallel AB$ và $FG = \frac{1}{2} AB$.

Hình 3.10

Do đó $MN \parallel FG$ và $MN = FG$. Dễ thấy $OM \parallel AD$, $ON \parallel BE$.

$\triangle OMN$ và $\triangle HFG$ có:

$MN = FG$; $OMN = HFG$; $ONM = HGF$ (hai góc có cạnh tương ứng song song).

Vậy $\triangle OMN = \triangle HFG$ (g.c.g) $\Rightarrow OM = HF = \frac{AH}{2}$.

3.5. (h.3.11)

Gọi M là trung điểm của BD thì:

$$MD = \frac{1}{2} BD = AH$$

$\triangle ABC$ cân tại A , AH là đường cao nên $HB = HC$.

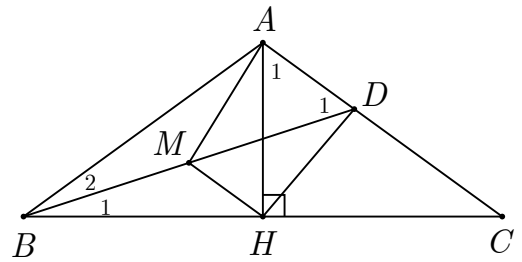
Ta có: HM là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow HM \parallel AC$.

Hình thang $HMAC$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

$$\triangle ADH = \triangle DAM \text{ (c - c - c)} \Rightarrow A_1 = D_1 \Leftrightarrow 90^\circ - C = B_1 + C. \quad (1)$$

Ta đặt $B = C = x$ thì (1) $\Leftrightarrow 90^\circ - x = \frac{x}{2} + x \Leftrightarrow x = 36^\circ$.

Vậy $\triangle ABC$ có $B = C = 36^\circ$; $A = 108^\circ$.



Hình 3.11

3.6. (h.3.12)

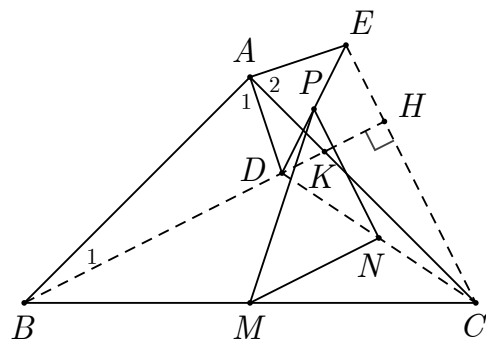
$\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$AB = AC$; $A_1 = A_2$ (cùng phụ với góc DAC);

$AD = AE$.

Do đó $\triangle ABD = \triangle ACE$ (c - g - c)

$\Rightarrow BD = CE$ và $B_1 = C_1$.



Hình 3.12

Gọi H và K lần lượt là giao điểm của đường thẳng BD với CE và CA .

Ta có: $B_1 + BKA = 90^\circ \Rightarrow C_1 + CKH = 90^\circ \Rightarrow H = 90^\circ$.

Xét $\triangle CBD$ có MN là đường trung bình $\Rightarrow MN \parallel BD$ và $MN = \frac{1}{2} BD$.

Xét $\triangle CED$ có NP là đường trung bình $\Rightarrow NP \parallel CE$ và $NP = \frac{1}{2} CE$.

Vì $BD = CE$ nên $MN = NP$.

Ta có: $MNP = H = 90^\circ$ (hai góc có cạnh tương ứng song song).

Do đó $\triangle MNP$ vuông cân tại $N \Rightarrow N = 90^\circ; M = P = 45^\circ$.

3.7. (h.3.13)

$\triangle ADC$ và $\triangle BCD$ có: $AD = BC, AC = BD, CD$ chung.

Do đó $\triangle ADC = \triangle BCD$ (c - c - c)

$\Rightarrow \angle ACD = \angle BDC \Rightarrow \triangle COD$ cân.

Mặt khác $\angle COD = 60^\circ$ nên $\triangle COD$ đều.

Ta có: $OE = ED$ nên CE là đường trung tuyến của tam giác đều, do đó CE là đường cao.

Vậy $CE \perp BD$.

Xét $\triangle EBC$ vuông tại E có EF là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $EF = \frac{1}{2} BC$.

Chứng minh tương tự, ta có: $GF = \frac{1}{2} BC$.

Xét $\triangle AOD$ có EG là đường trung bình nên $EG = \frac{1}{2} AD$

$\Rightarrow EG = \frac{1}{2} BC$ (vì $AD = BC$).

Vậy $EF = FG = EG \left(= \frac{1}{2} BC \right) \Rightarrow \triangle GEF$ đều $\Rightarrow G = E = F = 60^\circ$.

3.8. (h.3.14)

Gọi D và E thứ tự là trung điểm của AB và AC .

Ta có: OD và OE là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên

$OE \parallel AD$ và $OE = AD; OD \parallel AE$ và $OD = AE$.

$\angle BDO = \angle BAC; \angle CEO = \angle BAC$ (đồng vị).

Vì $\triangle MAB$ vuông cân tại M nên $MD \perp AB$

và $\triangle MAD$ vuông cân $\Rightarrow AD = MD$.

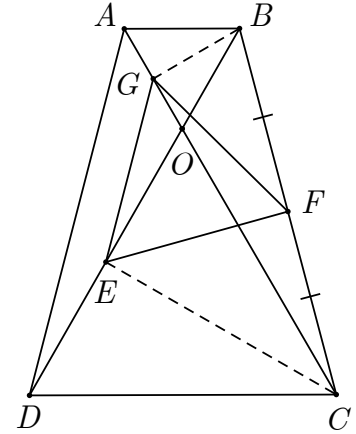
Tương tự, $NE \perp AC$ và $\triangle NEA$ vuông cân $\Rightarrow AE = NE$.

$\triangle OMD$ và $\triangle NOE$ có:

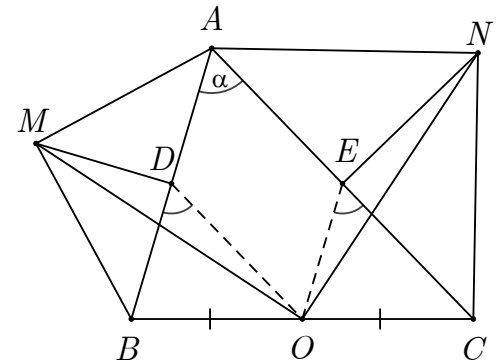
$MD = OE (= AD); \angle ODM = \angle OEN (= 90^\circ + \angle BAC); OD = NE (= AE)$.

Vậy $\triangle OMD = \triangle NOE$ (c - g - c) $\Rightarrow OM = ON$ và $\angle OMD = \angle NOE$.

Do đó $\angle MON = \angle MOD + \angle DOE + \angle NOE = \angle MOD + \angle BDO + \angle OMD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.



Hình 3.13



Hình 3.14

Vậy $\triangle MON$ vuông cân.

3.9. (h.3.15)

Vẽ đường phân giác AD thì AD là một đường thẳng cố định.

Gọi O là trung điểm của BC thì O là một điểm cố định.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng

OM với các đường thẳng AC và AB .

Xét $\triangle EBC$ có ON là đường trung bình

$$\Rightarrow ON \parallel BE \text{ và } ON = \frac{1}{2} BE.$$

Xét $\triangle ECF$ có MN là đường trung bình

$$\Rightarrow MN \parallel CF \text{ và } MN = \frac{1}{2} CF.$$

Vì $BE = CF$ nên $ON = NM \Rightarrow \triangle OMN$ cân $\Rightarrow M_1 = O_1$.

Ta có: $P_1 = M_1 (= P_2)$; $Q = O_1 \Rightarrow P_1 = Q$.

Xét $\triangle APQ$ có BAC là góc ngoài nên $BAC = P_1 + Q$.

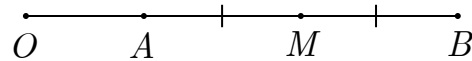
Mặt khác $A_1 = A_2$ nên $A_2 = P_1 \Rightarrow OP \parallel AD$.

Vậy M nằm trên một đường thẳng đi qua O và song song với AD . Đó là một đường thẳng cố định.

3.10. Gọi M là trung điểm của AB và O là một điểm tùy ý không nằm giữa A và B .

- Trường hợp O nằm trên tia đối của tia AB hay tia đối của tia BA (h.3.16), ta chứng minh được

$$OM = \frac{OA + OB}{2}. \quad (1)$$



Hình 3.16

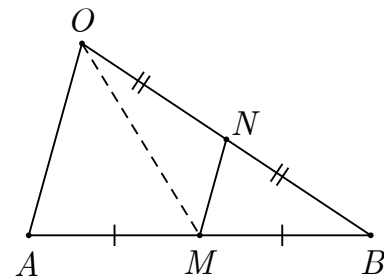
- Trường hợp O không thẳng hàng với A và B (h.3.17).

Gọi N là trung điểm của OB , khi đó MN

là đường trung bình của $\triangle OAB$, $MN = \frac{OA}{2}$.

Xét $\triangle OMN$ ta có: $OM < ON + MN$

$$\Rightarrow OM < \frac{OA + OB}{2}. \quad (2)$$



Hình 3.17

Từ (1) và (2) suy ra: $OM \leq \frac{OA + OB}{2}. \quad (*)$

Áp dụng hệ thức (*) đối với n điểm $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ ta có:

$$O_1M \leq \frac{O_1A + O_1B}{2}; O_2M \leq \frac{O_2A + O_2B}{2}; \dots; O_nM \leq \frac{O_nA + O_nB}{2}.$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\begin{aligned} O_1M + O_2M + \dots + O_nM &\leq \frac{O_1A + O_1B}{2} + \frac{O_2A + O_2B}{2} + \dots + \frac{O_nA + O_nB}{2} \\ &= \frac{O_1A + O_2A + \dots + O_nA}{2} + \frac{O_1B + O_2B + \dots + O_nB}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a. \end{aligned}$$

Như vậy điểm cần tìm chính là trung điểm M của AB .

3.11. (h.3.18)

Gọi AA' , BB' , CC' là ba đường cao của $\triangle ABC$.

Gọi M, N, P là trung điểm của các đường cao đó.

Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA và AB .

Ta có: EF, FD, DE là các đường trung bình của $\triangle ABC$

$\Rightarrow EF \parallel BC, FD \parallel CA, DE \parallel AB$.

Vì M là trung điểm của AA' nên $M \in FE$.

Vì N là trung điểm của BB' nên $N \in FD$. Vì P là trung điểm của CC' nên $P \in DE$.

Theo đề bài, ba điểm M, N, P thẳng hàng nên các điểm này chỉ có thể nằm trên một trong các cạnh DE, DF hoặc EF của $\triangle DEF$.

- Nếu ba điểm M, N, P cùng nằm trên DE thì N trùng với D , M trùng với E , khi đó $\triangle ABC$ vuông tại C , trái với giả thiết góc C là góc nhỏ nhất của $\triangle ABC$.
- Nếu ba điểm M, N, P cùng nằm trên DF thì cũng lập luận như trên, $\triangle ABC$ vuông tại B , trái với giả thiết $B \leq A$.
- Vậy ba điểm M, N, P nằm trên EF .

Lập luận tương tự như trên ta được $\triangle ABC$ vuông tại A .

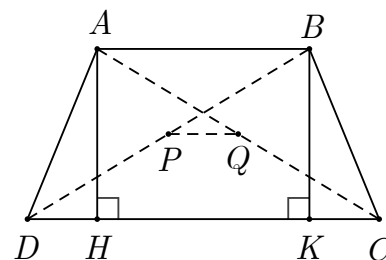
3.12. (h.3.19)

a) Vẽ $BK \perp CD$ ta được $AH \parallel BK$ và $AB \parallel HK \Rightarrow AB = HK$.

$$\triangle ADH = \triangle BCK \Rightarrow HD = KC.$$

Ta có: $HD + KC = CD - HK \Leftrightarrow 2HD = CD - AB$

$$\Leftrightarrow HD = \frac{CD - AB}{2}.$$



Hình 3.19

Theo ví dụ 4 thì đoạn thẳng PQ nối trung điểm của hai đường chéo bằng nửa hiệu hai đáy. Vậy $HD = PQ$.

b) Ta có: $HC = CD - HD = CD - \frac{CD - AB}{2} = \frac{CD + AB}{2}$.

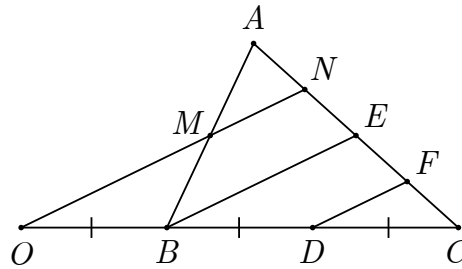
Đường trung bình của hình thang bằng nửa tổng hai đáy. Do đó HC bằng độ dài đường trung bình của hình thang.

3.13. (h.3.20)

Gọi D là trung điểm của BC .

Vẽ $BE \parallel ON$, $DF \parallel ON$ ($E, F \in AC$).

Ta có: $OB = BD = DC = \frac{1}{2}BC$.



Hình 3.20

- Xét $\triangle ABE$ có $MN \parallel BE$ và $MA = MB$ nên $NA = NE$. (1)
- Xét hình thang $ONFD$ có $BE \parallel ON$ và $OB = BD$ nên $NE = EF$. (2)
- Xét $\triangle CBE$ có $DF \parallel BE$ và $BD = DC$ nên $EF = FC$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $AN = NE = EF = FC$, do đó $AN = \frac{1}{4}AC$.

3.14. (h.3.21)

Gọi O là trung điểm của MN .

Vẽ $OF \perp BC$; $AH \perp BC$; $MD \perp BC$ và $NE \perp BC$.

Ta có: $OF \parallel AH \parallel MD \parallel NE$

$\triangle BMD = \triangle ABH$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow MD = BH$ và $BD = AH$ (1)

Tương tự, $\triangle CNE = \triangle ACH$

$\Rightarrow NE = CH$ và $CE = AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD = CE (= AH)$.

Dễ thấy OF là đường trung bình của hình thang $MDEN$

$\Rightarrow OF = \frac{MD + NE}{2} = \frac{BH + CH}{2} = \frac{BC}{2}$ (không đổi).

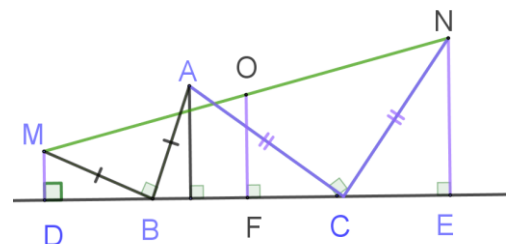
Ta có: $FD = FE$; $BD = CE \Rightarrow FB = FC$.

Vậy O nằm trên đường trung trực của BC và cách BC một khoảng không đổi là $\frac{BC}{2}$. Do đó O là một điểm cố định.

Suy ra MN đi qua một điểm cố định là điểm O .

3.15. (h. 3.22)

* *Tìm hướng giải*



Hình 3.21

Điều phải chứng minh là $HF = \frac{1}{2}CD$ gợi ý cho ta nghĩ đến định lý đường trung bình của tam giác. Ta vẽ đường trung bình EG của $\triangle MCD$ thì $EG = \frac{1}{2}CD$. Chỉ còn phải chứng minh $HF = EG$

*** Trình bày lời giải:**

Gọi E là trung điểm của CM , G là trung điểm của DM . Khi đó EG là đường trung bình của $\triangle MCD \Rightarrow EG = \frac{1}{2}CD$. (1)

$\triangle CAM$ và $\triangle DBM$ cân tại C và D mà $C = D$ nên các góc ở đáy của chúng bằng nhau:

$$\angle CAM = \angle CMA = \angle DMB = \angle DBM$$

$\Rightarrow CA \parallel DM$ và $CM \parallel DB$ (Vì có các cặp góc đồng vị bằng nhau).

Xét $\triangle CMB$ có EF là đường trung bình $\Rightarrow EF \parallel MB$.

Xét $\triangle DAM$ có HG là đường trung bình $\Rightarrow HG \parallel AM$.

Suy ra: $EF \parallel HG$ (vì cùng song AB). Vậy tứ giác $EFGH$ là hình thang.

Xét hình thang $ACDM$ có EH là đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo nên $EH \parallel AC$.

Tương tự, xét hình thang $CDBM$ có: $FG \parallel DB$.

Do đó $\angle EHG = \angle CAM, \angle FGH = \angle DBM$.

Mặt khác: $\angle CAM = \angle DBM$ (chứng minh trên) nên $\angle EHG = \angle FGH$

Vậy hình thang $EFGH$ là hình thang cân $\Rightarrow HF = EG$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HF = \frac{1}{2}CD$.

3.16. (h.3.23)

Vẽ $\triangle ABC$ cân tại A .

Vẽ cạnh AB lấy điểm M , trên tia đối của tia CA lấy N sao cho $BM = CN$

Như vậy $AB + AC = AM + AN$. (1)

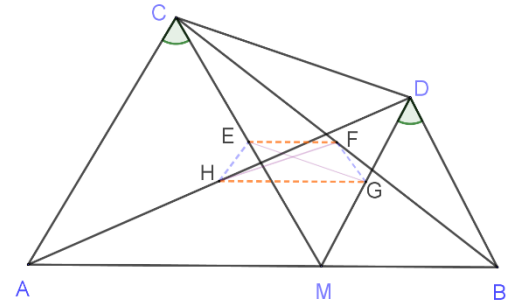
Ta phải chứng minh chu vi $\triangle ABC$ nhỏ hơn chu vi $\triangle AMN$

Muốn vậy ta phải chứng minh $BC < MN$

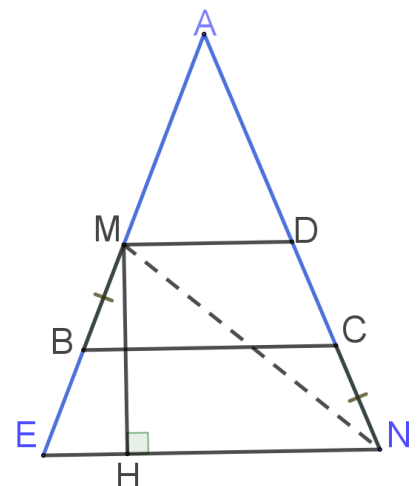
Ta vẽ $MD \parallel NE \parallel BC$ ($D \in AC, E \in$ tia đối của tia BA)

Hình thang cân $MDCB$ là hình thang cân $\Rightarrow MB = DC$, mà $BM = CN$ nên $DC = CN$

Xét hình thang cân $MDNE$, có



Hình 3.22



Hình 3.23

$BC \parallel NE$ và $DC = CN$ nên $MB = BE$

Vậy BC là đường trung bình của hình thang $MDNE$

Vẽ $MH \perp EN$ thì $HN = BC$ (xem bài 3.12)

Xét $\triangle MHN$ vuông tại H có $HN < MN \Rightarrow BC < MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra chu vi $\triangle ABC$ nhỏ hơn chu vi $\triangle AMN$.

CHUYÊN ĐỀ 4. HÌNH BÌNH HÀNH**4.1 (h.4.6)**

Vẽ hình bình hành DAEF. Khi đó AF đi qua M

Gọi H là giao điểm của MA với BC.

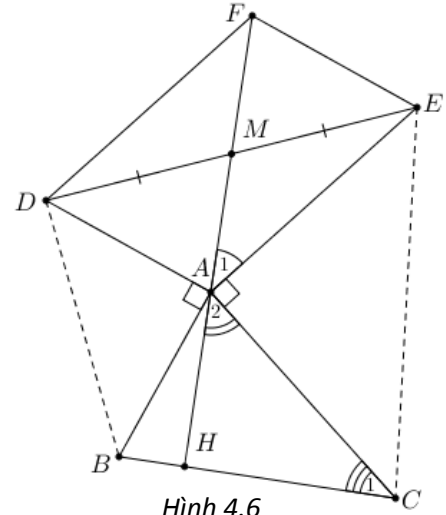
Ta có: $EF = AD = AB$

$\angle ABF + \angle DAE = 180^\circ$ mà $\angle BAC + \angle DAE = 180^\circ$ nên $\angle AEF = \angle BAC$.

$\triangle AEF = \triangle CAB$ (g.c.g) $\Rightarrow \angle EAF = \angle ACB$

Ta có: $\angle CAH + \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow \angle ACB + \angle CAH = 90^\circ \Rightarrow \angle H = 90^\circ$.

Do đó $MA \perp BC$



Hình 4.6

4.2. (h.4.7)

Ta đặt $\angle ADC = \alpha$ thì $\angle DAM = 90^\circ + \alpha$; $\angle NCD = 90^\circ + \alpha$.

$\triangle DAM$ và $\triangle NCD$ có:

$AM = CD (= AB)$; $\angle DAM = \angle NCD (= 90^\circ + \alpha)$

$AD = CN (= BC)$

Do đó: $\triangle DAM = \triangle NCD$ (c.g.c)

$\Rightarrow DM = DN$ (1)

và $\angle DMA = \angle NDC$

Kéo dài MA cắt CD tại H.

Ta có: $MA \perp AB \Rightarrow MH \perp CD$

Xét $\triangle MDH$ có $\angle DMA + \angle ADM + \alpha = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle NDC + \angle ADM + \alpha = 90^\circ$ Hay $\angle MDN = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle DMN$ vuông cân tại D

4.3. (h.4.8)

Vẽ $HM \parallel AC$ ($M \in AB$). $HN \parallel AB$ ($N \in AC$)

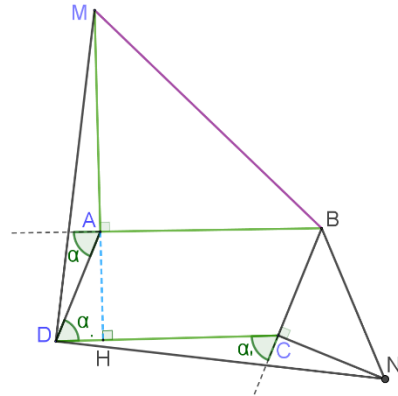
Vì $CH \perp AB$ nên $CH \perp HN$. Vì $BH \perp AC$ nên $BH \perp HM$.

Xét $\triangle HBM$ vuông tại H có $BM > HB$ (1)

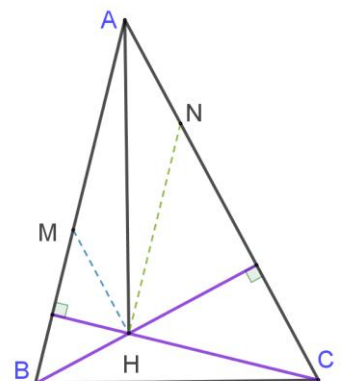
Xét $\triangle HCN$ vuông tại H có $CN > HC$ (2)

Xét hình bình hành ANHM có

$AM + AN = AM + MH > HA$ (3)



Hình 4.7



Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$BM + CN + AM + AN > HB + HC + HA$$

Hình 4.8

Do đó: $(MB + AM) + (CN + AN) > HA + HB + HC$ hay $AB + AC > HA + HB + HC$.

Chứng minh tương tự, ta được: $BC + BA > HA + HB + HC$

$$CA + CB > HA + HB + HC.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$2(AB + BC + CA) > 3(HA + HB + HC)$$

$$\text{Do đó: } AB + BC + CA > \frac{3}{2}(HA + HB + HC).$$

4.4. (h.4.9)

Qua O dựng một đường thẳng song song với BC cắt AB và CD lần lượt tại E và G. Qua O dựng một đường thẳng song song với AD cắt AD tại H.

Qua E dựng một đường thẳng song song với OC cắt BC tại F.

Khi đó tứ giác EFGH thỏa mãn đề bài.

Thật vậy, các tứ giác AEOH, HOGD là những hình thang cân.

$$\Rightarrow OA = EH; OD = HG \quad (1)$$

$$\text{Từ giác EFCO là hình bình hành} \Rightarrow OC = EF \quad (2)$$

$$\text{Và } OE = CF. \text{ Suy ra: } OG = BF.$$

$$\text{Vậy tứ giác OBFG là hình bình hành} \Rightarrow OB = GF. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra tứ giác EFGH thỏa mãn đề bài.

4.5. (h.4.10)

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vẽ $OO' \perp xy$.

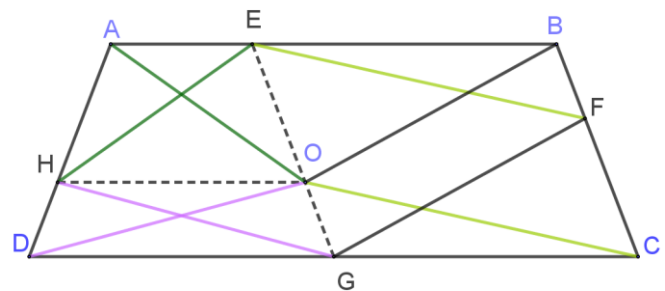
Ta có: $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \parallel OO'$.

Xét hình thang $AA'C'C$ có $OA = OC$ và $OO' \parallel AA'$ nên $OA' = OC'$

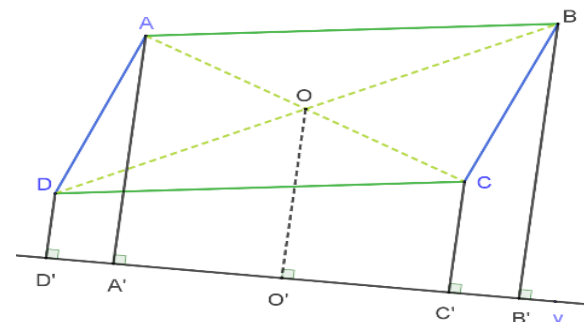
Do đó: OO' là đường trung bình của hình thang

$$AA'C'C \Rightarrow OO' = \frac{AA' + CC'}{2} \text{ hay } AA' + CC' = 2OO'.$$

Xét hình thang $DD'B'B$, cũng chứng minh tương tự, ta có: $BB' + DD' = 2OO'$.



Hình 4.9



Hình 4.10

Từ đó suy ra: $AA' + CC' = BB' + DD'$.

4.6 (h.4.11)

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = DC$.

Ta đặt $\angle ABC = m^0, \angle ABM = n^0$, khi đó

$$\angle MBC = \angle CDN = m^0 + n^0.$$

$\triangle MBC$ và $\triangle CDN$ có:

$$MB = CD (= AB); \angle MBC = \angle CDN \text{ (cmt)}$$

$$BC = DN (= AD). \text{ Vậy } \triangle MBC = \triangle CDN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow CM = CN.$$

b) Các $\triangle ABM$ và $\triangle AND$ là những tam giác cân có góc ở đỉnh bằng nhau mà $AB > AD$ nên $AM > AN$ (bạn đọc tự chứng minh)

Xét $\triangle ACM$ và $\triangle CAN$ có $CM = CN$; CA chung và $AM > AN$ nên $\angle ACM > \angle ACN$

Xét $\triangle OCM$ và $\triangle OCN$ có $CM = CN$; CO chung và $\angle ACM > \angle ACN$ nên $OM > ON$

4.7 (h.4.12)

Vẽ hình bình hành $BDEF$ thì $EF = BD$ (1); $ED = FB$.

$$\text{Ta có: } AD = CE; AB = AC \Rightarrow BD = EA. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $EF = EA$

Ta có: $\angle CEF = \angle DAE$ (so le trong):

$$\angle DEA = \angle DAE \text{ (hai góc ở đáy của tam giác cân).}$$

$$\text{Suy ra: } \angle CEF = \angle DEA. \triangle CEF = \triangle DEA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow CF = AD.$$

Từ đó suy ra: $BF = CF = BC \Rightarrow \triangle FCB$ đều.

$$\text{Ta đặt } \angle BAC = m^0, \angle ADE = n^0$$

Vẽ tia Fx là tia đối của tia FC

$$\text{Vì } \angle CFE = \angle DAE \text{ nên } \angle Fx = \angle BAC = m^0.$$

$$\text{Ta có: } \angle Bfx = 120^0 \text{ hay } m^0 + n^0 = 120^0. \quad (*)$$

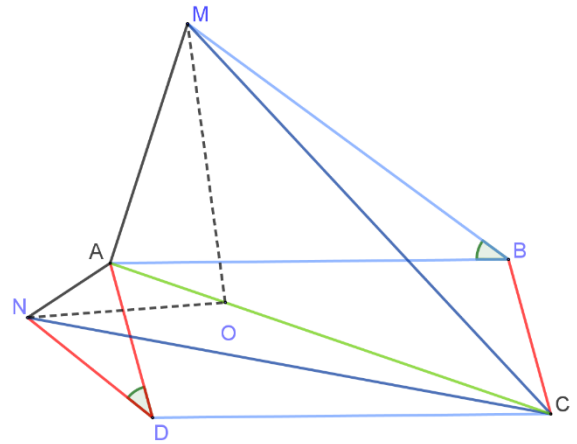
Trong $\triangle CEF$ ta có $\angle ECF = \angle D = n^0$; $\angle CFE = \angle CEF = 60^0 + n^0$.

Do đó:

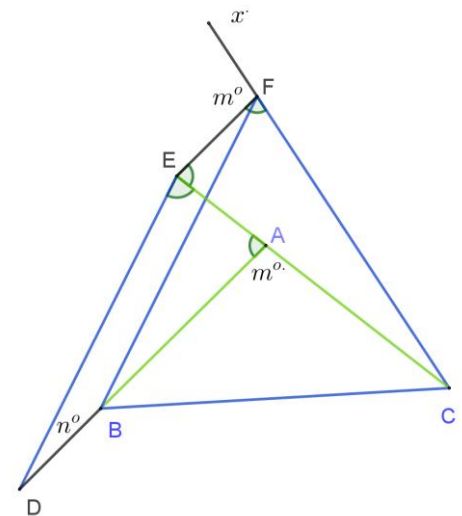
$$n^0 + (60^0 + n^0) + (60^0 + n^0) = 180^0 \Rightarrow 3n^0 = 60^0 \Rightarrow n^0 = 20^0.$$

Từ (*) $\Rightarrow m^0 = 100^0$. Suy ra $\angle ABC = \angle ACB = 40^0$.

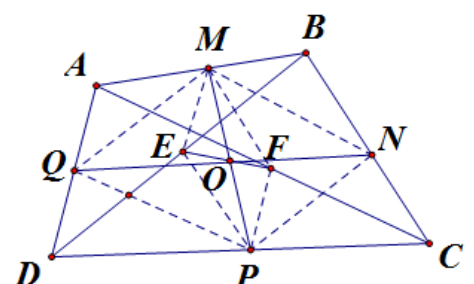
4.8 (h 4.13)



Hình 4.11



Hình 4.12



Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC, BD . Ta phải chứng minh MP, NQ và EF cùng đi qua một điểm.

Xét $\triangle ABC$ có MN là đường trung bình

$$\Rightarrow MN \parallel AC \text{ và } MN = \frac{AC}{2}$$

Chứng minh tương tự, ta có : $PQ \parallel AC$ và $PQ = \frac{AC}{2}$.

Suy ra $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$. Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Chứng minh tương tự ta được tứ giác $MEPF$ là hình bình hành.

Hai hình bình hành $MNPQ$ và $MEPF$ có chung đường chéo MP nên các đường chéo MP, NQ và EF đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.

4.9. (h. 4.14)

Bạn chứng minh tứ giác $MGHN$ và $MFNE$ là hình bình hành. Hai hình bình hành này có chung đường chéo MN nên các đường chéo MN, EF và GH đồng quy.

4.10. (h4.15)

Qua A vẽ đường thẳng $xy \parallel PQ$.

Trên tia Ax lấy điểm M , trên tia Ay lấy điểm N sao cho $AM = AN = PQ$.

Như vậy các điểm M và N cố định.

Tứ giác $AMBD$ có hai cạnh đối diện song song và bằng nhau nên là hình bình hành
 $\Rightarrow BM \parallel AD$.

Mặt khác, $BC \parallel AD$ nên ba điểm B, M, C thẳng hàng (tiên đề Ô- clit)

Do đó đường thẳng BC đi qua điểm cố định M .

Chứng minh tương tự, ta được đường thẳng CD đi qua điểm cố định N .

4.11 (h4.16)

Xét tứ giác $ABCD$ có $AC = m$; $BD = n$ và $\angle BOC = \alpha$

Vẽ hình bình hành $ADBE$ và hình bình hành $CAEF$.

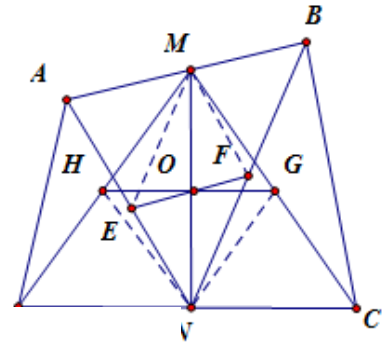
Khi đó $EF = AC = m$; $CF = AE = BD = n$;

$$\angle EAC = \angle BOC = \alpha.$$

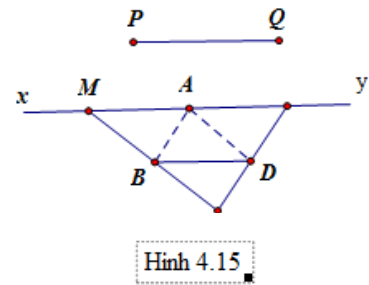
Như vậy hình bình hành $CAEF$ hoàn toàn được xác định, do đó hai đường chéo AF và CE không đổi.

Dễ thấy tứ giác $BFCD$ là hình bình hành $\Rightarrow BF = CD$.

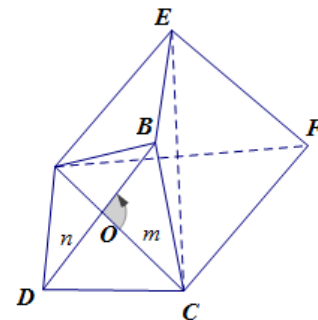
Hình 4.13



Hình 4.14



Hình 4.15



Hình 4.16

Chu vi tứ giác $ABCD$ là : $(AB + CD) + (BC + AD) = (AB + BF) + (BC + BE) \geq AF + CE$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} A, B, F \text{ thang hàng} \\ C, B, E \text{ thang hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ AD // BC \end{cases}$

\Leftrightarrow ABCD là hình bình hành .

Vậy chu vi của tứ giác ABCD nhỏ nhất khi và chỉ khi ABCD là hình bình hành.

4. 12 (h.4.17)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được $MN // BC$ sao cho $BM = AN$.

Vẽ $ND // AB$ ($D \in BC$)

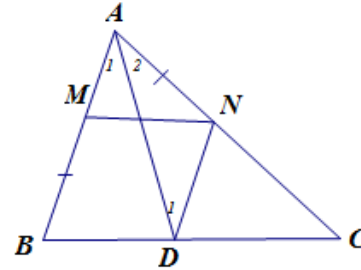
Tứ giác MNDB là hình bình hành

$\Rightarrow DN = BM$ mà $BM = AN$ nên $DN = AN \Rightarrow \triangle NAD$

cân $\Rightarrow A_2 = D_1$

Mặt khác $A_1 = D_1$ (so le trong) nên $A_1 = A_2$

Do đó AD là đường phân giác của góc A



Hình 4.17

Điểm D dựng được suy ra các điểm N và M cũng dựng được.

b) Cách dựng

- Dựng đường phân giác AD của tam giác ABC

- Dựng $DN // AB$ ($N \in AC$)

- Dựng $MN // BC$ ($M \in AB$)

Các bước còn lại , bạn đọc tự giải.

4. 13 (h.4.18)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được hình bình hành thỏa mãn đề bài.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo và K là giao điểm của MN và AC

Xét $\triangle CBD$ có MN là đường trung bình $MN // BD$. Xét $\triangle COB$ có $MB = MC$ và $MK // OB$ nên $CK = KO$.

Vậy MK là đường trung bình nên $MK = \frac{1}{2}OB$

Chứng minh tương tự ta được $KN = \frac{1}{2}OD$

Mặt khác, $OB = OD$ nên $KM = KN$.

Vậy điểm K là trung điểm của MN xác định được .

Dễ thấy $OK = KC = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OA \Rightarrow KC = \frac{1}{4}AC$ suy ra $KC = \frac{1}{3}KA$.

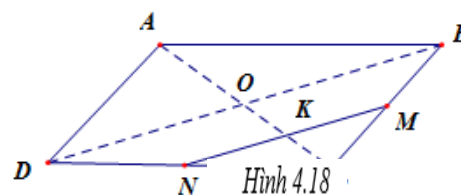
Điểm C nằm trên tia đối của tia KA và cách K một khoảng $\frac{1}{3}AK$

Điểm C xác định được thì các điểm B và D cũng xác định được .

b) Cách dựng:

- Dựng đoạn thẳng MN .

- Dựng trung điểm K của MN .



Hình 4.18

- Dựng tia AK .
- Trên tia đối của tia KA dựng điểm C sao cho $KC = \frac{1}{3}KA$.
- Dựng điểm B sao cho M là trung điểm của CB .
- Dựng điểm D sao cho N là trung điểm của CD .
- Dựng các đoạn thẳng AB, AD ta được hình bình hành phải dựng.

Bạn đọc giải tiếp các bước còn lại.

4.14. (h.4.19)

Giả sử đã xác định được vị trí của C và $D \in d$ để tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất. Vẽ hình bình hành $CDBB'$ (chú ý CD và BB' ngược chiều nhau).

Khi đó $BB' = CD = a$ (không đổi); $DB = CB'$. Điểm B' cố định.

Ta có tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC + DB$ nhỏ nhất (vì $CD = a$ không đổi) $\Leftrightarrow AC + CB'$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A, C, B'$ thẳng hàng.

Từ đó ta xác định được điểm $C \in d$ như sau:

- Qua B vẽ một đường thẳng song song với d , trên đó lấy điểm B' sao cho $BB' = a$ (BB' ngược chiều với CD).
- Lấy giao điểm C của $B'A$ và d .

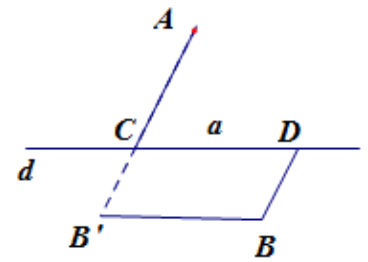
- Lấy $D \in d$ sao cho $CD = a$ (CD và BB' ngược chiều).

Khi đó tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất.

Phần chứng minh dành cho bạn đọc.

4.15. (h.4.20)

Giả sử đã xác định được vị trí CD của cầu ($C \in d; D \in d'$) sao cho tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất



Hình 4.19

CHUYÊN ĐỀ 5. HÌNH CHỮ NHẬT**5.1. (h.5.10)**

Vẽ hình bình hành $ABCA'$

Ta có $AC = A'D$, $AA' = CD = a$ và $AA' \perp d$

Khi đó A' là điểm cố định.

Ta có tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất nhỏ nhất (Vì $CD = a$ không đổi)

$\Leftrightarrow A'D + DB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A', D, B$ thẳng hàng.

Từ đó ta xác định vị trí của CD của cầu như sau:

+) Vẽ $AH \perp d$

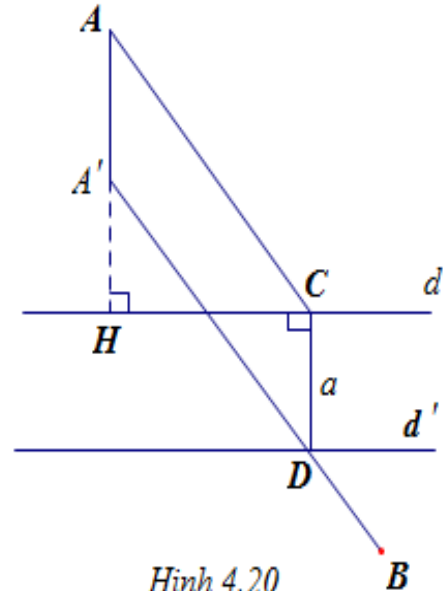
+) Trên tia AH lấy A' sao cho $AA' = a$

+) Lấy giao điểm D của $A'B$ và d'

+) Vẽ $DC \perp d (C \in d)$

Khi đó $AC + CD + DB$ nhỏ nhất.

Phần chứng minh rành cho bạn đọc.



Hình 4.20

Tứ giác $AEMF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

$\Rightarrow AE = MF$.

Tam giác FMC vuông tại F . $C = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân $\Rightarrow CF = MF$. Do đó $AE = CF$.

Tam giác ABC vuông cân, AD là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến, đường phân giác nên

$$AD = DC = \frac{1}{2}BC; \angle EAD = \angle FCD = 45^\circ$$

$$\triangle EDA = \triangle FDC (c.g.c) \Rightarrow DE = DF \text{ và } \angle EDA = \angle FDC$$

$$\text{Ta có } \angle EDA + \angle FDC = 90^\circ \Rightarrow \angle ADF + \angle EDA = 90^\circ \text{ Hay } \angle EDF = 90^\circ$$

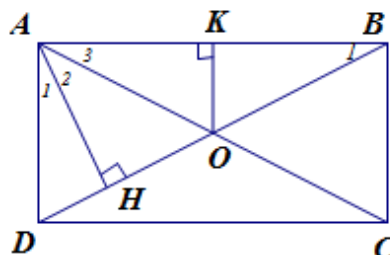
$$\text{Do đó } \triangle DEF \text{ vuông cân } \Rightarrow \angle E = \angle F = 45^\circ; \angle EDF = 90^\circ$$

5.2. (h.5.11)

Gọi O là giao điểm của AC và BD , ta có $OA = OC$.

$$\text{Vì } AD = \frac{1}{2}AC \text{ nên } AD = AO$$

Vẽ $AH \perp OD; OK \perp AB$



Hình 5.11

Xét $\triangle AOD$ cân tại A , AH là đường cao $\Rightarrow AH$ cũng là đường trung tuyến, cũng là đường phân giác.

Do đó $HO = HD$ và $A_1 = A_2$.

Vì $BAC = \frac{1}{2}DAC$ nên $A_3 = A_2 = A_1$.

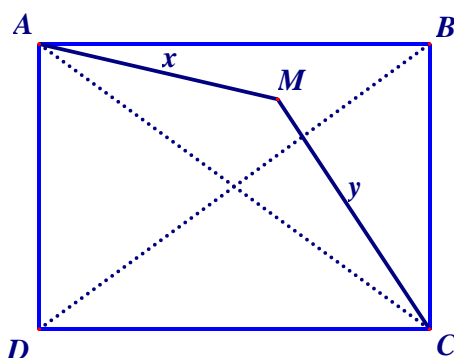
$\triangle AOK = \triangle AOH$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow OK = OH = \frac{1}{2}OD \Rightarrow OK = \frac{1}{2}OB \Rightarrow B_1 = 30^\circ$.

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H có $B_1 = 30^\circ$ nên $HAB = 60^\circ$ suy ra $DAB = 90^\circ$.

Hình bình hành $ABCD$ có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

5.3. (h.5.12)



h.5.12

$ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Ta đặt $MA = x$, $MC = y$.

Xét ba điểm M , A , C ta có: $MA + MC \geq AC$.

Do đó $x + y \geq 10 \Rightarrow (x + y)^2 \geq 100$ hay $x^2 + y^2 + 2xy \geq 100$. (1)

Mặt khác, $(x - y)^2 \geq 0$ hay $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$, (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2(x^2 + y^2) \geq 100 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 50$.

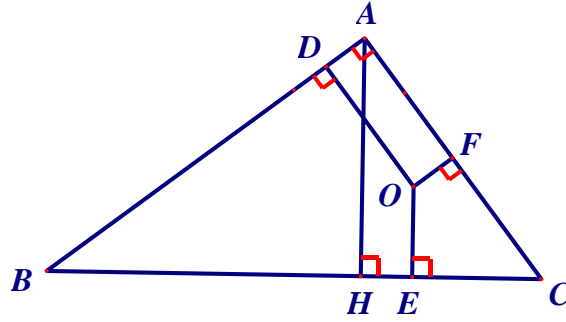
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi M nằm giữa A và C và $MA = MC \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AC .

Chứng minh tương tự, ta được $MB^2 + MD^2 \geq 50$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M$ là trung điểm của BD .

Vậy $MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 \geq 100$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của tổng S là 100 khi M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD .

5.4. (h.5.13)



h.5.13

Vẽ $AH \perp BC$, $OK \perp AH$. Tứ giác $ADOF$ và $KOEH$ là hình chữ nhật nên $OF = AD$ và $OE = KH$. Xét $\triangle AOD$ vuông tại D , ta có

$$OD^2 + AD^2 = OA^2 \geq AK^2.$$

$$\text{Do đó } OD^2 + OF^2 + OE^2 = OD^2 + AD^2 + OE^2 \geq AK^2 + KH^2 \geq \frac{(AK + KH)^2}{2} = \frac{AH^2}{2} \text{ (không đổi).}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi O nằm giữa A và H và $AK = KH$ khi và chỉ khi O là trung điểm của AH .

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng S là $\frac{AH^2}{2}$ khi O là trung điểm của AH .

5.5.(H. 5 .14)

Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên

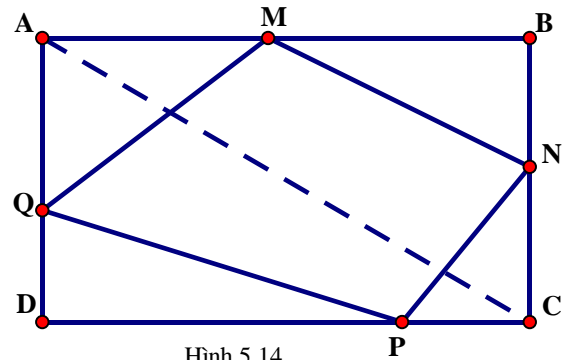
$$A = B = C = D = 90^\circ$$

Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$MN^2 = BM^2 + BN^2; NP^2 = CN^2 + CP^2;$$

$$PQ^2 = DP^2 + DQ^2; QM^2 = AQ^2 + AM^2.$$

$$\text{Do đó: } S = MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2$$



Hình 5.14

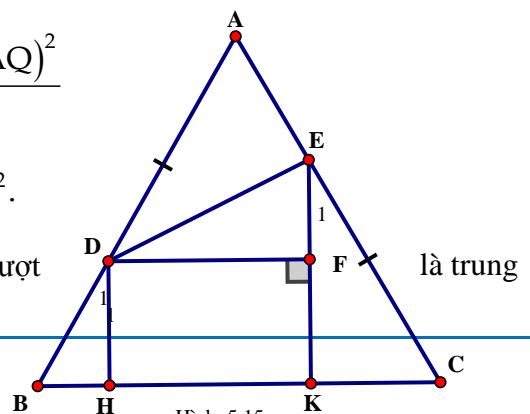
$$= (BM^2 + BN^2) + (CN^2 + CP^2) + (DP^2 + DQ^2) + (AQ^2 + AM^2)$$

Vận dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ (dấu “=” xảy ra khi $a = b$), ta được :

$$S \geq \frac{(AM+BM)^2}{2} + \frac{(BN+CN)^2}{2} + \frac{(CP+DP)^2}{2} + \frac{(DQ+AQ)^2}{2}$$

$$= \frac{AB^2}{2} + \frac{BC^2}{2} + \frac{CD^2}{2} + \frac{AD^2}{2} = \frac{2(AB^2 + BC^2)}{2} = AC^2 = d^2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng S là d^2 khi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh hình chữ nhật.



Hình 5.15

5.6. (h.5.15)

Vẽ $DH \perp BC, EK \perp BC$ và $DF \perp EK$

Tứ giác $DFKH$ có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.

Suy ra $DF = HK$

ΔHBD vuông tại K có $B = 60^\circ$ nên

$$D_1 = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{1}{2} BD.$$

ΔKCE vuông tại K có $C = 60^\circ$ nên $E_1 = 30^\circ \Rightarrow CK = \frac{1}{2} CE = \frac{1}{2} AD$

$$\text{Ta có : } DE \geq DF = HK = BC - \left(\frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} AD \right) = BC - \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của DE là $\frac{a}{2}$ khi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC

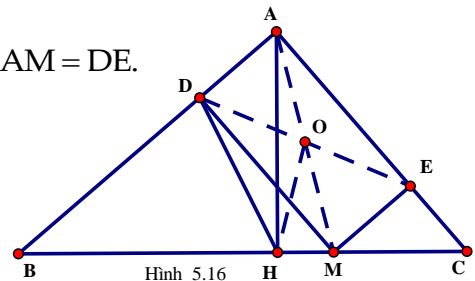
5.7. (h.5.16)

Tứ giác $ADME$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật nên $AM = DE$.

Gọi O là giao điểm của AM và DE , ta có :

$$OA = OM = OD = OE.$$

Xét ΔAHM vuông tại H , ta có : $HO = \frac{1}{2} AM$



$$\Rightarrow HO = \frac{1}{2} DE$$

Xét ΔHDE có HO là đường trung tuyến ứng với cạnh DE mà $HO = \frac{1}{2} DE$ nên ΔHDE vuông tại H

$$\Rightarrow DHE = 90^\circ.$$

5.8. (h.5.17)

a) Tứ giác $AFHE$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật $\Rightarrow OA = OF = OH = OE$.

Xét ΔABC vuông tại A có AD là đường trung tuyến nên

$$AD = DB = DC$$

$$\Delta DAC \text{ cân} \Rightarrow A_1 = C$$

Mặt khác $C = A_2$ (cùng phụ với B);

$$A_2 = E_1 \text{ (hai góc ở đáy của tam giác cân)}$$

$$\text{suy ra } A_1 = E_1$$

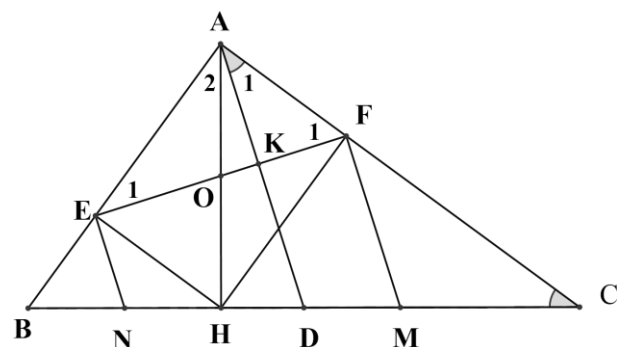
Gọi K là giao điểm của AD và EF .

$$\text{Xét } \Delta AEF \text{ vuông tại } A \text{ có } E_1 + F_1 = 90^\circ \Rightarrow A_1 + F_1 = 90^\circ \Rightarrow K = 90^\circ.$$

$$\text{Do đó: } AD \perp EF. (1)$$

$$\text{Ta có: } \Delta OEM = \Delta OHM \text{ (c.c.c)} \Rightarrow OEM = OHM = 90^\circ \Rightarrow EM = EF. (2)$$

$$\text{Chứng minh tương tự, Ta được: } FN \perp EF. (3)$$



Hình 5.17

Từ (1), (2), (3) suy ra: $EM \parallel FN \parallel AD$ (vì cùng vuông góc với EF).

b) Ba đường thẳng EM , FN và AD là ba đường thẳng song song cách đều

$$\Leftrightarrow KF = KE \Leftrightarrow K \equiv O \Leftrightarrow AD \equiv AH \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân.}$$

5.9. (h.5.18)

Vẽ $DE \perp BC$, $DF \perp AH$.

ΔHAB và ΔFDA có: $H = F = 90^\circ$; $AB = AD$;

$HAB = FDA$ (cùng phụ với FAD)

Do đó $\Delta HAB = \Delta FDA$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow AH = FD. \quad (1)$$

Tứ giác $FDEH$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

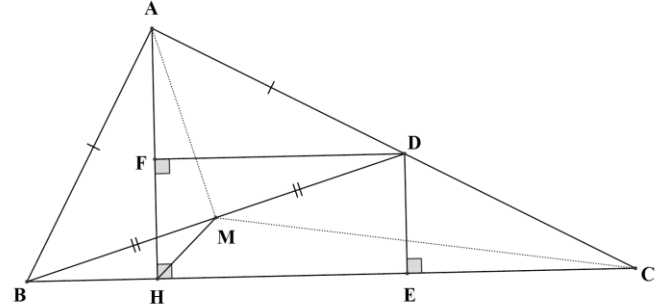
$$\Rightarrow HE = FD. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AH = HE$.

$$\text{Ta có } AM = EM = \frac{1}{2} BD.$$

$$\Delta AHM = \Delta EHM \text{ (c.c.c)} \Rightarrow AHM = EHM.$$

Do đó tia HM là tia phân giác của AHC .



Hình 5.18

5.10. (h.5.19)

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của HE, HF, FG.

Theo tính chất đường trung bình của tam giác, tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, ta có :

$$EF = 2MN; FG = 2CP; GH = 2NP; HE = 2AM.$$

Do đó chu vi của tứ giác EFGH là :

$$EF + FG + GH + HE = 2(AM + MN + NP + PC).$$

Xét các điểm A, M, N, P, C ta có : $AM + MN + NP + PC \geq AC$ (Không đổi).

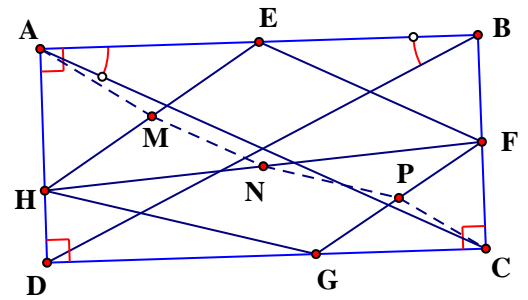
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \Rightarrow AC = 17.$$

Vậy chu vi tứ giác $EFGH \geq 2.17 = 34$ (Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M, N, P$ nằm trên AC theo thứ tự đó

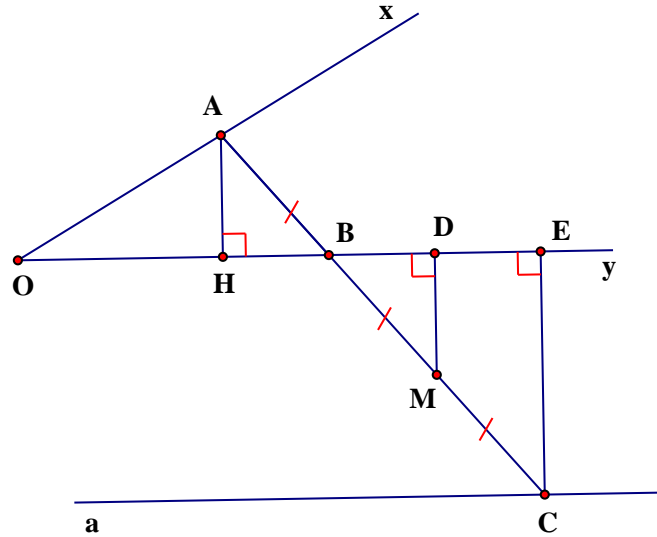
$$\Leftrightarrow EF \parallel AC \parallel FG \text{ và } HE \parallel BD \parallel FG).$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của chu vi tứ giác EFGH là 34.

5.11. (h.5.20).



Hình 5.19



Hình 5.20

Gọi M là trung điểm của BC.

Vẽ $AH \perp Oy$, $CE \perp Oy$ và $MD \perp Oy$.

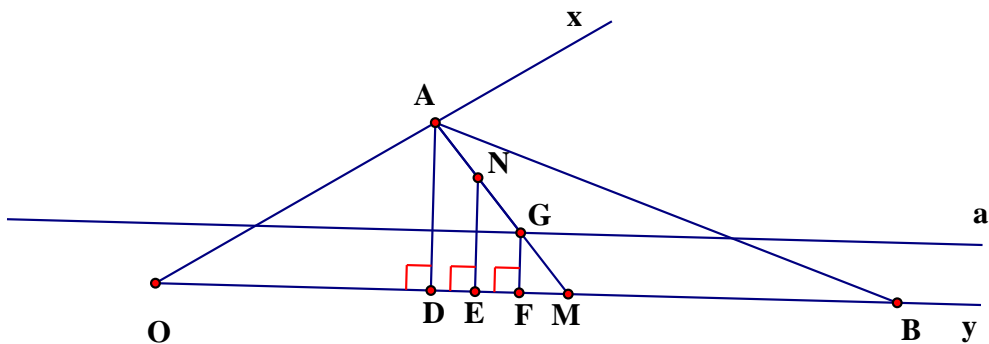
Xét $\triangle AOH$ vuông tại H, có: $O = 30^\circ$ nên $AH = \frac{1}{2}OA = 1\text{cm}$.

$\triangle MDB = \triangle AHB \Rightarrow MD = AH = 1\text{cm}$.

Xét $\triangle BCE$, dễ thấy MD là đường trung bình nên: $CE = 2MD = 2\text{cm}$.

Điểm C cách Oy một khoảng là 2cm nên C di động trên đường thẳng $a \parallel Oy$ và cách Oy là 2cm.

5.12. (h.5.21)



Hình 5.21

Gọi M là trung điểm của OB.

Khi đó $G \in AM$ và $AG = 2GM$.

Gọi N là trung điểm của AG, ta được $AN = NG = GM$.

Vẽ AD, NE, GF cùng vuông góc với Oy.

Ba đường thẳng AD, NE và GF là ba đường thẳng song song cách đều nên $DE = EF = FM$.

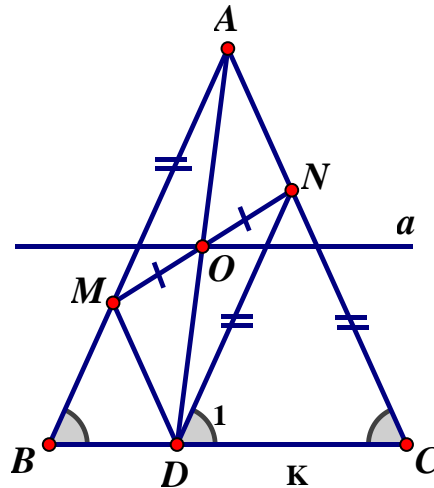
Ta đặt $FG = x$ thì $EN = 2x$ và $EN = \frac{FG + AD}{2}$. Do đó $2x = \frac{x + AD}{2} \Rightarrow AD = 3x$.

Xét $\triangle DOA$ vuông cân tại $D \Rightarrow OA^2 = 2DA^2$.

Do đó $2DA^2 = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow DA = 3(\text{cm}) \Rightarrow FG = 1\text{cm}$.

Điểm G cách Oy một khoảng không đổi là 1cm nên điểm G di động trên đường thẳng $a // Oy$ và cách Oy là 1cm .

5.13. (h.5.22)



Hình 5.22

Vẽ $ND // AB (D \in BC)$

Ta có: $D_1 = B$ (cặp góc đồng vị) mà $B = C$ nên $D_1 = C \Rightarrow \triangle NDC$ cân. Do đó $ND = NC$.

Mặt khác, $AM = NC$ nên $ND = AM$.

Suy ra tứ giác $ANDM$ là hình bình hành, trung điểm O của MN cũng là trung điểm O của AD .

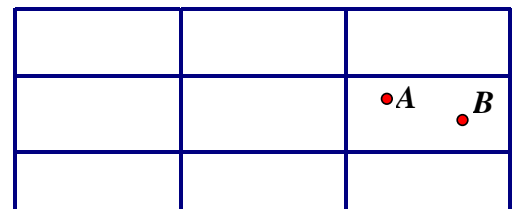
Ta có điểm A và BC cố định, theo ví dụ 5, thì điểm O di động trên đường thẳng $a // BC$ và cách BC một khoảng

$\frac{AH}{2}$ (AH là đường cao của $\triangle ABC$).

5.14. (h.5.23)

Chia hình chữ nhật có kích thước 3×6 thành 9 hình chữ nhật nhỏ có kích thước 1×2 . Có 10 điểm nằm trong 9 phần nên tồn tại hai điểm chẳng hạn A và B thuộc cùng một phần.

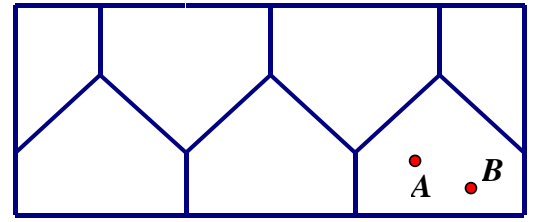
Dễ thấy $AB \leq$ độ dài đường chéo của mỗi hình chữ nhật nhỏ, tức là: $AB \leq \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} < 2,3$.



Hình 5.23

5.15. (h.5.24)

Chia hình chữ nhật có kích thước 3×6 thành 7 phần như hình 5.24. Có 8 điểm nằm trong 7 phần nên tồn tại hai điểm chẳng hạn A và B cùng thuộc một phần. Dễ thấy $AB \leq \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} < 2,3$.



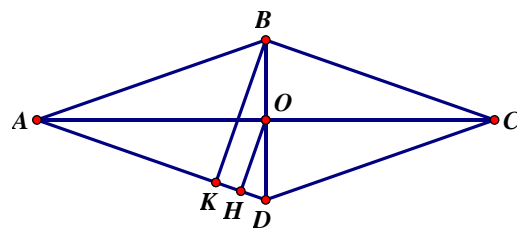
Hình 5.24

CHUYÊN ĐỀ 6. HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG

6.1. (h.6.9)

Giả sử $ABCD$ là hình thoi, $A = 30^\circ$. Hai đường chéo cắt nhau tại O . Vẽ $OH \perp AD$; $BK \perp AD$ thì $OH \parallel BK$ và OH là đường

trung bình của tam giác $BKD \Rightarrow OH = \frac{1}{2}BK$ (1)



Hình 6.8

Xét $\triangle ABK$ vuông tại K , $A = 30^\circ \Rightarrow BK = \frac{1}{2}AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $OH = \frac{1}{4}AB$, do đó $AB = 4OH = 4h$.

6.2 (h.6.9)

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

Ta đặt $OA = x$; $OB = y$ thì $AC = 2x$; $BD = 2y$.

Ta có $AB = 8$; $4 = 2cm$ và $x^2 + y^2 = 4$.

Từ bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$ suy ra $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Do đó $AC \cdot BD = 2x \cdot 2y = 4xy \leq 8$.

Vậy giá trị lớn nhất của tích $AC \cdot BD$ là $8(cm^2)$ khi $x = y$

$\Leftrightarrow AC = BD \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông.

6.3 (h.6.10)

Gọi N là trung điểm của CD .

Ta có $AM \parallel CN$ và $AM = CN$ nên tứ giác $AMCN$ là hình bình hành. $\Rightarrow AN \parallel CM$.

Mặt khác, $DH \perp CM$ nên $DH \perp AN$ tại K .

Xét $\triangle HCD$ có $KN \parallel CH$ và $NC = ND$ nên $KH = KD$.

$\triangle ADH$ có AK vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\triangle ADH$ cân.

$\Rightarrow AH = AD$.

Mặt khác, $AB = AD$ nên $AH = AB \Rightarrow \triangle ABH$ cân.

Suy ra $ADH = AHD$ và $ABH = AHB$.

Xét tứ giác $ABHD$ có $ADH + DHA + BHA + ABH = 360^\circ - A$.

$\Rightarrow 2(DHA + BHA) = 360^\circ - 40^\circ \Rightarrow 2BHD = 320^\circ \Rightarrow BHD = 160^\circ$

Mặt khác, $DHM = 90^\circ$ nên $MHB = 160^\circ - 90^\circ = 70^\circ$

6.4 (h.6.11)

Ta có $AC \perp DB$ mà $DB \parallel EF$ nên $AC \perp EF$. (1).

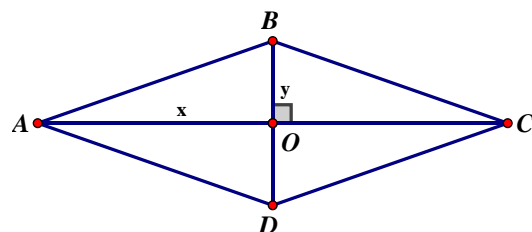
Vẽ điểm M sao cho D là trung điểm của EM .

Xét tam giác CEM có CD là đường trung tuyến mà $CD = \frac{1}{2}EM$ nên tam giác CEM

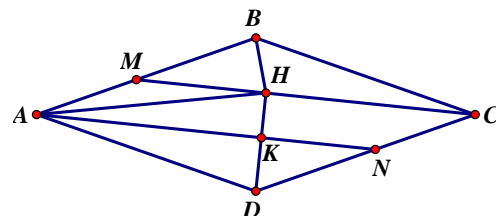
vuông tại $C \Rightarrow CM = CE$.

Tứ giác $MDFB$ có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

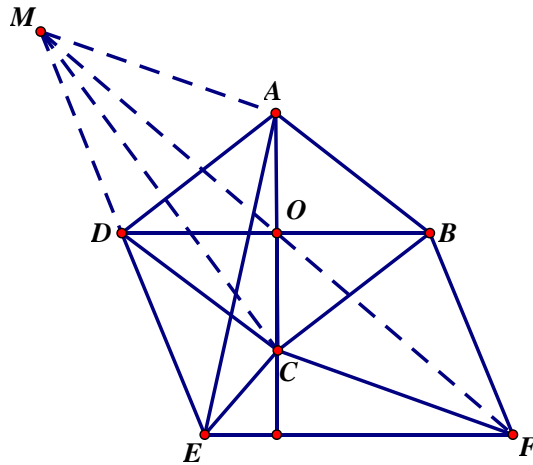
Suy ra DB và MF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



Hình 6.9



Hình 6.10



Hình 6.11

Mặt khác O là trung điểm của BD nên O là trung điểm MF .

Tứ giác $AMCF$ có $OA = OC$, $OM = OF$ nên là hình bình hành.

Suy ra, $CM \parallel AF$

$\Rightarrow CE \perp AF$. (2).

Xét tam giác AEF có AC và CE là hai đường cao cắt nhau tại C nên C là trực tâm.

Nhận xét: Nếu vẽ hình bình hành $DBFE$ về phía có điểm A thì kết luận của bài toán vẫn đúng.

6.5 (h.6.12)

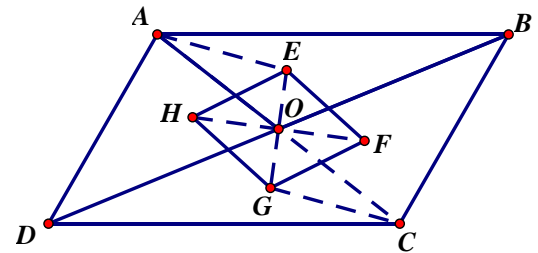
Ta có $OE \perp OH$ và $OG \perp OH$ (hai tia phân giác của hai góc kề bù)

Suy ra, E, O, G thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có H, O, F thẳng hàng.

Ta có: $AB \parallel CD \Rightarrow \angle BAC = \angle ACD$.

$\Rightarrow \angle EAO = \angle ACG$ (một nửa của hai góc bằng nhau).



Hình 6.12

$$\triangle AOE = \triangle COG \text{ (g - c - g)} \Rightarrow OE = OG$$

Chứng minh tương tự ta được $OF = OH$.

Tứ giác $EFGH$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của của mỗi đường nên là hình bình hành. Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc nên là hình thoi.

6.6 (h.6.13)

Giả sử đã dựng được hình thoi $ABCD$ thỏa mãn đề bài.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

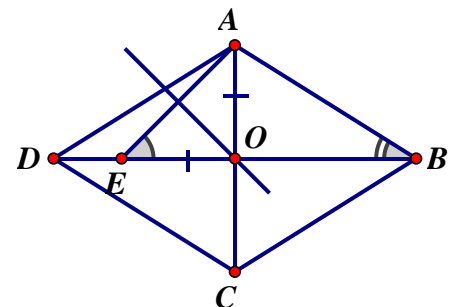
Ta có $AC \perp BD$ và $OA = OC$; $OB = OD$.

Do đó $OA + OB = 8 : 2 = 4 \text{ (cm)}$.

Trên tia OD lấy điểm E sao cho $OE = OA$.

Khi đó $BE = 4 \text{ cm}$ và $\triangle AOE$ vuông cân.

Suy ra $\angle AEB = 45^\circ$.



Hình 6.13

Từ đó $\triangle AEB$ dựng được ngay (g-c-g).

- Điểm O thỏa mãn hai điều kiện: O nằm trên BE và O nằm trên đường trung trực của AE .

- Điểm C thỏa mãn hai điều kiện: C nằm trên tia AO sao cho $OC = OA$.
- Điểm D thỏa mãn hai điều kiện: D nằm trên tia BO sao cho $OB = OD$.

Các bước còn lại bạn đọc tự giải.

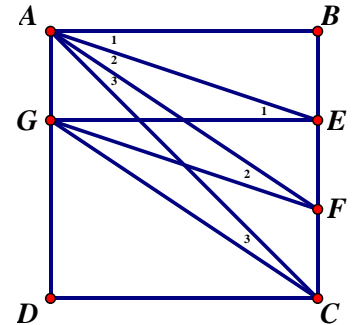
6.7 (h.6.14)

Các tứ giác $ABEG$, $AEFG$, $AECG$ là hình bình hành nên:

$$AB \parallel EG; AE \parallel GF; AF \parallel CG$$

$$\text{Suy ra } E_1 = A_1; F_2 = A_2; C_3 = A_3;$$

$$\text{Do đó } E_1 + F_2 + C_3 = A_1 + A_2 + A_3 = BAC = 45^\circ$$



Hình 6.14

6.8. (h.6.15)

* Tìm cách giải

Muốn chứng minh AF , CE và BM đồng quy, ta chứng minh chúng là các đường thẳng chứa các đường cao của $\triangle BEF$.

* Trình bày lời giải

Tứ giác $MEDF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow ME = DF; MF = DE.$$

$$\triangle ADC \text{ vuông cân} \Rightarrow CAD = ACD = 45^\circ$$

Do đó $\triangle AEM$ và $\triangle CFM$ vuông cân.

$$\Rightarrow AE = ME \Rightarrow AE = DF.$$

$$CF = MF \Rightarrow DE = CF.$$

$$\triangle ABE = \triangle DAF (g.c.g) \Rightarrow B_1 = A_1 \Rightarrow H = 90^\circ$$

(H là giao điểm của AE và CF).

Chứng minh tương tự, ta được $CE \perp BF$.

Gọi N là giao điểm của $EM; BC$; K là giao điểm của $BM; EF$.

Ta có $MF = MN$ (vì M nằm trên tia phân giác của góc C).

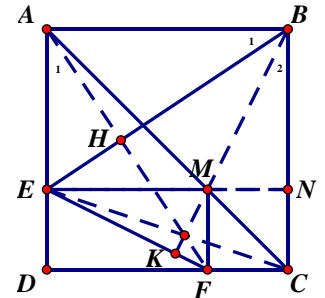
$$ME = BN (= AE).$$

$$\triangle MFE = \triangle NMB (g.c.g) \Rightarrow MFE = NMB.$$

$$\text{Ta có: } NMB + FMK = 90^\circ (\text{vì } NMF = 90^\circ)$$

$$\Rightarrow MFE + FMK = 90^\circ \Rightarrow K = 90^\circ \Rightarrow BM \perp EF$$

Vậy ba đường thẳng AF , CE và BM là ba đường cao của $\triangle BEF$ nên chúng đồng quy.



Hình 6.15

6.9 (h.6.16)

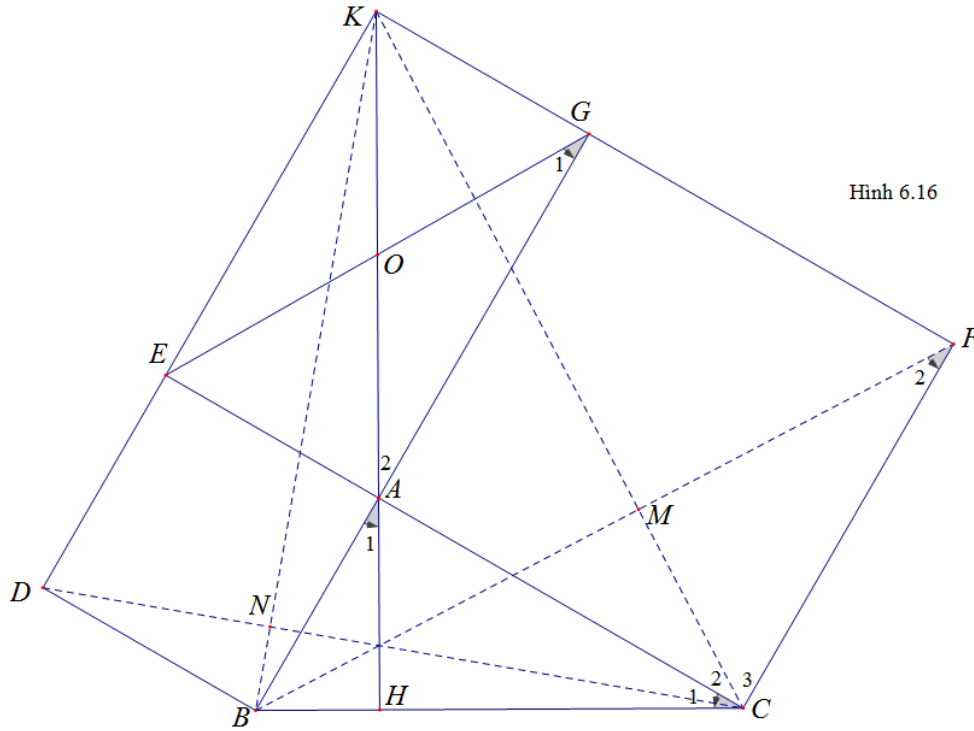
a) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng DE và FG .

Tứ giác $AGKE$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm của AH và EG .

$$\triangle AEG = \triangle ABC (c.g.c) \Rightarrow G_1 = C_1$$

Ta lại có: $C_1 = A_1$ (cùng phụ với ABC); Và $A_1 = A_2$.



Hình 6.16

$\Rightarrow G_1 = A_1$. Do đó $\triangle OAG$ cân $\Rightarrow OG = OA$.

Chứng minh tương tự, ta được $OE = OA \Rightarrow OG = OE$.

Xét hình chữ nhật $AGKE$ có O là trung điểm của đường chéo EG nên đường chéo AK phải đi qua O hay đường thẳng AH đi qua K .

Vậy ba đường thẳng AH, DE, FG đồng quy.

b) $\triangle BCF$ và $\triangle KAC$ có

$BC = KA$ (cùng bằng EG); $\angle BCF = \angle KAC$ (vì $90^\circ + C_1 = 90^\circ + A_2$; $CF = AC$).

Do đó $\triangle BCF = \triangle KAC \Rightarrow F_2 = C_2$.

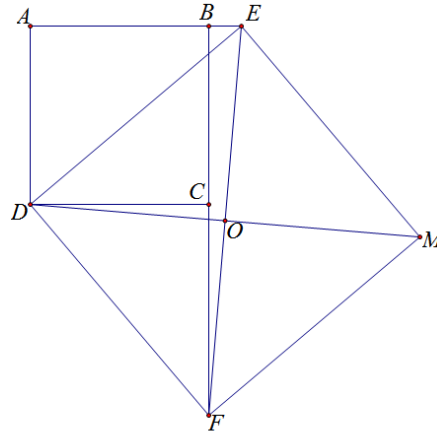
Gọi M là giao điểm của BF và KC .

Ta có $C_2 + C_3 = 90^\circ \Rightarrow F_2 + C_3 = 90^\circ \Rightarrow \angle M = 90^\circ$. Vậy $BF \perp KC$.

Chứng minh tương tự, ta được $CD \perp KB$.

Xét $\triangle KBC$ có các đường thẳng AH, BF, CD chứa ba đường cao nên chúng đồng quy.

6.10



Hình 6.17

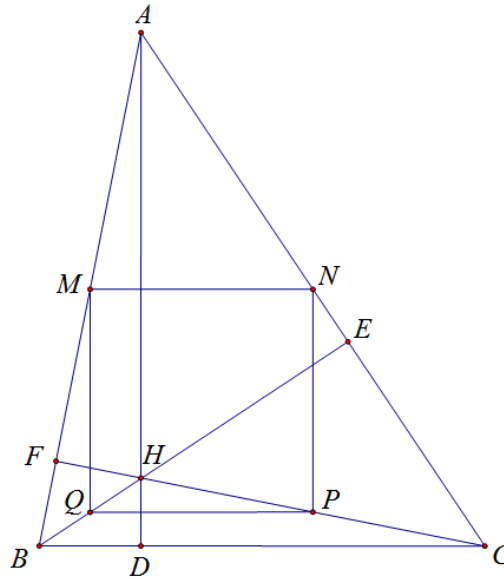
$\triangle ADE = \triangle CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow DE = DF$ và $\angle ADE = \angle CDF$.

Ta có $\angle ADE + \angle CDE = 90^\circ \Rightarrow \angle CDF + \angle CDE = 90^\circ$ hay $\angle EDF = 90^\circ$

Tứ giác $DEMF$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên là hình bình hành. Hình bình hành này có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi.

Hình thoi này có $\angle EDF = 90^\circ$ nên là hình vuông.

6.11. (h.6.18)



Hình 6.18

$\triangle FAC$ vuông tại F , $\angle A = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân $\Rightarrow AF = FC$.

$\triangle AFH$ và $\triangle CFB$ có $\angle AFH = \angle CFB = 90^\circ$; $AF = FC$; $\angle FAH = \angle FCB$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Do đó $\triangle AFH = \triangle CFB$ (g.c.g) $\Rightarrow AH = BC$.

Vận dụng định lý đường trung bình của tam giác ta chứng minh được $MNPQ$ là hình bình hành.

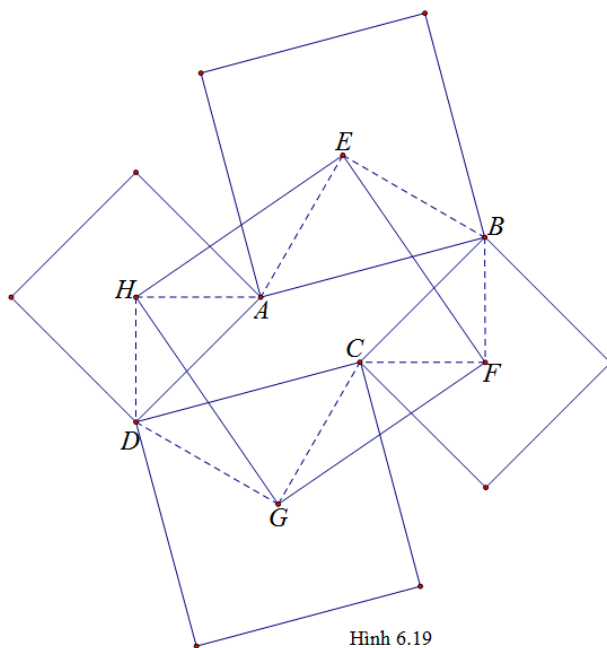
Ta có $MQ = \frac{1}{2}AH$; $MN = \frac{1}{2}BC$

Mà $AH = BC$ nên $MQ = MN$.

Hình bình hành $MNPQ$ có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi.

Bạn đọc tự chứng minh $M = 90^\circ$ suy ra $MNPQ$ là hình vuông.

6.12 (h.6.19).



Hình 6.19

Ta đặt $B = \alpha (\alpha \leq 90^\circ)$.

Khi đó $EBF = GCF = 90^\circ + \alpha$.

$\triangle EFB = \triangle GFC$ (c.g.c) $\Rightarrow EF = GF$ và $EFB = GFC$.

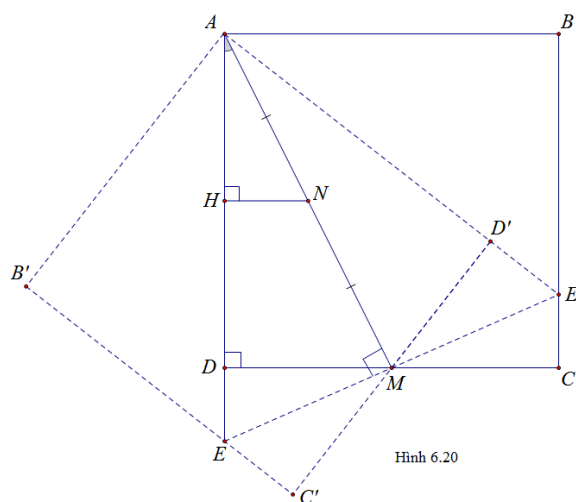
Ta có $CFE + EFB = 90^\circ \Rightarrow CFE + GFC = 90^\circ$ hay $EFG = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự, ta được $FG = GH = HE$.

Tứ giác $EFGH$ có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi.

Hình thoi này có $EFG = 90^\circ$ nên là hình vuông, suy ra $EG = HF$ và $EG \perp HF$.

6.13 (h.6.20).



Hình 6.20

a) Phân tích

Giả sử dựng được hình vuông $ABCD$ thoả mãn đề bài.

Gọi N là trung điểm của AM . Vẽ $NH \perp AD$.

Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với AM cắt đường thẳng AD tại E .

Xét $\triangle ADM$ có $NH \parallel MD$ và $AN = NM$ nên $AH = HD = \frac{1}{2}AD$.

Mặt khác, $MD = MC = \frac{1}{2}CD$ nên $MD = AH$.

Ta có $\angle DME = \angle HAN$ (cùng phụ với $\angle DMA$).

$\triangle DME = \triangle HAN$ (g.c.g) $\Rightarrow ME = AN = \frac{1}{2}AM$.

Vậy E xác định được, từ đó xác định được D, C, B .

b) Cách dựng

Dựng đường thẳng $d \perp AM$ tại M ;

Trên d lấy điểm E sao cho $ME = \frac{1}{2}AM$.

Dựng $MD \perp AE$

Dựng điểm C sao cho M là trung điểm của CD ;

Dựng $Cx \parallel AD$ và $Ay \parallel CD$ chúng cắt nhau tại B .

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông phải dựng.

c) Chứng minh

Thật vậy, tứ giác $ABCD$ có các cặp đối song song nên là hình bình hành.

Hình bình hành này có $\angle D = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

Gọi N là trung điểm của AM . Vẽ $NH \perp AD$ thì $AH = \frac{1}{2}AD$.

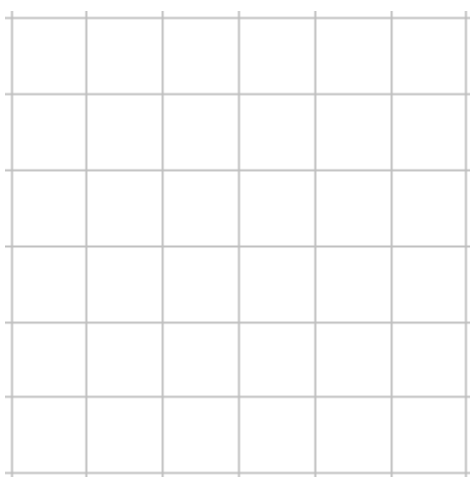
$\triangle HAN = \triangle DME$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AH = DM \Rightarrow AD = DC$.

Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình vuông.

d) Biện luận

Có hai cách lấy điểm E trên đường thẳng d (về hai phía của điểm M) nên bài toán có hai nghiệm hình là các hình vuông $ABCD$ và $AB'C'D'$.

6.14. (h.6.21).



Hình 6.21

Tô màu bàn cờ như hình 6.21. Lúc này trên bàn cờ có 20 ô đen và 16 ô trắng.

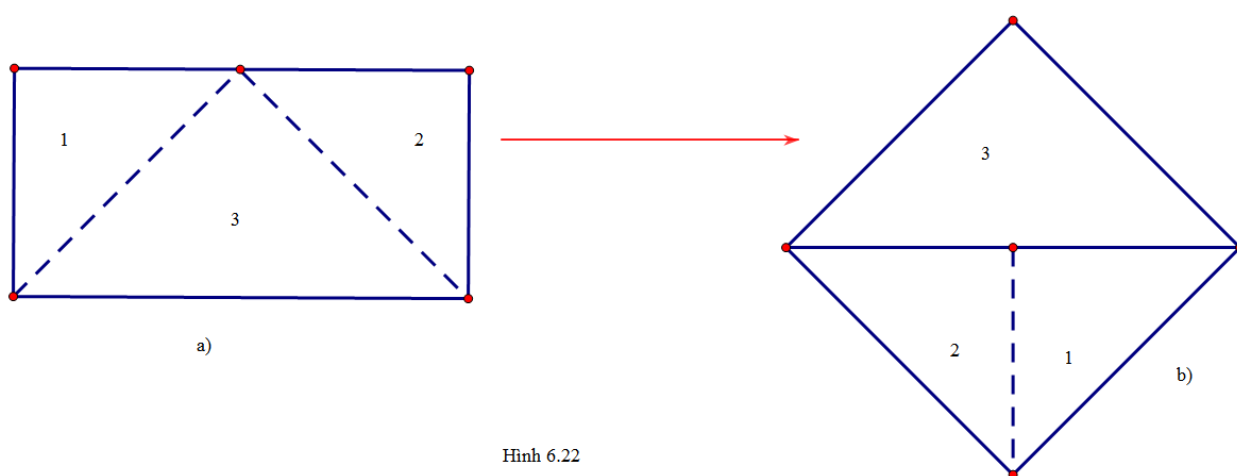
Mỗi mảnh gỗ 1×4 khi đặt lên bàn cờ che lấp 2 ô đen và 2 ô trắng.

Do đó 9 mảnh gỗ 1×4 chỉ che lấp được 18 ô đen.

Như vậy với mọi cách đặt 9 mảnh gỗ lên bàn cờ bao giờ cũng còn thừa hai ô đen không được che lấp.

Vậy không thể dùng 9 mảnh gỗ 1×4 để lấp kín bàn cờ.

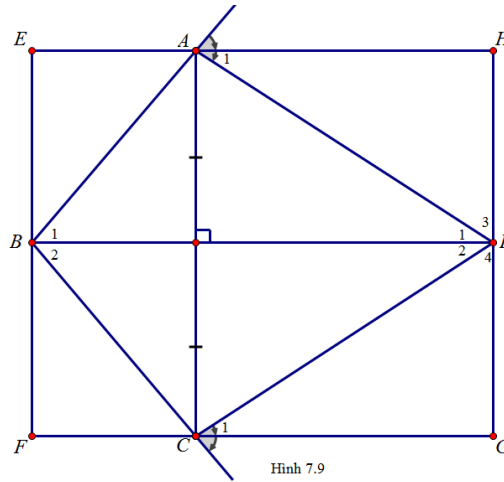
6.15. (h.622)



Hình 6.22

CHUYÊN ĐỀ 7. ĐỐI XỨNG TRỤC. ĐỐI XỨNG TÂM

7.1. (h.7.9)



Hình 7.9

a) Vì C đối xứng với A qua BD nên $\triangle ABD$ đối xứng với $\triangle CBD$ qua BD .

Do đó $\triangle ABD = \triangle CBD$, suy ra $B_1 = B_2; D_1 = D_2; BA = BC$ và $DA = DC$.

Ta có BD và BE là các tia phân giác trong và ngoài tại đỉnh B nên $BD \perp BE$.

Chứng minh tương tự, ta được $BD \perp DH$.

Suy ra $EF \parallel HG \Rightarrow$ Tứ giác $EFGH$ là hình thang.

Ta có $D_3 = D_4$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau).

$A_1 = C_1$ (một nửa của hai góc bằng nhau). Suy ra $H = G$.

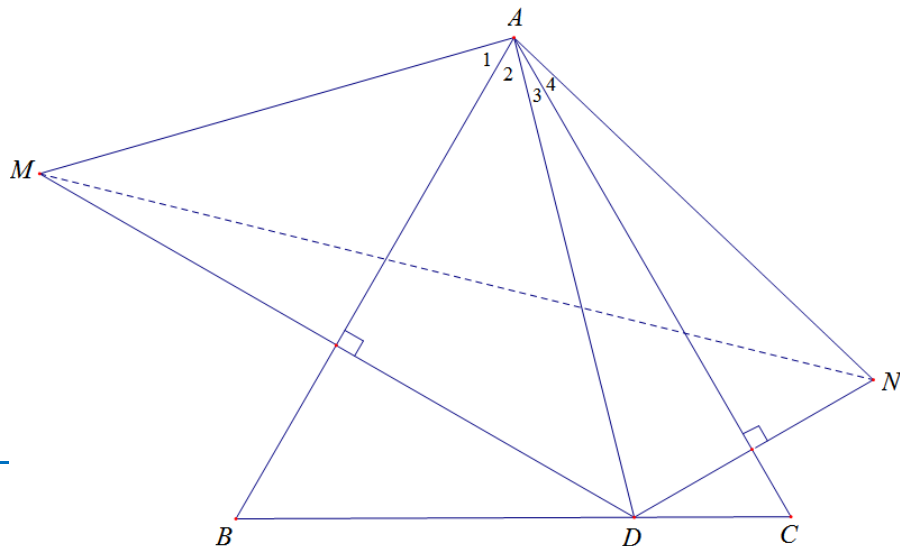
Hình thang $EFGH$ có hai góc kề một đáy bằng nhau nên là hình thang cân.

b) $\triangle ADH = \triangle CDG$ (g.c.g) $\Rightarrow DH = DG$.

Chứng minh tương tự, ta được $BE = BF$.

Đường thẳng BD đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân nên là trục đối xứng của hình thang cân $EFGH$.

7.2. (h.7.1 0)



Hình 7.10

a) Các đoạn thẳng AM và AN đối xứng với AD lần lượt qua AB và AC nên

$$AM = AD; AN = AD; A_1 = A_2; A_3 = A_4.$$

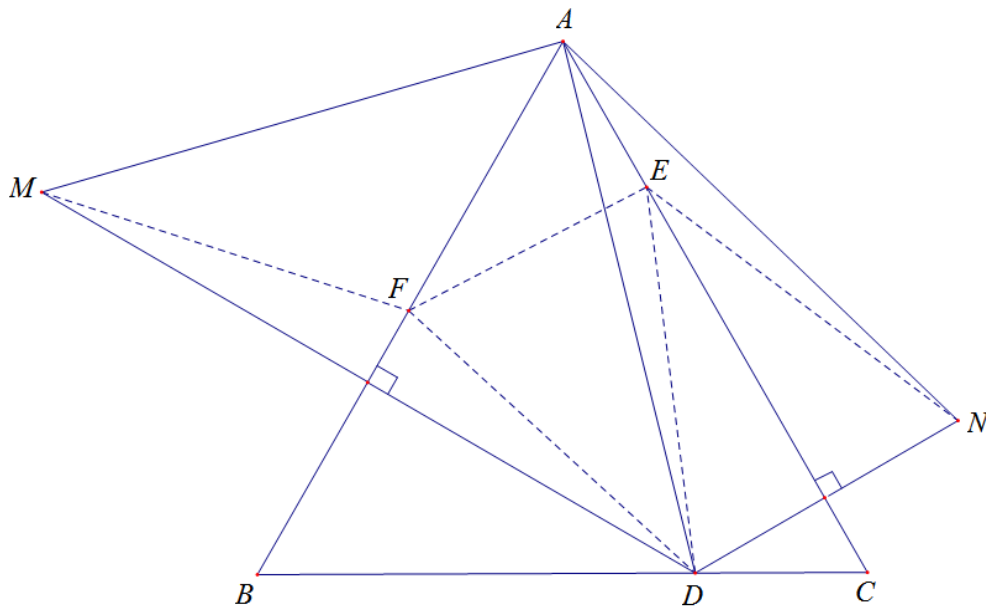
Ta có

$$\angle MAN = \angle MAD + \angle NAD = 2(\angle A_2 + \angle A_3) = 2\angle BAC \text{ (không đổi).}$$

b) Xét $\triangle AMN$ có $AM = AN$ (cùng bằng AD) nên là tam giác cân. Tam giác cân này có góc $\angle MAN$ không đổi nên cạnh đáy MN ngắn nhất \Leftrightarrow cạnh bên AM ngắn nhất $\Leftrightarrow AD$ ngắn nhất (vì $AM = AD$)

$$\Leftrightarrow AD \perp BC \Leftrightarrow D \text{ là hình chiếu của } A \text{ trên } BC.$$

7.3 (h.7.11)



Hình 7.11

Vẽ điểm M đối xứng với D qua AB và vẽ điểm N đối xứng với D qua AC . Khi đó $MF = DF; EN = ED$.

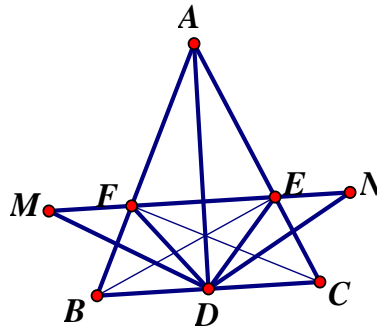
$$\text{Chu vi } \triangle DEF = DF + FE + ED = MF + FE + EN.$$

Chu vi $\triangle DEF$ nhỏ nhất khi độ dài đường gấp khúc $MFEN$ ngắn nhất. Muốn vậy bốn điểm M, F, E, N phải thẳng hàng theo thứ tự đó.

Do đó ta phải tìm điểm D trên BC sao cho MN nhỏ nhất.

Theo kết quả bài 7.2, để MN nhỏ nhất thì D là hình chiếu của A trên BC . Khi đó E và F lần lượt là giao điểm của MN với AC và AB (h.7.12).

Ta chứng minh với cách xác định D, E, F như vậy thì chu vi $\triangle DEF$ bằng MN và MN nhỏ nhất. (1)



Hình (h.7.12)

Khi D, E, F ở những vị trí khác nhau thì chu vi $\triangle DEF$ bằng độ dài đường gấp khúc $MFEN$ do đó lớn hơn MN . (2).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Chú ý: Ta có nhận xét điểm E là chân đường cao vẽ từ đỉnh B , điểm F là chân đường cao vẽ từ đỉnh C của $\triangle ABC$

Thật vậy, xét $\triangle DEF$ có các đường BF và CE lần lượt là các đường phân giác ngoài tại đỉnh F và E . Hai đường thẳng này cắt nhau tại A nên tia DA là tia phân giác của $\angle EDF$.

Ta có: $DC \perp DA$ nên DC là tia phân giác ngoài tại đỉnh D của $\triangle DFE$

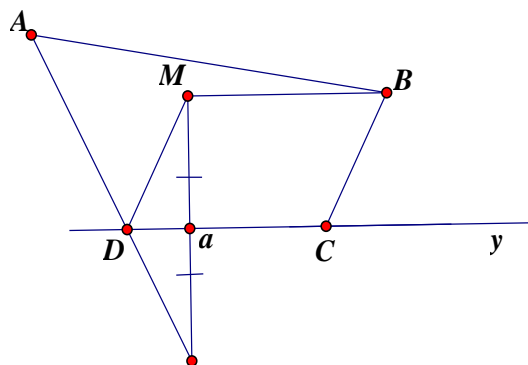
Mặt khác, EC là đường phân giác ngoài tại đỉnh E .

Điểm C là giao điểm của hai đường phân giác ngoài nên FC là đường phân giác trong. Kết hợp với FB là đường phân giác, suy ra $FC \perp FB$ hay $CF \perp AB$

Chứng minh tương tự ta được $BE \perp AC$

Như vậy ba điểm D, E, F có thể được xác định bởi chân của ba đường cao của tam giác

7.4 (h 7.13)



Hình (h.7.13)

Giả sử đã dựng được hai điểm C và D thuộc xy sao cho $CD=a$ và chu vi tứ giác $ABCD$ nhỏ nhất.

Vẽ hình bình hành $BMDC$ (điểm M ở phía gần A).

Khi đó $BM=CD=a$ và $DM=BC$.

Vẽ điểm **N** đối xứng với điểm **M** qua **xy**, điểm **N** là một điểm cố định và **DN=DM**.

Ta có **AB+BC+CD+DA** nhỏ nhất

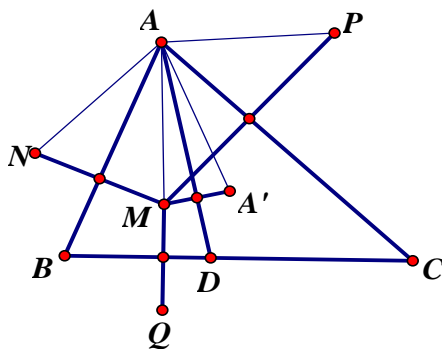
$\Leftrightarrow BC + DA$ nhỏ nhất (Vì AB và CD không đổi)

$\Leftrightarrow DM + DA$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow DN + DA$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow D$ nằm giữa A và N.

Từ đó ta xác định điểm D như sau:

- Qua B vẽ đường thẳng song song với xy và trên đó lấy điểm M sao cho $BM=a$ (điểm M ở phía gần A).
 - Vẽ điểm N đối xứng với M qua xy.
 - Lấy giao điểm D của AN với xy.
 - Lấy điểm C thuộc xy sao cho $DC=MB=a$ (DC và MB cùng chiều).
 - Khi đó tổng $AB+BC+CD+DA$ nhỏ nhất
- Phản chứng minh dành cho bạn đọc.

7.5. (h .7.14)



Hình (h.7.14)

a) AN đối xứng với AM qua AB

$\Rightarrow AN=AM$ và $NAB = MAB(1)$

AP đối xứng với AM qua A

$\Leftrightarrow AP=AM$ và $MAC = PAC (2)$

AA' đối xứng với AM qua AD nên $MAD = A'AD$

Mặt khác, $BAD = CAD$ nên $MAB = CAA' (3)$

Từ (1) và (3) suy ra $NAB = MAB = CAA'$

Ta có : $A'AP = A'AC + PAC = MAB + MAC = BAC$

Chứng minh tương tự, ta được : $A'AN = BAC$.

Suy ra : $A'AP = A'AN$

$\triangle ANP$ cân tại A có AA' là đường phân giác nên AA' cũng là đường trung trực của NP, suy ra N và P đối xứng qua AA'.

b) Gọi Q là điểm đối xứng của M qua BC.

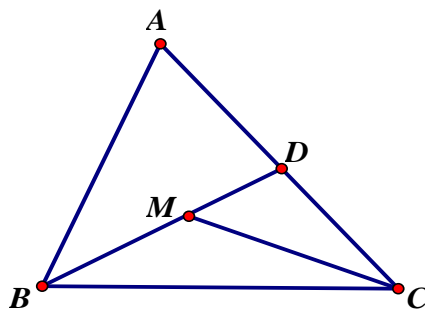
Chứng minh tương tự như trên ta được BB' là đường trung trực của NQ và CC' là đường trung trực của PQ.

Vậy AA', BB' và CC' là ba đường trung trực của $\triangle ANP$ nên chúng đồng quy.

7.6

Trước hết ta chứng minh bài toán phụ:

Cho tam giác ABC, điểm M ở trong tam giác (hoặc ở trên cạnh nhưng không trùng với đỉnh của tam giác). Chứng minh rằng $MB+MC < AB +AC$ (h7.15).



Hình (h.7.15)

Thật vậy, xét $\triangle ABD$, ta có $BD < AB+AD$ hay $MB+MD < AB+ AD$ (1)

Xét $\triangle MCD$ có $MC < DC+MD$ (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) ta được:

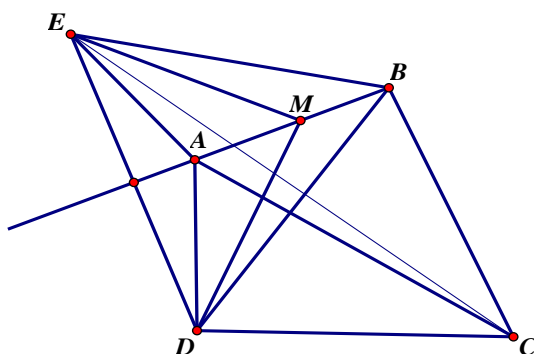
$$MB+MD+MC < AB+AD+DC+MD$$

$$\Rightarrow MB+MC < AB+AC$$

Bất đẳng thức trên vẫn đúng nếu điểm M nằm trên một cạnh nhưng không trùng với đỉnh của tam giác.

Bây giờ ta vận dụng kết quả trên để giải quyết bài toán đã cho.

Vẽ điểm E đối xứng với D qua đường thẳng AB (h.7h.16).



Hình (h.7.16)

Khi đó $AE=AD$, $ME=MD$ và $BE=BD$

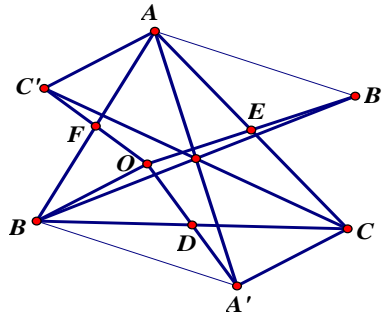
Vì điểm M nằm giữa A và B nên hoặc điểm M nằm trong $\triangle BEC$ hoặc điểm M nằm trong $\triangle AEC$ hoặc điểm M nằm trên cạnh EC.

Ta có:

$$\begin{cases} ME + MC < AE + AC \\ ME + MC < BE + BC \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} MD + MC < AD + AC \\ MD + MC < BD + BC \end{cases}$$

Do đó $MD + MC \leq \max[AD + AC, BD + BC]$.

7.7. (h.7.17)



Hình (h.7.17)

Ta có AC' và BO đối xứng nhau qua F nên $AC = BO$ và $AC \parallel BO$ (1)

BO và CA' đối xứng nhau qua D nên $BO = CA'$ và $BO \parallel CA'$ (2)

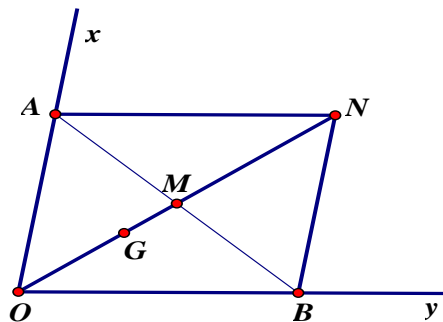
Từ (1) và (2) suy ra : $AC' = CA'$ và $AC' \parallel CA'$.

Do đó tứ giác $ACA'C'$ là hình bình hành.

Chứng minh tương tự ta được tứ giác $ABA'B'$ là hình bình hành.

Hai hình bình hành $ACA'C'$ và $ABA'B'$ có chung đường chéo AA' nên các đường chéo AA' , BB' và CC' đồng quy.

7.8 (h.7.18)



Hình (h.7.18)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được điểm A thuộc Ox và B thuộc Oy sao cho G là trọng tâm của $\triangle AOB$.

Tia OG cắt AB tại trung điểm M của AB và $OM = \frac{3}{2}OG$

Vẽ điểm N đối xứng với O qua điểm M . Tứ giác $ANBO$ là hình bình hành

$\Rightarrow NA // Oy; NB // Ox$, từ đó xác định được A và B.

b) Cách dựng

- Trên tia OG lấy điểm M sao cho $OM = \frac{3}{2}OG$

Dựng điểm N đối xứng với điểm O qua M.

Từ N dựng một tia song song với Oy cắt Ox tại A.

Khi đó G là trọng tâm của tam giác AOB.

c) Chứng minh

Tứ giác ANBO là hình bình hành, suy ra AB và ON cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

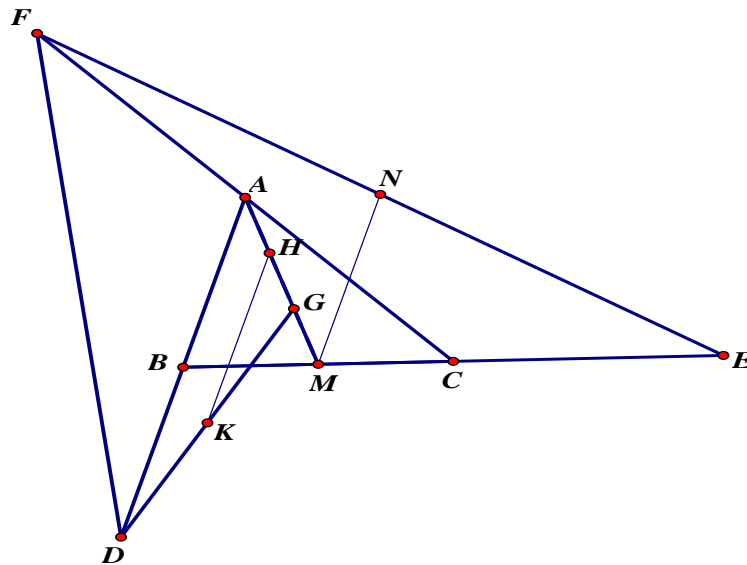
Mặt khác, M là trung điểm của ON nên M là trung điểm của AB.

Vậy OM là đường trung tuyến của tam giác AOB.

Ta có $OM = \frac{3}{2}OG$ nên G là trọng tâm của tam giác AOB.

d) Biện luận: Bài toán luôn có một nghiệm hình.

7.9. (h.7.19)



Hình (h.7.19)

Vẽ đường trung tuyến AM của tam giác ABC và đường trung tuyến DN của tam giác DEF. Gọi G là giao điểm của hai đường trung tuyến này. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của GA và GD.

Xét $\triangle FCE$ có AN là đường trung bình

$$\Rightarrow AN // CE, AN = \frac{1}{2}CE.$$

Do đó $AN // BM$ và $AN = BM$, suy ra ANMB là hình bình hành $\Rightarrow MN // AB, MN = \frac{1}{2}AD$.

Mặt khác, HK là đường trung bình của $\triangle GAD$ nên $HK \parallel AD$ và $HK = \frac{1}{2} AD$.

Từ đó $MN \parallel HK$ và $MN = HK$

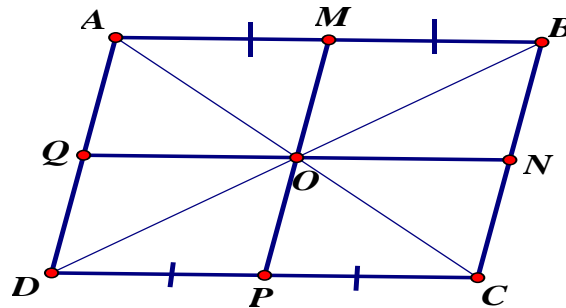
Suy ra MNHK là hình bình hành, hai đường chéo HM và NK cắt nhau tại G nên G là trung điểm mỗi đường.

Do đó $GM = GH = HA \Rightarrow G$ là trọng tâm của $\triangle ABC$

$GN = GK = KD \Rightarrow G$ là trọng tâm của $\triangle DFE$

Vậy $\triangle ABC$ và $\triangle DFE$ có cùng trọng tâm.

7.10 (h.7.20)



Hình (h.7.20)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được hình bình hành ABCD thỏa mãn đề bài.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Ta có M và P đối xứng qua O.

Gọi Q là giao điểm của NO và AD thì Q và N đối xứng qua O.

Vẽ các đường trung trực của MN và NP chúng cắt nhau tại O.

Gọi Q là điểm đối xứng của O qua N. Tứ giác AOBQ là hình bình hành.

• Điểm A thỏa mãn hai điều kiện:

A nằm trên đường trung trực của MN và QA song song với đường trung trực của

• Điểm B thỏa mãn hai điều kiện:

B nằm trên đường trung trực của NP và QB song song với đường trung trực của MN.

Khi đó hai điểm C, D còn lại được xác định dễ dàng.

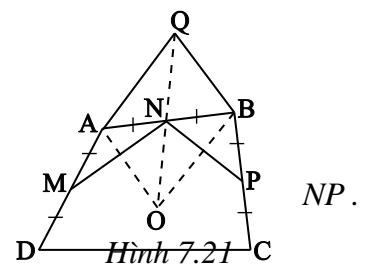
b) Cách dựng

- Dựng các đường trung trực d_1 của MN và d_2 của NP, chúng cắt nhau tại O;

- Dựng điểm Q đối xứng với O qua N;

- Qua Q dựng một đường thẳng song song với d_2 cắt d_1 tại A;

- Qua Q dựng một đường thẳng song song với d_1 cắt d_2 tại B;



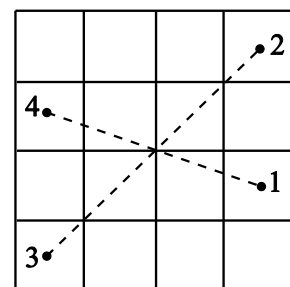
- Đặt điểm C đối xứng với B qua P ;
- Đặt điểm D đối xứng với A qua M .

Khi đó tứ giác $ABCD$ là tứ giác phải dựng.

Các bước còn lại, bạn đọc tự giải.

7.1. (h.7.22)

Hình vuông có $4 \times 4 = 16$ ô vuông, chia thành 8 cặp đối xứng nhau qua tâm vuông. Xét các cặp hai số ở hai ô đối xứng qua tâm đó.



hình

Hình 7.22

Tổng hai số của mỗi cặp nhỏ nhất là $1 + 1 = 2$,

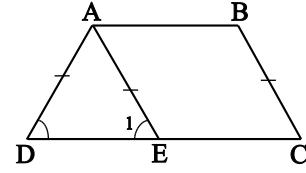
lớn nhất là $4 + 4 = 8$.

Có 7 tổng (là 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) mà có 8 cặp số nên phải có hai cặp có tổng bằng nhau. Vị trí của 4 số trong hai cặp này là đỉnh của một hình bình hành phải tìm (trường hợp đặc biệt: 4 số này nằm trong 4 ô có tâm thẳng hàng, ta nói hình bình hành "suy biến" thành đoạn thẳng).

CHUYÊN ĐỀ 8. VẼ HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN TRONG CHƯƠNG TỨ GIÁC**8.1. (h.8.7)**

Xét hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$).

- Trường hợp hai cạnh bên song song:



Hình 8.7

Khi đó tứ giác $ABCE$ là hình bình hành.

Điều kiện $AD = BC$ ở đề bài được thỏa mãn.

- Trường hợp hai cạnh bên không song song:

Vẽ $AE \parallel BC$ ($E \in CD$) ta được $ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow AE = BC$.

Mặt khác, $AD = BC$ nên $AE = AD \Rightarrow D = E_1$ (1)

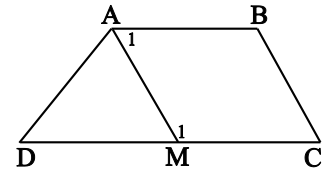
Ta lại có $AE \parallel BC \Rightarrow C = E_1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $D = C$, do đó hình thang $ABCD$ là hình thang cân.

8.2. (h.8.8)

Xét hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $AB < CD$.

Ta phải chứng minh $A + B > C + D$.



Hình 8.8

Vẽ $AM \parallel BC$ ($M \in CD$) khi đó $B = M_1$ và $C = A_1$.

Ta có $A > A_1 = C$; $M_1 > D$ (tính chất góc ngoài của $\triangle ADM$) $\Rightarrow B > D$.

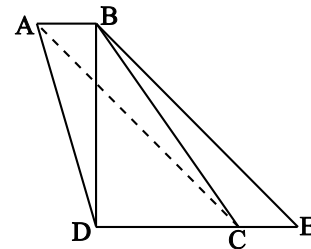
Do đó $A + B > C + D$.

8.3. (h.8.9)

Vẽ $BE \parallel AC$, $E \in CD$. Ta được $CE = AB$ và $BE = AC$.

Ta có $AB + CD = CE + CD = DE$.

Vì $AB + CD = a$ nên $DE = a$.



Hình 8.9

Tam giác BDE vuông cân $\Rightarrow BE = a\sqrt{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

8.4. (h.8.10)

Qua B vẽ $BE \parallel AC$ ($E \in$ đường thẳng CD) ta được

$$BE = AC \text{ và } CE = AB.$$

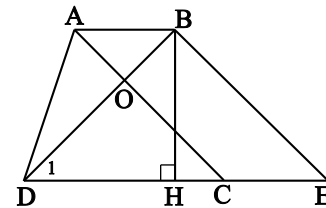
Do đó $DE = DC + CE = DC + AB = 2h$.

Ta có $BD = AC$ (hai đường chéo của hình thang cân)

mà $BE = AC$ nên $BD = BE$.

$\triangle BDE$ cân tại B , BH là đường cao nên cũng là đường trung tuyến, suy ra

$$DH = HE = h; BH = h.$$



Hình 8.10

Do đó các tam giác HBD , HBE vuông cân $\Rightarrow D_1 = E = 45^\circ$.

Suy ra $\triangle BDE$ vuông tại $B \Rightarrow \angle COD = \angle EBD = 90^\circ$

8.5. (h.8.11)

- Trường hợp hình thang có hai góc kề một đáy cùng tù, hai góc kề đáy kia cùng nhọn

Vẽ $AH \perp CD$, $BK \perp CD$ thì $HK = AB$.

Ta có $AC^2 - HC^2 = AD^2 - DH^2 (= AH^2)$;

$$BD^2 - KD^2 = BC^2 - KC^2 (= BK^2).$$

Cộng từng vế hai đẳng thức trên ta được

$$(AC^2 - HC^2) + (BD^2 - KD^2) = (AD^2 + BC^2) - DH^2 - CK^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AC^2 + BD^2 &= (AD^2 + BC^2) + (CH^2 - CK^2) + (DK^2 - DH^2) \\ &= AD^2 + BC^2 + (CH - CK)(CH + CK) + (DK - DH)(DK + DH) \\ &= AD^2 + BC^2 + HK(CH + CK) + HK(DK + DH) \\ &= AD^2 + BC^2 + HK(CH + CK + DK + DH) \\ &= AD^2 + BC^2 + HK(CD + CD) \\ &= AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD. \end{aligned}$$

- Trường hợp mỗi đáy có một góc tù (hoặc một góc vuông), một góc nhọn: Cũng chứng minh tương tự.

8.6. (h.8.12)

Vẽ hình bình hành $DAFH$.

Gọi N là giao điểm của hai đường chéo DF và AH , M là giao điểm của EH và BC .

Ta có $NA = NH$, $ND = NF$.

Ta đặt $\angle ADH = \angle AFH = \alpha$ thì $\angle BDH = \angle HFC = \alpha + 60^\circ$

$$\angle DAF = 180^\circ - \alpha;$$

$$\angle BAC = 360^\circ - \angle BAD - \angle CAF - \angle DAF$$

$$= 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - (180^\circ - \alpha)$$

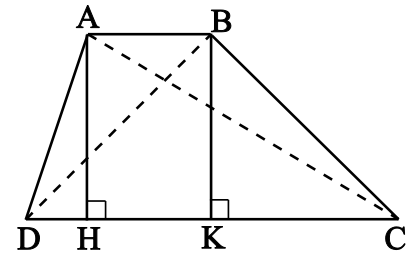
$$= \alpha + 60^\circ.$$

$\triangle BDH$ và $\triangle HFC$ có:

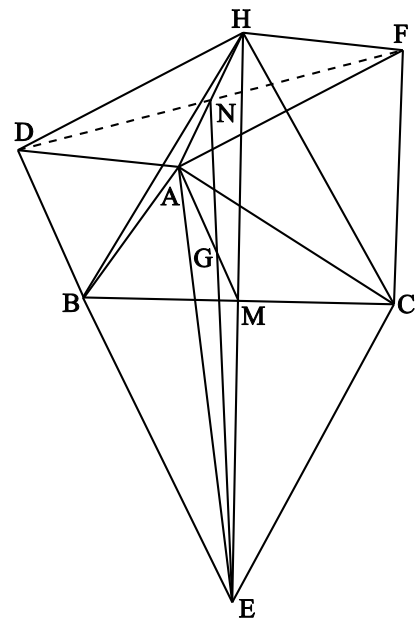
$$BD = HF (= AD); \angle BDH = \angle HFC \text{ (chứng minh trên); } DH = FC (= AF).$$

$$\text{Do đó } \triangle BDH = \triangle HFC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow HB = HC. \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta được } \triangle BAC = \triangle HFC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BC = HC. \quad (2)$$



Hình 8.11



Hình 8.12

Từ (1) và (2) suy ra $HB = HC = BC$.

Tứ giác $BHCE$ có các cặp cạnh đối bằng nhau (cùng bằng BC) nên là hình bình hành $\Rightarrow MB = MC$ và $MH = ME$.

• Xét $\triangle AEH$ có AM và AN là hai đường trung tuyến nên giao điểm G của chúng là trọng tâm

$$\Rightarrow EG = \frac{2}{3} EN \text{ và } AG = \frac{2}{3} AM.$$

• Xét $\triangle ABC$ có AM là đường trung tuyến mà $AG = \frac{2}{3} AM$ nên G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

• Xét $\triangle EDF$ có EN là đường trung tuyến mà $EG = \frac{2}{3} EN$ nên G là trọng tâm của $\triangle EDF$.

Vậy $\triangle ABC$ và $\triangle EDF$ có cùng trọng tâm G .

8.7. (h.8.13)

$\triangle HBM$ vuông tại H có $\angle ABC = 60^\circ$ nên $\angle HMB = 30^\circ$.

$\triangle CAK$ vuông tại C có $\angle ACB = 60^\circ$ nên $\angle KCM = 30^\circ$.

Suy ra $\angle KMC = \angle KCM$ (cùng bằng $\angle HMB$).

Do đó $\triangle KMC$ cân $\Rightarrow KC = KM$.

Vẽ hình bình hành $BKMD \Rightarrow BD \parallel KM$ và $BD = KM$.

Do đó $BD \perp AB$ (vì $KM \perp AB$) và $BD = KC$ (vì cùng bằng KM).

$\triangle ABD = \triangle ACK$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle A_1 = \angle A_2$ và $AD = AK$.

Tam giác ADK cân, AN là đường trung tuyến nên là đường cao, đường phân giác

$\Rightarrow AN \perp DK$, $\angle AHK = 90^\circ$.

Ta có $\angle A_2 + \angle BAK = \angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \angle A_1 + \angle BAK = 60^\circ$ hay $\angle DAK = 60^\circ \Rightarrow \angle NAK = 60^\circ : 2 = 30^\circ$.

Do đó $\angle AKN = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Xét $\triangle ANK$ có $\angle NAK : \angle NKA : \angle ANK = 30^\circ : 60^\circ : 90^\circ = 1 : 2 : 3$.

8.8. (h.8.14)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được tứ giác $ABCD$ thỏa mãn đề bài.

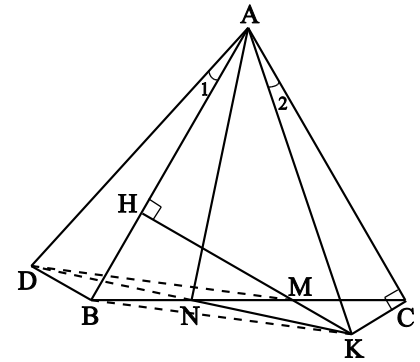
Vẽ hình bình hành $DABE$ ta được $BE = AD = 3,5$ cm ;

$DE = AB = 2,5$ cm . Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC .

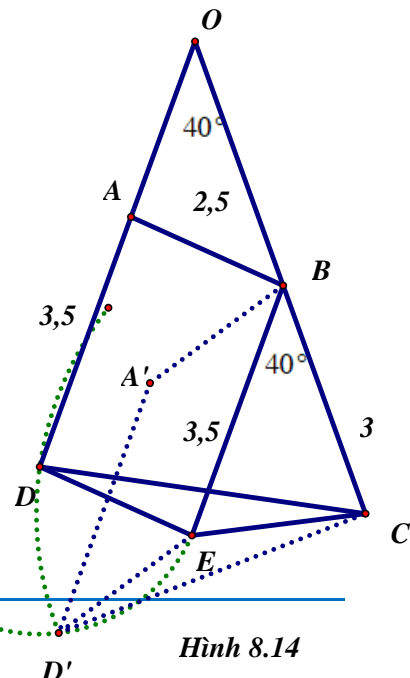
Do $BE \parallel AD$ nên $\angle CBE = \angle O = 40^\circ$.

Tam giác BCE dựng được (c.g.c). Tam giác CDE dựng được (c.c.c)

Điểm A thỏa mãn hai điều kiện:



Hình 8.13



Hình 8.14

- A nằm trên đường thẳng qua D và song song với BE .

- A nằm trên đường thẳng qua B và song song với DE .

b). Cách dựng

- Dựng $\triangle CBE$ sao cho $B = 40^\circ$, $BC = 3\text{ cm}$, $BE = 3,5\text{ cm}$.

- Dựng $\triangle CDE$ sao cho CE đã biết $CD = 4,5\text{ cm}$, $ED = 2,5\text{ cm}$.

- Qua D dựng một đường thẳng song song với BE . Qua B dựng một đường thẳng song song với DE chúng cắt nhau tại A $ABCD$.

Tứ giác $ABCD$ là tứ giác phải dựng.

c). Chứng minh

Theo cách dựng, $ABED$ là hình bình hành nên $AB = DE = 2,5\text{ cm}$; $AD = BE = 3,5\text{ cm}$;

$\angle COD = \angle CBE = 40^\circ$.

Tứ giác $ABCD$ có $AB = 2,5\text{ cm}$; $BC = 3\text{ cm}$; $CD = 4,5\text{ cm}$; $DA = 3,5\text{ cm}$; $\angle COD = 40^\circ$, thỏa mãn đề bài.

d). Biện luận

Bài toán có hai nghiệm hình là tứ giác $ABCD$ và tứ giác $A'BCD'$

8.9. (h.8.15)

Gọi M là trung điểm của CD .

Xét $\triangle HCD$ có KM là đường trung bình nên $KM \parallel HD$ do đó $KM \perp AC$ (vì $HD \perp AC$).

Tứ giác $ADMB$ có $AB \parallel MD$ và $AB = DM \left(= \frac{1}{2}CD \right)$ nên $ABMD$ là hình bình hành.

Hình bình hành này có $\angle A = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật. Suy ra $AM = BD$ và $OA = OM = OB = OD$. Xét $\triangle KAM$ vuông tại K có KO là trung tuyến nên

$$KO = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}BD.$$

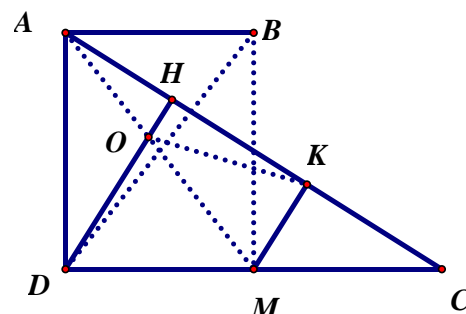
Xét $\triangle KBD$ có KO là trung tuyến nên $KO = \frac{1}{2}BD$ nên

$\triangle KBD$ vuông tại K do đó $\angle BKD = 90^\circ$.

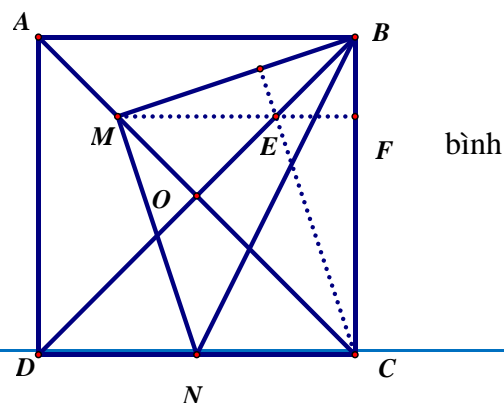
8.10. (h.8.16)

Gọi E là trung điểm của OB thì ME là đường trung của $\triangle AOB \Rightarrow ME \parallel AB$ và $ME = \frac{1}{2}AB$.

Do đó $ME \parallel NC$ và $ME = NC$.



Hình 8.15



Hình 8.16

Tứ giác $MECN$ là hình bình hành $\Rightarrow CE \parallel MN$ và $CE = MN$.

Ta có $ME \perp BC$ tại F (vì $AB \perp BC$), $BO \perp AC$ (tính chất đường chéo hình vuông).

Xét $\triangle MBC$ có E là trực tâm nên $CE \perp MB$ do đó $MN \perp MB$ (1)

$\triangle MAB$ và $\triangle EBC$ có $AB = BC$; $\angle MAB = \angle EBC = 45^\circ$; $MA = EB$ (một nửa của hai đoạn thẳng bằng nhau).

Vậy $\triangle MAB = \triangle EBC$ (c.g.c) $\Rightarrow MB = EC \Rightarrow MB = MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MNB$ vuông cân.

8.11. (h.8.17)

Gọi E là giao điểm của đường thẳng DM với AB .

Tam giác BDE có BM vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên là tam giác cân, do đó $BD = BE$ và $MD = ME$.

Gọi N là trung điểm của BE thì MN là đường trung bình của $\triangle EBD \Rightarrow MN \parallel BD$

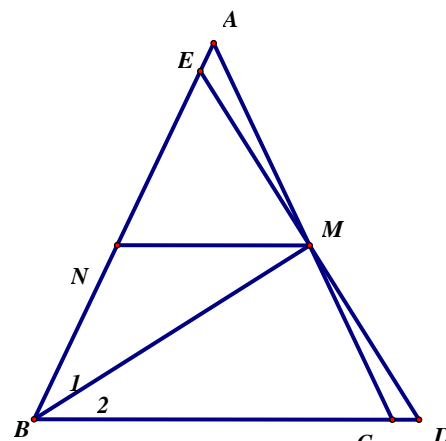
$\Rightarrow \angle M_1 = \angle B_2$ do đó $\angle M_1 = \angle B_1$ ($= \angle B_2$)

$\Rightarrow \triangle NBM$ cân $\Rightarrow BN = MN$.

Tứ giác $BCMN$ là hình thang cân $\Rightarrow BN = CM \Rightarrow MN = CM$

Xét $\triangle MBE$ vuông tại M có MN là đường trung tuyến nên $MN = \frac{1}{2} BE$

$\Rightarrow BE = 2MN \Rightarrow BD = 2CM$.



Hình 8.17

8.12. (h.8.18)

Ta có $CE \parallel DF$ (cùng vuông góc với AB).

Tứ giác $FECD$ là hình thang.

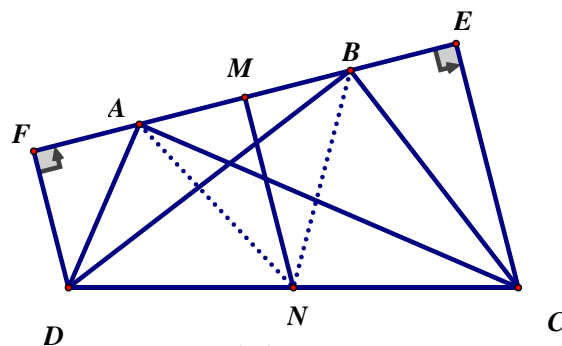
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF và CD , MN là đường trung bình của hình thang $CEFD$. Do đó $MN \parallel CE \Rightarrow MN \perp EF$.

Ta có $AN = BN = \frac{1}{2} CD$ (tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông).

$\Rightarrow \triangle NAB$ cân.

Mặt khác NM là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow MA = MB \Rightarrow AF = BE$.



Hình 8.18

8.13. (h.8.19)

Vẽ đường trung tuyến AM . Gọi N là trung điểm AG

Qua M và N vẽ các đường thẳng AA' cắt xy tại M' và N' .

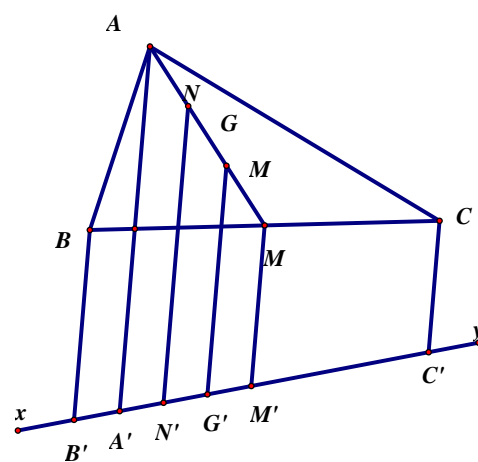
- Xét hình thang $BB'C'C$ có $BB' + CC' = 2MN$ (1).
- Xét hình thang $AA'G'G$ có $AA' + GG' = 2NN'$ (2).
- Xét hình thang $NN'M'M$ có

$$NN' + MM' = 2GG' \Rightarrow 2(NN' + MM') = 4GG'.$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AA' + BB' + CC' + GG' = 2(MM' + NN') \Rightarrow AA' + BB' + CC' + GG' = 4GG'.$$

Do đó $AA' + BB' + CC' = 3GG'$



Hình 8.19

8.14. (h.8.20)

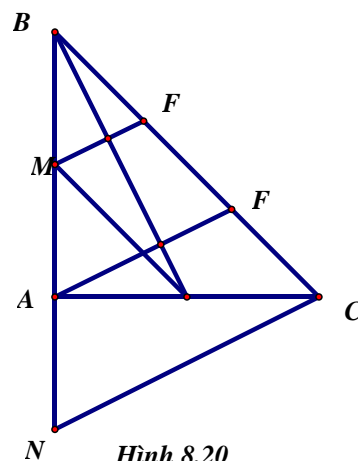
Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $AN = AM$

$$\triangle ACN = \triangle ABD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow CN = BD \text{ và } \angle ACN = \angle ABD \text{ mà}$$

$\angle CAE = \angle ABD$ (cùng phụ $\angle BAE$) nên $\angle ACN = \angle CAE \Rightarrow AE \parallel CN$ và $MF \parallel CN$ (vì cùng song song với AE).

Xét hình thang $MFCN$ có $AE \parallel CN$ và $AM = AN$ nên $EF = EC$.

$$\text{Suy ra } AE = \frac{MF + CN}{2} = \frac{MF + BD}{2}.$$



Hình 8.20

8.15. (h.8.21)

a). Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA, AC và BD . Theo định lý Giéc-gon (bài 4.8) thì ba đường thẳng MP, NQ, EF đồng qui tại điểm O là trung điểm của mỗi đoạn thẳng đó.

Gọi giao điểm của AO với DN là G vẽ $QH \parallel AG$.

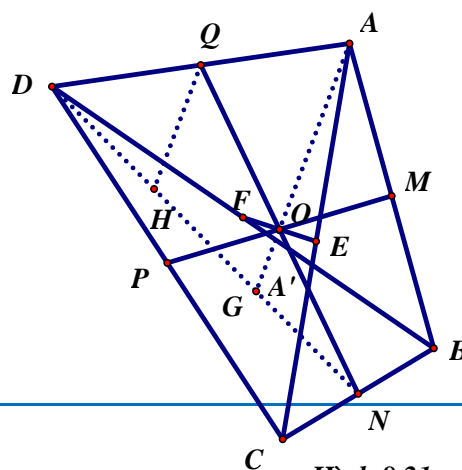
Xét $\triangle NQH$ ta được $NG = GH$.

Xét $\triangle ADG$ ta được $GH = HD$.

$$\text{Vậy } NG = GH = HD \Rightarrow HG = \frac{1}{3}DN \text{ (1)}$$

Vì A' là trọng tâm $\triangle BCD$ nên $A' \in DN$ và

$$NA' = \frac{1}{3}DN \text{ (2)}.$$



Hình 8.21

Từ (1) và (2) suy ra $G \equiv A'$ do đó AA' đi qua O .

Chứng minh tương tự các đường thẳng BB' , CC' , DD' đều đi qua O .

Suy ra AA' , BB' , CC' , DD' đồng qui tại O .

b). Ta có $OA' = \frac{1}{2}QH$ mà $QH = \frac{1}{2}AA'$ nên $OA' = \frac{1}{4}AA'$. Suy ra $OA' = \frac{1}{3}OA$ hay $\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{3}$.

Chứng minh tương tự ta được $\frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = \frac{1}{3}$.

8.16. (h.8.22)

Gọi E, F, M lần lượt là trung điểm của OB, OC, BC . Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ta có $EH = EB = EO = \frac{1}{2}OB$; $FK = FC = FO = \frac{1}{2}OC$. Theo tính chất đường trung bình của tam giác ta có tứ giác $OFME$ là hình bình hành

$\Rightarrow OEM = OFM$ (1).

Mặt khác $HEO = 2ABO$; $KFO = 2ACO$ mà

$ABO = ACO$ nên $HEO = KFO$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $HEM = MFK$.

$\triangle HEM$ và $\triangle MFK$ có $HE = MF \left(= \frac{1}{2}OB \right)$;

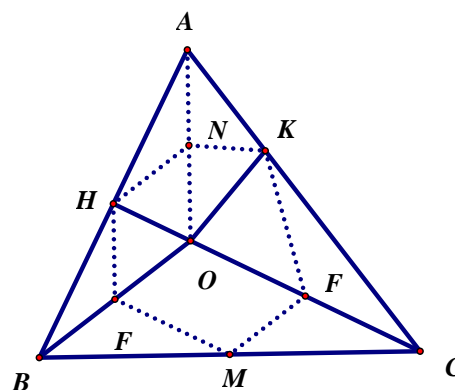
$HEM = MFK$ (chứng minh trên); $EM = FK (= OC)$.

Do đó $\triangle HEM = \triangle MFK (c.g.c) \Rightarrow MH = MK$ (3)

Gọi N là trung điểm của OA , ta có $NH = NK \left(= \frac{1}{2}OA \right)$ (4)

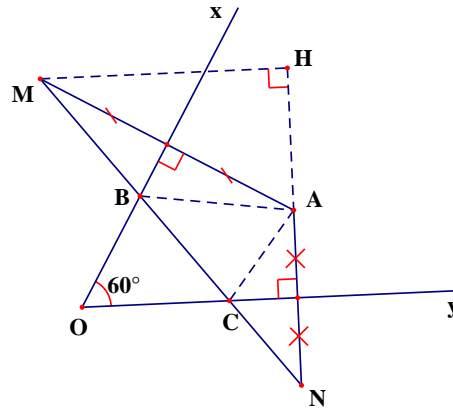
Từ (3) và (4) suy ra MN là đường trung trực của HK .

Vậy đường trung trực của HK đi qua điểm cố định M là trung điểm của BC .



Hình 8.22

8.17. (h.8.23)



Hình 8.23

a). Vẽ điểm M đối xứng với A qua Ox . Vẽ điểm N đối xứng A qua Oy .

Hai điểm M và N là hai điểm cố định.

Đoạn thẳng MN cắt Ox tại B , cắt Oy tại C .

Khi đó chu vi $\triangle ABC$ là nhỏ nhất.

Thật vậy, vì M đối xứng với A qua Ox nên $AM = MB$. Vì N đối xứng với A qua Oy nên

Chu vi $\triangle ABC$ là: $AB + BC + CA = MB + BC + CN = MN$.

Do đó chu vi $\triangle ABC$ nhỏ nhất bằng MN .

b) Vẽ $MH \perp AN$, ta có : $\angle MAH = \angle O = 60^\circ$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn).

$\Rightarrow \angle AMH = 30^\circ$.

Xét $\triangle AMH$ vuông tại H , $\angle AMH = 30^\circ$ nên $AH = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2\text{cm}$.

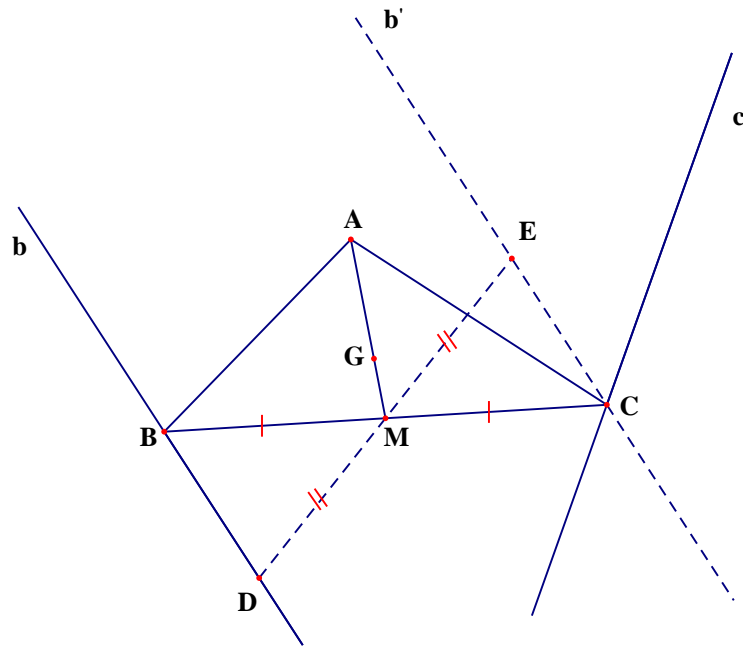
Xét $\triangle HMN$ vuông tại H , ta có:

$$\begin{aligned} MN^2 &= MH^2 + HN^2 = MH^2 + (HA + AN)^2 \\ &= MH^2 + HA^2 + AN^2 + 2HA \cdot AN \\ &= (MH^2 + HA^2) + AN^2 + 2HA \cdot AN \\ &= AM^2 + AN^2 + 2HA \cdot AN = 4^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 28 \end{aligned}$$

$\Rightarrow MN = \sqrt{28} \approx 5,3(\text{cm})$.

Vậy độ dài nhỏ nhất của chu vi $\triangle ABC$ là $5,3\text{cm}$.

8.18. (h.8.24)



Hình 8.24

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được $\triangle ABC$ có đỉnh A tại vị trí A cho trước có trọng tâm G tại vị trí G cho trước, có đỉnh $B \in b$, đỉnh $C \in c$ với b, c cho trước.

Gọi M là giao của tia AG với BC.

Ta có : $AM = \frac{3}{2} AG$ nên M xác định được.

Gọi D là một điểm trên b. Vẽ điểm E đối xứng với D qua M.

Khi đó đường thẳng b' đi qua C và E là đường thẳng đối xứng với b qua M.

• Điểm C thỏa mãn hai điều kiện : $C \in c$ và $C \in b'$.

• Điểm B $\in b$ và B \in tia CM.

b) Cách dựng :

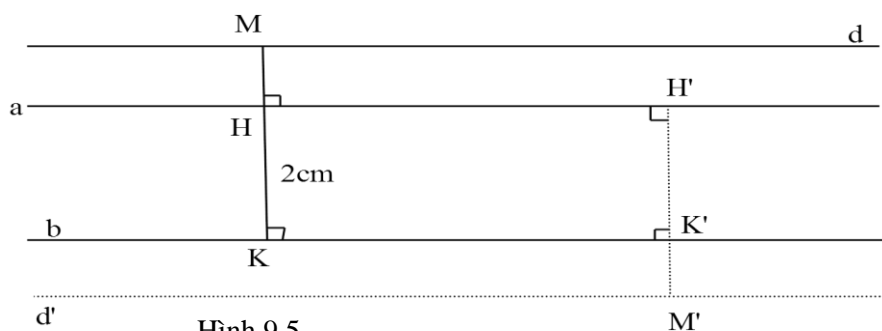
- Dựng điểm M thuộc tia AG sao cho : $AM = \frac{3}{2} AG$.

- Dựng đường thẳng b' đối xứng với b qua M, b' cắt c tại C

- Dựng giao điểm B của đường thẳng b với tia CM ;

- Vẽ các đoạn thẳng AB, AC ta được $\triangle ABC$ phải dựng.

Các phần còn lại bạn đọc tự giải.

CHUYÊN ĐỀ 9. TOÁN QUỸ TÍCH**9.1. (h.9.5)**

Hình 9.5

- Xét trường hợp điểm M nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa b .

a) Phần thuận

Vẽ $MH \perp a$, đường thẳng MH cắt b tại K .

Ta có: $MH + MK = 4\text{cm}$; $MK - MH = 2\text{cm}$

Suy ra $MH = (4 - 2) : 2 = 1\text{cm}$

Điểm M nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa b và cách a là 1cm nên điểm M nằm trên đường thẳng d song song với a và cách a là 1cm

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kì trên đường thẳng d . Vẽ $MH \perp a$ cắt đường thẳng b tại K .

Ta có: $MH = 1\text{cm}$; $HK = 2\text{cm} \Rightarrow MK = 3\text{cm}$.

Do đó $MH + MK = 4\text{cm}$.

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm M là đường thẳng $d \parallel a$ và cách a là 1cm (d nằm trên nửa mặt phẳng bờ a không chứa b).

- Xét trường hợp điểm M nằm trên nửa mặt phẳng bờ b không chứa a .

Cũng chứng minh tương tự như trên, ta được quỹ tích của điểm M là đường thẳng $d' \parallel b$ và cách b là 1cm (d' nằm trên nửa mặt phẳng bờ b không chứa a).

Kết hợp cả hai trường hợp ta được: Quỹ tích của điểm M là hai đường thẳng d và d' nằm ngoài phần mặt phẳng giới hạn bởi a và b sao cho $d \parallel a$ và cách a là 1cm ; $d' \parallel b$ và cách b là 1cm .

9.2. (h.9.6)**a) Phần thuận**

Vẽ $CH \perp Ox$ ta được $C_1 = A_1$ (cùng phụ với A_2).

$\Delta HAC = \Delta OBA$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow CH = OA = a$

Điểm C cách đường thẳng Ox một khoảng bằng a nên C nằm trên đường thẳng $d \parallel Ox$ và cách Ox một khoảng a cho trước.

Giới hạn: Nếu B trùng với O thì C trùng với C_1 ($C_1 \in d$ và $C_1A \perp OA$). Nếu B ra xa vô cùng thì điểm C cũng ra xa vô cùng. Vậy điểm C nằm trên tia C_1t của đường thẳng d .

b) Phần đảo

Lấy điểm C bất kì trên tia C_1t . Vẽ đoạn thẳng AC. Từ A vẽ $AB \perp AC$ ($B \in Oy$). Ta phải chứng minh tam giác ABC vuông cân tại A.

Thật vậy, vẽ $CH \perp Ox$.

ΔHAC và ΔOBA có: $H = O = 90^\circ$; $HC = OA = a$; $C_1 = A_1$ (cùng phụ với A_2).

Do đó $\Delta HAC = \Delta OBA$ (g.c.g) $\Rightarrow AC = AB$.

Vậy ΔABC vuông tại A.

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm C là tia $C_1t \parallel Ox$ và cách Ox một khoảng bằng a.

9.1. (h.9.7)

a) Phần thuận

Gọi O là giao điểm của hai tia AD và BE. Như vậy O là một điểm cố định.

Xét ΔAOB có $A = B = 45^\circ$ nên $AOB = 90^\circ$.

Tứ giác OECD có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Hai đường chéo DE và OC cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên trung điểm M của DE cũng là trung điểm của OC.

Vẽ $OH \perp AB$, $MK \perp AB$ thì MK là đường trung bình của ΔOHC suy ra $MK = \frac{1}{2}OH$.

Điểm M cách đường thẳng AB cho trước một khoảng là $\frac{OH}{2}$ nên điểm M nằm trên đường thẳng $xy \parallel AB$

và cách AB là $\frac{OH}{2}$.

Giới hạn: Khi điểm C di động dần tới A thì điểm M dần tới trung điểm P của OA. Khi điểm C di động dần tới B thì điểm M dần tới trung điểm Q của OB. Vậy điểm M chỉ di động trên đường trung bình PQ của ΔOAB (trừ hai điểm P và Q).

b) Phần đảo

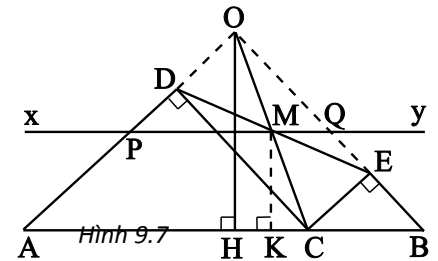
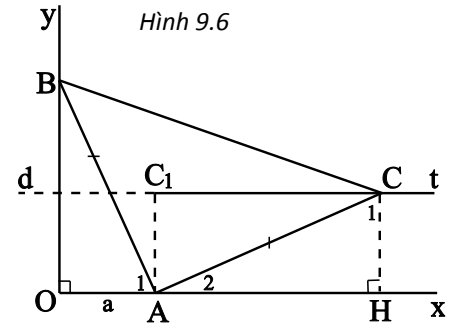
Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng PQ (M không trùng với P, Q). Vẽ tia OM cắt AB tại C. Vẽ $CD \perp OA$, $CE \perp OB$. Ta phải chứng minh các ΔDAC , ΔEBC vuông cân và M là trung điểm của DE.

Thật vậy, xét ΔOAB có $OP = PA$, $PQ \parallel AB$ nên $MO = MC$.

Xét ΔDAC vuông tại D có $A = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân tại D.

Tương tự, ΔEBC vuông cân tại E.

Tứ giác OECD có ba góc vuông nên là hình chữ nhật. Do đó hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



Do M là trung điểm OC nên M cũng là trung điểm DE .

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm M là đường trung bình PQ của tam giác OAB trừ hai điểm P và Q .

9.4 (h 9.8)

Gọi O là giao điểm của hai tia AD và BE . Như vậy O là điểm cố định .

Giải tương tự bài 9.3,

ta được quỹ tích của điểm M là đường trung bình PQ của tam giác OAB trừ hai điểm P và Q .

9.5 (h. 9.9)

a) Phần thuận.

Vẽ $AH \perp BC$ thì $AH \parallel DE$ và $A_1 = A_2$ (tính chất của tam giác cân).

Ta có $E_1 = A_1$ (cặp góc so le trong); $F_1 = A_2$ (cặp góc đồng vị).

Vì $A_1 = A_2$ nên $E_1 = F_1$. Suy ra $\triangle AEF$ cân.

Ta có : $ME = MF$ suy ra $AM \perp EF$.

Tứ giác $AHDM$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật nên $MD = AH$ (không đổi).

Điểm M cắt đường thẳng BC cho trước một khoảng bằng AH nên điểm M nằm trên đường thẳng $xy \parallel BC$ và cách BC một khoảng bằng AH .

Giới hạn: Khi điểm D trùng với B thì E trùng với B và F trùng với F_1 (F_1 nằm trên tia CA và $AF_1 = AC$). Khi đó điểm M trùng với M_1 (M_1 là giao điểm của xy với BF_1). Tương tự , khi điểm D trùng với C thì điểm M trùng với M_2 . Vậy điểm M chỉ nằm trên đường thẳng M_1M_2 của đường thẳng xy .

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kì trên đoạn M_1M_2 . Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với BC cắt BC , AB , AC lần lượt tại D , E , F ta phải chứng minh M là trung điểm của EF .

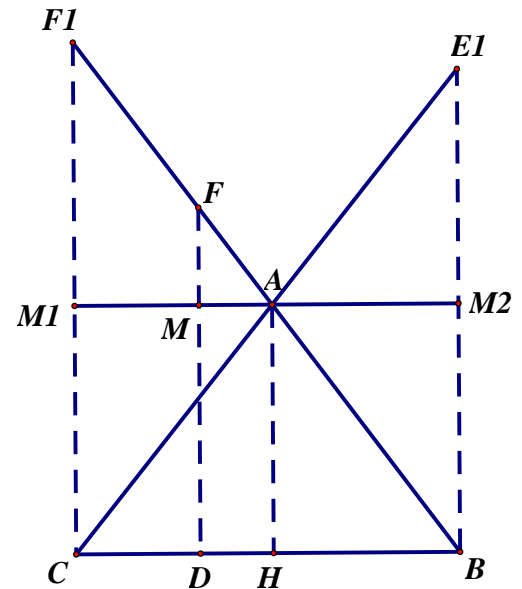
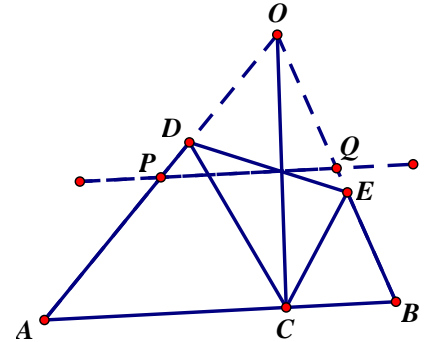
Ta có $E_1 = A_2$; $F_1 = A_2$ mà $A_1 = A_2$ nên $E_1 = F_1$. Do đó $\triangle AEF$ cân. Vì AM là đường cao cũng đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow ME = MF$

c) Kết luận:

Vậy quỹ tích của điểm M là đoạn thẳng M_1M_2 của đường thẳng $xy \parallel BC$ và cách BC một khoảng AH .

9.6 (h 9.10)

a) Phần thuận



b) Phần đảo (h.9.12)

Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng GH.

Khi đó $MA = MD$; $MB = MC$.

Vậy $MA + MC = MD + MB$. Nếu $M \in EF$ ta cũng có kết quả trên.

c) Kết luận: Quỹ tích của điểm M là hai đoạn thẳng EF và GH nối các trung điểm của hai cặp cạnh đối diện của hình chữ nhật.

9.8. (H.9.13)

a) Phần thuận

$\triangle MAC$ và $\triangle ADBC$ có: $MC = DC$; $C_1 = C_2$ (vì cùng cộng với $\angle ACD$ cho 60°); $CA = CB$.

Vậy $\triangle MAC = \triangle DBC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle MAC = \angle DBC = 90^\circ$. Suy ra $MA \perp AC$ tại A.

Do đó điểm M nằm trên một đường thẳng đi qua A và vuông góc với AC.

Giới hạn: Khi điểm D trùng với B thì điểm M trùng với A. Khi điểm D ra xa vô cùng thì điểm M cũng ra xa vô cùng. Vậy điểm M chỉ nằm trên tia Ay.

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kỳ trên tia Ay. Vẽ đoạn thẳng MC. Trên tia Bx lấy điểm D sao cho $CD = CM$. Ta phải chứng minh $\triangle MCD$ đều.

Thật vậy, $\triangle MAC$ và $\triangle DBC$ có $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, $CM = CD$, $CA = CB$.

Do đó $\triangle MAC = \triangle DBC$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

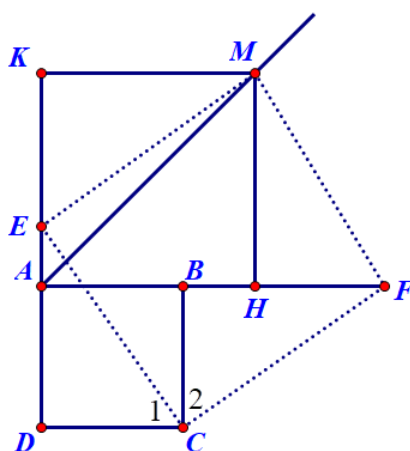
Suy ra $C_1 = C_2 \Rightarrow \angle MCD = \angle BCA = 60^\circ$.

$\triangle MCD$ cân có $\angle MCD = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

c) Kết luận

Quỹ tích của điểm M là tia $Ay \perp AC$ (tia Ay nằm trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B).

9.9 (H.9.14)



Hình 9.14

$\triangle DCE = \triangle BCF$ (c.g.c) $\Rightarrow CE = CF$ và $C_1 = C_2$.

Ta có $C_1 + BCE = 90^\circ \Rightarrow C_2 + BCE = 90^\circ$.

Hình bình hành $ECFM$ có $CE = CF$ và $ECF = 90^\circ$ nên $ECFM$ là hình vuông $\Rightarrow ME = MF$.

Vẽ $MH \perp AB$, $MK \perp AD$ ta được $HMK = 90^\circ$.

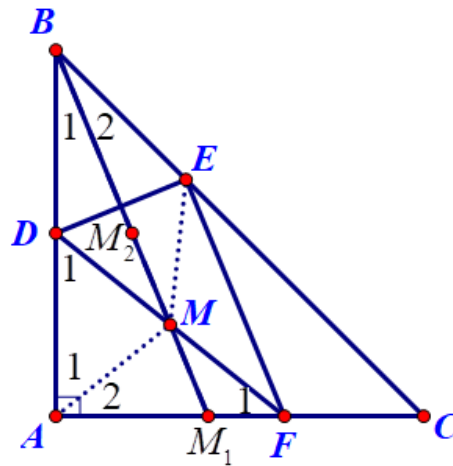
Mặt khác $EMF = 90^\circ$ nên $HMF = KME$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn).

Suy ra $\triangle HMF = \triangle KME$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow MH = MK$.

Điểm M nằm trong góc vuông EAB và cách đều hai cạnh của góc này nên M nằm trên tia phân giác Ax của góc EAB .

Lưu ý: Bài toán không hỏi quỹ tích của điểm M , mà chỉ hỏi điểm M nằm trên đường nào do đó trong lời giải ta chỉ trình bày nội dung của phần thuận.

9.10 (H.9.15)



Hình 9.15

a) Phần thuận

Xét $\triangle EDF$ vuông tại E có EM là đường trung tuyến nên $EM = \frac{1}{2}DF = DM$.

$\triangle BDM = \triangle BEM$ (c.c.c) $\Rightarrow B_1 = B_2$.

Vậy điểm M nằm trên tia phân giác Bx của góc B .

Giới hạn:

* Khi điểm D trùng với A thì điểm M trùng với điểm M_1 (M_1 là giao điểm của tia Bx với AC).

* Khi điểm D trùng với B thì điểm M trùng với điểm M_2 (M_2 là trung điểm của BM_1).

b) Phần đảo

Lấy điểm M bất kỳ trên đoạn thẳng M_1M_2 .

Lấy điểm D trên cạnh AD sao cho $MD = MA$ 1

Lấy điểm E trên cạnh BC sao cho $BE = BD$.

Tia DM cắt cạnh AC tại F .

Ta phải chứng minh M là trung điểm của DF và $EF \perp DE$.

Thật vậy $\triangle BMD = \triangle BME$ (c.g.c) $\Rightarrow MD = ME$ 2

$\triangle MAD$ cân $\Rightarrow D_1 = A_1$.

Ta có $D_1 + F_1 = 90^\circ$, $A_1 + A_2 = 90^\circ$ mà $D_1 = A_1$ nên $F_1 = A_2 \Rightarrow MF = MA$ 3

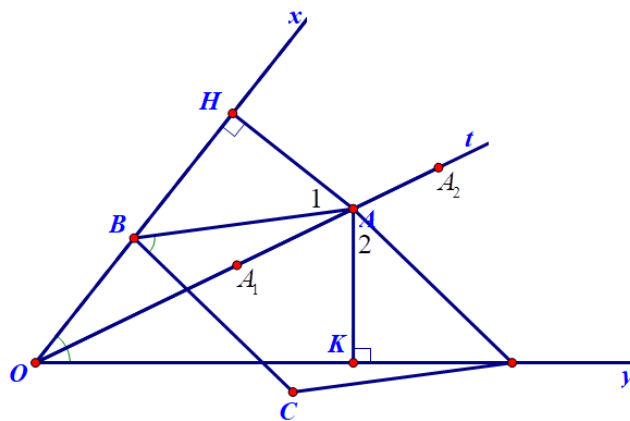
Từ 1, 2, 3 suy ra $MD = ME = MF$.

Vậy M là trung điểm của DF và $\triangle DEF$ vuông tại $E \Rightarrow EF \perp DE$.

c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm M là đoạn thẳng M_1M_2 của tia phân giác của góc B .

9.11 (H.9.16)



Hình 9.16

a) Phần thuận

Vẽ $AH \perp Ox$, $AK \perp Oy$. Khi đó $HAK = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Mặt khác $BAD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ nên $HAK = BAD \Rightarrow A_1 = A_2$.

$\triangle HAB = \triangle KAD$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AH = AK$.

Điểm A nằm trong góc xOy và cách đều hai cạnh của góc xOy nên A nằm trên tia phân giác Ot của góc xOy .

Giới hạn: Khi điểm B trùng với O hoặc khi D trùng với O thì điểm A trùng với A_1 ($A_1 \in Ot$ và cách O một khoảng $OA_1 = a$). Khi $AB \perp Ox$ thì $AD \perp Oy$, điểm A trùng với điểm A_2 ($A_2 \in Ot$ và cách O một khoảng $OA_2 = 2a$).

b) Phần đảo

Lấy điểm A bất kì trên đoạn thẳng A_1A_2 . Vẽ $AH \perp Ox$, $AK \perp Oy$ thì $AH = AK$ (tính chất tia phân giác). Trên đoạn thẳng HO lấy điểm B , trên tia Ky lấy điểm D sao cho $AD = AB = a$. Vẽ hình bình hành $ABCD$, ta phải chứng minh $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\hat{B} = 60^\circ$.

Thật vậy, hình bình hành $ABCD$ có $AB = AD = a$ nên nó là hình thoi cạnh a .

$$\triangle HAB = \triangle KAD \text{ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)} \Rightarrow A_1 = A_2$$

$$\Rightarrow \angle BAD = \angle HAK = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \text{ Do đó } \hat{B} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

c, Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm A là đoạn A_1A_2 thuộc tia phân giác Ot của góc xOy .

9.12. (H.9.17)

$$\text{Ta có: } D_1 = D_2, D_3 = D_4 \Rightarrow D_2 + D_3 = D_1 + D_4 = 90^\circ : 2 = 45^\circ$$

Trên tia đối của tia AB lấy N sao cho

$$AN = CF$$

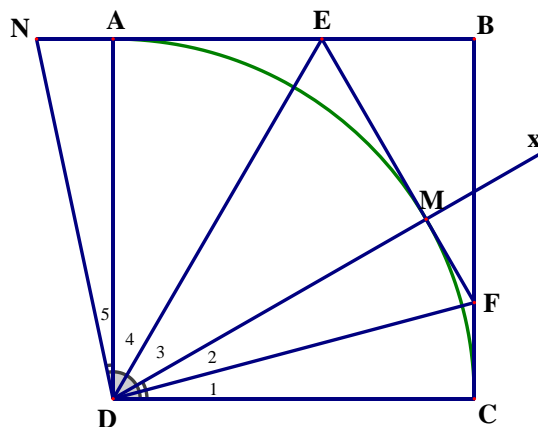
$$\triangle AND = \triangle CDF \text{ c.g.c}$$

$$\Rightarrow DN = DF \text{ và } D_5 = D_1$$

$$\text{Do đó } D_4 + D_5 = D_4 + D_1 = 45^\circ. \text{ Suy ra } \angle NDF = \angle FDE = 45^\circ$$

$$\triangle NDE = \triangle FDE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle NED = \angle FED$$

$$\text{Do đó } \triangle DAE = \triangle DAE \text{ (g.c.g)} \Rightarrow DM = DA = 4\text{cm}.$$



Điểm M cách điểm D cho trước một khoảng không đổi là 4cm nên điểm M nằm trên đường tròn tâm D , bán kính 4cm .

9.13. (H.9.18)

a) Phần thuận

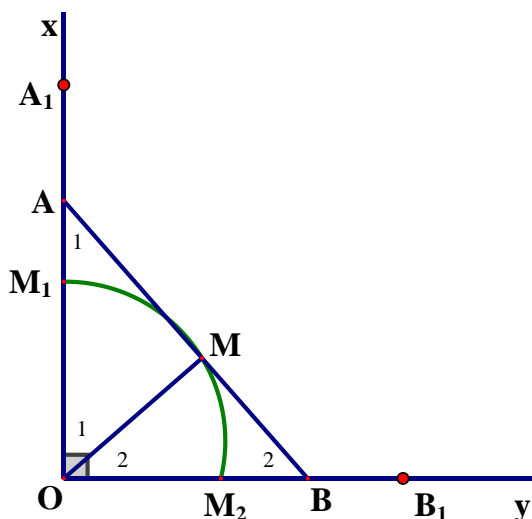
Vẽ đoạn thẳng OM ta có $OM = \frac{1}{2} AB = a$ (tính chất trung tuyến của tam giác vuông).

Điểm M cách điểm O cho trước một khoảng a cho trước nên M nằm trên đường tròn tâm O , bán kính a .

Giới hạn:

- Khi điểm B di động tới O thì A tới điểm $A_1 \in Ox$ và $OA_1 = 2a$. Khi đó điểm M di động tới M_1 là trung điểm của của OA_1 .
- Khi điểm A di động tới O thì B tới điểm $B_1 \in Oy$ và $OB_1 = 2a$. Khi đó điểm M di động tới M_2 là trung điểm của của OB_1 .

Vậy điểm M nằm trên cung M_1M_2 của đường tròn tâm, bán kính a

**b) Phần đảo**

Lấy điểm M bất kì trên cung M_1M_2 .

Trên tia Ox lấy điểm A sao cho $MA = MO$. (1)

Tia AM cắt tia Oy tại B. Ta phải chứng minh M là trung điểm của AB và $AB = 2a$.

Thật vậy, vì $MA = MO$ nên $\triangle MOA$ cân $\Rightarrow \angle A_1 = \angle O_1$.

Xét $\triangle AOB$ vuông tại O có $\angle A_1 + \angle B_2 = 90^\circ \Rightarrow \angle O_1 + \angle B_2 = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle O_2 = \angle B_2$ (cùng phụ với $\angle O_1$)

Do đó $\triangle MOB$ cân $\Rightarrow MB = MO$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MA = MB = MO = a$, do đó $AB = 2a$.

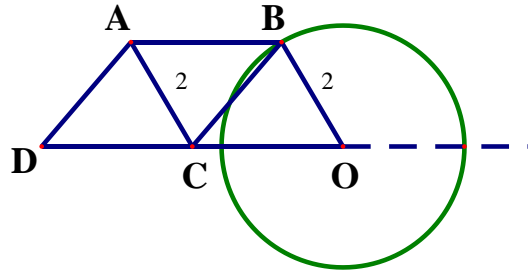
c) Kết luận:

Quỹ tích của điểm M là cung M_1M_2 của đường tròn tâm O, bán kính a.

9.14. (H.9.19)**a) Phần thuận**

Gọi O là điểm đối xứng với D qua C thì O là một điểm cố định.

Tứ giác $ABOC$ có $AB \parallel OC$; $AB = OC$ (vì cùng bằng CD) nên $ABOC$ là hình bình hành
 $\Rightarrow OB = AC = 2\text{cm}$. Điểm B cách điểm O cố định một khoảng 2cm nên điểm B nằm trên đường tròn tâm O bán kính 2cm



Giới hạn: Vì B, C, D không thẳng hàng nên B nằm trên đường tròn tâm O , bán kính 2cm trừ giao điểm của đường tròn này với đường thẳng CD .

b) Phần đảo

Lấy điểm B bất kì trên đường tròn tâm O bán kính 2cm (trừ các giao điểm của đường tròn này với đường thẳng CD). Suy ra $OB = 2\text{cm}$. Vẽ hình bình hành $ABCD$. Ta chứng minh hình bình hành có $AC = 2\text{cm}$.

Thật vậy, $AB \parallel CD$ và $AB = CD \Rightarrow AB \parallel CO$ và $AB = CO$. Do đó tứ giác $ABOC$ là hình bình hành, suy ra $AC = OB = 2\text{cm}$. c) Kết luận

Vậy quỹ tích của điểm B là đường tròn tâm O bán kính 2cm .

Chương II: ĐA GIÁC – DIỆN TÍCH ĐA GIÁC**Chuyên đề 10. ĐA GIÁC – ĐA GIÁC ĐỀU**

10.1. Gọi số cạnh của đa giác là n , điều kiện $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$

$$\text{Ta có } 14 < \frac{n(n-3)}{2} < 27 \Leftrightarrow 28 < n^2 - 3n < 54$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{11}{2}\right)^2 < \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 < \left(\frac{15}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{11}{2} < n - \frac{3}{2} < \frac{15}{2}$$

$$\Leftrightarrow 7 < n < 9 \Rightarrow n = 8$$

10.2. Tổng các góc trong trừ đi một góc của đa giác bằng 2570°

$$\text{nên } (n-2) \cdot 180^\circ - A = 2570^\circ$$

$$\Leftrightarrow A = (n-2) \cdot 180^\circ - 2570^\circ \text{ Vì } 0^\circ < A < 180^\circ \Rightarrow 0^\circ < (n-2) \cdot 180^\circ - 2570^\circ < 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 16\frac{5}{18} < n < 17\frac{5}{18}. \text{ Vì } n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 17. \text{ Vậy đa giác đó có 17 cạnh}$$

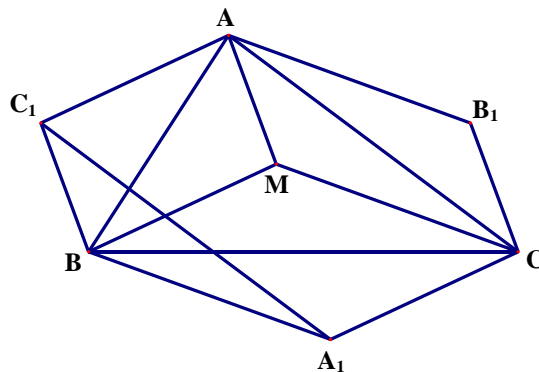
10.3.

a) Ta có $AMBC_1, BMCA_1, CMAB_1$ là các hình bình hành.

Suy ra các đường chéo AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy (xem bài 7.7)

b) Theo tính chất các hình bình hành ta có:

$AC_1 = A_1C = MB; AB_1 = A_1B = MC; BC_1 = B_1C = AM$ Để hình lục giác $AB_1CA_1BC_1$ có các cạnh bằng nhau thì $MB = MC = AM$ hay điểm M là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC .



10.4. Xét các đường chéo xuất phát từ cùng một đỉnh. Ta chọn một đỉnh nào đó rồi đánh số 1 các đỉnh tiếp theo theo chiều kim đồng hồ đánh lần lượt số 2, 3,... Đường chéo ngắn nhất nối đỉnh 1 với đỉnh 3.

Đường chéo dài nhất là đường chéo nối đỉnh 1 với đỉnh 11. Từ đó ta có 9 loại độ dài khác nhau.

$$\text{10.5. Ta có: } DBE = \frac{1}{2}ABC \Rightarrow B_1 + B_2 = \frac{1}{2}ABC. (1)$$

$$\text{Vì } EA = AB \Rightarrow \triangle EAB \text{ cân}$$

$$\Rightarrow E_2 = B_1 \Rightarrow B_1 = 90^\circ - \frac{EAB}{2}$$

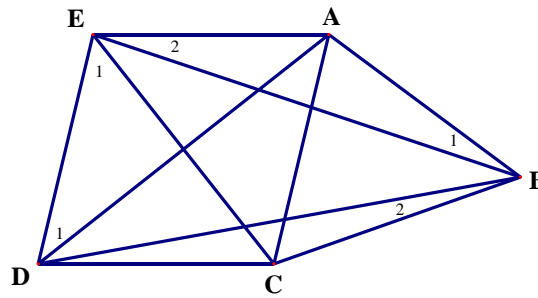
$$\text{Vì } CB = CD \Rightarrow B_2 = 90^\circ - \frac{BCD}{2}$$

$$\text{Thay vào (1) ta được: } 90^\circ - \frac{BCD}{2} + 90^\circ - \frac{EAB}{2} = \frac{1}{2}ABC$$

$$\Rightarrow EAB + ABC + BCD = 360^\circ.$$

Tổng các góc của ngũ giác bằng 540° .

$$\Rightarrow \angle CDE + \angle DEA = 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$$



$$\Rightarrow \angle D_1 + \angle E_1 = 90^\circ - \frac{\angle CDE}{2} + 90^\circ - \frac{\angle DEA}{2} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp CE.$$

Mặt khác $\triangle EAD$ cân tại E, $\triangle CDE$ cân tại D mà $AD \perp CE$ nên AD và CE tại trung điểm mỗi đường $\Rightarrow AEDC$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow AC = DE \Rightarrow AB = BC = CA \Rightarrow \triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$$

Vậy $\angle ABC = 60^\circ$

10. 6. a) $\triangle ABC$ và $\triangle BCD$ có $AB = BC$; $\angle ABC = \angle BCD$; $BC = CD$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle BCD \text{ c.g.c} \Rightarrow AC = BD.$$

$\triangle ABD$ và $\triangle DCA$ có $AB = DC$; $AC = DB$; AD chung

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle DCA \text{ c.c.c} \Rightarrow \angle BAD = \angle CDA$$

$$\Rightarrow \triangle BAH = \triangle CDK \Rightarrow BH = CK \Rightarrow BC \parallel CD \Rightarrow ABCD \text{ là hình thang cân.}$$

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có $ABCE$ là hình thang cân.

Ta có: $\triangle ABC$ cân $\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA$ mà $\angle A = \angle C \Rightarrow \angle CAE = \angle ACD$

$$\Rightarrow \triangle ACE = \triangle CDA \text{ c.g.c} \Rightarrow ACDE \text{ là hình thang cân.}$$

(Chứng minh tương tự câu a).

Ta có:

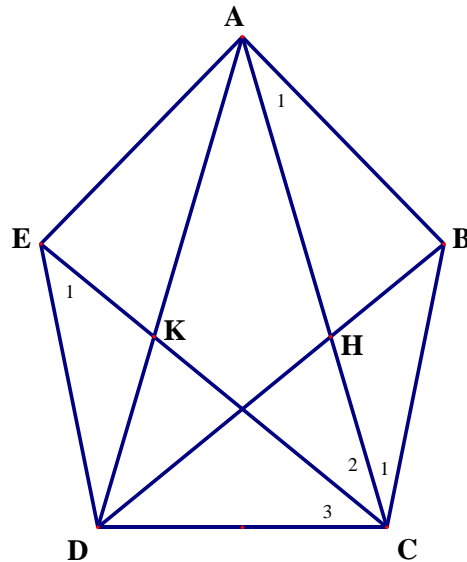
$AB \parallel CK$ ($ABCD$ là hình thang cân),

$BC \parallel AK$ ($ABCE$ là hình thang cân),

Mà $AB = BC$. Suy ra $ABCK$ là hình thoi $\Rightarrow \angle A_1 = \angle C_1 = \angle C_2$

$ACDE$ là hình thang cân $\Rightarrow \angle C_2 = \angle E_1 \Rightarrow \angle E_1 = \angle C_1 \Rightarrow \angle C_1 = \angle C_3$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDE \Rightarrow \angle BAC = \angle CDE$$



Chúng minh tương tự, ta được $BAE = AED$

Do đó: $A = B = C = D = E$ và $AB = BC = CD = DE = EA$ (gt).

$\Rightarrow ABCDE$ là ngũ giác đều.

10.7. Nối CE , gọi K là trung điểm của CE . Ta có QK là đường trung bình của tam giác ACE

suy ra $QK \parallel AC$ và $QK = \frac{1}{2}AC$.

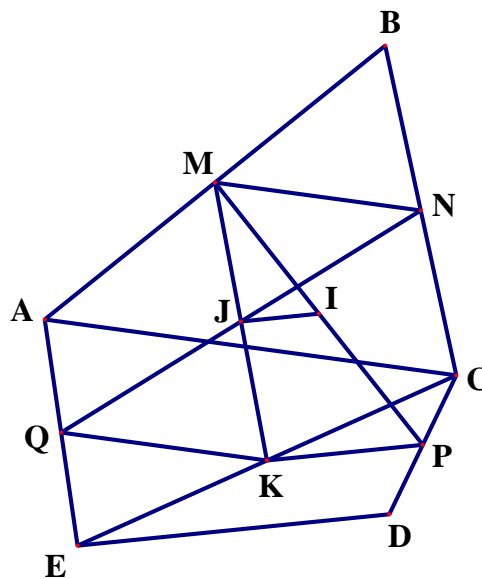
M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC . Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC , suy ra

$MN \parallel AC$ và $MN = \frac{1}{2}AC$. Từ đó ta có: $MN \parallel QK$ và $MN = QK \Rightarrow MNKQ$ là hình bình hành

$\Rightarrow M, J, K$ thẳng hàng và $MJ = JK$.

Xét $\triangle MKP$ có I, J lần lượt là trung điểm của MP và MK . Ta có IJ là đường trung bình của tam giác

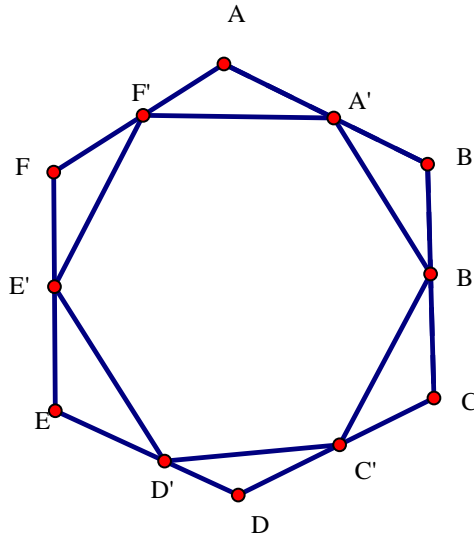
$MKP \Rightarrow IJ \parallel PK$ và $IJ = \frac{1}{2}PK$ (1)



Xét $\triangle CDE$, PK là đường trung bình $\Rightarrow PK \parallel DE$; $PK = \frac{1}{2}DE$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IJ // DE$ và $IJ = \frac{1}{4} DE$.

10.8



Nhận thấy $\triangle AA'F'$; $\triangle BA'B'$; $\triangle AB'C'$; $\triangle DC'D'$; $\triangle ED'E'$; $\triangle FE'F'$ bằng nhau (c.g.c)
 $\Rightarrow A'B' = B'C' = C'D' = E'F' = A'F'$ (1)

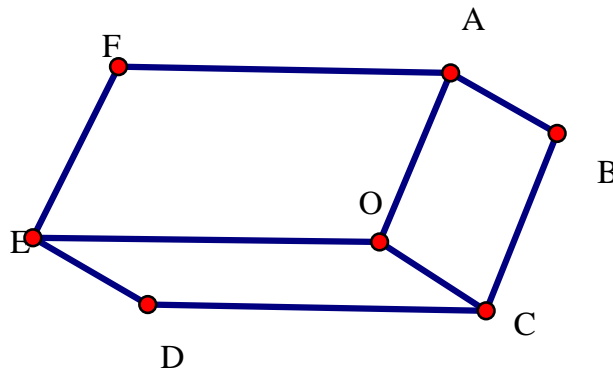
$\triangle BA'B'$ có $BA' = BB'$ $\Rightarrow \triangle BA'B'$ cân tại B $\Rightarrow \angle B'A'B' = \angle BB'A' = \frac{180^\circ - B}{2} = 30^\circ$

Tương tự đối với $\triangle AA'F'$ ta có $\angle AA'F' = \angle AF'A' = 30^\circ \Rightarrow \angle B'A'F' = 180^\circ - \angle AA'F' - \angle B'A'B' = 120^\circ$

Chứng minh tương tự ta được $\angle A'B'C' = \angle B'C'D' = \angle C'D'E' = \angle D'E'F' = \angle E'F'A' = 120^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

10.9



Lục giác ABCDEF không nhất thiết phải là lục giác đều. Thật vậy

* Trên mặt phẳng lấy điểm O tùy ý, vẽ 3 tia OA; OB; OC sao cho độ dài 3 đoạn OA, OB, OC đôi một khác nhau và độ lớn của 3 góc AOB; BOC; COA cũng đôi một khác nhau

* Vẽ các hình bình hành OABC, OCDE, OAFE khi đó ta có được lục giác lồi ABCDEF

Rõ ràng $AB // CD$, $AB = DE$; $BC // EF$, $BC = EF$, $CD // FA$, $CD = FA$ nhưng ABCDEF không phải lục giác đều.

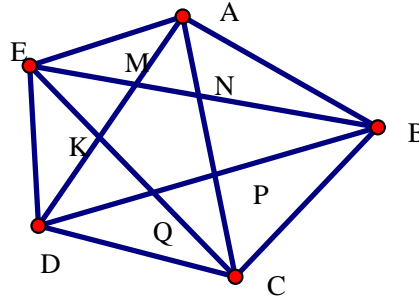
10.10.

Giả sử AD là đường chéo lớn nhất của ngũ giác ABCDE. Gọi O là giao điểm của AC và BD

Xét $\triangle AOD$ có $AD < OA + OD$ mà $OA < AC$; $OD < BD$ nên $AD < AC + BD$

Mặt khác $AC \leq AD$; $BD \leq AD$ nên AD, AC, BD là độ dài 3 cạnh của một tam giác

10.11.



Áp dụng tính chất về quan hệ giữa các cạnh của tam giác, ta có

$$AB + BC + CD + DE + EA < (AN + NB) + (BP + PC) + (CQ + QD) + (DK + KE) + (EM + MA) \quad (1)$$

Mặt khác $AN + PC < AC$; $BP + DQ < BD$

$$CQ + KE < CE; DK + MA < DA$$

$$EM + NB < EB \quad (2) \quad . \text{ Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh}$$

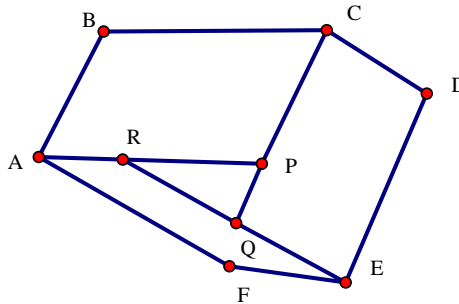
Nhận xét : Những bài toán về bất đẳng thức bạn nên đưa về bất đẳng thức tam giác.

10.12. Gọi đa giác đều trên có n cạnh, để xếp các đa giác đều bằng nhau không có khe hở thì

$$360^\circ : \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \Leftrightarrow 360n : (n-2) \cdot 180^\circ \Leftrightarrow 2n : (n-2) \Leftrightarrow 2n - 4 + 4 : (n-2) \Leftrightarrow 4 : (n-2) \Rightarrow n \in \{3; 4; 6\}$$

Vậy đa giác có nhiều nhất là 6 cạnh.

10.13.



$$\text{Theo giả thiết } A = B = C = D = E = F = \frac{(6-2)180^\circ}{6} = 120^\circ$$

Giả sử $BC > EF$; $DE > AB$; $AF > CD$.

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC

Qua C kẻ đường thẳng song song với DE

Qua E kẻ đường thẳng song song với FA

Chúng cắt nhau tạo thành tam giác PQR

$$\text{Ta có } ABCP \text{ là hình bình hành nên } APC = B = 120^\circ \Rightarrow QPR = 60^\circ$$

Tương tự $PRQ = 60^\circ$, do đó ΔPQR đều, $PR = PQ = QR$, tức là

$$BC - EF = DE - AB = AF - CD$$

Ngược lại, giả sử có 6 đoạn thẳng $AB_1; BC_1; CD_1; DE_1; EF_1; FA_1$

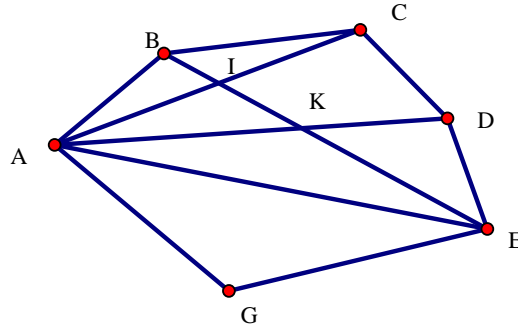
Thoả mãn điều kiện $|BC_1 - EF_1| = |DE_1 - AB_1| = |AF_1 - CD_1| = a$. Dựng tam giác đều PQR với cạnh bằng a . Đặt trên các tia QP, RQ và PR các đoạn thẳng tương ứng bằng đoạn thẳng lớn hơn trong các cặp AB_1 và DE_1 ; CD_1 và FA_1 ; EF_1 và BC_1 . Dựng thêm các hình bình hành từ đó ta xác định được lục giác cần tìm

10.14 .

Xét đường chéo dài nhất của lục giác

Trường hợp 1 : Trường hợp đường chéo dài nhất của lục giác chia lục giác thành một ngũ giác và một tam giác

Giả sử đường chéo dài nhất của một lục giác là AE. Chia lục giác thành ngũ giác và tam giác. Nếu 3 đường chéo từ đỉnh A không là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì $AC + AD \leq AE$ (1)



Ta sẽ chứng minh 3 đường chéo kẻ từ E sẽ thỏa mãn tính chất đó.

Gọi I là giao điểm của EB và AK, K là giao điểm của EC và AD. Ta có

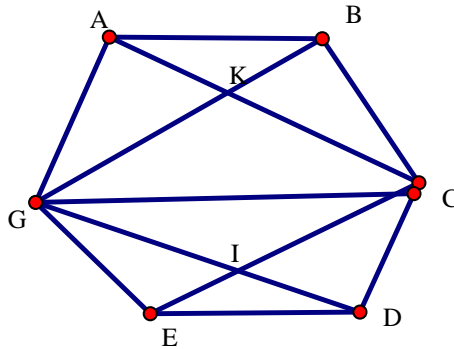
$$AI + AK < AC + AD \text{ kết hợp với (1)} \Rightarrow AI + AK < AE \text{ (2)}$$

$$\text{Ta lại có } AI + IE + AK + KE > AE \text{ (3)}$$

$$\text{Mặt khác } EB + EC > EI + EK \text{ nên từ (3)}$$

$$\Rightarrow EB + EC > AE, \quad \text{Vậy EA, EB, EC làm thành 3 cạnh của một tam giác}$$

Trường hợp 2 :



Trường hợp đường chéo dài nhất của lục giác chia lục giác thành hai tứ giác

Giả sử AD là đường chéo dài nhất của lục giác chia lục giác thành hai tứ giác. Nếu 3 đường chéo xuất phát từ A không tạo thành 3 cạnh của một tam giác thì $AC + AE \leq AD$ (4) Gọi I, K lần lượt là giao điểm hai đường chéo của tứ giác ADEF và ABCD.

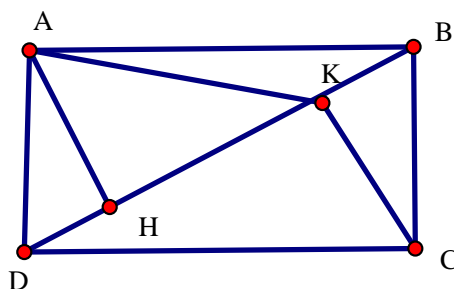
$$\text{Từ (4) suy ra } AI + AK < AC + AE < AD \text{ (5)}$$

$$\text{Ta lại có } AI + DI + AK + DK > 2AD. \text{ Kết hợp với (5) suy ra } DI + DK > AD. \text{ Do đó}$$

$$DB + DF > DA$$

$$\text{Vậy DA, DB, DF làm thành 3 cạnh của một tam giác}$$

10.15 .



Tổng các góc của lục giác ABCDEG là $(6 - 2) \cdot 180^0 = 720^0$ Theo giả thiết ta có

$$A + E + C = B + D + G = 360^0$$

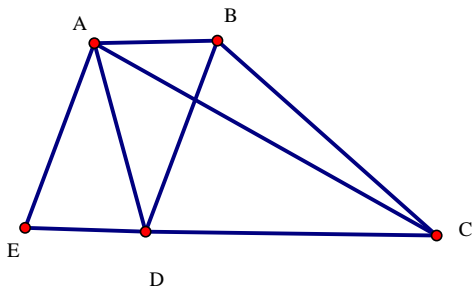
Dựng $EDK = ABC$ và $DK = BC \Rightarrow \Delta EDK = \Delta ABC(c.g.c) \Rightarrow EK = AC$ (1)

$$\text{Từ } EDK + CDE + AGE = 360^0 \Rightarrow CDK = AGE$$

Từ (1) và (2) suy ra ACKE là hình bình hành

$$\Delta CDK = \Delta AGE(c.g.c) \Rightarrow CK = AE(2)$$

$ACD + DCK + CAE = 180^0$ mà $DCK = GAE$ nên $ACD + GAE + CAE = 180^0 \Rightarrow CD // AG$. Tương tự chứng minh ta được $AB // DE$; $BC // EG$



Chuyên đề 11. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

11.1 Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông BCD, ta có

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 \text{ nên } BC = 5\text{cm}$$

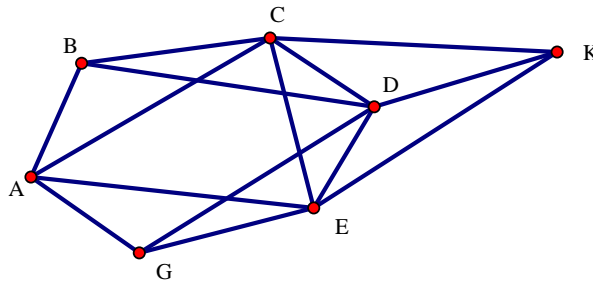
$$CH = \frac{2S_{BCD}}{BD} = \frac{BC \cdot CD}{BD} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4(\text{cm})$$

Xét tam giác vuông CDH, ta có $DH^2 = CD^2 - CH^2 = 4^2 - 2,4^2 = 10,24 = 3,2^2$ Nên $DH = 3,2 \text{ cm}$. Kẻ

AK vuông góc BD, Ta có $S_{ABD} = S_{CBD}$

$$\text{Nên } AK = CH = 2,4 \text{ cm}. \text{ Vậy } S_{ADH} = \frac{1}{2} DH \cdot AK = \frac{1}{2} 3,2 \cdot 2,4 = 3,86 (\text{cm}^2)$$

11.2.



Qua A kẻ đường thẳng song song với BD, cắt đường thẳng CD tại E \Rightarrow ABDE là hình bình hành

$$\Rightarrow AE = BD = 12\text{cm}, DE = AB = 5 \text{ cm} \Rightarrow CE = 20\text{cm}$$

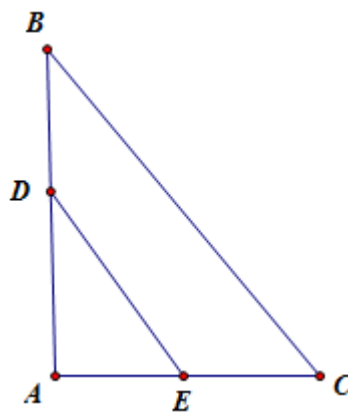
Ta có $AE^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 400 = 20^2 = CE^2 \Rightarrow \triangle ACE$ vuông tại A

$$\Rightarrow S_{ACE} = \frac{1}{2} AC \cdot AE = \frac{1}{2} 16 \cdot 12 = 96(\text{cm}^2)$$

Mặt khác $S_{ADE} = S_{ABC}$ (vì $AB = DE$ và đường cao kẻ từ A và C của hai tam giác đó bằng nhau)

$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ADE} + S_{ACD} = S_{ACE} \Rightarrow S_{ABCD} = 96\text{cm}^2$$

11.3



$$\text{Ta có } S_{ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot AE = \frac{1}{2} AD \cdot BD$$

$$\Rightarrow S_{ADE} = \frac{1}{2} AD (AB - AD) = \frac{1}{2} (AB \cdot AD - AD^2)$$

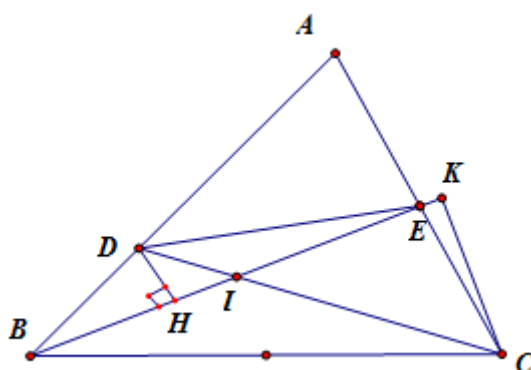
$$\Rightarrow S_{ADE} = -\frac{1}{2} \left(AD^2 - AB \cdot AD + \frac{AB^2}{4} \right) + \frac{1}{8} AB^2$$

$$\Rightarrow S_{ADE} = -\frac{1}{2} \left(AD - \frac{AB}{2} \right)^2 + \frac{1}{8} AB^2 \leq \frac{AB^2}{8}$$

Vậy $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3}{8} AB^2$ không đổi

Do đó min $S_{BDEC} = \frac{3}{8} AB^2$ khi B, D lần lượt là trung điểm AB, AC

11.4



Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của D, C trên BE

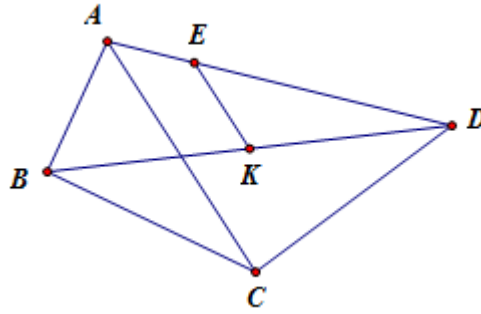
$$S_{ABE} = S_{BCE} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

$$S_{CDB} = \frac{1}{3} S_{ABC}$$

$$S_{BDE} = \frac{1}{3} S_{ABE} = \frac{1}{3} S_{CBE}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{S_{BDE}}{S_{CBE}} = \frac{DH}{CK} \Rightarrow S_{IBC} = 3S_{IBD} = \frac{3}{4} S_{CDB} = \frac{1}{4} S$$

11.5



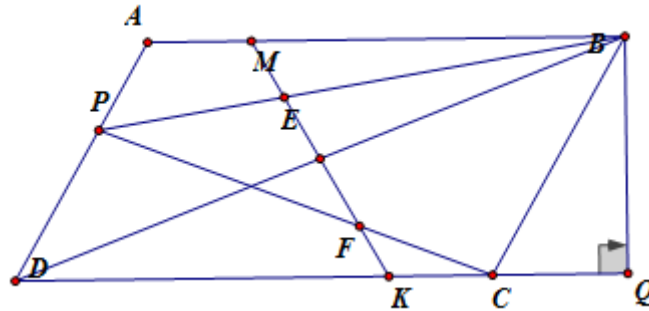
Do $KE \parallel CA$ nên $S_{CAE} = S_{CAK}$

Vậy $S_{CBAE} = S_{ABC} + S_{CEA} = S_{ABC} + S_{CKA} = S_{ABCK}$

$$= S_{ABCK} = S_{CKB} + S_{KBA} = \frac{1}{2} S_{BCD} + \frac{1}{2} S_{BAD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

11.6



Ta có $\triangle BCD$ và $\triangle BCP$ có chung cạnh BC và đường cao ứng với cạnh BC bằng nhau nên

$$S_{BCD} = S_{BCP} \Rightarrow S_{BCP} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \quad (1)$$

Ta có $AM = CK, AB = CD \Rightarrow BM = DK$

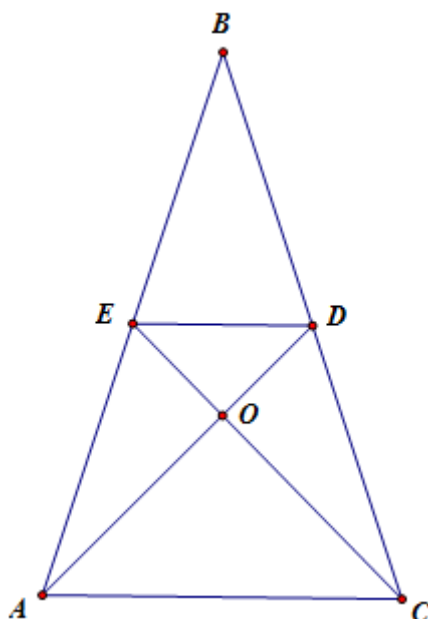
Kẻ $BQ \perp CD$, ta có

$$S_{BMKC} = \frac{(BM + CK)}{2} \cdot BQ = \frac{(DK + KC)}{2} \cdot BQ = \frac{CD \cdot BQ}{2} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

Suy ra $S_{PBC} = S_{BMKC}$ hay $S_{PEF} + S_{BEFC} = S_{BME} + S_{KFC} + S_{BEFC}$

Vậy $S_{PEF} = S_{BME} + S_{KFC}$

11.7



Ta có AD, BE là các đường trung tuyến nên O là trọng tâm suy ra :

$$OB = 2OE; OA = 2OD$$

Áp dụng định lý Py – ta – go ta có

$$OA^2 + OE^2 = AE^2 = \frac{b^2}{4}$$

$$OB^2 + OD^2 = BD^2 = \frac{a^2}{4}$$

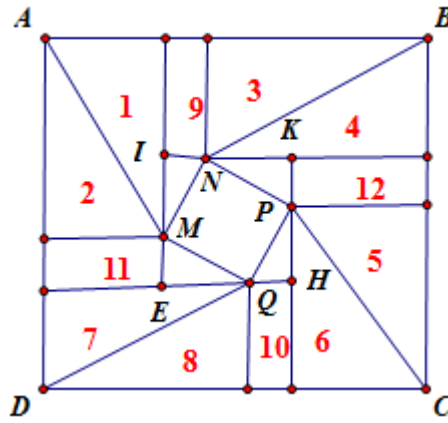
$$\Rightarrow (OA^2 + OB^2) + (OE^2 + OD^2) = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$\Rightarrow (OA^2 + OB^2) + \frac{OA^2 + OB^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$AB^2 + \frac{AB^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$AB^2 = \frac{a^2 + b^2}{5}$$

Vậy diện tích hình vuông cạnh AB là: $\frac{a^2 + b^2}{5}$ (đvdt)



Qua M, N, P kẻ các đường thẳng song song với cạnh hình vuông ABCD như hình vẽ. khi đó ra được IKHE là hình vuông và các tam giác INM, KPN, HQP, EMQ bằng nhau

Ta có

$$S_{AMNB} + S_{CDQP} = S_1 + S_9 + S_3 + S_{IMN} + S_8 + S_6 + S_{10} + S_{HPQ}$$

$$S_{AMQD} + S_{BNCP} = S_2 + S_{11} + S_7 + S_{EMQ} + S_4 + S_{12} + S_9 + S_{KPN}$$

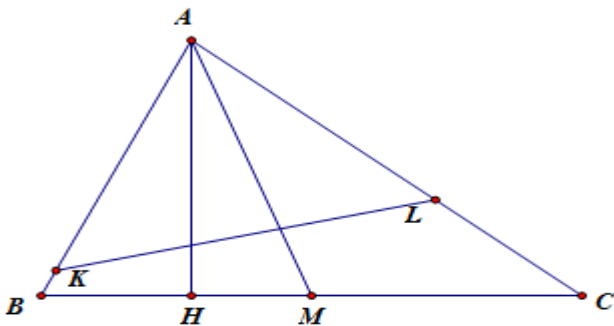
$$\text{Mà } S_1 = S_2; S_3 = S_4; S_5 = S_6; S_7 = S_8$$

$$S_9 + S_{10} = (AD - IE).IN; S_{11} + S_{12} = (AB - IK).ME$$

$$\Rightarrow S_9 + S_{10} = S_{11} + S_{12}$$

$$\text{Do đó } S_{AMNH} + S_{CDQP} = S_{ADQM} + S_{BCPN}$$

11.9



$$\text{Ta có } S_{AKL} = \frac{1}{2} AK \cdot AL = \frac{1}{2} AH^2; S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \text{ Gọi } M \text{ là trung điểm của } BC, \text{ ta có}$$

$$BM = MC = AM \Rightarrow BC = 2 \cdot AM$$

$$\text{Mặt khác } 2AH \leq BC$$

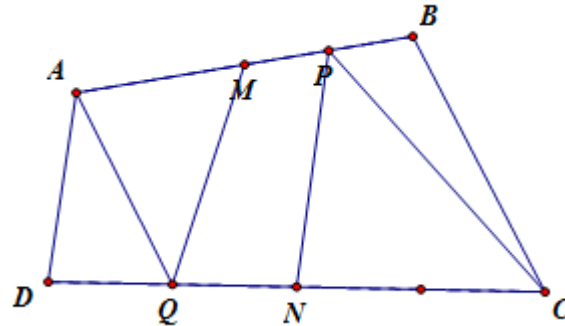
$$\text{Từ đó suy ra : } S_{AKL} = \frac{1}{2} AH^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC}$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$H \equiv M \text{ hay}$$

ΔABC vuông cân

11.10



$$\text{Ta có : } AP = \frac{3}{4}AB \Rightarrow S_{ACP} = \frac{3}{4}S_{ABC}$$

$$CQ = \frac{3}{4}CD \Rightarrow S_{ACQ} = \frac{3}{4}S_{ACD} \Rightarrow S_{APCQ} + S_{ACQ} = \frac{3}{4}S_{ABC} + \frac{3}{4}S_{ACD} \Rightarrow S_{APCQ} = \frac{3}{4}S_{ABCD}$$

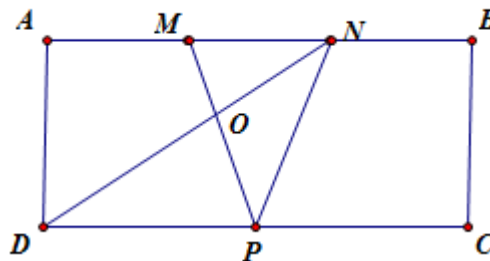
$$\text{Ta có } MP = \frac{1}{3}AP \Rightarrow S_{PQM} = \frac{1}{3}S_{APQ}$$

$$NQ = \frac{1}{3}CQ \Rightarrow S_{PNQ} = \frac{1}{3}S_{PQC}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{3}S_{APCQ} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } S_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$$

11.11



$$\text{Ta có } S_{DPN} - S_{MNP} = S_{DOP} - S_{MON} = 7 \text{ cm}^2$$

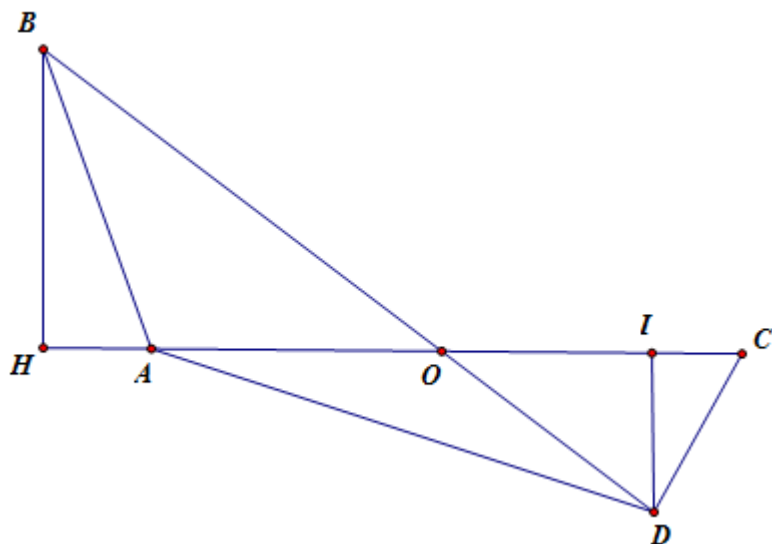
Mà

$$\frac{S_{MNP}}{S_{DPN}} = \frac{MN}{DP} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{DPN} - S_{MNP}} = \frac{2}{3-2} = 1 \Rightarrow S_{MNP} = 2.7 = 14 \text{ cm}^2$$

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = AB \cdot AD = 3MN \cdot AD = 6 \cdot S_{MNP} = 6 \cdot 14 = 84 \text{ cm}^2$$

11.12



Kê $BH \perp AO; DI \perp OC$

$$\Delta BHO \text{ có } BHO = 90^\circ; BOH = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{1}{2}BO$$

$$\Delta DIO \text{ có } DIO = 90^\circ; DOI = 30^\circ \Rightarrow DI = \frac{1}{2}DO$$

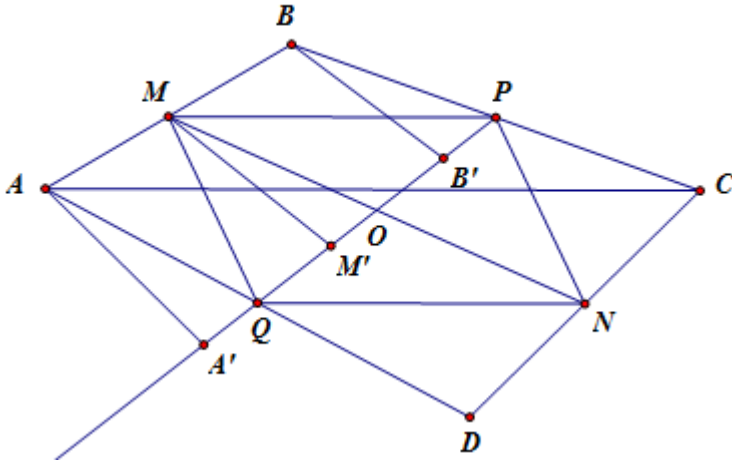
Ta có

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot BH + \frac{1}{2}AC \cdot DI$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot (BH + DI) = \frac{1}{2}AC \left(\frac{1}{2}BO + \frac{1}{2}DO \right)$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{1}{4}AC \cdot BD = \frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 12 = 30 \text{ cm}^2$$

11.13



Vẽ AA', BB', MM' vuông góc với PQ

Ta có : Tứ giác

$MNPQ$ là hình bình hành

$$\Rightarrow OQ = OP$$

$$S_{AOQ} = \frac{1}{2} OQ \cdot AA'; S_{BOP} = \frac{1}{2} OP \cdot BB'$$

$$S_{BDQ} + S_{BOP} = \frac{1}{2} OQ (AA' + BB') = \frac{1}{2} \frac{1}{2} PQ \cdot 2 \cdot MM' = \frac{1}{2} PQ \cdot MM'$$

$$S_{MPQ} = \frac{1}{2} PQ \cdot MM' \Rightarrow S_{NOQ} + S_{BOP} = S_{MPQ}$$

b) Chứng minh tương tự, ta có $S_{DOQ} + S_{COQ} = S_{NPQ}$.

$$\Rightarrow S_{AOQ} + S_{BOP} + S_{DOQ} + S_{COQ} = S_{MPQ} + S_{NPQ}$$

$$S_{AOD} + S_{BOC} = S_{MPNQ} \quad (1)$$

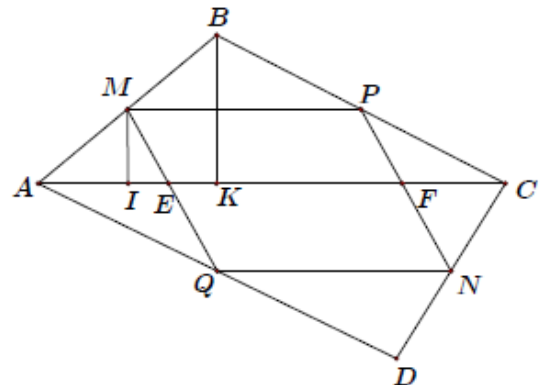
Kẻ $MI \perp AC, BK \perp AC$. Suy ra, ta có:

$$S_{MPFE} = MP \cdot MI = \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{2} BK = \frac{1}{4} AC \cdot BK$$

$$\text{Mà } S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK \Rightarrow S_{MPFE} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

$$\text{Tương tự, ta có: } S_{NQEF} = \frac{1}{2} S_{ACD}$$

$$\text{Do đó: } S_{MPNQ} = \frac{1}{2} S_{ABC} + \frac{1}{2} S_{ACD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \quad (2)$$



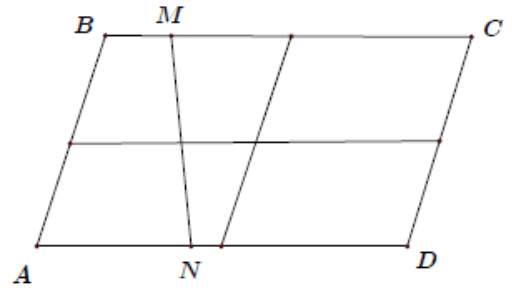
Từ (1) và (2) suy ra: $S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

11.14. Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình bình hành $ABCD$. Bởi vì nếu thế không thể tạo ra hai tứ giác mà là tam giác và ngũ giác.

Giả sử một đường thẳng cắt các cạnh BC và AD tại các điểm M và N .

Các hình thang $ABMN$ và $CDNM$ có các đường cao bằng nhau do đó tỉ số diện tích của chúng bằng tỉ số các đường trung bình. Tức là MN chia đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh AB và CD theo

tỉ số $\frac{2}{5}$. Tổng các điểm chia đường trung bình của hình bình hành theo tỉ số $\frac{2}{5}$ là 4.



Bởi số đường thẳng đã cho là 13 và đều phải đi qua một trong số bốn điểm nói trên mà $13 = 3 \cdot 4 + 1$, nên có một điểm thuộc ít nhất bốn đường thẳng. Tức là có ít nhất bốn đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

11.15. Theo bổ đề về đa giác bao, tồn tại một đa giác có n đỉnh ($n \leq 1000$) là n điểm trong số 1000 điểm đã cho và $1000 - n$ điểm còn lại đã cho nằm trong đa giác.

Ta nối một điểm đã cho chẳng hạn A_1 với n đỉnh của đa giác n cạnh, ta được n tam giác. Nối n điểm cùng nằm trong một tam giác đã tạo ra với ba đỉnh của tam giác đó, số tam giác tăng thêm hai (từ một thành ba). Tổng cộng ta có:

$$n + 2 \cdot (1000 - n - 1) = 1998 - n \text{ (tam giác)}.$$

Vì $n \leq 1000$ nên $1998 - n \geq 998$.

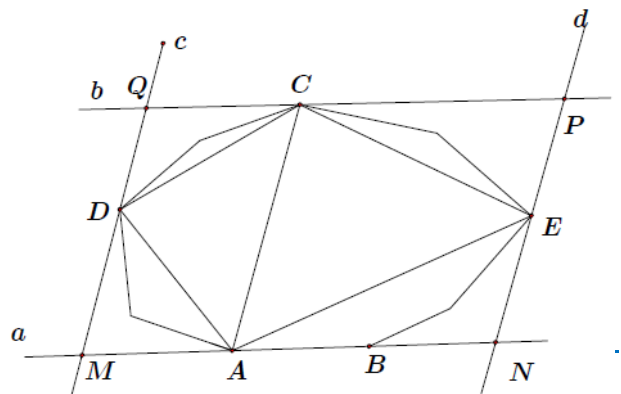
Tồn tại một tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{998}$ diện tích đa giác. Do đó tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{998}$.

11.16. Chia hình vuông thành chín hình vuông nhỏ có cạnh bằng $\frac{1}{3}$, diện tích mỗi hình vuông nhỏ là $\frac{1}{9}$. Vì $37 = 4 \cdot 9 + 1$ nên tồn tại một hình vuông nhỏ chứa năm điểm, ba điểm vào trong năm điểm ấy cùng là đỉnh một tam giác có diện tích của hình vuông nhỏ. Do đó các tam giác được tạo bởi ba trong năm điểm đó có diện tích không quá $\frac{1}{18}$.

11.17. Gọi a là đường thẳng chứa cạnh AB của đa giác.

Gọi C là đỉnh của đa giác cách xa AB nhất. Qua C kẻ đường thẳng $b \parallel AB$.

Gọi D, E là các đỉnh của đa giác cách xa A, C nhất về hai phía của AC . Qua D kẻ đường thẳng $c \parallel AC$, qua E kẻ đường thẳng $d \parallel AC$.



Gọi $MNPQ$ là hình bình hành tạo bởi các đường thẳng a, b, c, d các đỉnh của đa giác nằm trong hoặc trên biên của hình bình hành.

Hiển nhiên $S_{ACD} + S_{ACE} \leq S_{\text{đa giác}}$.

Mà $S_{ACD} + S_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot S_{MNPQ}$ nên $\frac{1}{2} \cdot S_{MNPQ} \leq S_{\text{đa giác}}$ tức là $S_{MNPQ} \leq 2 \cdot S_{\text{đa giác}}$.

11.18. Vẽ hình bình hành $ABCQ; CDER; AFEP$.

Ta có: $S_{ABCDREF} = 2 \cdot S_{APE} + 2 \cdot S_{CER} + 2 \cdot S_{ACQ} + S_{PQR}$

$\Rightarrow 2 \cdot S_{AEC} = S_{ABCDREF} - S_{PQR} \geq S_{ABCD}$.

Vậy $S_{AEC} \geq \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$.

11.19. Ta có:

$$S_{ACG} = \frac{1}{2} S_{ACD}, S_{ACI} = \frac{1}{2} S_{ACB} \Rightarrow S_{AGCI} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } S_{DEBH} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{AGCI} + S_{DEBH} = S_{ABCD}$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = S_{IBM} + S_{CEN} + S_{DGP} + S_{AHQ}.$$

11.20. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có:

$$S_{PAG} = \frac{2}{3} S_{PAM}, S_{PBG} = \frac{2}{3} S_{PBN}, S_{PGC} = \frac{2}{3} S_{PCD} \text{ ta sẽ}$$

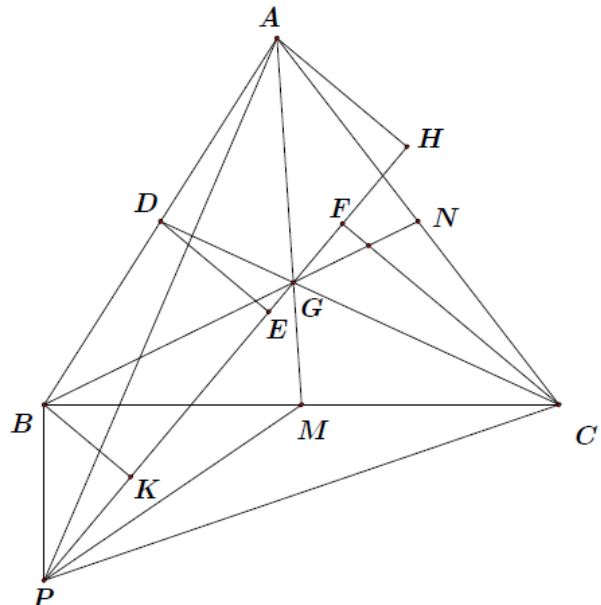
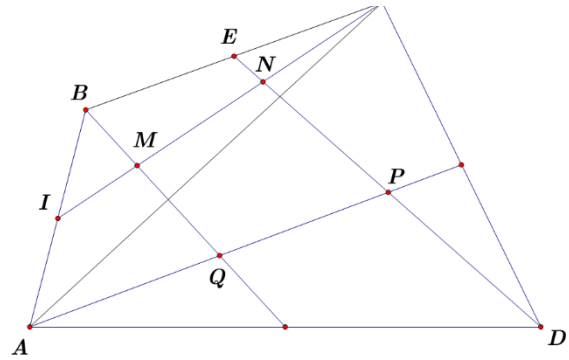
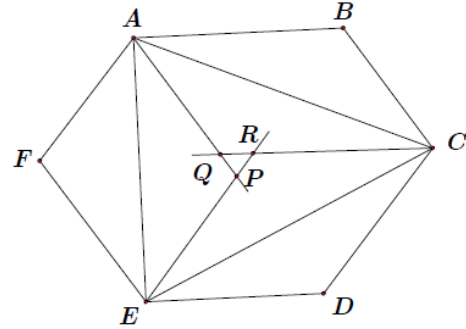
chứng minh trong ba tam giác PAG, PBG, PCG tồn tại một tam giác có diện tích bằng tổng diện tích hai tam giác kia.

Xét trường hợp A và B cùng nằm về phía C đối với đường thẳng PG .

Hạ $AH \perp PG, BK \perp PG, CF \perp PG, DE \perp PG$

$\Rightarrow AH \parallel DE \parallel CF \parallel BK$, theo giả thuyết $DA = DB$

$\Rightarrow AH + BK = 2DE, G$ là trọng tâm $\Rightarrow CG = 2GD$



tại

$$\Rightarrow CF = 2DE \Rightarrow CF = AH + BK$$

$$\Rightarrow S_{PCG} = S_{PAG} + S_{PBG} \Rightarrow S_{PCD} = S_{PAM} + S_{PBN}$$

Tương tự với các trường hợp còn lại, trong ba tam giác PAM , PBN , PCD luôn tồn tại một tam giác có diện tích bằng tổng diện tích hai tam giác còn lại.

Chuyên đề 12. PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH

12.1. Ta có: $S_{ABCD} = AD^2 = 144 \text{ (cm}^2\text{)}$ nên $AD = 12\text{cm}$.

Mặt khác: $S_{ABE} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$ nên $\frac{1}{2} AB \cdot AE = \frac{1}{3} AB \cdot AD$

$$\Rightarrow AE = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \text{ (cm)}.$$

12.2. Ta có: $AM = MB; DN = CN$, mà $AMND$ và $BCNM$ là hình thang có chung đường cao, nên $S_{AMND} = S_{BCNM}$.

Ta có: $S_{AMI} = S_{BMI}$ vì $AM = BM$ và đường cao hạ từ $E; F$ bằng nhau.

Ta có $S_{DEN} = S_{FCN}$ vì $ND = NC$ và đường cao hạ từ $E; F$ bằng nhau.

$$\Rightarrow S_{EMN} = S_{FMN}.$$

Kê $EK \perp MN; FH \perp MN$ nên $EK = FH$.

Suy ra $\triangle EKI = \triangle FHI$ nên $EI = FI$.

12.3. Đặt diện tích $\triangle OBC, \triangle OAC, \triangle OAB, \triangle ABC$ lần lượt là $S_1; S_2; S_3; S$.

Áp dụng tỉ số diện tích hai tam giác có chung đường cao và tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{OM}{AM} = \frac{S_{OBM}}{S_{ABM}} = \frac{S_{OCM}}{S_{ACM}} = \frac{S_{OBM} + S_{OCM}}{S_{ABM} + S_{ACM}} = \frac{S_1}{S}.$$

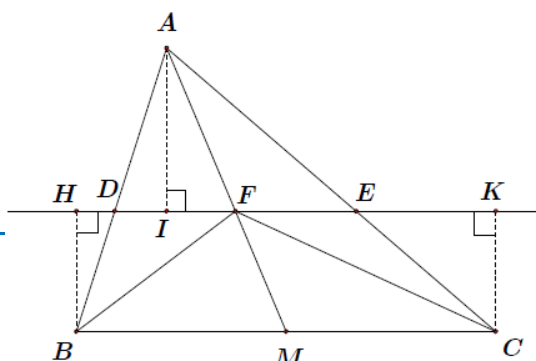
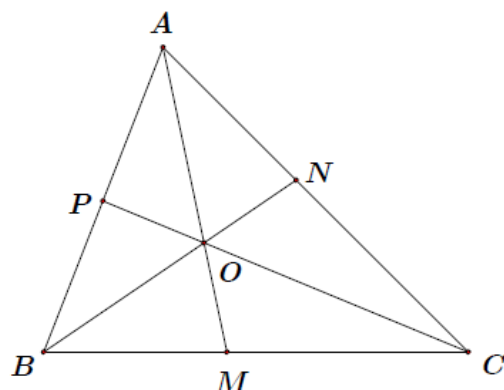
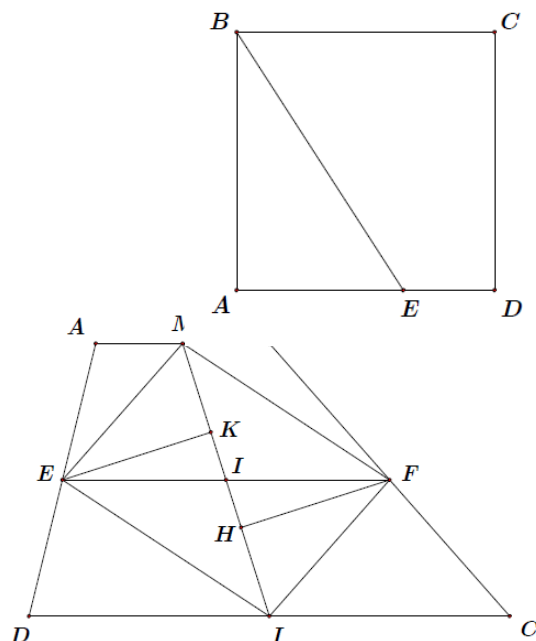
$$\frac{ON}{BN} = \frac{S_{OMN}}{S_{ABN}} = \frac{S_{OCN}}{S_{BCN}} = \frac{S_{OAN} + S_{OCN}}{S_{ABN} + S_{BCN}} = \frac{S_2}{S}.$$

$$\frac{OP}{CP} = \frac{S_{OAP}}{S_{ACP}} = \frac{S_{OBP}}{S_{CBP}} = \frac{S_{OAP} + S_{OBP}}{S_{ACP} + S_{CBP}} = \frac{S_3}{S}.$$

Mà $S_1 + S_2 + S_3 = S$. Từ đó suy ra

$$\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = 1.$$

12.4. Vẽ $AI \perp EF, BH \perp EF, CK \perp EF$.



Ta có: $MB = MC$ nên

$$S_{ABM} = S_{ACM}; S_{FBM} = S_{FCM}.$$

Suy ra $S_{ABF} = S_{ACF}$

$$\Leftrightarrow S_{ADF} + S_{BDF} = S_{AEF} + S_{CEF}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}DF \cdot (BH + AI) = \frac{1}{2}EF \cdot (AI + CK)$$

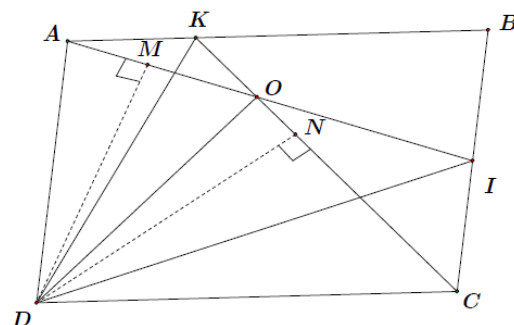
Mà $BD = CK$ suy ra $DF = EF$.

12.5. Vẽ $DM \perp AI; DN \perp CK$ ($M \in AI, N \in CK$).

$$\text{Ta có: } S_{DCK} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}$$

$$S_{ADI} = \frac{1}{2} S_{ABCD},$$

$$\text{Nên } S_{DCK} = S_{ADI} \Rightarrow \frac{1}{2}AI \cdot DM = \frac{1}{2}CK \cdot DN.$$



Mặt khác $AI \perp CK$, suy ra $DM = DN \Rightarrow D$ cách đều hai cạnh của góc AOC . Vậy OD là tia phân giác của góc AOC .

12.6. Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho $DE = AB$

Tứ giác $ABDE$ là hình bình hành, mà N là trung điểm $AD \Rightarrow N$ là trung điểm BE .

Ta có: $\triangle ABN = \triangle DEN$, nên $S_{ABN} = S_{DEN} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{BEC}$.

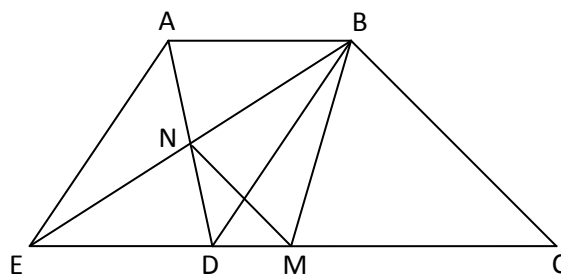
Điểm M thuộc CD sao cho BM chia $ABCD$ thành hai phần có diện tích bằng nhau

$$\Rightarrow S_{BMC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{BEC}$$

$$\Rightarrow CM = \frac{1}{2} CE \Rightarrow CM = ME$$

$\triangle BCE$ có $MC = ME, NB = NE$

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle BCE \Rightarrow MN \parallel BC$



12.7. Nói MX ; BX ; BY ; CX ; CZ . Ta có $\frac{XP}{XN} = \frac{S_{MXP}}{S_{MXN}} = \frac{S_{MXY} + S_{PXY}}{S_{MXZ} + S_{NXZ}}$

Từ đó, với chú ý rằng $BP \parallel YZ$ thì $S_{PXY} = S_{BXY}$

và $CN \parallel ZX$ thì $S_{NXZ} = S_{CXZ}$. Ta có:

$$\frac{XP}{XN} = \frac{S_{MXY} + S_{BXY}}{S_{MXZ} + S_{CXZ}} \quad (1)$$

Mặt khác, vì $YZ \parallel BC$ nên ta có:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{S_{XMB}}{S_{XMC}} = \frac{S_{YMB}}{S_{ZMC}} = \frac{S_{XMB} - S_{YMB}}{S_{XMC} - S_{ZMC}} = \frac{S_{MXY} + S_{BXY}}{S_{MXZ} + S_{CXZ}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{XP}{XN} = \frac{MC}{MN}$

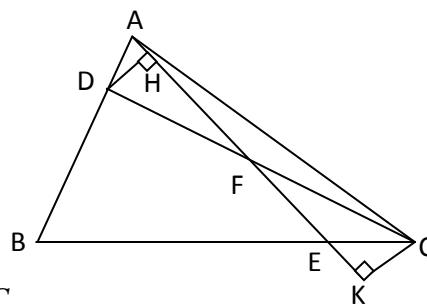
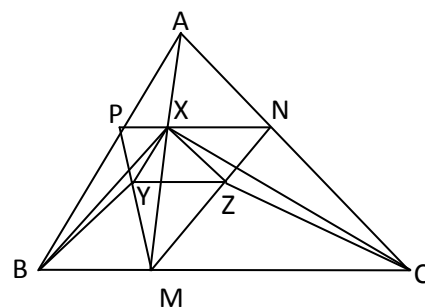
12.8. Kẻ $DH \perp AE$; $CK \perp AE$. Ta có:

$$\frac{S_{AEC}}{S_{ABE}} = \frac{EC}{BE} = \frac{1}{4}; \quad \frac{S_{ADE}}{S_{ABE}} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4}$$

(vì $BE = 4.EC$; $BD = 3.DA$).

$$\Rightarrow \frac{S_{AEC}}{S_{ABE}} = \frac{S_{ADE}}{S_{ABE}} \Rightarrow S_{AEC} = S_{ADE} \Rightarrow CK = DH \text{ Suy ra } \triangle HFD = \triangle KFC$$

$$\Rightarrow FD = FC \left(H = K = 90^\circ; FHD = FCK; CK = AH \right).$$



12.9. Kẻ DD' , BB' , EH , FK cùng vuông góc với AC .

$$\text{Do } EH \parallel BB' \Rightarrow \frac{EH}{BB'} = \frac{AE}{AB}$$

$$\text{Do } EH \parallel BB' \Rightarrow \frac{EH}{BB'} = \frac{AE}{AB}$$

$$\text{Mà } \frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CD} \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{EH}{BB'} = \frac{FK}{DD'}$$

Ta có $\triangle HIE = \triangle KIF$ (vì $IE = IF$, $\angle HIE = \angle KIF$)

$$\Rightarrow HE = FK \text{ vậy } BB' = DD'. \text{ Suy ra } S_{ACD} = S_{ABC}$$

Vậy AC chia đôi diện tích tứ giác $ABCD$.

12.10. Ta thấy $\triangle ABD = \triangle ACE$ (g.c.g) nên $AD = AE$

Vậy tam giác ADE vuông cân tại $A \Rightarrow \angle ADE = \angle AED = 45^\circ$

Do đó $DE \parallel BC$ nên $S_{IBC} = S_{DBC}$ (1)

Dựng $DH \perp BC$ ($H \in BC$). Ta thấy

$$\triangle DBH = \triangle DBA \text{ (c.huyền - g.nhọn)}$$

Nên $DH = DA$

$$\text{Suy ra } \frac{S_{DBC}}{S_{DBA}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot DH}{\frac{1}{2} AB \cdot DA} = \frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$$

$$\text{hay } \frac{S_{DBC}}{S_{ABC} - S_{DBC}} = \sqrt{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{S_{IBC}}{S_{ABC} - S_{IBC}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{S_{IBC}}{S_{IAB} + S_{ICA}} = \sqrt{2}$$

12.11. Vận dụng hai tam giác có chung một

cạnh thì tỷ số diện tích bằng tỷ số hai

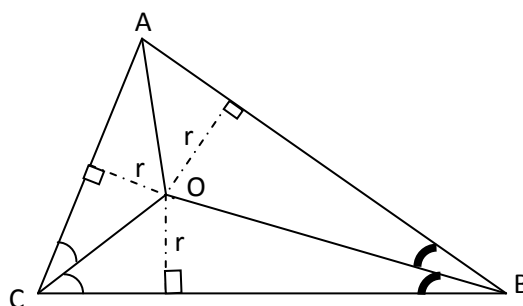
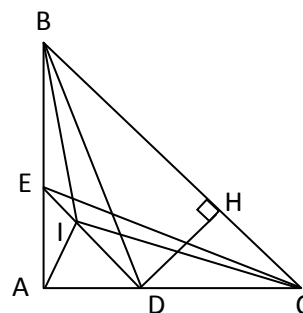
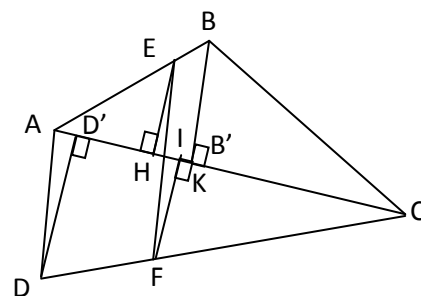
đường cao ứng với cạnh đó là:

$$\frac{r}{h_a} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}; \frac{r}{h_b} = \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}; \frac{r}{h_c} = \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c} = \frac{S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB}}{S_{ABC}} = 1$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

12.12. Gọi M , N , P là điểm đối xứng của I qua AB , AC , BC .



Gọi IM giao AB tại H ; IN giao AC tại K ; IP giao BC tại J .

Ta có $MAI = BAC (= 2.BAI)$ nên

$$\frac{S_{AMI}}{S_{ABC}} = \frac{AM \cdot AI}{AB \cdot AC} \text{ hay}$$

$$\frac{AI^2}{AB \cdot AC} = \frac{S_{AHM}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AHIK}}{S_{ABC}} \quad (1)$$

Tương tự, ta có

$$\frac{BI^2}{AB \cdot AC} = \frac{S_{BPI}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BHJI}}{S_{ABC}} \quad (2)$$

$$\frac{CI^2}{AB \cdot AC} = \frac{S_{CNI}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CKIJ}}{S_{ABC}} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) cộng vế với vế ta có điều phải chứng minh.

12.13. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 theo thứ tự là diện tích của các tam giác OAB, OBC, OCD, OAD .

Suy ra $\frac{S_1}{S_2} = \frac{OA}{OC} \quad (1)$

Tương tự $\frac{S_4}{S_3} = \frac{OA}{OC} \quad (2)$

Từ (1), (2), ta có $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$

Suy ra $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ nên $S_1 S_2 S_3 S_4 = (S_1 \cdot S_3)^2$ là một số chính phương.

12.14. Giả sử AD, BE, CF không đồng quy, gọi giao điểm các cặp đường chéo AD và BE là M , BE và CF là N , CF và AD là P . Do M không thuộc CF nên M nằm trong một trong hai tứ giác $FABC$ hoặc $CDEF$, giả sử M nằm trong tứ giác $FABC$. Theo giả thiết AD, BE cùng chia đa giác $ABCDEF$ thành hai

phần có diện tích bằng nhau nên $S_{ABCD} = S_{BCDE} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF} \Rightarrow S_{MAB} = S_{MDE}$

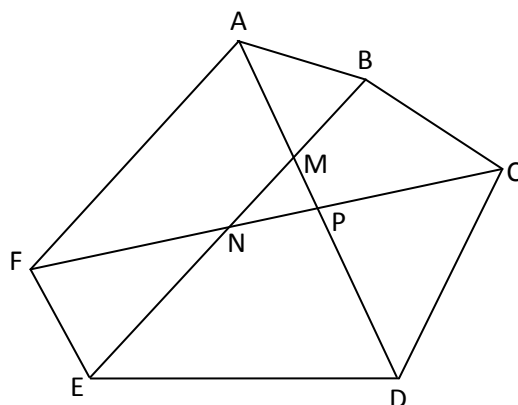
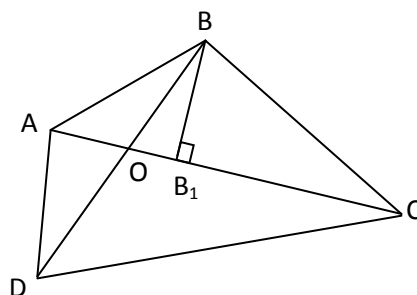
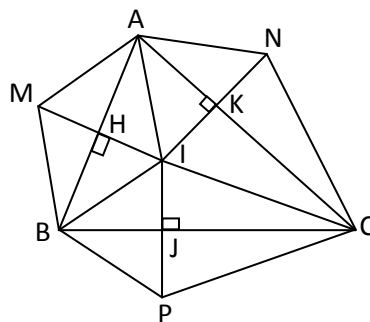
$$\Rightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{MDE}} = 1 \Rightarrow \frac{MA \cdot MB}{MD \cdot ME} = 1$$

$$\Rightarrow MA \cdot MB = MD \cdot ME > PD \cdot EN \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$S_{CDEF} = S_{DEFA} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF} \Rightarrow S_{PCD} = S_{PFA}$$

$$\Rightarrow PC \cdot PD = PF \cdot PA > NF \cdot MA \quad (2)$$



$$S_{EFAB} = S_{FABC} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF} \Rightarrow S_{NEF} = S_{NBC}$$

$$\Rightarrow NE.NF = NB.NC > MB.BC \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $MA.MB.PC.PD.NE.NF > MA.MB.PC.PD.NE.NF$ (Vô lí)

Vậy AD, BE, CF đồng quy.

12.15. Gọi giao điểm của LP và MQ là O , ta có $S_{OLA} = S_{OLB}$

$$\text{Đặt } S_1 = S_{OLA} = S_{OLB}$$

$$\text{Tương tự } S_2 = S_{OMB} = S_{OMC}$$

$$S_3 = S_{ONC} = S_{OND}; \quad S_4 = S_{OPD} = S_{OPE}$$

$$S_5 = S_{OQF} = S_{OQE}; \quad S_6 = S_{ORF} = S_{ORA}$$

$$S_{ABCDEF} = S.S_{LBCDP} = S_{MCDEQ} = \frac{1}{2} S$$

$$\Rightarrow S_{OLRM} = S_{OPEQ}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = S_4 + S_5 \Rightarrow S_{OABC} = S_{ODEF}$$

Cộng hai vế với $S_3 + S_6$ ta được

$$\Leftarrow S_{RABCNO} = S_{NDEFRO} = \frac{1}{2} S \text{ mà } NR \text{ chia lục giác thành hai phần có diện tích bằng nhau nên } O \text{ phải thuộc}$$

NR . Vậy LP, MQ, NR đồng quy.

12.16. Ta có:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{S_{EAM}}{S_{EBM}} = \frac{S_{FAM}}{S_{FBM}} = \frac{S_{EAM} - S_{FAM}}{S_{EBM} - S_{FBM}} = \frac{S_{FAE}}{S_{FBE}} \quad (1)$$

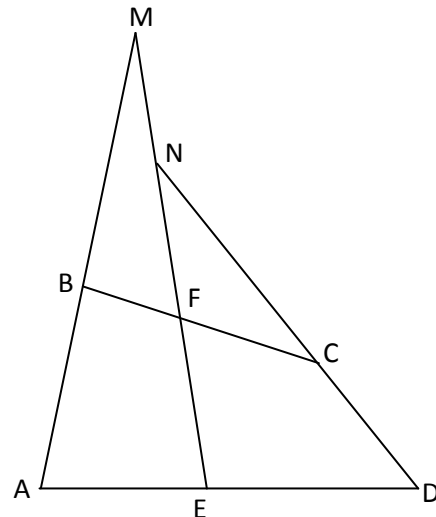
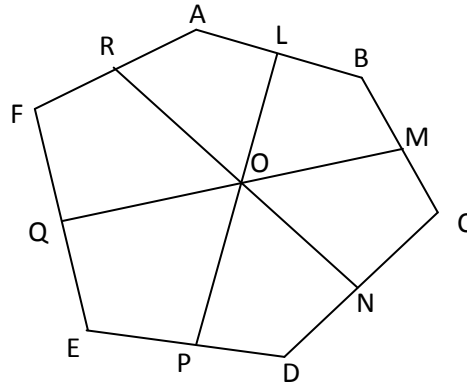
$$\frac{ND}{NC} = \frac{S_{EDN}}{S_{ECN}} = \frac{S_{FDN}}{S_{FCN}} = \frac{S_{EDN} - S_{FDN}}{S_{ECN} - S_{FCN}} = \frac{S_{FDE}}{S_{FCE}} \quad (2)$$

Vì E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC nên ta có:

$$S_{EAF} = S_{FDE}; \quad S_{EBF} = S_{ECF} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

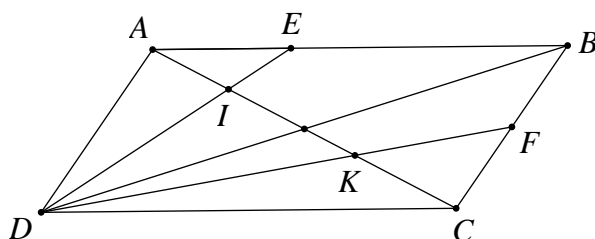
$$\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC} \Rightarrow MA.NC = MB.ND.$$



Chương III

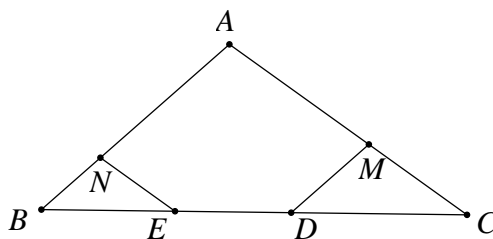
TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Chuyên đề 13. ĐỊNH LÝ TA LÉT TRONG TAM GIÁC	2
Chuyên đề 14. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC	11
Chuyên đề 15. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC	17
Chuyên đề 16. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG	27
Chuyên đề 17. ĐỊNH LÝ MENELAUS, ĐỊNH LÝ CE-VA, ĐỊNH LÝ VAN-OBEN.....	34

Chuyên đề 13. ĐỊNH LÝ TA LÉT TRONG TAM GIÁC**13.1.**

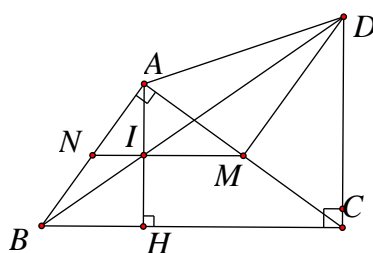
Ta có $\frac{AI}{IC} = \frac{AE}{CD} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$. Do đó $AI = \frac{1}{4}AC = 6(cm)$

Ta lại có $\frac{CK}{KA} = \frac{CF}{AD} = \frac{CF}{BC} = \frac{1}{2}$; Do đó $CK = \frac{1}{3}AC = 8(cm)$. Suy ra $IK = 24 - 6 - 8 = 10(cm)$.

13.2.

Từ $DM \parallel AB \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow AM = \frac{AC \cdot BD}{BC} = \frac{AC \cdot BD}{BC}$

$EN \parallel AC \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow AN = \frac{AB \cdot CE}{CB} = \frac{AB \cdot AC}{BC}$. Do đó $AM = AN$.

13.3.

Gọi M là trung điểm AC , N là giao điểm của MI và AB . Tam giác AHC có MI là đường trung bình nên $MI \parallel HC$, tức là $MN \parallel BC$.

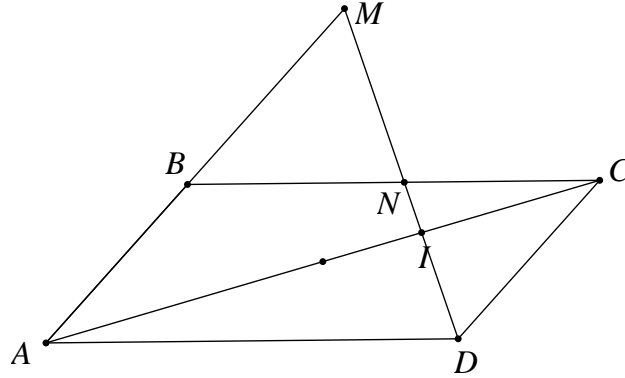
Theo định lý ta lét: Do $AH \parallel CD \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{HB}{HC}$ (1)

Do $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{IN}{HB} = \frac{AI}{AH} = \frac{IM}{HC}$. Tức là $\frac{IN}{IM} = \frac{HB}{HC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{IB}{ID} = \frac{IN}{IM} \Rightarrow BN \parallel DM$ (Định lý ta lét đảo).

Ta lại có $BN \perp AC$ nên $DM \perp AC$ vậy DM là đường trung trực của AC suy ra $DA = DC$.

13.4.



a) Áp dụng hệ quả định lý Talet vào tam giác BMN với $BM \parallel CD$ ta có

$$\frac{MN}{ND} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{MN + ND}{ND} = \frac{BN + NC}{NC} \Rightarrow \frac{MD}{ND} = \frac{BC}{NC} \quad (1)$$

Áp dụng định lý ta lét vào tam giác MAD với $BN \parallel AD$ ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN}$ (2)

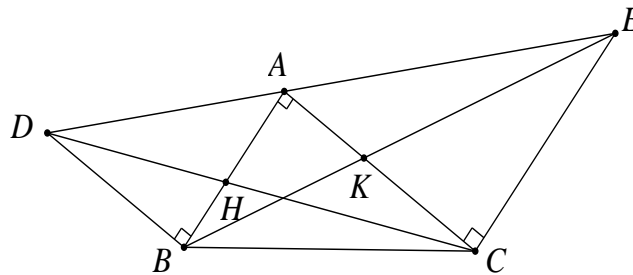
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} = \frac{CB}{CN}$.

b) Áp dụng hệ quả định lý talet vào tam giác ADI với $AD \parallel NC$ ta có $\frac{ID}{IN} = \frac{IA}{IC}$ (3)

Áp dụng hệ quả định lý talet vào tam giác DIC với $DC \parallel AM$ ta có $\frac{IM}{ID} = \frac{IA}{IC}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{ID}{IN} = \frac{IM}{ID} \Rightarrow ID^2 = IM \cdot IN$

13.5.



a) $BD \parallel AC$ suy ra $\frac{AH}{BH} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow \frac{AH}{AH + BN} = \frac{AC}{BD + AC} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BD + AC}$

Mà $BD = AB \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC} (1)$

$AB \parallel CE$ suy ra $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CE} \Rightarrow \frac{AK}{AK + KC} = \frac{AB}{BD + EC} \Rightarrow \frac{AK}{AC} = \frac{AB}{BD + EC}$

Mà $CE = AC \Rightarrow AK = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC} (1)$

Từ (1) và (2) suy ra $AH = AK$.

b) $BD \parallel AC \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{AC}{BD} (3), CE \parallel AB \Rightarrow \frac{CK}{AK} = \frac{CE}{AB} (4)$

Mà $AC = CE, BD = AB$.

Kết hợp (3) và (4) ta có $\frac{AH}{BH} = \frac{CK}{AK} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CK$.

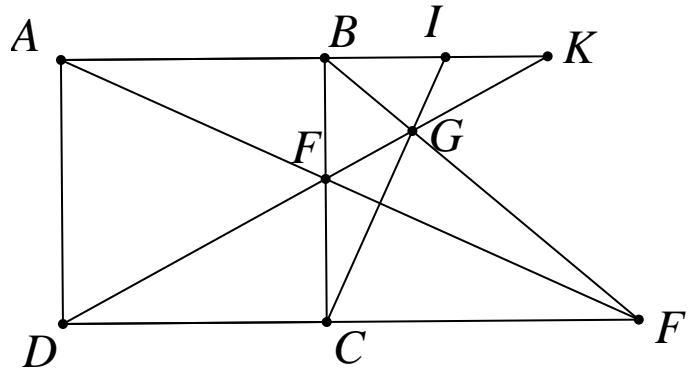
13.6 a) Ta sẽ chứng minh $\frac{IK}{IB} = \frac{KE}{ED}$.

Do $BK \parallel DF$ nên theo talet ta có

$$\frac{IK}{CD} = \frac{IG}{GC} = \frac{IB}{CF} \Rightarrow \frac{IK}{IB} = \frac{CD}{CF} (1)$$

Cũng theo talet $AK \parallel DF$ ta có

$$\frac{KE}{ED} = \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{CF} (2)$$



Ta lại có $AB = CD$ nên từ (1) và (2) suy ra $\frac{IK}{IB} = \frac{KE}{ED}$. Theo talet đảo $IE \parallel BD$.

b) Ta có $BD \perp AC$ và $IE \parallel BD \Rightarrow IE \perp AC$.

Tam giác ACI có $CB \perp AI, IE \perp AC$ nên E là trực tâm suy ra $AE \perp CG$

13.7 Gọi F là giao điểm BG với AC thì $A \hat{=} FD$.

Lấy M thuộc CG sao cho $DM \parallel BG$.

Ta có $CA + CD = CF + FA + CE - FD$ hay

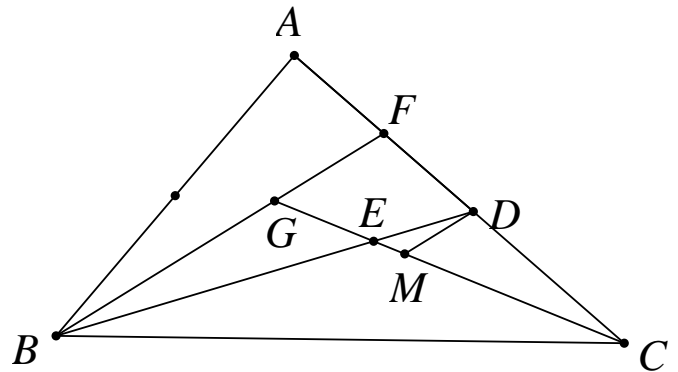
$$CA + CD = 2CF \Rightarrow CA = 2CF - CD.$$

Vì G là trọng tâm $\triangle ABD$ nên $GB = 2GF$.

Vì $MD \parallel BG$ suy ra

$$\frac{EB}{ED} - \frac{CA}{CD} = \frac{GB}{MD} - \frac{2CF - CD}{CD} = \frac{2GF}{MD} - \frac{2CF}{CD} + 1 (1)$$

Mà $GF \parallel MD$ nên $\frac{GF}{MD} = \frac{CF}{CD} \Rightarrow \frac{EB}{ED} - \frac{CA}{CD} = 1$



13.8 Gọi O là giao điểm AF, CE theo talet ta có

$$AE \parallel CK \Rightarrow \frac{OE}{OC} = \frac{OA}{OK}$$

$$DI \parallel CF \Rightarrow \frac{OC}{OI} = \frac{OF}{OA}$$

$$\text{Ta có } \frac{OE}{OI} = \frac{OE}{OC} \cdot \frac{OC}{OI} = \frac{OA}{OK} \cdot \frac{OF}{OA} = \frac{OF}{OK}$$

$$\frac{OE}{OI} = \frac{OF}{OK} \Rightarrow EF \parallel IK$$

13.9 Kẻ $NH \parallel AB$ ($H \in BC$)

$$\frac{BM}{BP} - \frac{CM}{CN} = \frac{MH}{NH} - \frac{CM}{CN} = \frac{MH}{CN} - \frac{CM}{CN} = \frac{CH}{CN}$$

$$\text{Mặt khác } NH \parallel AB \text{ suy ra } \frac{CH}{BC} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow \frac{CH}{CN} = \frac{BC}{AC}.$$

$$\text{Vậy } \frac{BM}{BP} - \frac{CM}{CN} = \frac{BC}{AC} \text{ không đổi khi } M \text{ thay đổi.}$$

13.10. Kẻ $AT \perp BD$ ($T \in BD$) thì $AT \leq AO$ nên

$$AD \cdot BE \leq BD \cdot AT (= 2S_{ABD})$$

$$\text{Suy ra } AD \cdot BE \leq BD \cdot AO \Rightarrow AD \cdot BE \leq AC \cdot BD \frac{AO}{AC} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } OH \parallel CF \text{ nên } \frac{AO}{AC} = \frac{OH}{CF} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AD \cdot BE \leq AC \cdot BD \frac{OF}{CF} \Leftrightarrow AD \cdot BE \cdot CF \leq AC \cdot BD \cdot OH$$

Đẳng thức xảy ra khi T trùng O hay $AC \perp BD$.

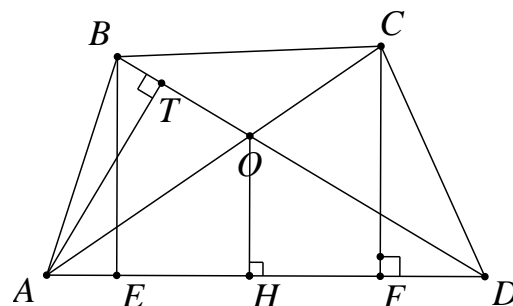
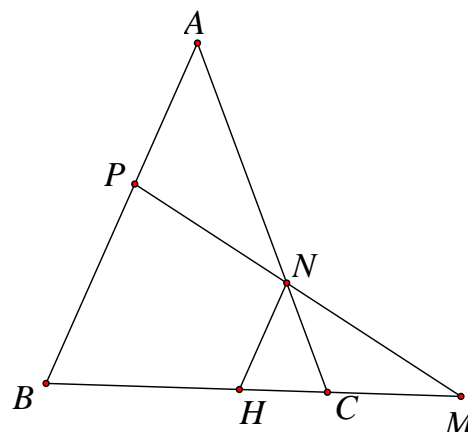
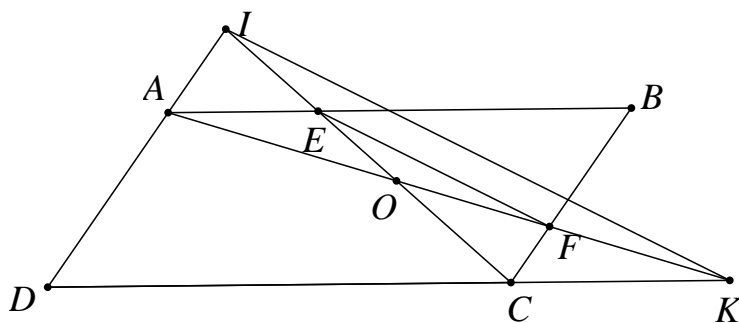
13.11 Đặt x, y là cạnh hình vuông $MNPQ$, $AXYZ$ và a, b, c là độ dài các cạnh BC, CA, AB kẻ $AH \perp BC$ đặt $AH = h$ suy ra $a \cdot h = b \cdot c = (2S_{ABC})$ và $a^2 = b^2 + c^2$.

$$\text{Ta có } (a+h)^2 = a^2 + h^2 + 2ah > b^2 + c^2 + 2bc = (b+c)^2$$

$$\Rightarrow a+h > b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a+h}{ah} > \frac{b+c}{bc} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{h} > \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (1)$$

$$\text{Theo talet } \frac{x}{a} + \frac{x}{h} = \frac{MN}{BC} + \frac{MQ}{AH} = \frac{AM}{AB} + \frac{MB}{AB} = 1$$



$$\frac{y}{b} + \frac{y}{c} = \frac{XY}{AC} + \frac{ZY}{AB} = \frac{BY}{BC} + \frac{CY}{BC} = 1 \Rightarrow x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{h}\right) = y\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x < y$ hay $MN < AX$

13.12. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC , lần lượt cắt BP và CQ kéo dài tại E và F .

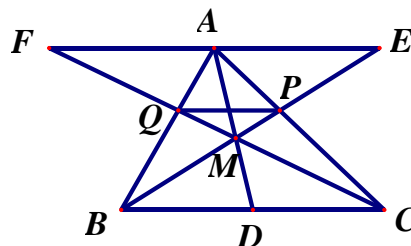
Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{AF}{CD} = \frac{AM}{MD} = \frac{AE}{BD}, \text{ mà } CD = BD \text{ nên } AF = AE.$$

Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{AF}{BC} = \frac{AQ}{QB}, \frac{AE}{BC} = \frac{AP}{PC}$$

Suy ra: $\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB} \Rightarrow PQ \parallel BC$ (định lý đảo Ta-lét).



13.13. Gọi giao điểm của CG và AB là K và giao điểm của DF và BC là M . Ta có $\triangle BCK$ cân (vì có BF vừa là đường cao vừa là phân giác)

$\Rightarrow F$ là trung điểm của CK .

$\triangle ACK$ có $FK = FC, AD = CD$

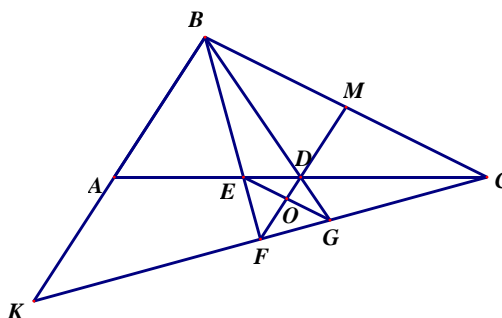
suy ra DF là đường trung bình $\Rightarrow FD \parallel AK$.

$\triangle BCK$ có $FK = FC, FM \parallel BK$

suy ra M là trung điểm của BC .

Xét tam giác DBC có trung tuyến DM ,

theo bài toán 13.12. thì $GE \parallel BC$, suy ra $\frac{OE}{BM} = \frac{OG}{MC}$. Mà $BM = MC$, do đó $OE = OF$ hay DF chia đôi đoạn thẳng GE .



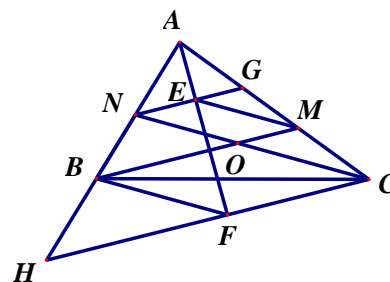
13.14. a) Gọi G là giao điểm của NE và AC , H là giao điểm CF và AB .

Theo định lý Ta-lét ta có:

$$NE \parallel CH \Rightarrow \frac{GE}{EN} = \frac{CF}{FH}$$

$$NE \parallel BM \parallel CH \Rightarrow \frac{GM}{MC} = \frac{NB}{BH} \left(= \frac{NO}{OC} \right).$$

$$CN \parallel BF \Rightarrow \frac{CF}{FH} = \frac{BN}{BH}$$



Suy ra $\frac{GE}{EN} = \frac{GM}{MC} \Rightarrow ME \parallel NC \Rightarrow MONE$ là hình bình hành.

b) Ta có $BM \parallel HC$ và $NE \parallel HF$, theo định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} = \frac{AM}{AC} \cdot \frac{AN}{AB} = \frac{AB}{AH} \cdot \frac{AN}{AB} = \frac{AN}{AH} = \frac{AE}{AF} \quad (1)$$

Ta có $OM \parallel NG; OB \parallel CH$. Theo định lý Ta-lét, ta có $\frac{OM \cdot ON}{OB \cdot OC} = \frac{OM}{OC} \cdot \frac{ON}{OB} = \frac{NG}{NC} \cdot \frac{NC}{HC} = \frac{NG}{HC} \parallel HC$

$$\text{Mà } NG \parallel HC \Rightarrow \frac{NG}{HC} = \frac{AN}{AH}$$

$$NE \parallel HF \Rightarrow \frac{AN}{AH} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{OM \cdot ON}{OB \cdot OC} = \frac{AE}{AF} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

13.15. Tứ giác $ABKD$ có $AB \parallel DK; BK \parallel AD$

nên $ABKD$ là hình bình hành,

$$\text{suy ra } DK = AB \quad (1)$$

Tứ giác $ABCI$ có $AB \parallel CI; AI \parallel BC$

nên $ABCI$ là hình bình hành,

$$\text{Suy ra } CI = AB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $DK = CI \Rightarrow DI = KC$

Áp dụng định lý Ta-lét vào $\triangle ABM$ với $AB \parallel DI$, ta có $\frac{BM}{MD} = \frac{AB}{DI}$.

Áp dụng định lý Ta-lét vào $\triangle CBD$ với $KP \parallel BD$, ta có $\frac{BP}{PC} = \frac{DK}{KC}$ hay $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{KC}$.

Mà $DI = KC \Rightarrow \frac{AB}{DI} = \frac{AB}{KC} \Rightarrow \frac{BM}{MD} = \frac{BP}{PC}$, do đó $MP \parallel CD$ (định lý Ta-lét đảo).

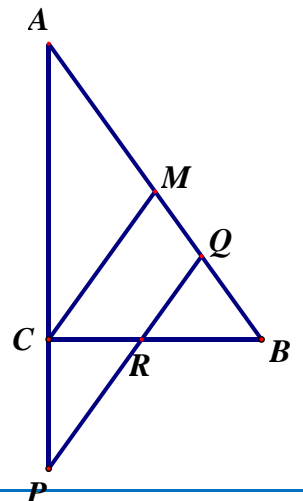
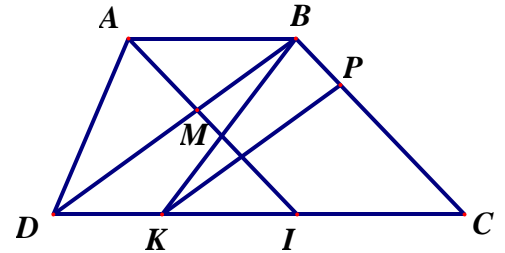
13.16. Trong tam giác BQR có $CM \parallel QR$ nên $\frac{CM}{QR} = \frac{MB}{QB}$ (hệ quả định lý Ta-lét)

$$\Rightarrow CM = \frac{QR}{QB} \cdot MB = \frac{QA}{QP} \cdot MB \quad (\text{do } QA \cdot QB = QP \cdot QR \Rightarrow \frac{QR}{QB} = \frac{QA}{QP}).$$

Mặt khác, trong tam giác ACM có $PQ \parallel CM$ nên $\frac{QA}{QP} = \frac{AM}{CM}$

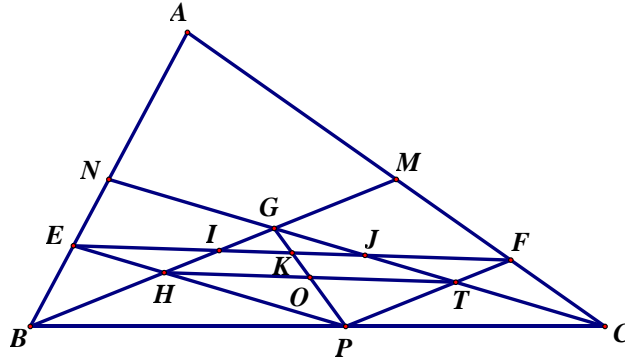
$$\text{Vì } CM = \frac{QA}{QP} \cdot MB \text{ nên } CM = \frac{AM}{CM} \cdot MB$$

$$\Rightarrow CM^2 = MA \cdot MB = AM^2 \quad (\text{vì } MA = MB) \Rightarrow CM = AM = BM$$



Vậy tam giác ABC vuông tại C .

13.17.



a) Gọi BM và CN là các đường trung tuyến của tam giác ABC . Gọi giao điểm của BG và EP là H , của CG và FP là T .

Từ $HI \parallel PF, EP \parallel CN$, theo định lý Ta-lét, ta có $\frac{EI}{EF} = \frac{EH}{EP} = \frac{NG}{NC} = \frac{1}{3}$

Suy ra $EI = \frac{1}{3}EF$. Tương tự ta có $FJ = \frac{1}{3}EF$. Do đó $EI = EJ = FJ = \frac{1}{3}EF$

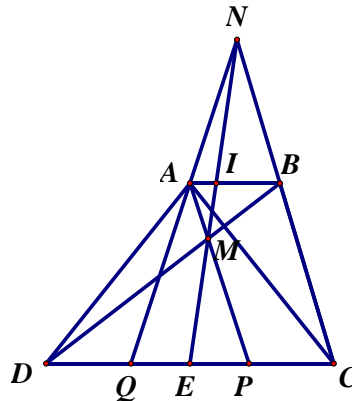
b) Từ $PE \parallel CN$, theo định lý Ta-lét ta có: $\frac{PH}{PE} = \frac{CG}{CN} = \frac{2}{3}$.

Từ $PF \parallel BM$, theo định lý Ta-lét ta có $\frac{PT}{PF} = \frac{BG}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{PH}{PE} = \frac{PT}{PF}$,

do đó $TH \parallel EF$ (định lý Ta-lét đảo).

Gọi O, K là giao điểm của PG và HT và EF . Ta có $\frac{HO}{EK} = \frac{PO}{PK} = \frac{OT}{KF}$. Từ đó suy ra $KE = KF$, điều phải chứng minh.

13.18. Gọi I là giao điểm của đường thẳng d và AB .



Áp dụng định lý Ta-lét ta có: $AB \parallel CD \Rightarrow \frac{DP}{AB} = \frac{DE}{BI} = \frac{EC}{AI} = \frac{NC}{NB} = \frac{QC}{AB}$

Do đó $DP = QC$, theo giả thiết $AC = AD$

$\Rightarrow \triangle ADC$ cân tại $A \Rightarrow ADP = ACQ \Rightarrow \triangle ADP = \triangle ACQ$ (c.g.c) suy ra $MAD = QAC$

13.19. Kẻ $MN \parallel AB$ (hình vẽ). Ta có:

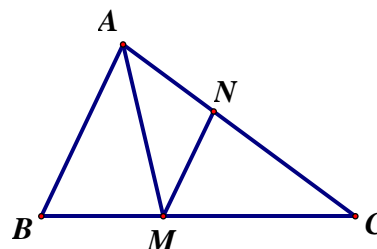
$$\frac{MN}{AB} = \frac{MC}{BC} \Rightarrow MN = AB \cdot \frac{MC}{BC}.$$

$$\frac{NA}{AC} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow NA = AC \cdot \frac{MB}{BC}$$

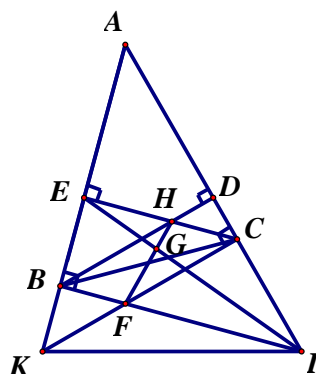
Mà $AM < AN + NA$ (bất đẳng thức tam giác).

$$\text{Hay } AM < AB \cdot \frac{MC}{BC} + AC \cdot \frac{MB}{BC}$$

Vậy $AM \cdot BC < MC \cdot AB + MB \cdot AC$.



13.20.



Tam giác vuông ACK có $A = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân, CE là đường cao nên $AE = EK$, IE là đường trung tuyến của $\triangle AIK$.

Ta sẽ chứng minh $IG = 2GE$ (bằng cách chứng minh $FI = 2EH$).

Ta có $FI = CF\sqrt{2}$ (vì $\triangle CIF$ vuông cân), $CF = BH$ (vì $BFCH$ là hình bình hành).

$BH = EH\sqrt{2}$ (vì $\triangle BEH$ vuông cân) nên $FI = 2EH$. Do $EH \parallel FI$ nên theo định lý Ta-lét ta có

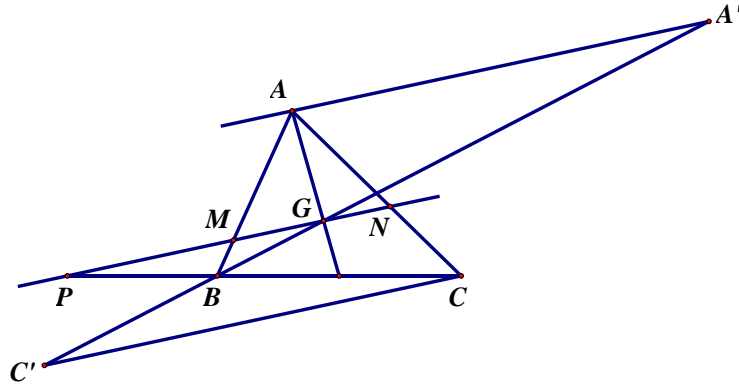
$$\frac{IG}{GE} = \frac{FI}{EH} = 2 \text{ suy ra } IG = 2GE. \text{ Vậy } G \text{ là trọng tâm } \triangle AIK.$$

13.21. Qua A và C kẻ đường thẳng song song với đường thẳng d , cắt đường thẳng BG lần lượt tại A' và C' .

$$\text{Áp dụng ví dụ 4, ta có: } \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3; \frac{AC}{CN} + \frac{BC}{CP} = 3 \quad (1)$$

Vì MN cắt tia CB tại P nên tương tự cách chứng minh ví dụ 4, ta có:

$$\frac{BA}{BM} = \frac{BA'}{BG}; \frac{BA}{BP} = \frac{BC'}{BG} \Rightarrow \frac{BA}{BM} - \frac{BC}{BP} = 3 \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} + \frac{AC}{CN} + \frac{BC}{CP} + \frac{AB}{BM} - \frac{BC}{BP} = 9$

$$\frac{AB(AM + MB)}{AM \cdot BM} + \frac{AC(AN + NC)}{AN \cdot CN} - \frac{BC(CP - BP)}{BP \cdot CP} = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^2}{AM \cdot BM} + \frac{AC^2}{AN \cdot CN} - \frac{BC^2}{BP \cdot CP} = 9 \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Nhận xét: Dựa vào bài toán trên ta giải được bài toán sau: Đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác đều ABC , cạnh a , cắt cạnh AB tại M , cạnh AC tại N , tia CB tại P . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AM \cdot BM} + \frac{1}{AN \cdot CN} - \frac{1}{BP \cdot CP} = \frac{9}{a^2}.$$

13.22 Gọi EF cắt AB , AC tại P , Q . Theo định lý Ta – lét, ta có:

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{IB}{IC} \quad (1)$$

$$\frac{ME}{MP} = \frac{IC}{BC} \quad (2)$$

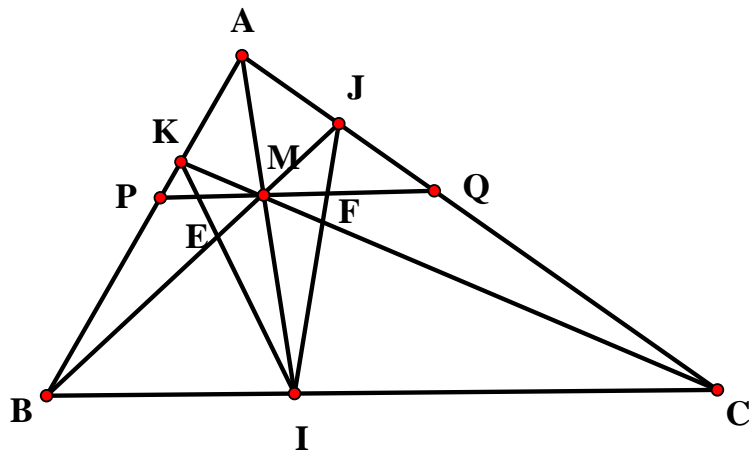
$$\frac{MQ}{MF} = \frac{BC}{BI} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) nhân vế với nhau ta được:

$$\frac{MP}{MQ} \cdot \frac{ME}{MP} \cdot \frac{MQ}{MF} = \frac{IB}{IC} \cdot \frac{IC}{BC} \cdot \frac{BC}{BI}$$

$$\Rightarrow \frac{ME}{MF} = 1$$

Hay $ME = MF$



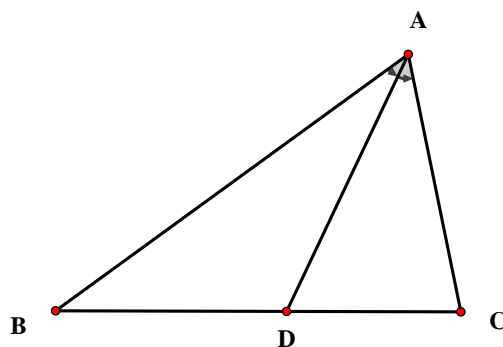
Chuyên đề 14. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

14.1. Ta có: $2AB = 3AC$ suy ra $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$

AD là đường phân giác của góc BAC nên

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BD}{BD+CD} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$$

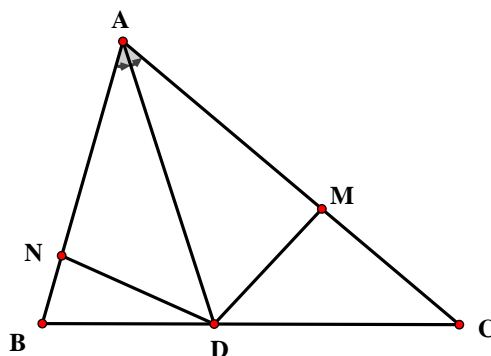
$$\text{Suy ra: } BD = \frac{3 \cdot 10}{5} = 6(\text{cm}); CD = 4(\text{cm})$$



14.2. Áp dụng tính chất đường phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC:

$$\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI}$$

$$\frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1$$



14.3 Xét $\triangle ABC$ có BM là đường phân giác của $\triangle ABC$ nên:

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = \frac{1}{2} BC$$

Gọi CN là đường phân giác của $\triangle ACB$, suy ra:

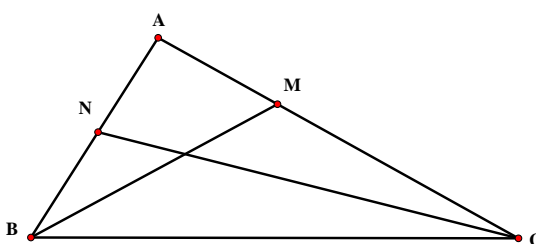
$$\frac{NA}{NB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{3}{4} BC$$

Ta có: $AB+BC+AC=18$ Suy ra

$$\frac{BC}{2} + BC + \frac{3}{4} BC = 18$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4} BC = 18 \Leftrightarrow BC = 8(\text{cm})$$

Từ đó ta tính được $AB = 4(\text{cm}); AC = 6(\text{cm})$



14.4: Ta có:

$$AIE = BAH + ABI = \frac{1}{2}(A + B) = 45^\circ + \frac{1}{2}C = AEI$$

Suy ra $\triangle AIE$ cân tại A $\Rightarrow AI = AE$ (1)

Áp dụng tính chất đường phân giác của $\triangle ABH$ và $\triangle BAC$, ta có:

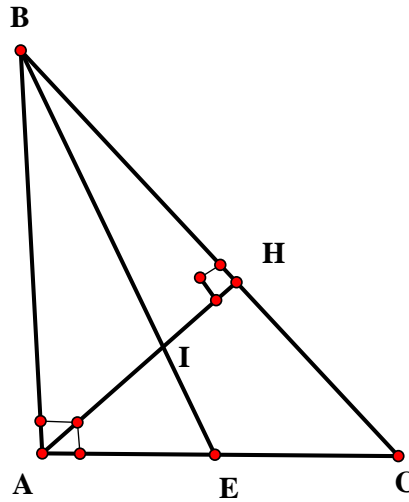
$$\frac{IH}{IA} = \frac{BH}{BA} \Rightarrow \frac{AB}{AI} = \frac{BH}{IH} \quad (2)$$

$$\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EC} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra: } \frac{BH}{IH} = \frac{BC}{EC} \quad (4)$$

Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $BC = 2.BH$

Từ đó kết hợp với (4), suy ra $EC = 2.IH$



14.5.

a) Ta có: $CN \parallel DM$, $CN = DM$ và $\angle NCD = 90^\circ$ nên CDMN là hình chữ nhật $\Rightarrow MN \parallel CD$.

Gọi O là giao điểm của AC và MN.

$\triangle AOM$ và $\triangle CON$ có $AM = CN$;

$$\angle AMO = \angle CNO = 90^\circ; \angle MAO = \angle NCO$$

$$\Rightarrow \triangle AMO = \triangle CNO \text{ (g - c - g)} \Rightarrow MO = ON$$

Áp dụng hệ quả định lý Ta- lét, ta có

$$MO \parallel CP \Rightarrow \frac{MO}{CP} = \frac{QO}{QC}; NO \parallel CR \Rightarrow \frac{NO}{CR} = \frac{QO}{QC}$$

$$\text{Suy ra } \frac{NO}{CR} = \frac{MO}{CP} \text{ mà } MO = NO \text{ suy ra } CR = CP$$

$\triangle NRP$ có $NC \perp PR$, $CR = CP$

Nên $\triangle NRP$ cân

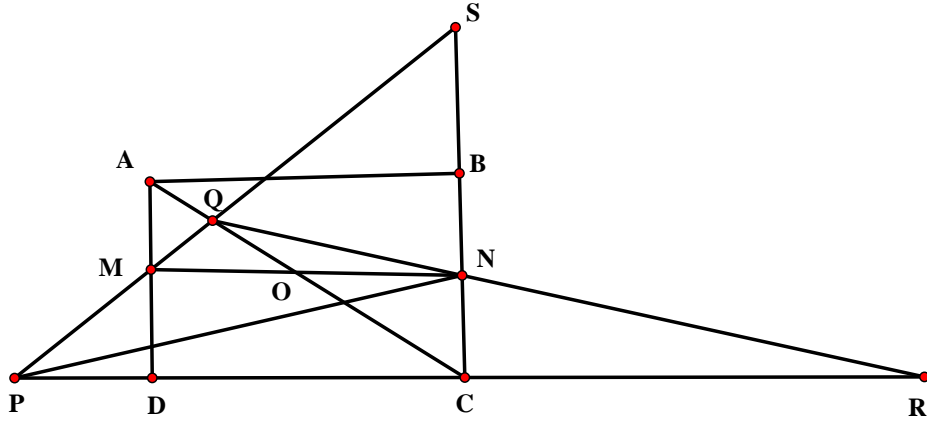
b) $MN \parallel RP$ nên $\angle QNM = \angle NRP$; $\angle MNP = \angle NPR$ mà $\angle NRP = \angle NPR \Rightarrow \angle QNM = \angle MNP \Rightarrow MN$ là tia phân giác $\angle QNP$

Ta có: $NS \perp MN$ nên NS là tia phân giác góc ngoài đỉnh N của $\triangle PNQ$.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong và ngoài của $\triangle NPQ$, ta có:

$$\frac{MQ}{MP} = \frac{NQ}{NP}, \frac{SQ}{SP} = \frac{NQ}{NP}$$

$$\Rightarrow \frac{MQ}{MP} = \frac{SQ}{SP}$$



14.6. Theo tính chất đường phân giác của ΔABC , ta có:

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AN}{NC+AN} = \frac{AB}{BC+AB} \Rightarrow \frac{AN}{b} = \frac{c}{c+a} \Rightarrow AN = \frac{bc}{c+a}$$

Tương tự, ta có: $AP = \frac{bc}{b+a}$

Mặt khác: $\frac{S_{ANP}}{S_{ABC}} = \frac{AN \cdot AP}{AB \cdot AC} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)} \quad (1)$

Tương tự: $\frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)} \quad (2)$ và

$\frac{S_{CMN}}{S_{ABC}} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)} \quad (3)$

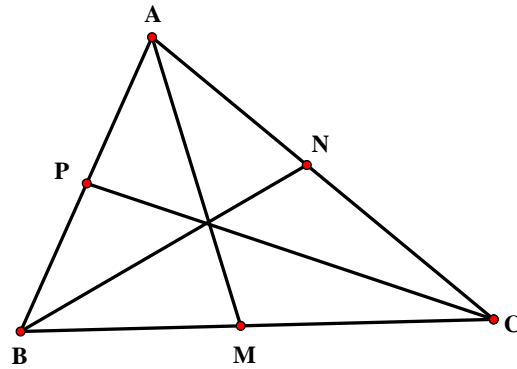
Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{ANP}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CMN}}{S_{ABC}}$$

$$= 1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)}$$

$$= \frac{(a+b)(a+c)(b+c) - bc(b+c) - ac(a+c) - ab(a+b)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{2acb}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$



14.7. Gọi D, M lần lượt là giao điểm của AI, AG với BC.

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ABD, ta có:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{BD + CD} = \frac{AB}{AB + AC}$$

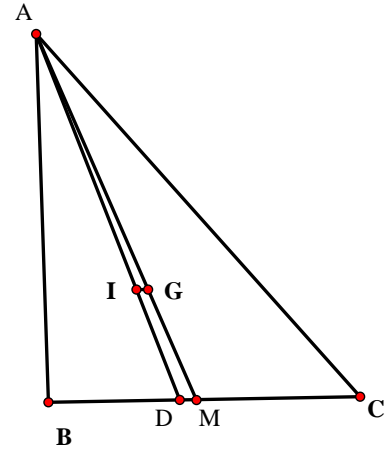
$$\Rightarrow \frac{BD}{6} = \frac{4}{4 + 8} \Rightarrow BD = \frac{6 \cdot 4}{12} = 2 \text{ cm}$$

$$\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Mặt khác G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \frac{GM}{AG} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{GM}{GA} \left(= \frac{1}{2} \right) \Rightarrow IG \parallel DM \text{ (Theo định lý Ta-lét đảo)}$$

$$\Rightarrow \frac{IG}{DM} = \frac{AG}{AM} \Rightarrow \frac{IG}{DM} = \frac{2}{3} \cdot (3 - 2) = \frac{2}{3} \text{ cm}$$



14.8. Gọi E là giao điểm của đường thẳng BN và CD

$$BM \parallel DE \text{ nên } \frac{BM}{ED} = \frac{BO}{OE}$$

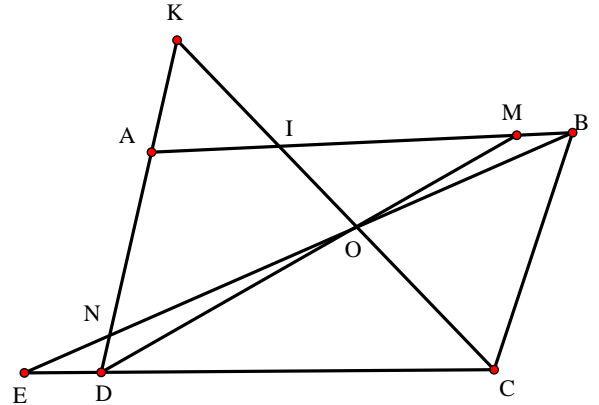
$$\text{Mà } BM = DN \text{ nên } \frac{BO}{OE} = \frac{DN}{ED} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } DN \parallel BC \text{ nên } \frac{DN}{ED} = \frac{BC}{CE} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{BO}{OE} = \frac{BC}{CE} \Rightarrow CO \text{ là đường phân giác } \widehat{BCD}$$

$$\Rightarrow \widehat{DKC} = \widehat{DCK} (= \widehat{BCK}) \Rightarrow \Delta CDK \text{ cân tại } D \Rightarrow CD = DK$$

$$\Rightarrow \widehat{BIC} = \widehat{DCI} (= \widehat{ICD}) \Rightarrow \Delta BCI \text{ cân tại } B \Rightarrow BI = BC$$



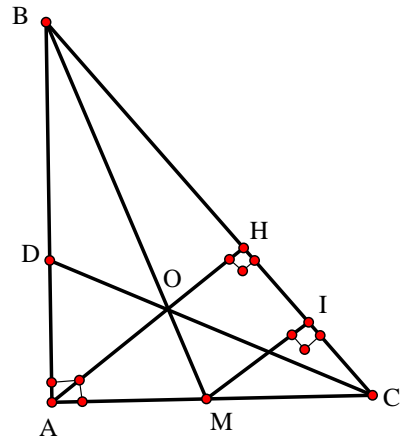
14.9. Kẻ $MI \perp HC$ vì $AH \perp HC$ nên $MI \parallel AH$

Mặt khác $MA = MC$ nên $HI = CI \Rightarrow 2 \cdot HI = CH$

Áp dụng tính chất đường phân giác và định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{BH}{CH} = \frac{BH}{2 \cdot HI} = \frac{BO}{2 \cdot OM} = \frac{BC}{2 \cdot CM} = \frac{BC}{AC}$$

(lời giải khác, các bạn xem ở chuyên đề định lý Cê-và)



14.10. Đặt $BC = x$; $CA = y$; $AB = z$

Theo tính chất đường phân giác của ΔABC , ta có:

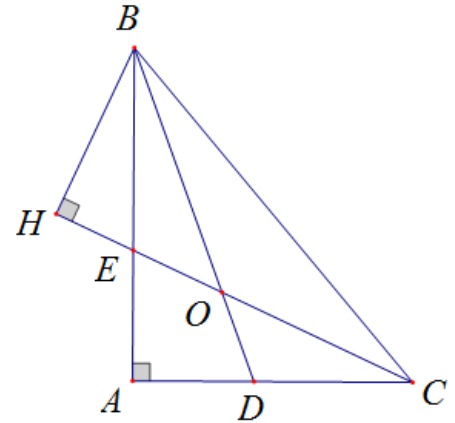
$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{z}{x} \Rightarrow \frac{DA}{DA + DC} = \frac{z}{z + x} \Rightarrow DA = \frac{yz}{z + x} \quad (2)$$

AO là phân giác BAD nên

$$\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DA} \Rightarrow \frac{OB}{OB+OD} = \frac{AB}{AB+DA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{OB}{BD} = \frac{x+z}{x+y+z}$

Tương tự $\frac{OC}{CE} = \frac{x+z}{x+y+z}$. Từ đó



$$\frac{OB \cdot OC}{BD \cdot CE} = \frac{(x+y)(x+z)}{(x+y+z)^2} \Rightarrow \frac{OB \cdot OC}{BD \cdot CE} = \frac{x^2 + xy + xz + yz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz}$$

Vì $y^2 + z^2 = x^2$ nên $\frac{OB \cdot OC}{BD \cdot CE} = \frac{x^2 + xy + xz + yz}{2(x^2 + xy + yz + xz)} = \frac{1}{2}$

Hay $BD \cdot CE = 2 \cdot OB \cdot OC \quad (3)$

Để ý rằng nếu kẻ $BH \perp OC$, mặt khác dễ thấy $\angle BOC = 135^\circ$, nên $\triangle BHO$ vuông cân tại H . Do đó

$$S_{HOC} = \frac{1}{2} BH \cdot OC = \frac{\sqrt{2}}{4} OB \cdot OC, \text{ suy ra } OB \cdot OC = 2a\sqrt{2} \quad (4)$$

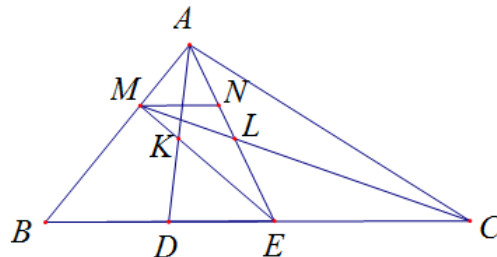
Từ (3) và (4) suy ra: $BD \cdot CE = 4a\sqrt{2}$.

14.11. Trên AE lấy điểm N sao cho $MN \parallel BC$

Từ giả thiết $\angle EAC = \angle ECA \Rightarrow \triangle EAC$ cân tại $E \Rightarrow AE = EC \quad (1)$

Cũng theo giả thiết $\angle AEB = \angle EAC + \angle ECA = 2 \cdot \angle ECA = \angle EAB \Rightarrow \triangle BAE$ cân tại $B \Rightarrow \triangle MAN$ cân tại M (vì $MN \parallel BE$) $\Rightarrow AM = NM \quad (2)$

Vậy ta có $\frac{LM}{LC} = \frac{NM}{EC} \quad (\text{vì } MN \parallel EC) = \frac{AM}{AE} \quad (\text{theo (1) và (2)}) = \frac{KM}{KE} \quad (\text{theo tính chất đường phân giác})$ suy ra $KL \parallel BC$ (định lý Ta – lét đảo).



14.12. $\triangle BCM$ có CD là đường phân giác nên $\frac{BC}{CM} = \frac{BD}{MD} = 2 \Rightarrow BC = 2 \cdot CM$

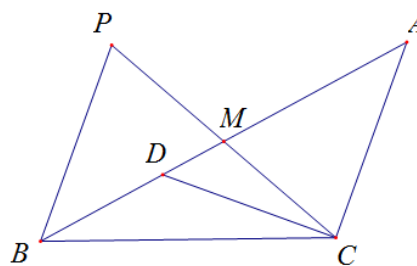
Trên tia đối của tia MC lấy điểm P sao cho $MC = MP$ suy ra $CP = 2 \cdot CM$

$\Rightarrow CP = BC \Rightarrow \triangle CBP$ cân tại C , mà CD là phân giác nên $CD \perp BP \quad (1)$.

Mặt khác: $\triangle CMA = \triangle PMB$ (c.g.c),

Do đó $\angle CAM = \angle PBM$ suy ra $AC \parallel BP$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $CD \perp AC$ hay $\triangle ACD$ vuông tại C .



Chuyên đề 15. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC

15.1.

a) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACF$ có $\angle AEB = \angle AFC = 90^\circ$; $\angle BAC$ chung

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ACF \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE.AC = AF.AB$$

b) Từ $AE.AC = AF.AB \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ có $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$; $\angle BAC$

chung

$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC \text{ (c.g.c)}.$$

c) Chứng minh tương tự, ta có:

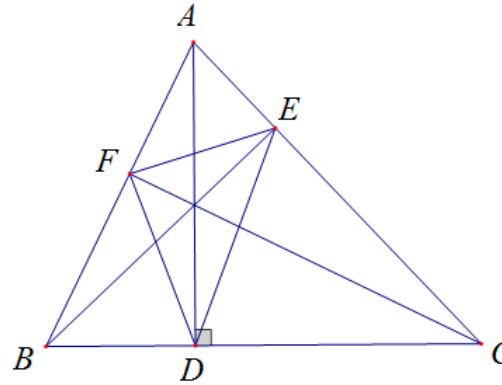
$$\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\triangle CAB \sim \triangle CDE \text{ (g.g)} \Rightarrow \angle ABC = \angle CED$$

Từ đó suy ra: $\angle AEF = \angle CED \Rightarrow EB$ là tia phân giác $\angle DEF$.

Chứng minh tương tự, ta có DA là tia phân giác $\angle EDF$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.



15.2.

$\triangle CBH$ và $\triangle CDK$ có:

$$\angle CHB = \angle CKD (= 90^\circ), \angle HBC = \angle KDC (= \angle BCD)$$

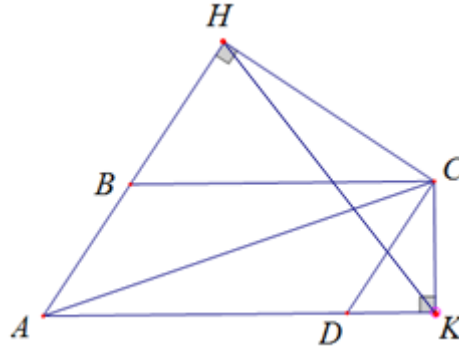
$$\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle CDK \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CK}{CD}$$

Mà $CD = AB$ nên $\frac{CH}{CB} = \frac{CK}{AB}$.

$\triangle CHK$ và $\triangle BCA$ có $\frac{CH}{CB} = \frac{CK}{AB}$

và $\angle ABC = \angle HCK$ (cùng bù với $\angle BAD$) suy ra

$$\triangle CHK \sim \triangle BCA \text{ (c.g.c)}.$$



15.3.

$\triangle IAB$ và $\triangle DCB$ có $\angle ABI = \angle CBD$; $\angle IAB = \angle DCB$

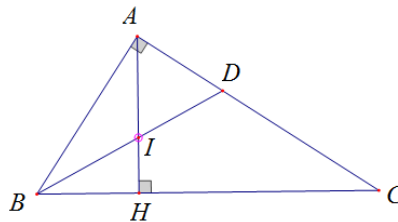
(hai góc cùng phụ với $\angle ABC$)

$$\Rightarrow \triangle IAB \sim \triangle DCB \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BI}{BD}$$

$\triangle ABC$ có BD là đường phân giác nên:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}.$$

Do đó: $\frac{BI}{BD} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow AD.BD = BI.DC.$



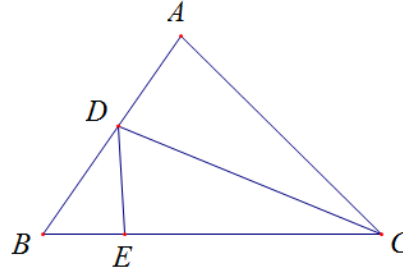
15.4.

Ta có: $\angle CDB > A$ (tính chất góc ngoài), do đó trên cạnh BC lấy E sao cho $\angle CDE = A$.

$\triangle ACD$ và $\triangle DCE$ có: $\angle C_1 = \angle C_2; \angle A = \angle CDE$

$$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle DCE \quad (g.g) \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{CE}$$

$$\Rightarrow CD^2 = AC \cdot CE < AC \cdot BC.$$



15.5.

Ta có: $\angle AEC = \angle BDC$ và $\angle DBC = \angle ECB = 60^\circ$

Vì $\angle DBC = \angle ACB = 60^\circ$ nên $AC \parallel BD$.

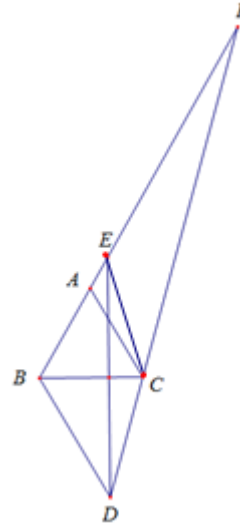
Suy ra: $\angle ACF = \angle BDC = \angle AEC \Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle ACF \quad (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AB+AF} = \frac{AE}{AB+AE}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BF} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow \frac{AB}{BF} = 1 - \frac{AB}{BE}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BF} + \frac{AB}{BE} = 1 \Rightarrow \frac{1}{BF} + \frac{1}{BE} = \frac{1}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{BD} + \frac{1}{BF} = \frac{1}{BC}. \text{ Điều phải chứng minh.}$$



15.6.

Từ giả thiết suy ra C là trực tâm $\triangle AEF$ nên $AC \perp EF$.

Kết hợp với $BD \perp AM$ và $ED \perp AF$

theo tính chất góc có cạnh tương ứng vuông góc ta có:

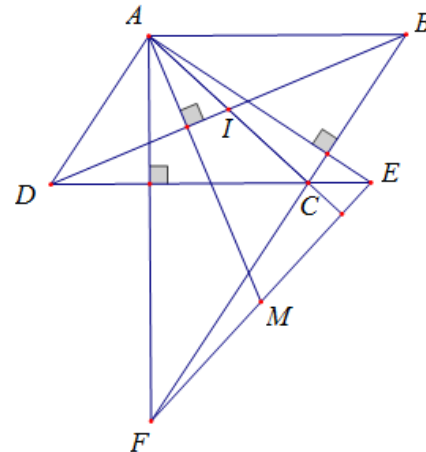
$$\angle ICD = \angle MFA; \angle CDI = \angle MAF$$

$$\Rightarrow \triangle ICD \sim \triangle MFA$$

$$\Rightarrow \frac{IC}{ID} = \frac{MF}{MA} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \triangle ICB \sim \triangle MEA \quad (g.g) \Rightarrow \frac{IC}{IB} = \frac{ME}{MA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) kết hợp với giả thiết $IB = ID$ suy ra $ME = MF$.



15.7. a)

Trong tam giác BDM ta có: $D_1 = 120^\circ - M_1$

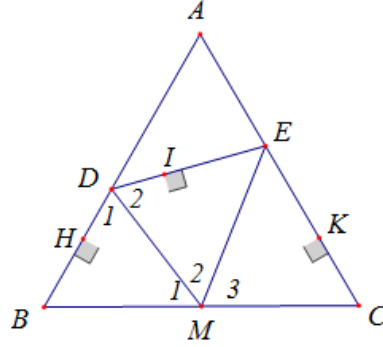
Vì $M_2 = 60^\circ$ nên ta có: $M_1 = 120^\circ - M_1$

Suy ra $D_1 = M_3$ mà $B = C = 60^\circ$

Do đó $\triangle BMD \sim \triangle CEM$ (1)

Suy ra $\frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE}$, từ đó: $BD \cdot CE = BM \cdot CM$

Vì $BM = CM = \frac{BC}{2}$, nên ta có: $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$



b) Từ (1) suy ra: $\frac{BD}{CM} = \frac{MD}{EM}$ mà $BM = CM$ nên ta có: $\frac{BD}{BM} = \frac{MD}{EM}$

Do đó $\triangle BMD \sim \triangle MED$.

Từ đó suy ra: $D_1 = D_2$, do đó DM là tia phân giác của góc BDE .

Chứng minh tương tự ta có EM là tia phân giác của góc CED .

c) Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC .

Theo tính chất đường phân giác, ta có: $DH = DI, EI = EK \Rightarrow AH = AK$.

Từ đó suy ra chu vi tam giác ADE bằng:

$$AD + DE + EA = AD + DH + EK + EA = 2AH$$

Vậy chu vi tam giác ADE không đổi.

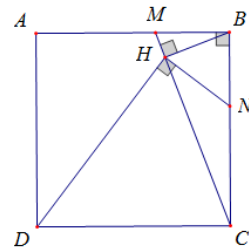
15.8. a)

Xét $\triangle DHC$ và $\triangle NHB$ có:

$$\angle DHC = \angle NHB (= 90^\circ - \angle CHN);$$

$$\angle HCD = \angle HBC (= 90^\circ - \angle BCH)$$

Suy ra: $\triangle DHC \sim \triangle NHB$ (g.g).



b)

Xét $\triangle MBH$ và $\triangle BCH$ có:

$$\angle MHB = \angle BHC (= 90^\circ); \angle MBH = \angle HCB (= 90^\circ - \angle CBH)$$

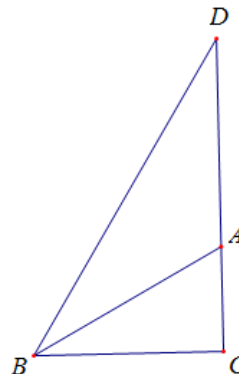
Suy ra $\triangle MBH \sim \triangle BCH$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{HB}{HC} \quad (1)$$

Mà $\triangle DHC \sim \triangle NHB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{NB}{DC} = \frac{HB}{HC} \quad (2) \text{ và } BC = CD$$

nên từ (1) và (2), suy ra: $MB = NB \Rightarrow AM = CN$, suy ra $AM \cdot NB = NC \cdot MB$.



15.9. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$.

Từ đó suy ra $DC = 3.AC$ và $BAC = 2BDA$ nên $BDC = 2ABC$.

$$\text{Từ đó } \triangle ABC \sim \triangle BDC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow BC^2 = DC.AC$$

$$\Rightarrow BC^2 = 3AC^2 \Rightarrow BC^2 + AC^2 = 4.AC^2$$

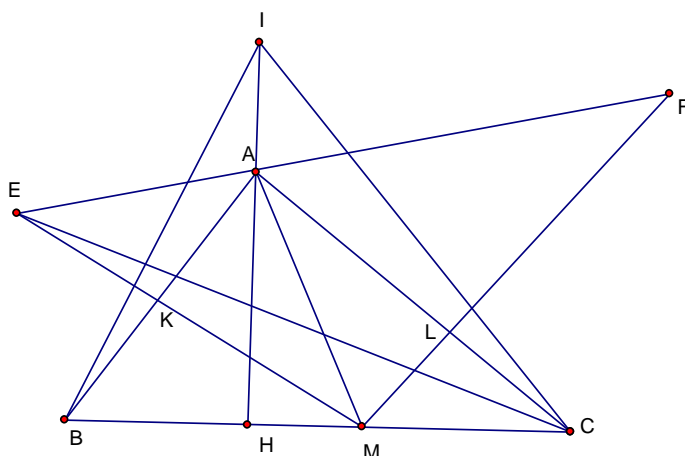
Nên $\Rightarrow AB^2 = BC^2 + AC^2$. Vậy $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại C.

15.10. a) Ta có $BIA = MCE (= 90^\circ - IBH)$ (1).

Lại có $IAB + BAH = 180^\circ$; $CME + EMB = 180^\circ$ và

$$BAH = EMB (= 90^\circ - ABC) \Rightarrow IAB = CME \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle AIB \sim \triangle MCE (g.g)$.



b) $\triangle MAK$ và $\triangle MEA$ có $MKA = MAE (= 90^\circ)$, AME chung

$$\triangle MAK \sim \triangle MEA (g.g) \Rightarrow \frac{MA}{ME} = \frac{MK}{MA} \Rightarrow MA^2 = ME.MK \quad (3)$$

$$\text{Tương tự: } \triangle MAL \sim \triangle MFA (g.g) \Rightarrow \frac{MA}{MF} = \frac{ML}{MA} \Rightarrow MA^2 = MF.ML \quad (3)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } ME.MK = MF.ML \Rightarrow \frac{ME}{MF} = \frac{ML}{MK}$$

$$\text{Ta có: } \frac{MB}{MC} = \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \frac{AB.MK}{AC.ML}$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{ME}{MF} = \frac{ML}{MK} \Rightarrow \frac{MK}{ML} = \frac{MF}{ME}$$

Suy ra $\frac{MB}{MC} = \frac{AB.MF}{AC.ME} \Rightarrow \frac{MB}{MF} = \frac{AB.MC}{AC.ME}$ (5)

Mặt khác $\triangle AIB \sim \triangle MCE$, suy ra $\frac{MC}{ME} = \frac{AI}{AB}$ (6)

Từ (4) và (5) suy ra $\frac{MB}{MF} = \frac{AB.AI}{AC.AB} = \frac{AI}{AC}$

c) $\triangle MBF$ và $\triangle AIC$ có $\frac{MB}{AI} = \frac{MF}{AC}$

và $\angle IAC = \angle BMF \Rightarrow \triangle MBF \sim \triangle AIC (c.g.c) \Rightarrow \angle AIC = \angle MBF$

mà $\angle AIC + \angle ICB = 90^\circ (\angle AIC \perp BC) \Rightarrow \angle MBF + \angle ICB = 90^\circ$ hay BF vuông góc với CI.

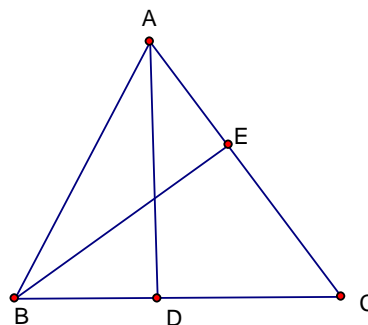
Tam giác IBC có IH, BF, CE là đường cao, suy ra điều phải chứng minh.

15.11. Ta có: $\triangle ADC \sim \triangle BEC (g.g)$ suy ra:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CE} = \frac{\frac{1}{2}CB}{\frac{1}{2}CA} = \frac{CB}{CA} \Rightarrow CA^2 = CB^2 \Rightarrow CA = CB \quad (1)$$

$$\Rightarrow CA = 2CD. \text{ Mặt khác } \angle DAC = 30^\circ \Rightarrow \angle C = 60^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ABC là tam giác đều.



15.12. a) Ta có: $\angle APB = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1 = 180^\circ - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \frac{360^\circ - A - B}{2} = \frac{180^\circ + C}{2} = 90^\circ + \frac{C}{2}$

Xét $\triangle CMB$ có $\angle M_1 = \angle MBC + \angle MCP$

$$\Rightarrow \angle M_1 = 90^\circ + \frac{C}{2} \Rightarrow \angle APB = \angle M_1.$$

$\triangle APB$ và $\triangle AMP$ có

$$\angle APB = \angle M_1; \angle A_1 = \angle A \Rightarrow \triangle APB \sim \triangle AMP$$

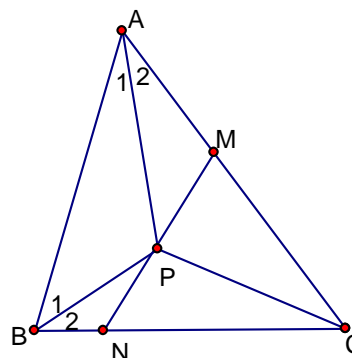
$$\Rightarrow \frac{AM}{AP} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow AM.AB = AP^2. \quad (1)$$

Tương tự, ta có $\triangle APB \sim \triangle PNB (g.g) \Rightarrow$

$$\frac{BN}{BP} = \frac{BP}{AB} \Rightarrow BN.AB = BP^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AM}{BN} = \left(\frac{AP}{BP}\right)^2$, điều phải chứng minh.

b) xét $\triangle AMP \sim \triangle APB$ (chứng minh trên); $\triangle APB \sim \triangle PNB$ (chứng minh trên);



$$\Rightarrow \triangle AMP \sim \triangle PNB \Rightarrow \frac{AM}{PN} = \frac{MP}{BN} \Rightarrow AM \cdot BN = PN \cdot MP$$

Hay $AM \cdot BN = MP^2$.

$$AM \cdot BN = MP^2.$$

$\triangle CMN$ có CP là phân giác, CP là đường cao nên $\triangle CMN$ cân tại C

$$\Rightarrow CM = CN; MP = PN.$$

$$\text{Xét } AM \cdot BC + BN \cdot AC + CP^2 = AM \cdot BC + BN \cdot AC + CM^2 - MP^2$$

$$= AM \cdot BC + BN \cdot AC + CM^2 - AM \cdot BN$$

$$= AM \cdot (BC - BN) + BN \cdot AC + CM^2$$

$$= CM \cdot (AM + CM) + BN \cdot AC$$

$$= CM \cdot AC + BN \cdot AC = AC(CM + BN) = AC \cdot BC$$

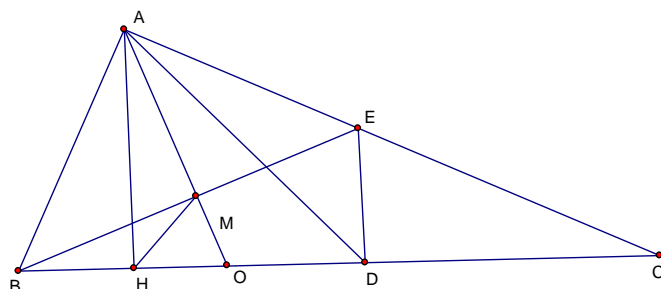
$$\text{Do đó } AM \cdot BC + BN \cdot AC + CP^2 = AC \cdot BC$$

$$\text{Suy ra } \frac{AM}{AC} + \frac{BM}{BC} + \frac{CP^2}{AC \cdot BC} = 1, \text{ điều phải chứng minh.}$$

15.13. a) $\triangle CDE$ và $\triangle CAB$ có $\angle CDE = \angle CAB = 90^\circ$, $\angle DCE$ chung

$$\text{Suy ra } \triangle CDE \sim \triangle CAB (g.g) \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$$

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle BEC$ có $\angle ACB$ chung, $\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$, (chứng minh trên)



Do đó $\triangle ADC \sim \triangle BEC (c.g.c)$

Suy ra $\angle BEC = \angle ADC = 135^\circ$ (vì tam giác AHD vuông cân tại H theo giả thiết)

Nên $\angle AEB = 45^\circ$ do đó tam giác ABE vuông cân tại A .

$$\text{Suy ra } BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}.$$

$$\text{b) Ta có } \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC} \quad (\text{do } \triangle BEC \sim \triangle ADC)$$

mà $AD = AH\sqrt{2} = m\sqrt{2}$ (tam giác AHD vuông cân tại H)

$$\text{nên } \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH\sqrt{2}}{AC} = \frac{BH}{AB\sqrt{2}} = \frac{BH}{BE} \text{ (do } \triangle ABH \sim \triangle CBA \text{)}$$

Xét $\triangle BHM$ và $\triangle BEC$ có $\frac{BM}{BC} = \frac{BH}{BE}$ và $\angle B$ chung

Do đó $\triangle BHM \sim \triangle BEC$ (c.g.c) suy ra

$$\angle BHM = \angle BEC = 135^\circ \Rightarrow \angle AHM = 45^\circ$$

c) Ta có AG còn là phân giác góc BAC $\frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}$

$$\begin{aligned} \triangle ABC \sim \triangle DEC &\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC} = \frac{AH}{HC} \text{ (} ED \parallel AH \text{)} = \frac{HD}{HC} \\ \Rightarrow \frac{GB}{GC} &= \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC} = \frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC} \end{aligned}$$

15.14.

a) Đặt $\angle AFE = \angle BFD = \omega, \angle BDF = \angle CDE = \alpha, \angle CED = \angle AEF = \beta$.

Ta có $\angle BAC + \beta + \omega = 180^\circ$ (*)

Gọi O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DEF, suy ra OD, OE, OF lần lượt vuông góc với BC, AC, AB.

$$\Rightarrow \angle OFE + \angle OED + \angle ODF = 90^\circ \quad (1)$$

Ta có

$$\angle OFD + \omega + \angle OED + \beta + \angle ODF + \alpha = 270^\circ \quad (2)$$

$$(1) \text{ và } (2) \Rightarrow \alpha + \beta + \omega = 180^\circ \quad (**)$$

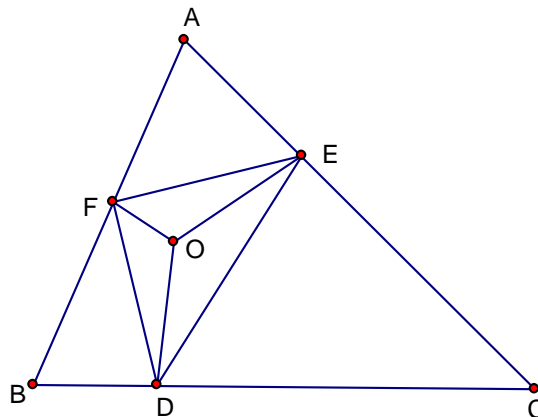
$$(*) \text{ và } (**) \Rightarrow \angle BAC = \alpha = \angle BDF$$

Chứng minh tương tự câu a), ta có

$$\angle B = \beta; \angle C = \omega$$

$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle BDF \sim \triangle CED \sim \triangle ABC$$

Suy ra



$$\begin{cases} \frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BC} = \frac{5}{8} \\ \frac{CD}{CF} = \frac{CA}{CB} = \frac{7}{8} \\ \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7(7-CE) = 5(5-BF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7CE - 5BF = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow CD - BD = 3 \quad (3)$$

$$\text{Ta lại có: } CD + BD = 8 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow BD = 2,5.$$

15.15. Kẻ từ M các đường thẳng song song với các cạnh AB, BC cắt các cạnh tại E, F, G, H (hình vẽ).

Ta có: $AGM = CFM (= ABC)$.

Mặt khác $MAB = MCB$ do đó $\triangle GGM \sim \triangle CFM$

$$\Rightarrow \frac{AG}{CF} = \frac{MG}{MF} \text{ mặt khác } AG = DH; CF = MH; MG = FB$$

$$\text{nên } \frac{DH}{MH} = \frac{BF}{MF} \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } DHM = BFM (= BCD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle DHM \sim \triangle BFM \Rightarrow MDC = MBC$.

15.16. Về phía ngoài $\triangle ABC$ vẽ $\triangle BCE$ vuông cân tại C

$$\Rightarrow ADB = ACE (= ACB + 90^\circ)$$

$$\text{Mà } \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC} \text{ (vì } AC \cdot BD = AD \cdot BC)$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{CE} \text{ do đó } \triangle ABD \sim \triangle AEC \text{ (c.g.c)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow A_1 = A_2 \Rightarrow BAE = DAC$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \text{ do đó } \triangle ABE \sim \triangle ADC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DC} \Rightarrow AB \cdot DC = AD \cdot BE.$$

$$\text{Mặt khác } \triangle ABE \text{ vuông cân nên } BE = \sqrt{2} \cdot BC.$$

$$\text{Do đó } AB \cdot CD = \sqrt{2} \cdot AD \cdot BC \text{ hay } \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \sqrt{2}.$$

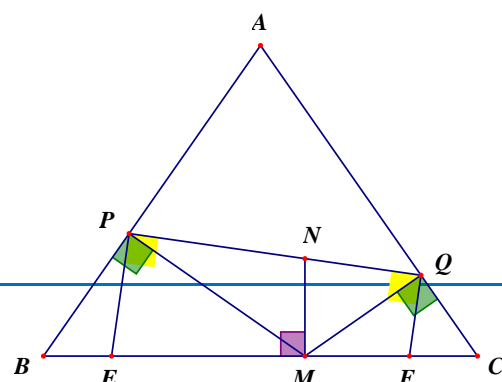
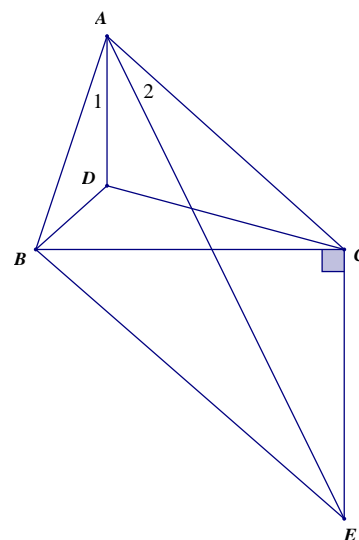
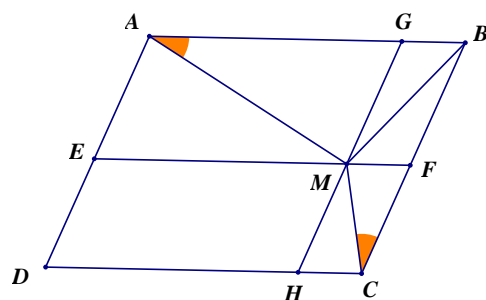
15.17. Lấy N trên PQ sao cho $MN \perp BC$.

Ta có: $PBE = PMN$ (cùng phụ với PMB)

$BPE = MPN$ (cùng phụ với EPM)

nên $\triangle PBE \sim \triangle PMN$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BE}{MN} = \frac{BP}{MP} \Rightarrow BE = MN \cdot \frac{BP}{MP} \quad (1)$$



Tương tự, ta có: $CF = MN \cdot \frac{CQ}{MQ}$ (2)

Mặt khác $\triangle BPN \sim \triangle CQM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BP}{MP} = \frac{CQ}{MQ}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $BE = CF$.

15.18. Gọi H là giao điểm của BE và CF . Gọi I là giao điểm của AH và PQ . Ta có:
 $\angle ABQ = \angle ACP = (90^\circ - \angle BAC)$; $\angle BAQ = \angle PAC$ suy ra $\triangle ABQ \sim \triangle ACP$ (g.g)

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{AP}{AC}. \text{ Mặt khác } APHQ \text{ là hình bình hành nên } AP = HQ \Rightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{HQ}{AC}.$$

Ta lại có: $\angle BAC = \angle AQH (=180^\circ - \angle PAQ)$ suy ra

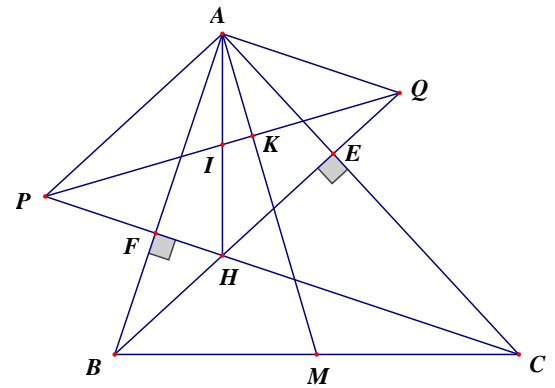
$$\triangle ABC \sim \triangle QAH \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle ABC = \angle QAH; \frac{AB}{QA} = \frac{BC}{AH} = \frac{BM}{AI}$$

(vì $BC = 2 \cdot BM$, $AH = 2 \cdot AI$).

Do đó: $\triangle ABM \sim \triangle QAI$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle BAM = \angle AQI$

$$\Rightarrow \angle QAM + \angle AQI = 180^\circ \Rightarrow AM \perp PQ.$$



15.19. Gọi P là giao điểm của AB và DE ; Q là giao điểm của BD và CE .

$\triangle DEC$ có $DC = DE (=DB)$ và $\angle EDC = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$ nên

$$\angle DEC = \angle DCE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle EDC) = 20^\circ.$$

Ta có $\angle ABD + \angle DBC = \angle ABC$ nên $\angle ABD = 20^\circ$.

$\triangle BDP$ và $\triangle EDQ$ có $\angle DEQ = \angle DBP = 20^\circ$; $BD = ED$; $\angle EDB$ chung

$$\Rightarrow \triangle BDP = \triangle EDQ \text{ (c.g.c)} \Rightarrow EQ = BP; PD = DQ.$$

$\triangle BPD$ và $\triangle ABC$ có $\angle PDB = \angle ABC = 80^\circ$; $\angle DBA = \angle BAC = 20^\circ$

$$\Rightarrow \triangle BPD \sim \triangle ABC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BP} = \frac{BC}{PD} = \frac{BD}{PD} = \frac{ED}{PD} \text{ hay } \frac{AB}{BP} = \frac{ED}{PD}$$

$$\Rightarrow AE \parallel BD \text{ (định lý Ta-lét đảo)}$$

$$\Rightarrow \angle EAP = \angle PBD \text{ (so le trong)} \Rightarrow \angle EAP = 20^\circ \Rightarrow \angle EAC = 40^\circ.$$

Mặt khác $\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE = 40^\circ \Rightarrow \angle EAC = \angle ACE$

$$\Rightarrow \triangle ACE \text{ cân tại } E.$$

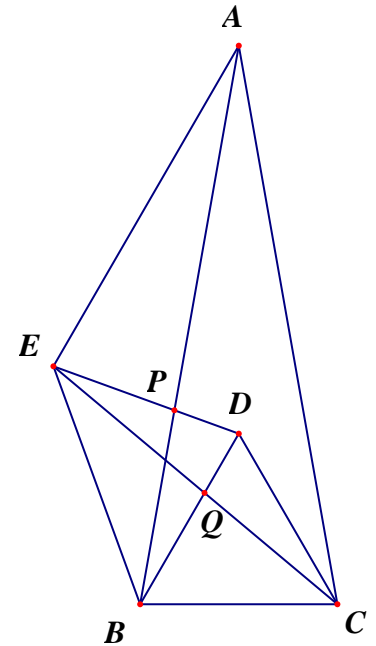
15.20. Gọi K là điểm đối xứng với B qua A . Gọi M là giao điểm của BD và CK .

$\triangle BCK$ có CA là đường trung tuyến ($AB = AK$),

mà $CD = 2 \cdot AD$ nên D là trọng tâm tam giác

$$\Rightarrow MC = MK. \triangle BCK \text{ có } AK = AB, MC = MK \text{ nên } AM \text{ là đường trung bình}$$

$$\Rightarrow AM \parallel BC \Rightarrow \angle AMB = \angle EBC \text{ mà } \angle ABC = \angle DEC \Rightarrow \angle ABM = \angle ABC - \angle MBC = \angle DEC - \angle EBC = \angle ECB.$$



$\triangle AMB$ và $\triangle EBC$ có $\angle AMB = \angle EBC$, $\angle ABM = \angle ECB$

$$\Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle EBC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BC}{MB} = \frac{BE}{AM}.$$

Ta có $AB = AK$, $AC = AF$ và $BK \perp CF$ nên $BCKF$ là hình thoi

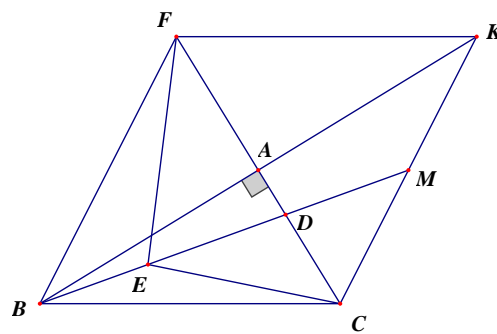
$$\Rightarrow BC = CK \Rightarrow AM = MC.$$

$$\frac{BF}{MB} = \frac{BC}{MB} = \frac{BE}{AM} = \frac{BE}{MC}$$

$$\Rightarrow \frac{BF}{MB} = \frac{BE}{MC} \text{ mà } \angle EBF = \angle CMB \Rightarrow \triangle EBF \sim \triangle CMB \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow \angle BEF = \angle MCB$ kết hợp với $BCKF$ là hình thoi nên

$$\angle DEF = 180^\circ - \angle BEF = 180^\circ - \angle MCB = \angle FBC = 2\angle ABC \text{ hay } \angle DEF = 2\angle ABC.$$



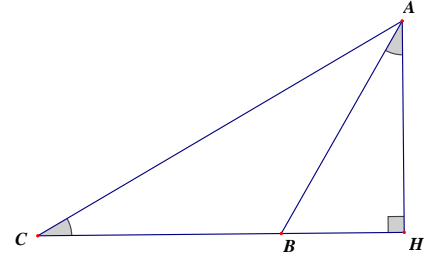
Chuyên đề 16. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

16.1. Ta có $\angle ABC = \angle BAH + \angle AHB = \angle BAH + 90^\circ$

mà $\angle ABC = \angle ABC + 90^\circ \Rightarrow \angle ACH = \angle BAH$.

Từ đó suy ra: $\triangle ABH \sim \triangle CAH$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH$$



16.2. Kẻ $HI \perp BC$ tại I .

$\triangle BIH$ và $\triangle BDC$ có $\angle BIH = \angle BDC = 90^\circ$ mà $\angle DBC$ chung do đó $\triangle BIH \sim \triangle BDC$ (g.g)

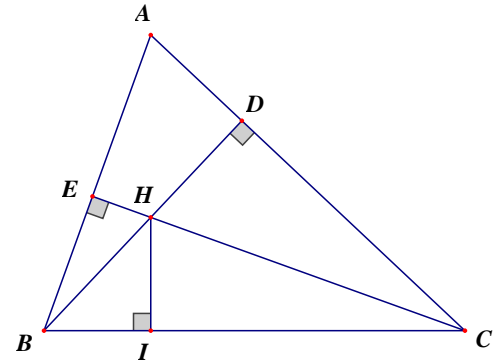
$$\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BI}{BD} \Rightarrow BH \cdot BD = BI \cdot BC \quad (1)$$

Tương tự ta có $\triangle CIH \sim \triangle CEB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CI}{CE}$

$$\Rightarrow CH \cdot CE = BC \cdot CI \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cộng từng vế ta có:

$$BH \cdot BD + CH \cdot CE = BI \cdot BC + BC \cdot CI = BC(BI + CI) = BC^2.$$

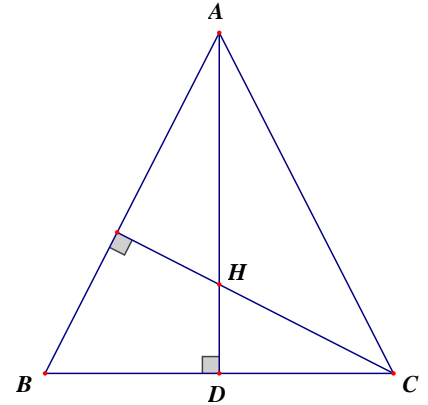


16.3. Ta có: $\angle BAD = \angle BCH = (90^\circ - \angle ABC)$

và $\angle CDH = \angle ADB = (90^\circ)$.

Suy ra: $\triangle CDH \sim \triangle ADB$ (g.g) nên $\frac{CD}{AD} = \frac{DH}{DB}$.

Ta lại có $CD = DB$ nên $CD^2 = DA \cdot DH$.



16.4. Qua O kẻ đường thẳng song song với AD , cắt đường thẳng BI , CK lần lượt tại $E, F \Rightarrow OE \perp BI, OF \perp CK$.

Xét $\triangle BEO$ và $\triangle AIB$ có: $\angle BEO = \angle AIB$;

$$\angle ABI = \angle BOE (= 90^\circ - \angle OBI)$$

$$\Rightarrow \triangle BEO \sim \triangle AIB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BO}{AB} = \frac{EO}{IB} \quad (1)$$

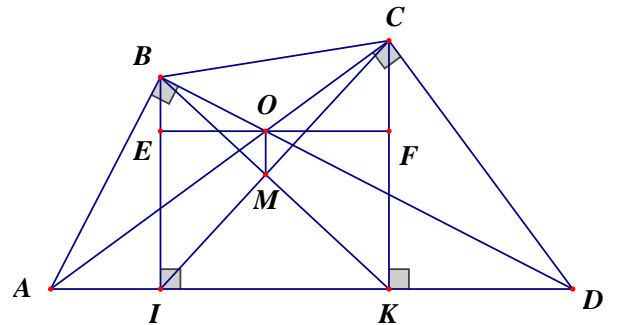
Chứng minh tương tự, ta có:

$\triangle CFO \sim \triangle DKC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CO}{CD} = \frac{OF}{CK} \quad (2)$$

Xét $\triangle AOB$ và $\triangle DOC$ có $\angle AOB = \angle DOC$; $\angle ABO = \angle DCO$

$$\Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle DOC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BO}{AB} = \frac{OC}{CD} \quad (3)$$



Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{EO}{IB} = \frac{OF}{CK} \Rightarrow \frac{OE}{OF} = \frac{IB}{CK}$ (4)

Ta có: $BI \parallel CK$ nên $\frac{IB}{CK} = \frac{BM}{MK}$ (5)

Ta có: $\triangle BEO \sim \triangle NFO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OE}{OF} = \frac{BO}{ON}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\frac{BM}{MK} = \frac{BO}{ON}$, do đó $OM \parallel NK$ (định lý Ta-let đảo) hay $OM \perp AD$.

16.5. Gọi AH là đường cao của ABC, AH cắt PQ tại I.

Đặt $BC = a$; $AH = h$; $PQ = x$; $MQ = y$

Ta có: $AI = h - y$

Vì $\triangle APQ \sim \triangle ACB$ nên

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AI}{AH} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow x = \frac{a(h-y)}{h}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = xy = \frac{a}{h}(h-y)y$$

Vì a, b là các hằng số dương nên S lớn nhất khi $(h-y)y$ lớn

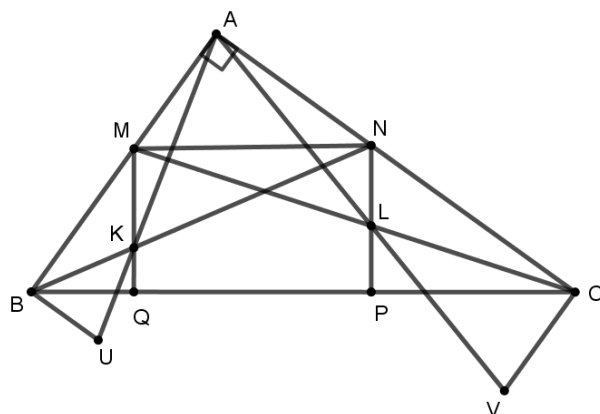
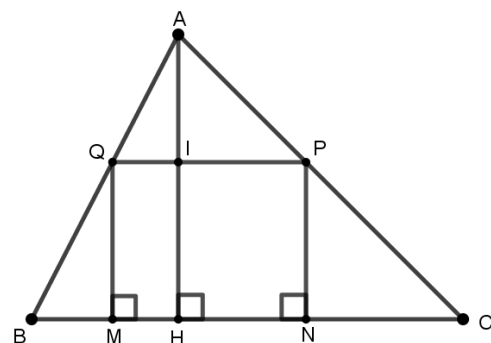
nhất. Áp dụng hệ thức: $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, ta có:

Mà

$$(h-y)y \leq \left(\frac{h-y+y}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4} \Rightarrow S_{MNPQ} \leq \frac{a}{h} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{ah}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{ah}{4}$ khi

$h-y = y \Leftrightarrow y = \frac{h}{2}$ tức là P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AB.



16.6. Lấy U, V theo thứ tự thuộc AK, AL sao cho

$ABU = ACV = 90^\circ$, ta có:

$$NA \parallel BU \Rightarrow \frac{BU}{NA} = \frac{BK}{NK} \quad (1)$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{NA}{MA} = \frac{CA}{BA} \quad (2)$$

$$MA \parallel CV \Rightarrow \frac{MA}{CV} = \frac{ML}{CL} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{BU}{NA} \cdot \frac{NA}{MA} \cdot \frac{MA}{CV} = \frac{BK}{NK} \cdot \frac{CA}{BA} \cdot \frac{ML}{CL}$$

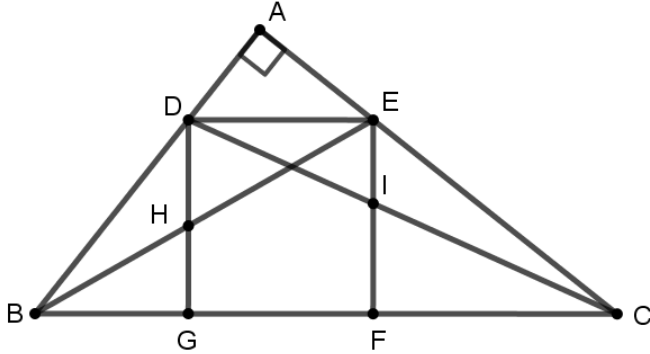
$$\Rightarrow \frac{BU}{CV} = \frac{BQ}{NM} \cdot \frac{CA}{BA} \cdot \frac{MN}{CP} = \frac{BQ \cdot CA}{BA \cdot CP} = \frac{BQ}{MQ} \cdot \frac{CA}{BA} \cdot \frac{NP}{CP} \quad (\text{vì } MQ = NP)$$

$$\Rightarrow \frac{BU}{CV} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{CA}{BA} \cdot \frac{BA}{CA} \quad (\text{vì } \triangle BMQ \sim \triangle BCA, \triangle CNP \sim \triangle CBA)$$

Hay $\frac{BU}{CV} = \frac{AB}{AC}$ và $\angle ABU = \angle ACV (= 90^\circ)$ do đó $\triangle ABU \sim \triangle ACV$ (c.g.c)

Vậy $\angle KAB = \angle LAC$.

16.7.



Ta có: $\angle ADE + \angle EDG + \angle BDG = 180^\circ$, mà $\angle EDG = 90^\circ$ nên $\angle ADE + \angle BDG = 90^\circ$

Mặt khác, ta lại có: $\angle ADE + \angle AED = 90^\circ$ nên $\angle BDG = \angle AED$

$\Rightarrow \triangle BGD \sim \triangle ADE$ (g.g) (1)

Chứng minh tương tự, ta có: $\triangle EFC \sim \triangle ADE$ (g.g) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\triangle BGD \sim \triangle EFC \Rightarrow \frac{BG}{DG} = \frac{EF}{FC}$ (3)

Sử dụng định lý Ta-lét trong $\triangle BHG$, ta có: $DE \parallel BG \Rightarrow \frac{HG}{HD} = \frac{BG}{DE}$.

Mà $DE = DG$ (tính chất hình vuông) nên $\frac{HG}{HD} = \frac{BG}{DG}$ (4)

Tương tự, ta có: $\frac{IE}{EF} = \frac{DE}{FC} = \frac{EF}{FC}$ (5)

Từ (3), (4) và (5) ta có: $\frac{HG}{HD} = \frac{IE}{IF}$, suy ra: $\frac{HG}{HG + HD} = \frac{IE}{IE + IF}$

hay $\frac{HG}{DG} = \frac{IE}{EF}$. Mà $DG = EF$ nên ta có $HG = IE$.

16.8. Vì $ED = EF$ nên $S_{GED} = S_{EFG}$ mà $AF = 2.EF$ nên $S_{GAF} = 2.S_{EFG}$.

Ta lại có $\triangle GBC \sim \triangle GEF$ nên $\frac{S_{GBC}}{S_{EFG}} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 \Rightarrow S_{GBC} = 16.S_{EFG}$

Do đó $S_{EFG} + S_{GED} + S_{GAF} + S_{GBC} = (1 + 1 + 2 + 16).S_{EFG} = 20.S_{EFG}$

Mà $S_{EFG} + S_{GED} + S_{GAF} + S_{GBC} = \frac{1}{2}.S_{ABCD}$

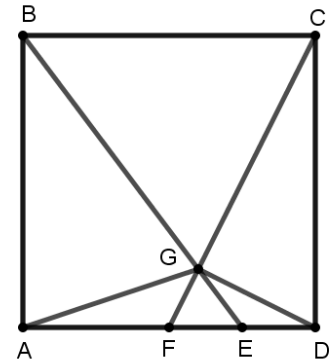
Vậy $S_{EFG} = \frac{1}{40}.S_{ABCD} \Rightarrow \frac{S_{EFG}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{40}$.

16.9. Ta có: $\triangle AME \sim \triangle CMD \Rightarrow \frac{EM}{DM} = \frac{AE}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DM = 2.EM$.

Đặt $S_{AEM} = x$. Ta có: $\frac{S_{AEM}}{S_{ADM}} = \frac{EM}{DM} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{ADM} = 2x$.

Ta có:

$S_{AEM} + S_{ADM} = S_{ADE} = \frac{1}{2}.S_{ABD} = \frac{1}{4}.S_{ABCD} \Rightarrow x + 2x = 37,5\text{cm}^2$



$$\Rightarrow x = 12,5\text{cm}^2 \Rightarrow S_{AMD} = 25\text{cm}^2$$

Tương tự, ta có: $S_{CNE} = 12,5\text{cm}^2$; $S_{CND} = 25\text{cm}^2$.

$$\Rightarrow S_{DMN} = S_{ACD} - S_{AMD} - S_{CND} = 75 - 25 - 25 = 25\text{cm}^2.$$

\Rightarrow diện tích phần tô đậm là: $12,5 + 12,5 + 25 = 50\text{cm}^2$.

16.10. Các tam giác AHB và CHA có chung chiều cao kẻ từ A

$$\text{nên } \frac{HB}{HC} = \frac{S_{AHB}}{S_{CHA}} \quad (1).$$

Ta lại có $\triangle AHB \sim \triangle CHA$ (g.g)

$$\text{nên } \frac{S_{AHB}}{S_{CHA}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{HB}{HC} = \frac{4}{9}.$$

16.11. Dễ thấy $\triangle CHE \sim \triangle CAF$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{CE}{CF}$.

$$\text{Do đó: } \frac{HB \cdot HC}{AB \cdot AC} = \frac{\frac{1}{2} HB \cdot CE}{\frac{1}{2} AB \cdot CF} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{HC \cdot HA}{BC \cdot BA} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}; \frac{HA \cdot HB}{CA \cdot CB} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \frac{HB \cdot HC}{AB \cdot AC} + \frac{HC \cdot HA}{BC \cdot BA} + \frac{HA \cdot HB}{CA \cdot CB} = \frac{S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = 1.$$

16.12. Cách 1. Vẽ hai hình bình hành DECG và ABCH, do đó điểm H thuộc đoạn GC. Gọi K là giao

điểm của AH và DF. Ta có: $\frac{AB}{EF} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ và $CE = 2 \cdot BE$.

Vì hai tam giác ABC và CDE có diện tích bằng nhau nên hai hình bình hành ABCH và DECG có diện tích bằng nhau.

Do đó $CH = 2 \cdot HG$. Suy ra: $DE = GC = 9 + 4,5 = 13,5\text{cm}$ và

$$DF = DE - EF = 13,5 - 6 = 7,5\text{cm}.$$

Cách 2. Kẻ đường cao CI của $\triangle ABC$, CI và EF tại J. Ta có:

$$\frac{CJ}{CI} = \frac{EF}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Hai tam giác ABC và CDE có diện tích bằng nhau nên $AB \cdot CI = DE \cdot CJ$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{CJ}{CI} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{2}{3} \Rightarrow DE = \frac{3}{2} \cdot AB = \frac{3}{2} \cdot 9 = 13,5\text{cm}.$$

$$\text{Suy ra: } DF = DE - EF = 13,5 - 6 = 7,5\text{cm}$$

16.13. Ta có: $\triangle CBQ = \triangle DCE$ (c.g.c) $\Rightarrow BCQ = CDE$ mà

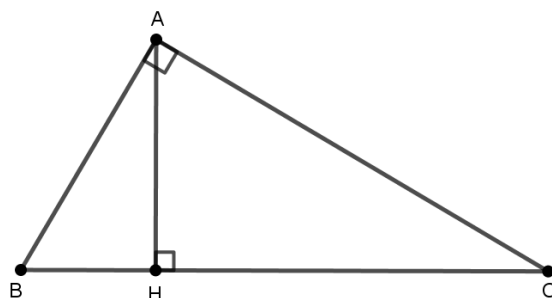
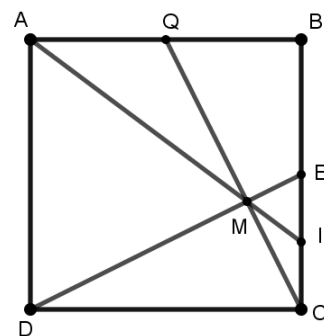
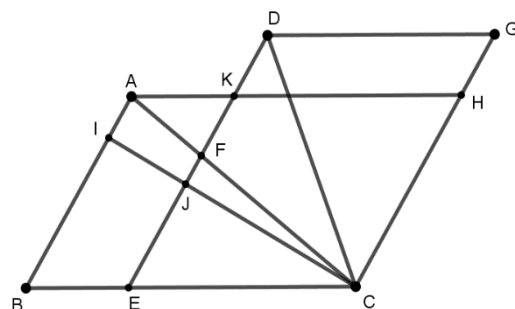
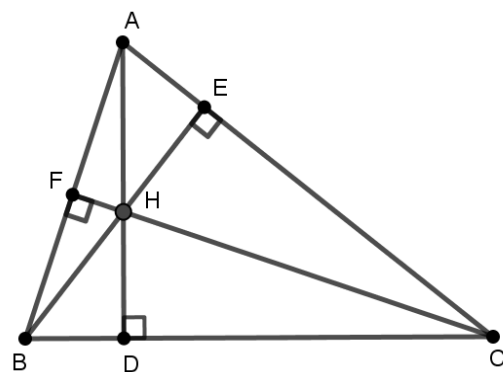
$$CDE + CED = 90^\circ \text{ nên } BCQ + CED = 90^\circ \text{ do đó:}$$

$$\angle EMC = 90^\circ.$$

Vậy các tam giác vuông DCE, DMC, CME đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{DC}{CE} = \frac{DM}{MC} = \frac{MC}{ME} \text{ mà } DC = 2 \cdot CE$$

$$\Rightarrow DM = 2MC; MC = 2ME \Rightarrow DM = 4ME$$



Mà $EI \parallel AD$ nên $\frac{AM}{MI} = \frac{DM}{ME} = 4 \Rightarrow AM = 4.MI$.

16.14.

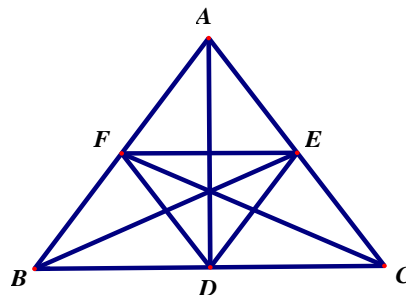
* **Chứng minh điều kiện cần.** Cho tam giác ABC đều, AD, BE và CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC ta cần chứng minh:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Do tam giác ABC đều và AD, BE, CF là các đường phân giác của tam giác nên ta có

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$



* Chứng minh điều kiện đủ. Cho tam giác ABC , AD, BE, CF là các đường phân giác của tam giác, thỏa

mãn $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$, ta cần chứng minh $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$ ($a, b, c > 0$)

Vì AD là đường phân giác của BAC nên ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{DB}{DB+DC} = \frac{c}{c+b} \Rightarrow DB = \frac{ac}{c+b}$$

$$\Rightarrow DC = a - DB = a - \frac{ac}{c+b} = \frac{ab}{c+b}$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$EC = \frac{ab}{a+c}; EA = \frac{bc}{a+c}; FA = \frac{bc}{a+b}; FB = \frac{ca}{a+b}.$$

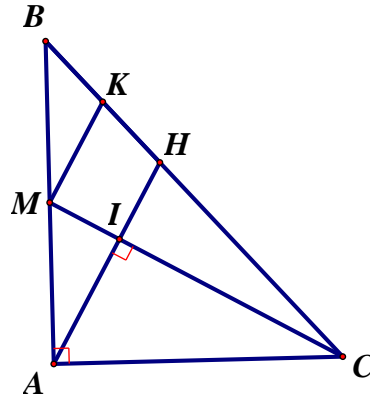
$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} &= \frac{S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} \\ &= 1 - \frac{AF \cdot AE}{AB \cdot AC} - \frac{BF \cdot BD}{BA \cdot BC} - \frac{CE \cdot CD}{CA \cdot CB} \\ &= 1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} - \frac{ac}{(a+c)(b+c)} \\ &= \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có: $\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 8abc \Leftrightarrow a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(b-a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ là tam giác đều.}$$

16.15.



Gọi giao điểm AH và CM là I . Gọi K là trung điểm của BH , thì ta có $MK \parallel AH$.

Dễ thấy ba tam giác vuông AMC, IAC, IMA đồng dạng mà $AC = 2.AM$ nên $IC = 2.IA = 4.AM$

$$\text{Suy ra: } \frac{HK}{HC} = \frac{IM}{IC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{2.HK}{HC} = \frac{1}{2}.$$

16.16. Ta có: $\triangle ABH \sim \triangle CAH$ nên tỉ số chi vi bằng tỉ số đồng dạng, suy ra:

$$\frac{AH}{HC} = \frac{30}{40} \Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AH}{3} = \frac{HC}{4}$$

$$\text{Đặt } \frac{AH}{3} = \frac{HC}{4} = k (k > 0)$$

Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow AC = 5k$$

Mà chu vi $\triangle CAH$ là $40(cm)$ nên

$$3k + 4k + 5k = 40 \Rightarrow k = \frac{10}{3}(cm).$$

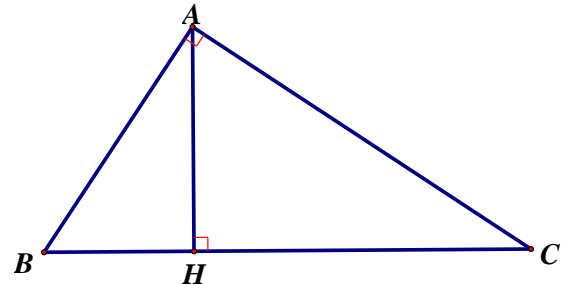
$$\text{Suy ra } AH = 10(cm), HC = \frac{40}{3}(cm), AC = \frac{50}{3}(cm)$$

Ta có $\triangle ABC \sim \triangle HAC$ nên tỉ số chu vi bằng tỉ số đồng dạng, suy ra:

$$\frac{C_{ABC}}{C_{HAC}} = \frac{AC}{HC} = \frac{50/3}{40/3} = \frac{5}{4} \Rightarrow C_{ABC} = \frac{5}{4}.40 = 50(cm)$$

16.17. Nhận xét rằng tỉ số chu vi của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng. Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng nên:

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{50}{60}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{25}{36}$$



$$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC} - S_{A'B'C'}} = \frac{25}{36 - 25} \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{33} = \frac{25}{11} \Rightarrow S_{A'B'C'} = 75 (cm^2)$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = 33 + 75 = 108 (cm^2).$$

16.18. Qua điểm M trên cạnh BC vẽ đường thẳng song song với AB cắt AC tại E , vẽ đường thẳng song song với AC cắt AB tại D .

Ta có $\triangle DBM \sim \triangle ABC \sim \triangle EMC$

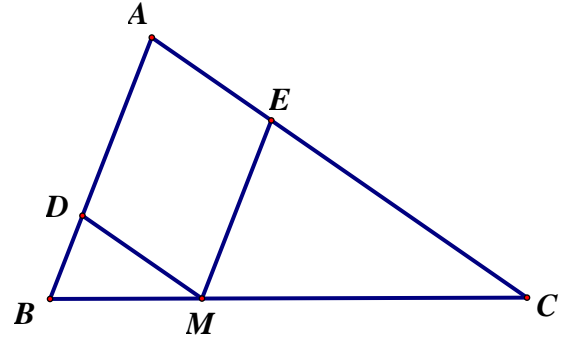
$$\Rightarrow \frac{S_{DBM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{BM}{BC}\right)^2; \frac{S_{EMC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CM}{BC}\right)^2$$

Ta có:

$$\frac{S_{MDAE}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{DBM}}{S_{ABC}} - \frac{S_{EMC}}{S_{ABC}} = 1 - \left[\left(\frac{BM}{BC}\right)^2 + \left(\frac{CM}{BC}\right)^2 \right] \leq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{BM}{BC} + \frac{CM}{BC} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$(\text{áp dụng bất đẳng thức đại số: } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow S_{MDAE} \leq \frac{1}{2} S_{ABC})$$

Vậy khi M là trung điểm của BC thì hình bình hành $AEMD$ có diện tích lớn nhất là: $\frac{1}{2} S_{ABC}$.



Chuyên đề 17. ĐỊNH LÝ MENELAUS, ĐỊNH LÝ CE-VA, ĐỊNH LÝ VAN-OBEN

17.1. từ $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$ suy ra

$$\frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}; \frac{CD}{DB} = 2; \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}.$$

Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle ABC$ với ba điểm B, O, E thẳng hàng ta có:

$$\frac{AO}{OD} \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{AO}{OD} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{AO}{OD} = 6$$

Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle BEC$ với ba điểm A, O, D thẳng hàng ta có:

$$\frac{BO}{OE} \cdot \frac{AE}{AC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1 \Rightarrow \frac{BO}{OE} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{BO}{OE} = \frac{3}{4}.$$

17.2. Tam giác ABC có AH, CD, BM đồng quy tại O .

Theo định lý Ce-va, ta có: $\frac{BH}{HC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$

Mà $\frac{CM}{MA} = 1$ và $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$ (tính chất đường phân giác)

Suy ra $\frac{BH}{HC} \cdot 1 \cdot \frac{AC}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{BH}{CH}$ (cách giải khác, bạn đọc xem ở chuyên đề đường phân giác)

17.3. Áp dụng định lý Ce-va cho ba đường đồng quy AH, BM, CD , ta có:

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BH}{CH} \cdot \frac{CM}{AM} = 1 \text{ mà } AM = CM$$

$$\text{Nên } \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BH}{CH} = 1 \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CH}{BH}$$

Mặt khác, CD là đường phân giác nên:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \text{ suy ra } \frac{CH}{BH} = \frac{b}{a} \text{ hay } a \cdot CH = b \cdot BH \quad (1)$$

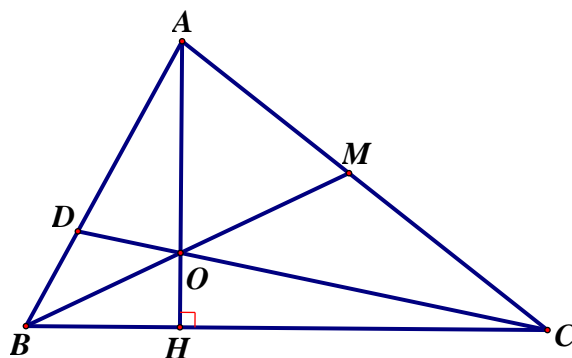
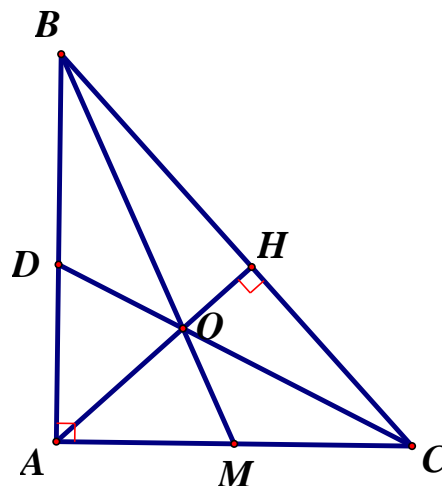
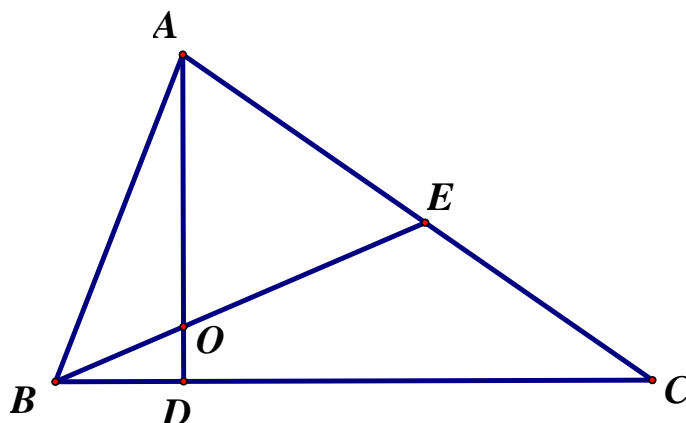
Áp dụng định lý Py-ta-go cho các tam giác vuông ta có:

$$a^2 = BC^2 = HB^2 + HC^2 + 2 \cdot HB \cdot HC$$

$$b^2 = AC^2 = HA^2 + HC^2$$

$$c^2 = AB^2 = HA^2 + HB^2$$

$$\text{Từ đó: } (a+b)(a^2 + b^2 - c^2) = (a+b)(2a \cdot CH) = 2a(a \cdot HC + b \cdot HC) = 2a(b \cdot BH + b \cdot HC) \text{ (theo (1))}$$



$$= 2a.ab = 2a^2b$$

17.4. Cách 1: (không dùng Menelaus)

Ta giải vắn tắt như sau:

Từ $AD \parallel FM$ và $ME \parallel AD$

Áp dụng định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BF}{BM} \quad (1) \text{ và } \frac{CE}{CM} = \frac{CA}{CD} \quad (2)$$

Mặt khác, theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CD} \quad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{BF}{BM} = \frac{CE}{CM}$. Do đó

$$BF = CE \quad (\text{do } BM = CM)$$

Cách 2: (dùng Menelaus)

Xét tam giác ABC với ba điểm F, E, M thẳng hàng, ta có: $\frac{EA}{EC} \cdot \frac{MC}{MB} \cdot \frac{FB}{FA} = 1 \quad (4)$

Do $\angle AEF = \angle AFE = \frac{\angle BAC}{2}$ nên $\triangle AEF$ cân ở A , Suy ra $AE = AF \quad (5)$

Từ (4), (5) suy ra $BF = CE$. (điều phải chứng minh)

$$17.5. \text{ Xét } \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{CF}{FA} \quad (1)$$

- Nếu AM, BF, CE đồng quy thì theo định

$$\text{lý Ce-va: } \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1.$$

Từ (1) suy ra:

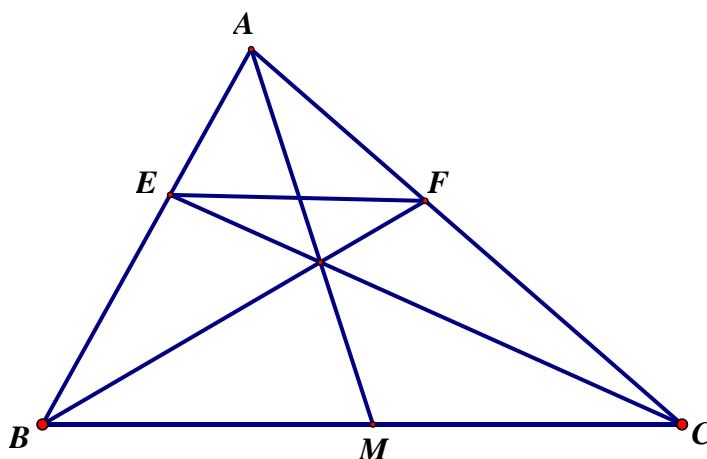
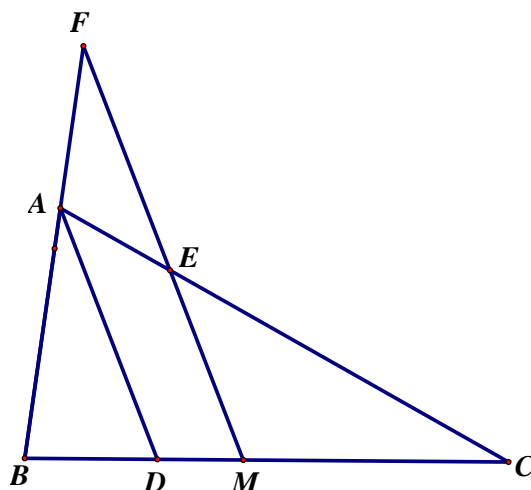
$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{CF} \Rightarrow EF \parallel BC \quad (\text{định lý}$$

Ta-lét đảo).

- Nếu $EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{CF}$. Từ (1) suy ra:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

$\Rightarrow AM, BF, CE$ đồng quy (theo định lý Ce-va đảo)



17.6. Gọi E là giao điểm của đường thẳng BK và AC . Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle ACD$ đối ba điểm B, K, E thẳng hàng, ta có: $\frac{AK}{KD} \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

$$\Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \Leftrightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{2}{3}.$$

Mặt khác $\triangle ABE$ và $\triangle BCE$ có chung đường cao kẻ từ

$$B, \text{ suy ra: } \frac{S_{ABE}}{S_{BCE}} = \frac{AE}{CE} \Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{BCE}} = \frac{3}{2}$$

17.7. Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle AEC$ với ba điểm M, D, B thẳng hàng, ta có:

$$\frac{MA}{MC} \cdot \frac{DC}{DE} \cdot \frac{BE}{BA} = 1$$

Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle ABC$ với ba điểm N, I, E thẳng hàng, ta có:

$$\frac{NA}{NC} \cdot \frac{IC}{IB} \cdot \frac{EB}{EA} = 1$$

$$\text{suy ra } \frac{MA}{MC} \cdot \frac{DC}{DE} \cdot \frac{BE}{BA} = \frac{NA}{NC} \cdot \frac{IC}{IB} \cdot \frac{EB}{EA}$$

$$\text{do đó } \frac{MA}{MC} = \frac{NA}{NC} \cdot \frac{IC}{IB} \cdot \frac{DE}{DC} \cdot \frac{AB}{AE} \quad (1)$$

Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle BEC$ với

$$\text{thẳng hàng, nên } \frac{IC}{IB} \cdot \frac{AB}{AE} \cdot \frac{DE}{DC} = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{MA}{MC} = \frac{NA}{NC}$$

17.8. Áp dụng định lý Ce-va trong $\triangle ABC$ với 3 đường thẳng đồng quy AE, BF, CK , ta có:

$$\frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{KA}{KB} = 1 \quad (1)$$

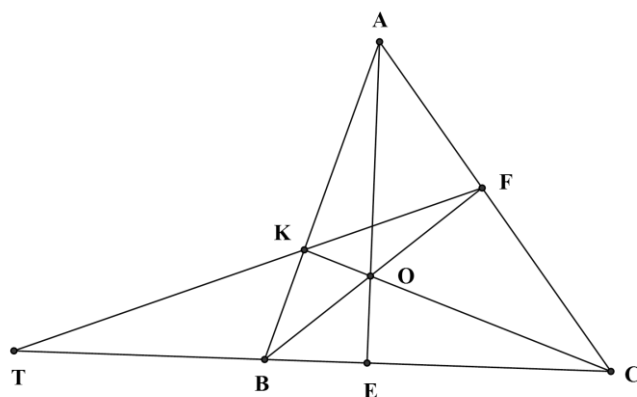
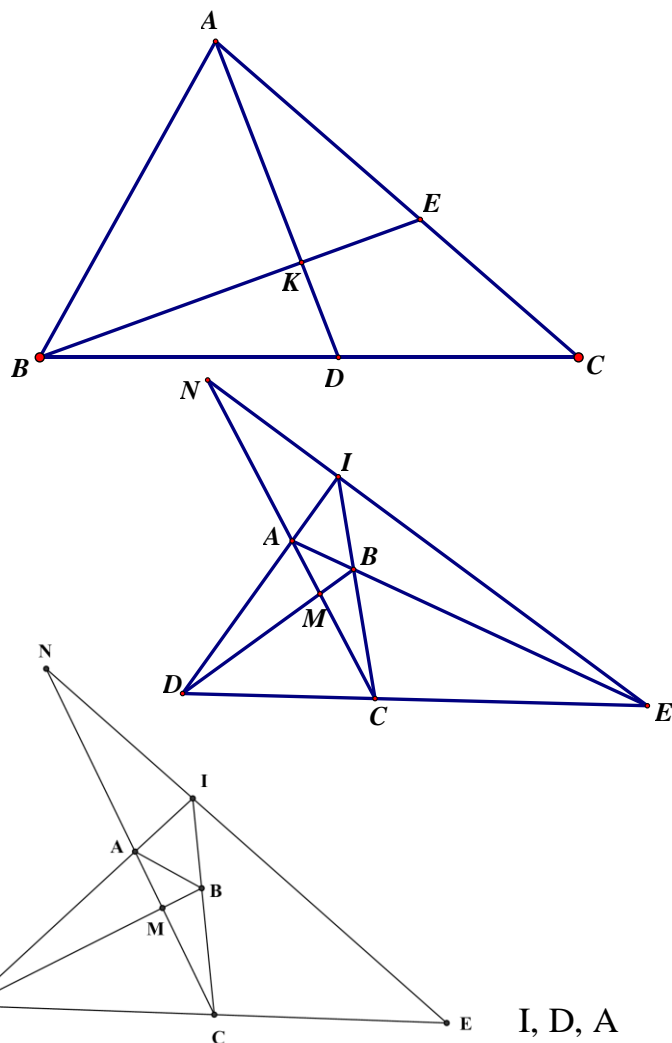
Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle ABC$ với 3 điểm thẳng hàng T, K, F , ta có:

$$\frac{TC}{TB} \cdot \frac{KB}{KA} \cdot \frac{FA}{FC} = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) nhân vế với vế ta được: } \frac{TB}{TC} = \frac{EB}{EC}$$

17.9. Gọi BC giao với AD tại G

Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle ABM, \triangle AMC$ ta được:



$$\frac{DM}{DA} \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{HB}{HM} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{DM}{DA} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{KC}{KM} = 1 \quad (2)$$

Chia (1) cho (2), ta được:

$$\frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{KC}{KM} \cdot \frac{HM}{HB} \quad (3)$$

Vì AG, BE, CF đồng quy

$$\Rightarrow \frac{GB}{GC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1 \Rightarrow \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{GC}{GB} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4): } \frac{GC}{GB} = \frac{KC}{KM} \cdot \frac{HM}{HB} \Rightarrow \frac{GB}{GC} \cdot \frac{KC}{KM} \cdot \frac{HM}{HB} = 1$$

Ta có điều phải chứng minh.

17.10. Áp dụng tỉ số diện tích hai tam giác có chung cạnh đáy, ta có:

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HM}{BM} + \frac{HN}{CN} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = 1$$

Áp dụng định lý Ce-va, ta có:

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

17.11. a) Áp dụng hệ quả định lý Ta-lét, ta có:

$$MI \parallel BD \Rightarrow \frac{MI}{BD} = \frac{AI}{AD}$$

$$IN \parallel CD \Rightarrow \frac{IN}{CD} = \frac{AI}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{MI}{BD} = \frac{IN}{CD} \Rightarrow \frac{MI}{NI} = \frac{DB}{DC}$$

b) Gọi E là giao điểm của đường thẳng BI và AC; F là giao điểm của đường thẳng CI và AB

Chứng minh tương tự câu a, ta có: $\frac{IP}{IQ} = \frac{AF}{BF}; \frac{IR}{IS} = \frac{CE}{AE}.$

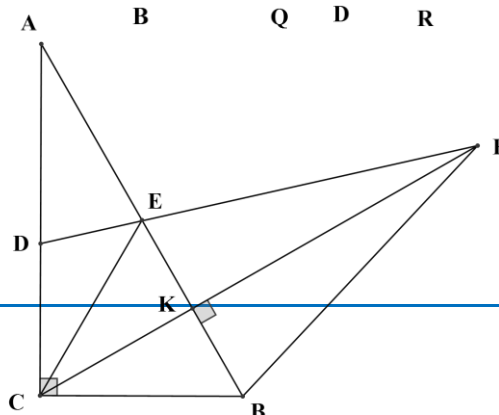
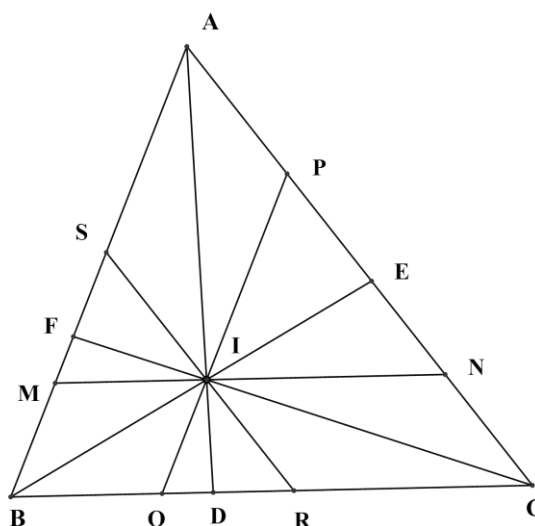
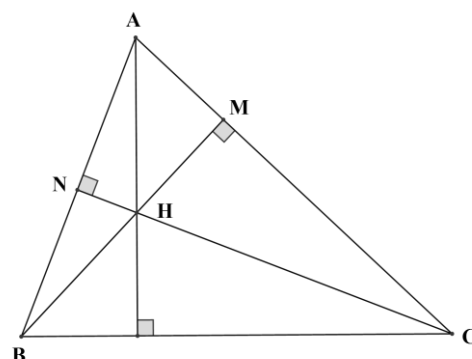
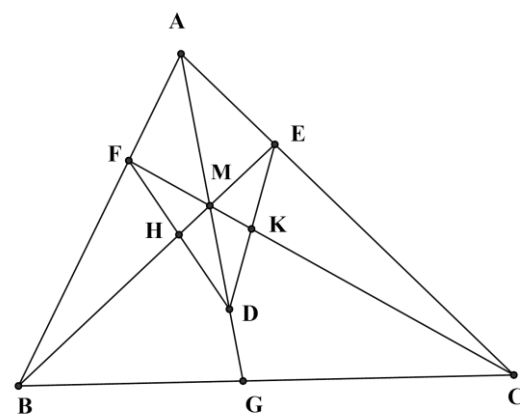
Áp dụng định lý Ce-va trong $\triangle ABC$ đối với AD, BE, CF đồng quy, ta có:

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1 \Rightarrow \frac{IM}{IN} \cdot \frac{IP}{IQ} \cdot \frac{IR}{IS} = 1. \text{ Điều phải chứng minh.}$$

17.12. Ta có: $BEC = A + ACE = KCB + KCE = BCE$

Do đó $\triangle BCE$ cân tại B nên $BE = BC$.

Mặt khác $BF \parallel CE$ nên theo định lý Ta-lét, ta có:



$$\frac{CK}{FK} = \frac{EK}{BK} \Rightarrow \frac{CK + FK}{FK} = \frac{EK + BK}{BK} \Rightarrow \frac{CF}{FK} = \frac{BE}{BK}$$

Mà $BC = BE$ nên $\frac{CF}{FK} = \frac{BC}{BK}$ (1)

Vì CE là đường phân giác của góc ACK

nên $\frac{AE}{KE} = \frac{AC}{CK}$ (2)

$$\triangle ABC \sim \triangle CBK (g.g) \Rightarrow \frac{BC}{BK} = \frac{AC}{CK} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \frac{CF}{FK} = \frac{AE}{KE}$ (4)

Giả sử đường thẳng EF cắt cạnh AC tại D . Áp dụng định lý Menelaus vào $\triangle ACK$ bị cắt tuyến DEF cắt các cạnh, ta có: $\frac{AD}{CD} \cdot \frac{CF}{KF} \cdot \frac{KE}{AE} = 1$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow \frac{AC}{CD} = 1 \Rightarrow AC = CD$.

17.13. Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng BM và CL . Ta có tứ giác $MLKA$ là hình bình hành. Giả sử đường thẳng ML cắt cạnh BC tại P . Khi đó, ta có: $LP = LK$; $MD = CP$. Ta sẽ chứng minh D, N, K thẳng hàng.

Áp dụng định lý Menelaus vào $\triangle BMP$

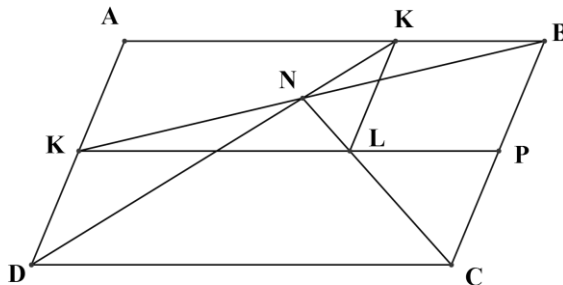
bị cắt tuyến CLN cắt các cạnh, ta có:

$$\frac{BN}{NM} \cdot \frac{ML}{LP} \cdot \frac{PC}{CB} = 1 \Rightarrow \frac{BN}{NM} \cdot \frac{AK}{KB} \cdot \frac{MD}{AD} = 1$$

Suy ra ba điểm K, N, D thẳng hàng.

(Theo định lý Menelaus đảo vào $\triangle ABM$)

Vậy ba đường thẳng CL, DK, BM đồng quy.



17.14. Áp dụng định lý Ce - va vào $\triangle ABC$, ta có: $\frac{CN}{NA} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BM}{MC} = 1$ (1)

Áp dụng định lý Menelaus vào $\triangle ABC$ với ba điểm N, M, P thẳng hàng, ta có:

$$\Rightarrow \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC}$$

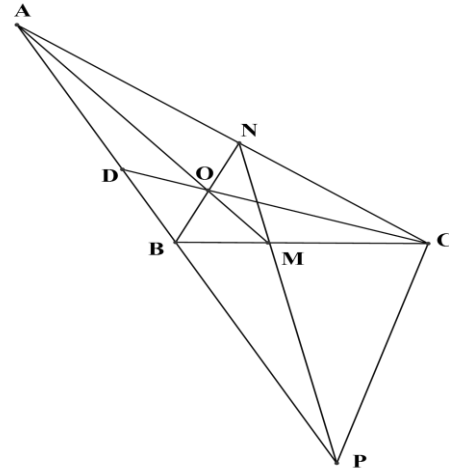
$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AP}{PB}$$

Từ giả thiết CD là đường phân giác của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{CA}{CB}$$

$\Rightarrow CP$ là đường phân giác ngoài của $\triangle ABC$

$\Rightarrow CD \perp CP$



17.15. Qua A kẻ đường thẳng xy song song với BC cắt DM, DN lần lượt tại H và I

Theo hệ quả của định lý Ta - let , ta có :

$$\frac{AH}{BD} = \frac{AF}{BF} ; \frac{AI}{CD} = \frac{AE}{EC}$$

Áp dụng định lý Ce - va vào $\triangle ABC$

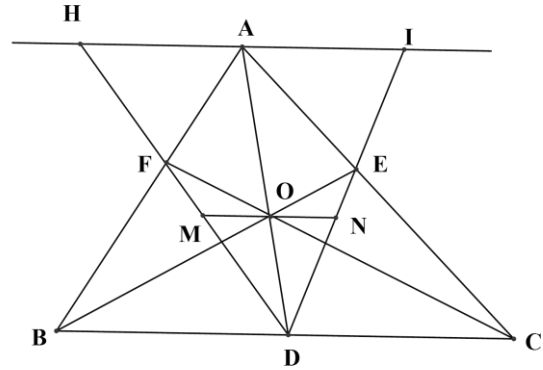
với ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại O ,

$$\text{ta có : } \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{AH}{BD} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CD}{AI} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AI} = 1 \Rightarrow AH = AI$$

$MN \parallel AI$, Theo hệ quả của định lý Ta - let , ta có :

$$\frac{OM}{AH} = \frac{DO}{DA} = \frac{ON}{AI} \text{ mà } AH = AI \text{ nên } OM = ON$$



17.16. Kẻ ba đường trung tuyến AI, BK, CP của $\triangle ABC$ có trọng tâm G chia tam giác thành 6 tam giác $BGI, BGP, CGK, AGK, AGP, CGI$.

Do đó điểm M nằm trong một trong 6 tam giác đó kể cả trên cạnh.

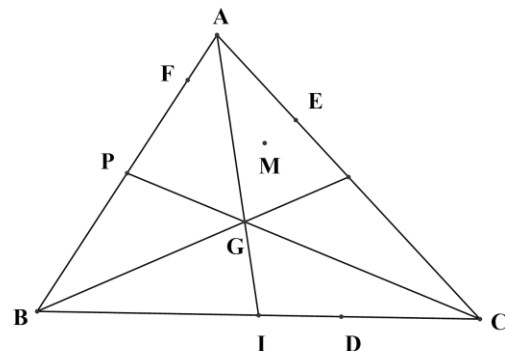
Giả sử M nằm trong hoặc trên cạnh của $\triangle AGK$

Theo định lý Van- Oben, ta có :

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} \leq \frac{AF}{PB} + \frac{AE}{KC} \leq 2$$

$$\text{Mặt khác : } \frac{BM}{ME} = \frac{BF}{FA} + \frac{BD}{DC} \geq \frac{BF}{FA} + \frac{BD}{IC} \geq 2$$

Dấu “ = ” xảy ra khi M trùng với G . (đpcm)



17.17. Áp dụng định lý Menelaus vào $\triangle ABC$ với ba điểm M, N, I thẳng hàng, ta có :

$$\frac{IB}{IC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1 \Rightarrow \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1 \quad (1)$$

Áp dụng định lý Menelaus vào ΔABC

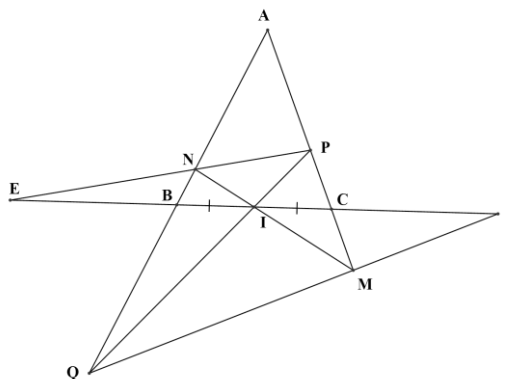
với ba điểm Q, P, I thẳng hàng, ta có :

$$\frac{IC}{IB} \cdot \frac{PA}{PC} \cdot \frac{QB}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{PA}{PC} \cdot \frac{QB}{QA} = 1 \quad (2)$$

Áp dụng định lý Menelaus vào

ΔABC với ba điểm N, E, P thẳng hàng, ta có :

$$\frac{EB}{EC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1 \quad (3)$$



Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABC với Q, M, F thẳng hàng, ta có: $\frac{FC}{FB} \cdot \frac{QB}{QA} \cdot \frac{MA}{MC} = 1 \quad (4)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = \frac{QB}{QA} \cdot \frac{PA}{PC}$ do đó $\frac{PC}{PA} \cdot \frac{NA}{NB} = \frac{QB}{QA} \cdot \frac{MA}{MC}$.

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{EB}{EC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{NA}{NB} = \frac{FC}{FB} \cdot \frac{QB}{QA} \cdot \frac{MA}{MC}$.

Từ đó suy ra $\frac{EB}{EC} = \frac{FC}{FB} \Rightarrow \frac{EB}{EB+EC} = \frac{FC}{FB+FC} \Rightarrow \frac{EB}{BC} = \frac{FC}{BC} \Rightarrow BE = FC \Rightarrow IE = IF$.

17.1 a) Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABE với 3 điểm thẳng hàng A', M, C' ta có:

$$\frac{AM}{ME} \cdot \frac{EA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{ME} = \frac{C'A}{BC'} \cdot \frac{A'B}{EA'}$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AFC với 3 điểm thẳng hàng A', N, B' ta có:

$$\frac{FN}{NA} \cdot \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'F} = 1 \Rightarrow \frac{FN}{NA} = \frac{A'F}{CA'} \cdot \frac{B'C}{AB'}$$

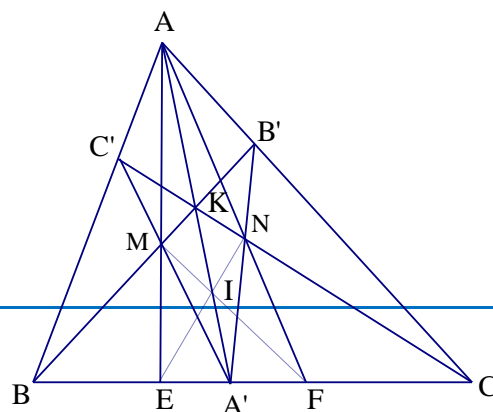
$$\text{Xét } \frac{AM}{ME} \cdot \frac{EA'}{A'F} \cdot \frac{FN}{NA} = \left(\frac{C'A}{BC'} \cdot \frac{A'B}{EA'} \right) \cdot \frac{EA'}{A'F} \cdot \left(\frac{A'F}{CA'} \cdot \frac{B'C}{AB'} \right) = \frac{C'A}{BC'} \cdot \frac{A'B}{CA'} \cdot \frac{B'C}{AB'} = 1$$

(do AA', BB' và CC' đồng quy tại K – định lý Ce-va)

cùng theo định lý Ce-va ta có AA', EN và FM đồng quy tại I .

b) Áp dụng định lý Van - Oben cho tam giác ABA' ; ACA' ; AEF , ta có:

$$\frac{AM}{ME} = \frac{AK}{KA'} + \frac{AC'}{C'B} \quad (1);$$



$$\frac{AN}{NF} = \frac{AK}{KA'} + \frac{AB'}{B'C} \quad (2);$$

$$\frac{AM}{ME} + \frac{AN}{NF} = \frac{AI}{IA'} \quad (3).$$

Thay (1), (2) vào (3) ta được: $2 \cdot \frac{AK}{KA'} + \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{AI}{IA'}$.

Áp dụng định lý Van-Oben cho tam giác ABC , ta có:

$$\frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{AK}{KA'} \quad (4).$$

Thay vào (4) ta được: $3 \cdot \frac{AK}{KA'} = \frac{AI}{IA'} \Rightarrow 3 \cdot IA' \cdot AK = KA' \cdot AI$.

Chương IV. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG – HÌNH CHÓP ĐỀU

CHUYÊN ĐỀ 18. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT.....	2
CHUYÊN ĐỀ 19. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG	6
CHUYÊN ĐỀ 20. HÌNH CHÓP ĐỀU	12

CHUYÊN 18. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

18.1 (h.18.10)

a) Xét hình bình hành $ACC'A'$ có $AC \parallel A'C'$

$$\Rightarrow AC \parallel \text{mp}(BA'C').$$

Xét hình bình hành $ABC'D'$ có $AD' \parallel BC'$

$$\Rightarrow AD' \parallel \text{mp}(BA'C').$$

Vì AC và AD' cắt nhau tại A nên $\text{mp}(ACD') \parallel \text{mp}(BA'C')$.

b) (h.18.11)

Mặt phẳng (CDB') cũng là mặt phẳng $(CDA'B')$.

Mặt phẳng (BCD') cũng là mặt phẳng $(BCD'A')$.

Hai mặt phẳng này có hai điểm chung là C và A' nên chúng cắt nhau theo giao tuyến CA' .

Hình 18.11

18.2 (h.18.12)

Tứ giác $ADD'A'$ là hình chữ nhật nên $DD' \perp D'A'$.

Tứ giác $DCC'D'$ là hình chữ nhật nên $DD' \perp D'C'$.

Suy ra $DD' \perp \text{mp}(A'B'C'D')$. Do đó $DD' \perp D'B'$.

Tứ giác $DBB'D'$ có $DD' \parallel BB'$ và $DD' = BB'$ nên là hình bình hành. Hình bình hành này có $DD' \perp D'B'$ nên là hình chữ nhật.

Hình 18.12

Gọi O là giao điểm của AC và BD , Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$

Ta có OO' là đường trung bình của hình chữ nhật $DBD'B'$ nên $OO' \perp DB$

Ta lại có $AC \perp BD$ (tính chất đường chéo hình vuông) $\Rightarrow BD \perp \text{mp}(ACC'A')$

Mặt phẳng $(DBB'D')$ chứa BD nên $\text{mp}(DBB'D') \perp \text{mp}(ACC'A')$

18.3. (h.18.12)

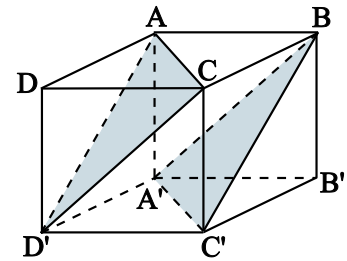
a) Gọi O là giao điểm của AC và BD , Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$

Ta có $O \in AC$ mà $AC \subset \text{mp}(ACC'A')$ nên $O \in \text{mp}(ACC'A')$

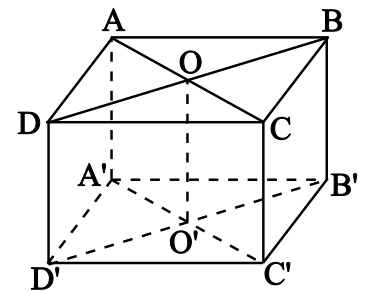
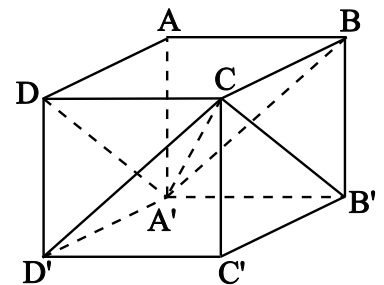
$O \in BD$ mà $BD \subset \text{mp}(BDD'B')$ nên $O \in \text{mp}(BDD'B')$

Vậy O là điểm chung của hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$

Chứng minh tương tự, O' là điểm chung của hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$



Hình 18.10



Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ có hai điểm chung là O và O' nên chúng cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng OO'

b) Trong mặt chéo $(DBB'D')$ có OO' là đường trung bình nên $OO' \perp B'D'$ tại O

Chứng minh tương tự ta được $OO' \perp A'C'$ tại O'

Đường thẳng OO' vuông góc với hai đường thẳng giao nhau của $mp(A'B'C'D')$ nên $OO' \perp (A'B'C'D')$

c) Ta có $OO' \perp (A'B'C'D')$ mà $OO' \subset mp(BDD'B')$ nên $mp(BDD'B') \perp mp(A'B'C'D')$

18.4. a) Các hình lập phương nhỏ không được sơn mặt nào là các hình lập phương ở bên trong. Chúng tạo thành một hình hộp chữ nhật có độ dài các cạnh là:

$$8 - 2 = 6 \text{ (cm); } 12 - 2 = 10 \text{ (cm); } 5 - 2 = 3 \text{ (cm)}$$

$$\text{Thể tích của hình hộp chữ nhật đó là: } 6.10.3 = 180 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Vậy có tất cả 180 hình lập phương nhỏ không được sơn mặt nào

b) Có tất cả 480 hình lập phương nhỏ trong đó có 180 hình không được sơn mặt nào. Vậy số hình lập phương nhỏ có ít nhất một mặt được sơn là: $480 - 180 = 300$ (hình)

18.5. (h.18.13)

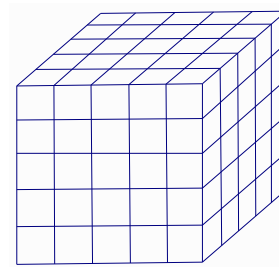
a) Các hình lập phương đơn vị không được sơn mặt nào

ở bên trong hình lập phương đã cho, chúng tạo thành

một hình lập phương có cạnh dài $\sqrt{27} = 3$ (đơn vị)

Do đó cạnh của hình lập phương đã cho dài là:

$$n = 3 + 2 = 5 \text{ (đơn vị dài)}$$



Hình 18.13

b) Ở mỗi đỉnh có một hình lập phương đơn vị sơn ba mặt.

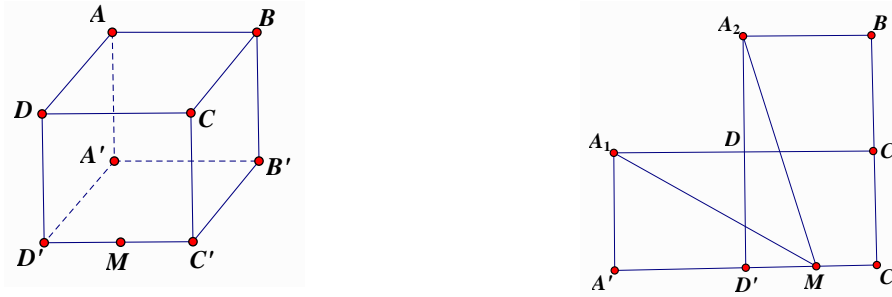
Có tất cả 8 đỉnh nên có 8 hình lập phương đơn vị được sơn ba mặt.

c) Ở mỗi cạnh có ba hình lập phương đơn vị được sơn hai mặt. Có tất cả 12 cạnh nên có $3.12 = 36$ hình lập phương đơn vị được sơn hai mặt

d) Ở mỗi mặt có 9 hình lập phương đơn vị được sơn một mặt. Có tất cả 6 mặt nên có $9.6 = 54$ hình lập phương đơn vị được sơn một mặt.

18.6. (h.18.14)

Khai triển hình lập phương rồi trải phẳng 3 mặt (ABCD), (CDD'C') và (ADD'A') ta được hình dưới:

**Hình 18.14**

* Xét trường hợp kiến bò qua cạnh DD' để tới đỉnh A; Đoạn đường ngắn nhất mà kiến phải bò từ M đến A là:

$$MA_1 = \sqrt{(6+3)^2 + 6^2} = \sqrt{117} \approx 10,8(\text{cm})$$

* Xét trường hợp kiến bò qua cạnh DC để tới đỉnh A; Đoạn đường ngắn nhất mà kiến phải bò từ M đến A là:

$$MA_2 = \sqrt{(6+6)^2 + 3^2} = \sqrt{153} \approx 12,4(\text{cm})$$

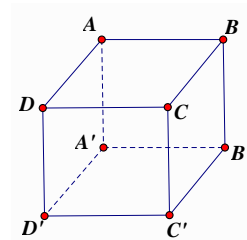
* Xét trường hợp kiến bò qua cạnh CC' để tới đỉnh A; Dễ thấy đoạn đường mà kiến phải bò từ M đến A dài hơn nhiều so với hai trường hợp trên.

Kết luận: Đoạn đường ngắn nhất mà kiến phải bò từ M đến A là: 10,8 (cm)

18.7. (h.18.15)

a) Hình hộp chữ nhật có 8 đỉnh. Số đoạn thẳng mà hai đầu của nó là hai đỉnh của hình hộp chữ nhật là: $(8.7) : 2 = 28$ (đoạn thẳng)

b) 28 đoạn thẳng này chia làm 7 nhóm, mỗi nhóm 4 đoạn thẳng dài bằng nhau (chẳng hạn $AB = CD = D'C' = A'B'$).



hình 18.15

Từ đó suy ra trong 28 đoạn thẳng này chỉ có tối đa 7 giá trị khác nhau về độ dài.

18.8. Lúc đầu tổng 6 số ở 6 mặt là: $1+2+3+4+5+6=21$. Đó là một số lẻ. Sau mỗi lượt tổng này tăng thêm một số chẵn nên tổng các số ở 6 mặt luôn là một số lẻ, không chia hết cho 6. Do đó không thể xảy ra cả 6 số bằng nhau.

18.9. Áp dụng công thức tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 8^2 + 9^2 + 12^2 = 289 \Rightarrow d = \sqrt{289} = 17.$$

Vậy độ dài lớn nhất của một đoạn thẳng có thể đặt trong hình hộp chữ nhật là 17.

18.10. Gọi ba kích thước của hình hộp chữ nhật là a, b, c . Ta có:

$$\begin{cases} a + b + c = 61 & (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 = 37^2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $(a + b + c)^2 = 61^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 3721$

Do đó: $2(ab + bc + ca) = 3721 - 1369 = 2352 (\text{cm}^2)$

Vậy diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là: 2352cm^2 .

18.11. Gọi a là độ dài của mỗi cạnh của hình lập phương và d là độ dài đường chéo của hình lập phương đó. Ta có: $d^2 = 3a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{3} (\text{cm})$.

Độ dài đường chéo mỗi mặt của hình lập phương đó là $a\sqrt{2}$.

Ta có: $a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow a(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt{3} + \sqrt{2} (\text{cm})$.

Diện tích toàn phần của hình lập phương là:

$$S = 6a^2 = 6(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \approx 59,39 (\text{cm}^2).$$

Thể tích của hình lập phương là: $V = a^3 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^3 \approx 31,14 (\text{cm}^3)$.

CHUYÊN ĐỀ 19. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

19.1. (h.19.6)

Gọi F là giao điểm của AB' và BA' .

Gọi H là giao điểm của AC' và CA' .

Vì E là trngj tâm của $\triangle ABB'$ nên : $BE = \frac{2}{3}BF = \frac{1}{3}BA'$.

Vì G là trọng tâm của $\triangle ACC'$ nên : $CG = \frac{2}{3}CH = \frac{1}{3}CA'$

Ta có : $EM // BB' \Rightarrow EM // AA'$; $GN // CC' \Rightarrow GN // AA'$.

Xét $\triangle BAA'$ có $EM // BB'$ nên : $\frac{BM}{BA} = \frac{BE}{BA'} = \frac{1}{3}$ (1) Hình 19.6

Xét $\triangle CAA'$ có $GN // AA'$ nên : $\frac{CN}{CA} = \frac{CG}{CA'} = \frac{1}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CA} \left(= \frac{1}{3} \right)$. Do đó : $MN // BC$.

Mặt khác: $ME // BB'$ nên $mp(MNGE) // mp(BCC'B')$

19.2. (h.19.7).

a) Các mặt phẳng $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là những hình chữ nhật có cùng kích thước nên các đường chéo của chúng phải bằng nhau: $AB' = AC'$.

Xét $\triangle AB'C'$ cân tại A, có AM là đường trung tuyến nên $AM \perp B'C'$ (1)

Xét $\triangle A'B'C'$ cân tại A', có A'M là đường trung tuyến nên $A'M \perp B'C'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $B'C' \perp mp(AA'M)$.

b) Xét $\triangle A'B'M$ vuông tại M, ta có: $A'M = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(\text{cm})$.

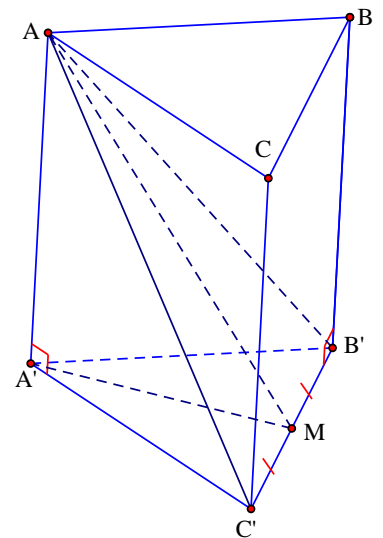
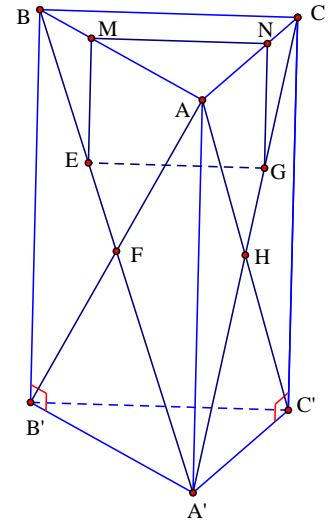
Xét $\triangle AA'M$ vuông tại A', ta có: $AA' = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15(\text{cm})$.

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ là :

$$S_{xq} = 2p.h = (10 + 10 + 12).5 = 480(\text{cm}^2).$$

Diện tích đáy của hình lăng trụ là : $S = \frac{1}{2}B'C'.A'M = \frac{1}{2}.12.8 = 48(\text{cm}^2)$.

Diện toàn phần của hình lăng trụ là : $S_{tp} = 480 + 48.2 = 576(\text{cm}^2)$.



Hình 19.7

19.3. Gọi số cạnh của một đáy là n . Khi đó tổng số cạnh của hình lăng trụ đứng là $3n$; tổng số đỉnh là $2n$ và tổng số mặt là $n + 2$. Theo đề bài ta có:

$$(n + 2) + 2n + 3n = 26 \Rightarrow n = 4.$$

Vậy hình lăng trụ đều này có đáy hình vuông.

$$\text{Ta có : } V = S.h = 540(\text{cm}^3); S_{\text{xq}} = 2ph = 360(\text{cm}^2).$$

$$\Rightarrow \frac{V}{S_{\text{xq}}} = \frac{540}{360} \text{ hay } \frac{S.h}{2ph} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{S}{2p} = \frac{3}{2}. \text{ Do đó : } \frac{a^2}{4a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 6(\text{cm})$$

$$\text{Chiều cao của hình lăng trụ là : } h = \frac{V}{S_{\text{day}}} = \frac{540}{36} = 15(\text{cm}).$$

19.4. Vì diện tích toàn phần bằng hai lần diện tích xung quanh nên diện tích hai đáy bằng diện tích xung quanh (1).

Xét đáy là hình thoi ABCD cạnh a , góc nhọn 30° (h.19.8).

$$\text{Vẽ } AH \perp CD, \text{ ta có : } AH = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$$

$$\text{Diện tích ABCD là : } S_{\text{đáy}} = a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2} \quad (2)$$

$$\text{Ta có : } S_{\text{xq}} = 2ph = 4ah \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta được : } 2 \cdot \frac{a^2}{2} = 4ah \Rightarrow h = \frac{a}{4}.$$

19.5. (h.19.9)

$$\text{Từ công thức } S_{\text{xq}} = 2ph \Rightarrow 2p = \frac{S_{\text{xq}}}{h}$$

Vậy chu vi của hình lăng trụ đứng là :

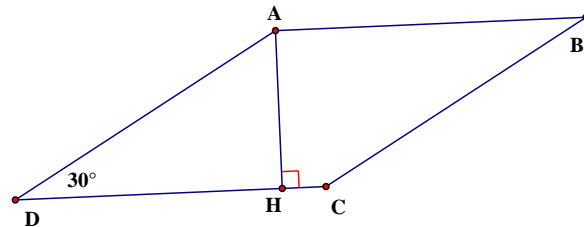
$$2p = \frac{300}{10} = 30(\text{cm}) \Rightarrow BC = 30 - (5 + 12) = 13(\text{cm}).$$

$$\text{Ta có : } BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (\text{Vì } 13^2 = 5^2 + 12^2).$$

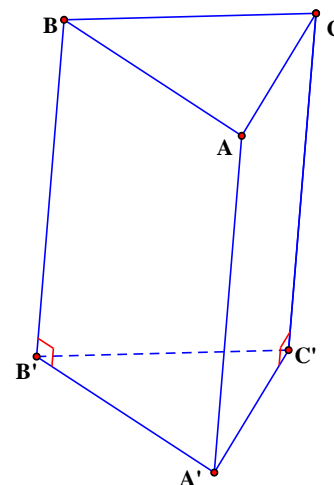
Do đó $\triangle ABC$ vuông tại A.

Diện tích của hình lăng trụ là:

$$S = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2} .5.12 = 30(\text{cm}^2).$$



Hình 19.8



Hình 19.9

Thể tích của hình lăng trụ là: $V = S.h = 30.10 = 300(\text{cm}^3)$.

19.6. (h.19.10).

Diện tích đáy của hình lăng trụ là:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 30 = 240(\text{cm}^2).$$

Diện tích xung quanh là: $S_{xq} = 2860 - 240 \cdot 2 = 2380(\text{cm}^2)$

Độ dài cạnh đáy là :

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17(\text{cm}).$$

Chu vi đáy là : $17 \cdot 4 = 68(\text{cm})$.

Chiều cao của hình lăng trụ là :

$$h = \frac{S_{xq}}{2p} = \frac{2380}{68} = 35(\text{cm}).$$

Thể tích của hình lăng trụ là: $V = S.h = 240 \cdot 35 = 8400(\text{cm}^3)$.

Vậy thể tích của cốc là 54cm^3 .

19.7(h.19.11)

Gọi h là chiều cao của hình lăng trụ.

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng $ABCE.A'B'C'E'$ là :

$$S_1 = (AB + BC + CE + EA).h = (3a + CE).h.$$

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng $CDE.C'D'E'$ là :

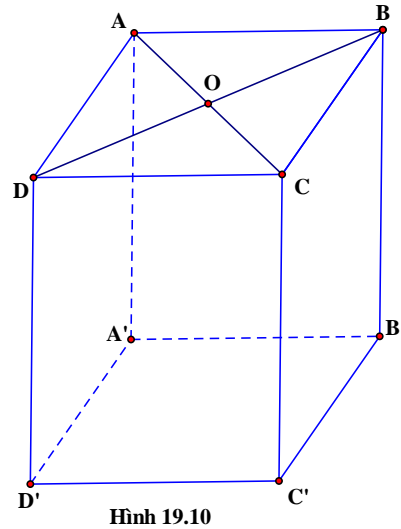
$$S_2 = (CD + DE + EC).h = (2a + CE).h.$$

$$\text{Vì } S_1 - S_2 = 4a^2 \text{ nên } (3a + CE - 2a - CE).h = 4a^2$$

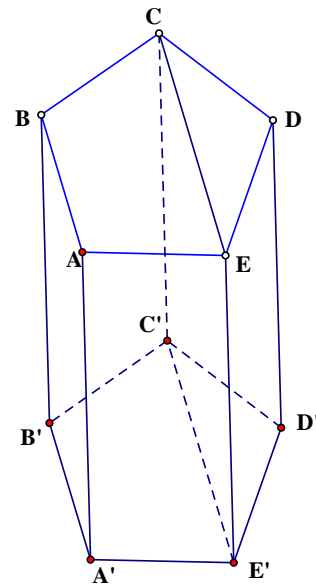
$$\text{Hay } a.h = 4a^2 \Rightarrow h = 4a^2 : a = 4a.$$

Vậy diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng đã cho là:

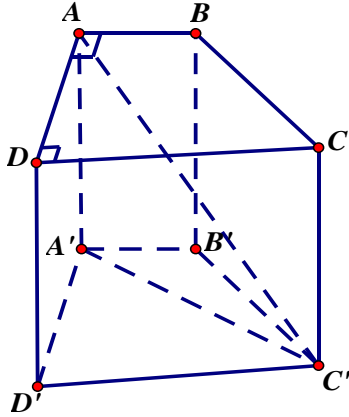
$$S_{xq} = 2ph = 5a \cdot 4a = 20a^2(\text{dvdt}).$$



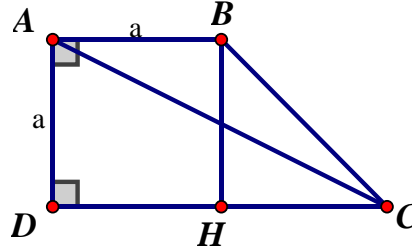
Hình 19.10



Hình 19.11

19.8. (h.19.12)a) Xét hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Vẽ $BH \perp CD$ (h.19.13)

Hình 19.12



Hình 19.13

Tứ giác $ABHD$ là hình vuông và $\triangle HBC$ vuông cân tại H .

Suy ra $DH = AB = AD = BH = CH = a$; $CD = 2a$; $BC = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle DAC$ vuông tại D có: $AC^2 = AD^2 + DC^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2$.

Suy ra $A'C'^2 = 5a^2$.

Trong hình lăng trụ đứng, cạnh bên vuông góc với đáy nên

$AA' \perp mp(A'B'C'D') \Rightarrow AA' \perp A'C'$.

Xét $\triangle AA'C'$ vuông tại A' , ta có:

$$AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{9a^2 - 5a^2} = 2a.$$

$$\text{Diện tích đáy hình lăng trụ là: } S = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

$$\text{Thể tích hình lăng trụ là: } V = S \cdot h = \frac{3a^2}{2} \cdot 2a = 3a^3.$$

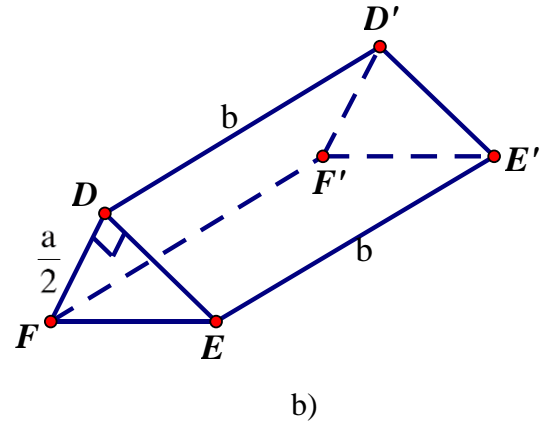
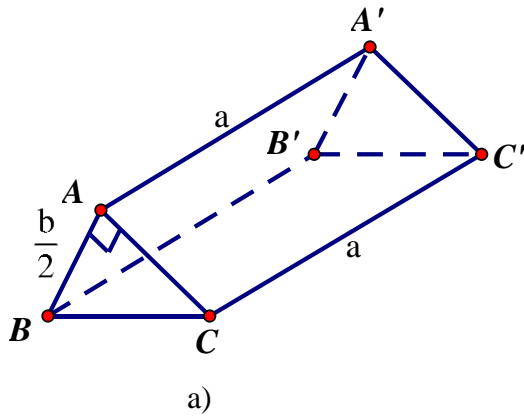
b) Diện tích xung quanh hình lăng trụ đứng là:

$$S_{xq} = (a + a + 2a + a\sqrt{2}) \cdot 2a = 8a^2 + 2\sqrt{2}a^2.$$

Diện tích toàn phần hình lăng trụ đứng là:

$$S_{tp} = 8a^2 + 2\sqrt{2}a^2 + \frac{3a^2}{2} \cdot 2 = 11a^2 + 2\sqrt{2}a^2.$$

19.9. (h.91.14)



Hình 19.14

- a) Xét trường hợp thứ nhất: Tấm bạt được căng theo chiều dài (h.a).

Ta có: $BC = AB\sqrt{2} = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Diện tích mặt đất bên trong lều là: $S_1 = BC.CC' = \frac{b}{2}\sqrt{2}.a = \frac{ab\sqrt{2}}{2}$ (đvdt).

Xét trường hợp thứ hai: Tấm bạt được căng theo chiều rộng (h.b).

Ta có: $EF = DE\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Diện tích mặt đất bên trong lều là: $S_2 = EF.FF' = \frac{a\sqrt{2}}{2}.b = \frac{ab\sqrt{2}}{2}$ (đvdt).

So sánh hai kết quả ta thấy $S_1 = S_2$.

- b) Xét trường hợp thứ nhất: Thể tích không khí bên trong lều là:

$V_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2.a = \frac{1}{8}ab^2$ (đvtt).

Xét trường hợp thứ hai: Thể tích không khí bên trong lều là:

$V_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2.b = \frac{1}{8}a^2b$ (đvtt).

Ta có: $V_2 - V_1 = \frac{1}{8}a^2b - \frac{1}{8}ab^2 = \frac{1}{8}ab(a-b) > 0$ (vì $a > b$). Suy ra: $V_2 > V_1$.

Vậy nếu căng tấm bạt theo chiều rộng thì thể tích không khí bên trong lều sẽ lớn hơn.

19.10. (h.19.15)

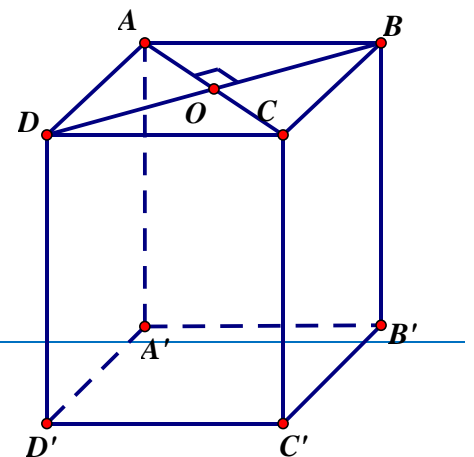
Ta đặt $AC = 2m$; $BD = 2n$.

Diện tích đáy $ABCD$ là: $S = \frac{1}{2}2m.2n = 2mn$.

Mặt khác $S = \frac{V}{h} = \frac{1280}{20} = 64 (cm^2)$.

Vậy $2m.n = 64 (cm^2)$.

Diện tích xung quanh hình lăng trụ đứng là:



$$S_{xq} = 4.AB.20 = 80AB.$$

Vậy S_{xq} nhỏ nhất khi AB nhỏ nhất.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Ta có $AC \perp BD$ tại O .

Xét $\triangle AOB$ vuông tại O , ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 = m^2 + n^2$.

Hình 19.15

Mặt khác $m^2 + n^2 \geq 2mn$. Do đó $AB^2 \geq 64 \Rightarrow AB \geq 8(cm)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của AB là $8cm$ khi $m = n$ tức là khi $ABCD$ là hình vuông.

Giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh là $4.8.20 = 640(cm^2)$.

19.11. (h.19.16)

a) Chu vi đáy của đèn là: $18.6 = 108(cm)$.

Diện tích xung quanh của đèn là: $S_{xq} = 2p.h = 108.40 = 4320(cm^2)$.

Vậy diện tích giấy bóng kính để làm mặt xung quanh của đèn là $4320(cm^2)$.

b) Diện tích đáy đèn là: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.6 = \frac{18^2\sqrt{3}}{4}.6 = 486\sqrt{3}(cm^2)$.

Thể tích của đèn lồng là:

$$V = S.h = 486\sqrt{3}.40 = 19440\sqrt{3}(cm^3) \approx 33671(cm^3).$$

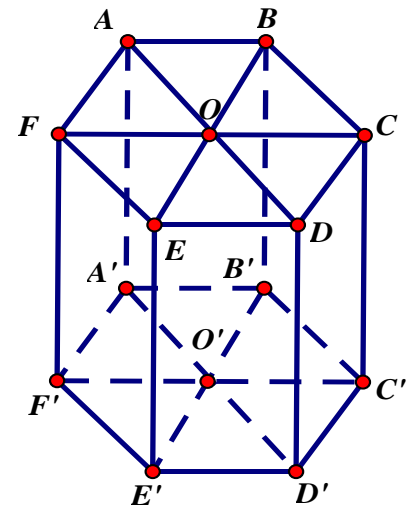
c) Gọi a và b lần lượt là độ dài cạnh đáy đèn lồng trước và sau khi giảm thể tích. Gọi S_1 và S_2 là các diện tích đáy tương ứng.

Khi đó: $V_1 = S_1.h$; $V_2 = S_2.h$.

$$\text{Ta có: } \frac{V_1}{V_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{S_1.h}{S_2.h} = 2 \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{a^2\sqrt{3}.6}{4} : \frac{b^2\sqrt{3}.6}{4} = 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 : b^2 = 2 \Leftrightarrow a : b = \sqrt{2}.$$

Vậy độ dài cạnh đáy phải giảm đi $\sqrt{2}$ lần.



Hình 19.16

CHUYÊN ĐỀ 20. HÌNH CHÓP ĐỀU**20.1.** (h.20.8)

- a) Xét $\triangle SAB$ có $SA = SB$; $SA' = SB'$ nên $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} \Rightarrow A'B' \parallel AB$.

Chứng minh tương tự, ta được: $C'D' \parallel CD$.

Mặt khác $AB \parallel CD$ nên $A'B' \parallel C'D'$.

Từ đó suy ra bốn điểm A', B', C', D' cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ta có: $A'B' \parallel AB$; $B'C' \parallel BC$ mà $A'B'$ và $B'C'$ cắt nhau tại B' ;

AB và BC cắt nhau tại B .

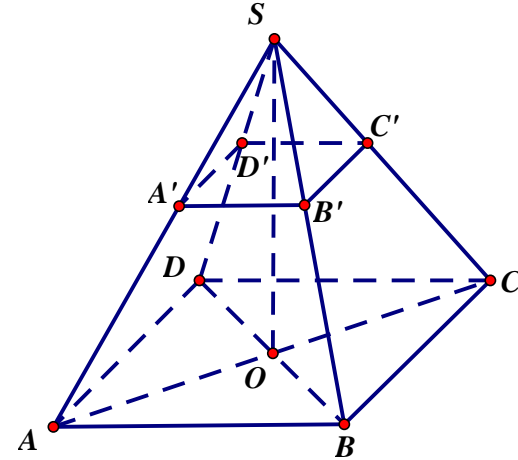
Từ đó suy ra: $\text{mp}(A'B'C'D') \parallel \text{mp}(ABCD)$.

- b) Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $AO \perp SO$;

$AO \perp DO \Rightarrow AO \perp \text{mp}(SOD)$.

Vì $AO \subset \text{mp}(SAC)$ nên $\text{mp}(SAC) \perp \text{mp}(SBD)$.



Hình 20.8

20.2. (h.20.9)

Ta đặt $AB = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét $\triangle SAC$ có $SA = SC$; $\angle ASC = 90^\circ$

nên $\triangle SAC$ vuông cân $\Rightarrow \angle SAO = 45^\circ$.

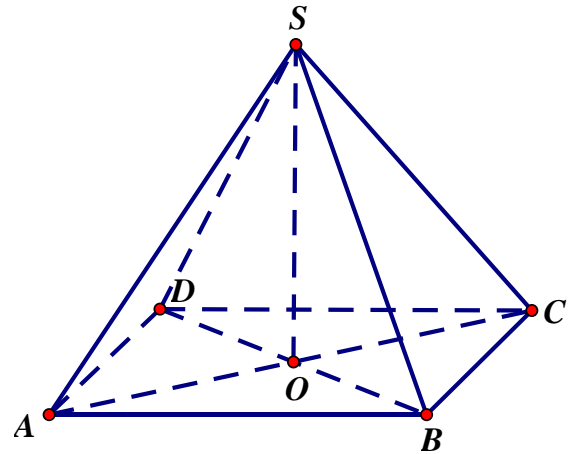
Xét $\triangle SOA$ có $\angle SOA = 90^\circ$; $\angle SAO = 45^\circ$

nên $\triangle SOA$ vuông cân $\Rightarrow SO = OA$.

Ta có: $SA^2 = SO^2 + OA^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2$.

Do đó $SA = a$.

Xét mặt bên SAB có $SA = SB = AB = a$ nên là tam giác đều. Do đó các mặt bên là những tam giác đều.



Hình 20.9

20.3. (h.20.10)

Xét $\triangle SBC$ có MN là đường trung bình nên $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{BC}{2}$ (1)

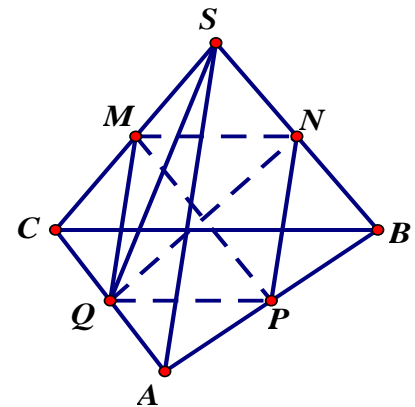
Xét $\triangle ABC$ có PQ là đường trung bình nên $PQ \parallel BC$ và $PQ = \frac{BC}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành. Ta có:

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}; \quad MQ = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}.$$

Vậy $MN = MQ$, suy ra hình bình hành $MNPQ$ là hình thoi.



Hình 20.10

Xét $\triangle QBS$ có $QB = QS = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\triangle QBS$ cân $\Rightarrow QN \perp SB$

Xét $\triangle QNS$ vuông tại N có:

$$QN^2 = QS^2 - NS^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow QN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Chứng minh tương tự, ta được $MP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $QN = MP$

Hình thoi $MNPQ$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.

20.4 (h.20.11)

a) Ta có $SC \perp SA; SC \perp SB \Rightarrow SC \perp mp(SAB)$

Mặt khác $SC \subset mp(SAC)$ nên $mp(SAC) \perp mp(SAB)$

$SC \subset mp(SBC)$ nên $mp(SBC) \perp mp(SAB)$

Do đó mặt bên (SAB) vuông góc với các mặt bên (SAC) và (SBC)

Chứng minh tương tự ta được mỗi mặt bên (SBC) , (SAC) đều vuông góc với hai mặt bên còn lại.

b) Xét tam giác đều ABC . Gọi O là giao điểm của các đường trung

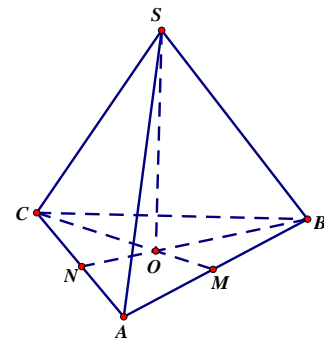
tuyến CM, BN . Khi đó: $BO = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại S có $AB = a$ nên $SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét $\triangle SOB$ vuông tại O , ta có:

$$SO^2 = SB^2 - OB^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{6}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$



(h.20.11)

20.5 (h.20.12)

Xét hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$

Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Ta

có $OM \parallel AB; O'M' \parallel A'B'$ mà $A'B' \parallel AB$ nên $O'M' \parallel OM$

Trong hình thang $O'M'MO$ ta vẽ $M'H \perp OM$

Ta được $M'H = OO'; OH = O'M'$

Ta có

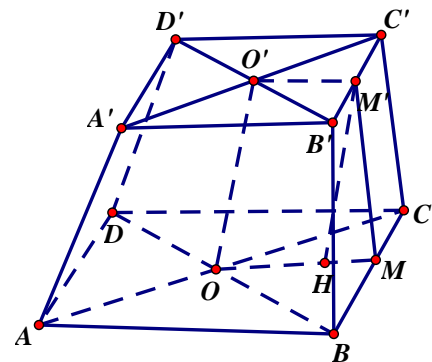
$$OM = 6 : 2 = 3(\text{cm}); O'M' = 4 : 2 = 2(\text{cm}); HM = 3 - 2 = 1(\text{cm})$$

Tổng diện tích hai đáy là: $S_1 + S_2 = 6^2 + 4^2 = 52(\text{cm}^2)$

Diện tích xung quanh là:

$$S_{xq} = \frac{(6+4) \cdot MM'}{2} \cdot 4 = 20 \cdot MM'(\text{cm}^2)$$

Theo đề bài ta có $20 \cdot MM' = 52 \Rightarrow MM' = 2,6(\text{cm})$



(h.20.12)

Xét $\Delta M'HM$ vuông tại H , ta có

$$M'H = \sqrt{M'M^2 - HM^2} = \sqrt{(2,6)^2 - 1^2} = 2,4(cm)$$

20.6 (h.20.13)

Gọi S là đỉnh hình chóp sinh ra hình chóp cụt

Gọi diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABCD$ và hình chóp $S.A_2B_2C_2D_2$ lần lượt là S và S_2

Gọi các độ dài trung đoạn của hình chóp $S.ABCD$ và hình chóp $S.A_2B_2C_2D_2$ lần lượt là d và d_2

$$\text{Ta có: } S = \frac{4a}{2} \cdot d = 2ad; S_2 = \frac{4c}{2} \cdot d_2 = 2cd_2$$

Xét ΔSBC có $BC \parallel B_2C_2$ nên:

$$\frac{d}{d_2} = \frac{SB}{SB_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Do đó: } \frac{S}{S_2} = \frac{2ad}{2cd_2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a^2}{c^2}$$

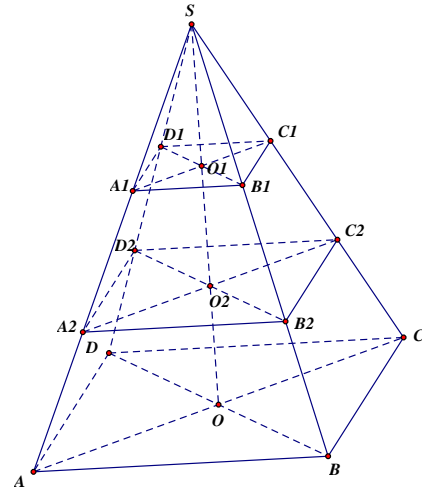
$$\text{Chứng minh tương tự, ta được: } \frac{S_1}{S_2} = \frac{b^2}{c^2}$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } S - S_2 = S_2 - S_1$$

$$\text{Suy ra } 2S_2 = S + S_1. \text{ Do đó: } \frac{S + S_1}{S_2} = 2$$

$$\text{Vậy: } \frac{S}{S_2} + \frac{S_1}{S_2} = 2 \text{ hay}$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 2 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 2 \Rightarrow c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$



(h.20.13)

20.7 (h.20.14)

*** Tìm cách giải :**

Để tìm thể tích của hình chóp đều khi ta đã biết cạnh đáy ta cần tính chiều cao của hình chóp. Có thể vận dụng định lý Py-ta-go để tính.

*** Trình bày lời giải :**

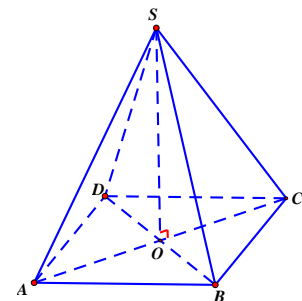
$ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ nên $BD = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2a \Rightarrow OB = a$

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp mp(ABCD)$

$\Rightarrow \Delta SOB$ vuông tại O

$$\text{Ta có: } SO^2 = SB^2 - OB^2 = (a\sqrt{10})^2 - a^2 = 9a^2 \Rightarrow SO = 3a$$

$$\text{Thể tích hình chóp là } V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (a\sqrt{2})^2 \cdot 3a = 2a^3$$



(h.20.14)

20.8 (h.20.15)

Gọi O là trực tâm của lục giác đều $ABCDEF$

Ta có $SO \perp AD$

Diện tích tam giác ADS là:

$$\frac{1}{2} AD \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot SO = a \cdot SO$$

Theo đề bài ta có: $a \cdot SO = a^2 \Rightarrow SO = a$

Gọi SM là một trung đoạn của hình chóp, khi đó $OM \perp BC$

Xét $\triangle OBC$ đều, cạnh a , đường cao $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét $\triangle SOM$ vuông tại O , ta có:

$$SM^2 = SO^2 + OM^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow SM = \frac{7\sqrt{a}}{2}$$

Diện tích xung quanh hình chóp là $S_{xq} = \frac{6a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{2}$

20.9 (h.20.16)

Gọi M là trung điểm của AB

Khi đó SM là trung đoạn của hình chóp.

Ta đặt $AB = x$ thì $SM^2 = SB^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow SM = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - x^2}$.

Diện tích xung quanh của hình chóp là:

$$S_{xq} = \frac{3x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4a^2 - x^2} = \frac{3x}{4} \cdot \sqrt{4a^2 - x^2}.$$

Vận dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$ hay $a \cdot b \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ ta được:

$$x \cdot \sqrt{4a^2 - x^2} \leq \frac{x^2 + 4a^2 - x^2}{2} = 2a^2.$$

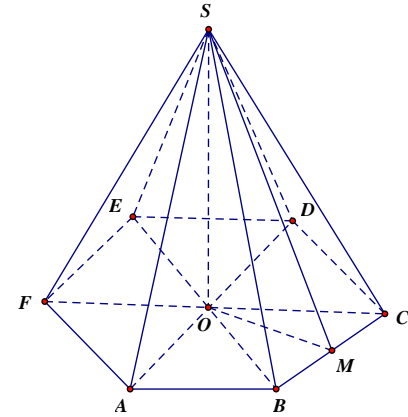
$$\text{Do đó } S_{xq} \leq \frac{3}{4} \cdot 2a^2 = \frac{3}{2}a^2.$$

Dấu = xảy ra khi $x = \sqrt{4a^2 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = 4a^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2a^2$.

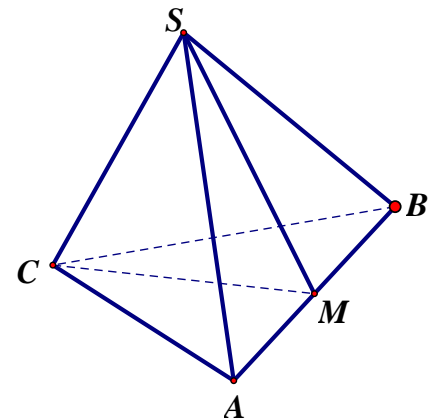
Khi đó $SA^2 + SB^2 = AB^2$ (vì $a^2 + a^2 = 2a^2$)

Theo định lý Py-ta-go đảo thì $\triangle SAB$ vuông nên $SA \perp SB$.

Chứng minh tương tự ta có: $SB \perp SC; SC \perp SA$.



(h.20.15)



Vậy $\max S_{xq} = \frac{3}{2}a^2$ khi SA,SB,SC vuông góc với nhau đôi một

20.10 (h. 20.17)

Ta đặt $BC = 2a$ và trung điểm đoạn $SM = d$ ($a < d$).

$$\text{Khi đó } S_{xq} = \frac{2a \cdot 4}{2} \cdot d = 4ad$$

Theo đề bài ta có : $4ad = 48$ suy ra $ad = 12$ (1)

Xét $\triangle SMC$ vuông tại M, ta có $MC^2 + SM^2 = SC^2$.

Do đó $a^2 + d^2 = 25$. Suy ra $a^2 + d^2 + 2ad = 25 + 24$

Suy ra $(a + d)^2 = 49 \Rightarrow a + d = 7$ (2)

Từ (1) và (2) ta được

$$\begin{cases} a + d = 7 \\ ad = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4; d = 3(l) \\ a = 3; d = 4(tm) \end{cases}$$

Khi đó $SO^2 = SM^2 - OM^2 = d^2 - a^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow h = SO = \sqrt{7}(\text{cm})$.

Vậy thể tích hình chóp là : $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}6^2 \cdot \sqrt{7} = 12\sqrt{7}(\text{cm}^3)$.

20.11 (h.20.18)

Xét tam giác SOC vuông tại O, ta có :

$$OC^2 = SC^2 - SO^2 = 17^2 - 15^2 = 64 \Rightarrow OC = 8(\text{cm})$$

Suy ra $CM = 12$ (cm).

Gọi độ dài cạnh đáy là a.

$$\text{Ta có } CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a\sqrt{3} = 24 \Rightarrow a = \frac{24}{\sqrt{3}}(\text{cm})$$

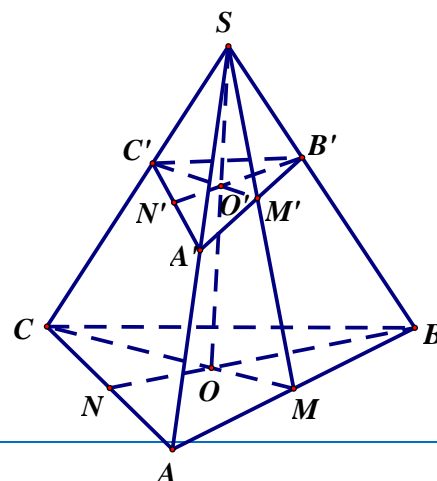
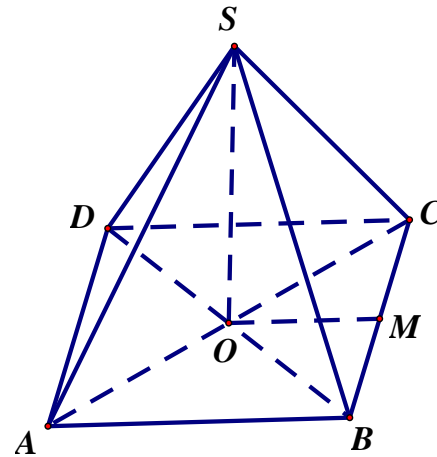
Diện tích đáy của hình chóp S.ABC là :

$$V_1 = \frac{1}{3}S_1.h_1 = \frac{1}{3}48 \cdot \sqrt{3} \cdot 15 = 240\sqrt{3}(\text{cm}^3)$$

Theo tính chất của đường trung bình của tam giác ta có $A'B' \parallel AB; A'C' \parallel AC$

Suy ra 2 mp $(A'B'C'); (ABC)$ song song.

Do đó hình chóp cắt $A'B'C'ABC$ là hình chóp cắt đều.



Xét tam giác SOC có: $\frac{SO'}{SO} = \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow SO = 7,5(\text{cm})$.

Ta có : $A'C' = \frac{1}{2}AC = \frac{12}{\sqrt{3}}(\text{cm})$. Do đó diện tích tam giác $A'B'C'$ là: $S_2 = \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

20.12 (h. 20.19)

a) Hình chóp C.BDC' có đáy là tam giác đều, mỗi cạnh dài bằng $a\sqrt{2}$. Ba mặt bên là những tam giác vuông cân bằng nhau, mỗi tam giác có cạnh bên bằng a và cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$. Do đó hình chóp C.BDC' là hình chóp đều.

b) Diện tích xung quanh của hình chóp là : $S_{xq} = \frac{a^2}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}a^2$.

Diện tích đáy hình chóp là : $S = \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

Tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích đáy hình chóp là:

$$\frac{S_{xq}}{S} = \frac{3}{2}a^2 : \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

c) Xét hình chóp C.BDC' (h 20.20) có $CB = CD = CC' = a$; $BD = BC' = DC' = a\sqrt{2}$

Gọi M là trung điểm BC , $CO \perp DM$

$$\text{Ta có: } DM = \frac{(a\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Xét tam giác COD vuông tại O có:

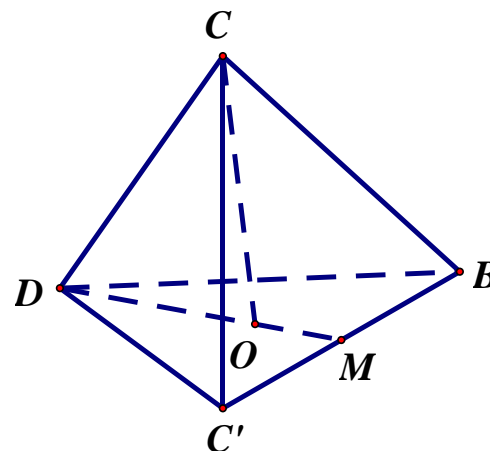
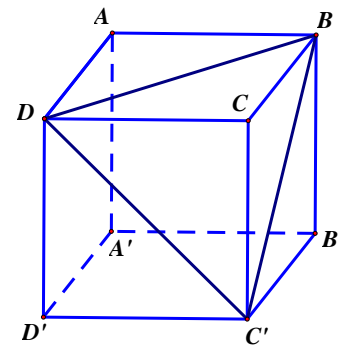
$$CO^2 = CD^2 - DO^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \text{ suy ra}$$

$$CO = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Thể tích hình chóp là

$$V_1 = \frac{1}{3} s.h = \frac{1}{3} \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{6}.$$

Thể tích hình lập phương là $V_2 = a^3$.



$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{a^3}{6} : a^3 = \frac{1}{6}.$$