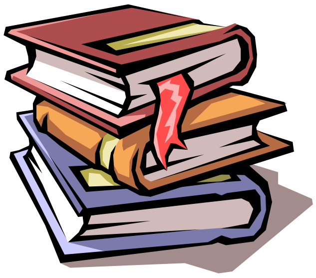
Tailieumontoan.com

Tài liệu sưu tầm



BỒI DƯỠNG ĐẠI SỐ LỚP 8

Tài liệu sưu tầm, ngày 24 tháng 8 năm 2020

MỤC LỤC

Chương 1. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA ĐA THỨC

§1. NHÂN ĐA THỨC

Phép nhân đơn thức với đa thức, đa thức với đa thức được thực hiện như sau:

$A.\left(B+C\right)=A.B+A.C$

$\left(A+B\right).\left(C+D\right)=A.B+A.D+B.C+B.D$

Ví dụ 1. Cho biểu thức:

$$M=\frac{3}{229}.\left(2+\frac{1}{433}\right)-\frac{1}{229}.\frac{432}{433}-\frac{4}{229.433}$$

a) Bằng cách đặt $\frac{1}{229}=a$; $\frac{1}{433}=b$, hãy rút gọn biểu thức *M* theo *a* và *b*.

b) Tính giá trị của biểu thức *M*.

Giải:

a) $M=3a\left(2+b\right)-a\left(1-b\right)-4ab=5a$

b) $M=5a=5.\frac{1}{229}=\frac{5}{229}$

Ví dụ 2: Tính giá trị của biểu thức

$A=x^5-5x^4+5x^3-5x^2+5x-1$ tại $x=4$

Giải

Cách 1. Thay $x=4$, ta có

$A=4^5-5.4^4+5.4^3-5.4^2+5.4-1$

$=4^5-\left(4+1\right).4^4+\left(4+1\right).4^3-\left(4+1\right).4^2+\left(4+1\right).4-1$

$=4^5-4^5-4^4+4^4+4^3-4^3-4^2+4^2+4-1$

$=3$

Cách 2. Thay $5=x+1$, ta có

$A=x^5-\left(x+1\right)x^4+\left(x+1\right)x^3-\left(x+1\right)x^2+\left(x+1\right)x-1$

$=x^5-x^5-x^4+x^4+x^3-x^3-x^2+x^2+x-1$

$= x-1=3$

Nhận xét: Khi tính giá trị của một biểu thức, ta thường thay chữ bằng số. Nhưng ở ví dụ 1 và ở cách 2 của ví dụ 2, ta lại thay số bằng chữ. Ở ví dụ 1, các số $\frac{1}{229}$ và $\frac{1}{433}$ lặp lại nhiều lần trong biểu thức *M* được thay bởi *a* và *b*. Ở ví dụ 2, số 5 được lặp lại nhiều lần trong biểu thức *A* được thay bởi *x* + 1.

Ví dụ 3: Chứng minh hằng đẳng thức

$$\left(x-a\right)\left(x-b\right)+\left(x-b\right)\left(x-c\right)+\left(x-c\right)\left(x-a\right)=ab+bc+ca-x^2$$

Biết rằng $2x=a+b+c$

Giải:

Biến đổi vế trái, ta được

$$x^2-bx-ax+ab+x^2-bx-cx+bc+x^2-ax-cx+ca$$

$$=3x^2-2x\left(a+b+c\right)+\left(ab+bc+ca\right)$$

Thay $a+b+c=2x$, được vế trái bằng $-x^2+ab+bc+ca$, bằng vế phải.

Hằng đẳng thức được chứng minh.

BÀI TẬP

1. Rút gon biểu thức:

$$2y-x-\left\{2x-y-\left[y+3x-\left(5y-x\right)\right]\right\}$$

Với $x=a^2+2ab+b^2$; $y=a^2-2ab+b^2$

2. Thực hiện phép tính:

$$3x^n\left(4x^{n-1}-1\right)-2x^{n+1}\left(6x^{n-2}-1\right)$$

3. Rút gọn các biểu thức:

a) $10^{n+1}-6.10^n$;

b) $90.10^k-10^{k+2}+10^{k+1}$;

c) $2,5.5^{n-3}.10+5^n-6.5^{n-1}$.

4. a) Chứng minh rằng: $2^{10}+2^{11}+2^{12}$ chia hết cho 7.

b) Viết 7. 32 thành tổng của ba lũy thừa cơ số 2 với các số mũ là ba số tự nhiên liên tiếp.

5. Tính $3.\frac{1}{117}.\frac{1}{119}-\frac{4}{117}.5\frac{118}{119}-\frac{5}{117.119}+\frac{8}{39}$

6. Tính giá trị $x^{15}-8x^{14}+8x^{13}-8x^{12}+...-8x^2+8x-5$ với $x = 7$.

7. Rút gọn: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

8. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a+b+c)=a(a^2-bc)+b(b^2-ca)+c(c^2-ab)$$

9. Chứng minh hằng đẳnt thức:

$$(100+a)(100+b)=(100+a+b).100+ab$$

Từ đó suy ra quy tắc nhân nhẩm hai số lớn hơn 100 một chút.

10. Hãy xây dựng quy tắc nhân nhẩm hai số nhỏ hơn 100 một chút dựa vào hằng đẳng thức

$$(100-a)(100-b)=(100+a+b).100+ab$$

11. Rút gọn biểu thức: $(x+a)(x+b)(x+c)$

Biết rằng: $a+b+c=6$

$ab+bc+ca=-7$

$abc=-60$

§2. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

Bảy hằng đẳng thức đáng nhớ được học trong chương trình cho ta kết quả cuối cùng của các phép nhân đa thức với đa thức.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad (1)$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \quad (2)$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad (3)$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad (4)$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad (5)$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \quad (6)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \quad (7)$$

Các công thức (4) và (5) còn được viết dưới dạng:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$

Từ công thức (1) suy ra công thức bình phương của một đa thức:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

Ví dụ 4. Cho đa thức: $2x^2 - 5x + 3$. Viết đa thức trên dưới dạng một đa thức của biến *y*, trong đó y = *x* + 1.

Giải: Thay *x* bởi *y* – 1, ta được

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(y-1)^2 - 5(y-1) + 3$$

$$= 2(y^2 - 2y + 1) - 5y + 5 + 3$$

$$= 2y^2 - 9y + 10$$

Ví dụ 5. Số nào lớn hơn trong hai số *A* và *B?*

$$A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

$$B = 2^{32}$$

Giải: Nhân hai vế của *A* với 2 – 1, ta được:

$$A = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

Áp dụng hằng đẳng thức $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ nhiều lần, ta được

$A = 2^{32} - 1$. Vậy *A* < *B*.

Ví dụ 6. Rút gọn biểu thức:

$$A = (a+b+c)^3 + (a-b-c)^3 - 6a(b+c)^2$$

Giải:

$$A = [a + (b+c)]^3 + [a - (b+c)]^3 - 6a(b+c)^2$$

$$= a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3 + a^3 - 3a^2(b+c) +$$

$$+3a(b+c)^2 - (b+c)^3 - 6a(b+c)^2$$

$$= 2a^3$$

BÀI TẬP

A – CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC (1), (2), (3)

12. Tính nhanh kết quả các biểu thức sau:

a) $127^2+146.127+73^2$;

b) $9^8.2^8-\left(18^4+1\right)\left(18^4-1\right)$;

c) $100^2-99^2+98^2-97^2+...+2^2-1^2$;

d) $\left(20^2+18^2+16^2+...+4^2+2^2\right)-\left(19^2+17^2+15^2+...+3^2+1^2\right)$;

e) $\dfrac{780^2-220^2}{125^2+150.125+75^2}$;

13. So sánh hai số sau, số nào lớn hơn?

a) $A=1989.1991$ và $B=1990^2$;

b) $A=\dfrac{x-y}{x+y}$ và $B=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ với $x>y>0$;

c) $A=(3+1)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\left(3^8+1\right)\left(3^{16}+1\right)$ và $B=3^{32}-1$;

14. Rút gọn các biểu thức:

a) $5(2x-1)^2+4(x-1)(x+3)-2(5-3x)^2$;

b) $\left(2a^2+2a+1\right)^2\left(2a^2-2a+1\right)^2-\left(2a^2+1\right)^2$;

c) $(9x-1)^2+(1-5x)^2+2(9x-1)(1-5x)$;

d) $\left(x^2-5x+1\right)^2+2(5x-1)\left(x^2-5x+1\right)+(5x-1)^2$;

15. Rút gọn các biểu thức:

a) $\left(a^2+b^2-c^2\right)^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)^2$;

b) $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-2(a+b)^2$;

c) $(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(b+c-a)^2$;

16. Chứng minh các hằng đẳng thức:

a) $\left(a^2-b^2\right)^2+(2ab)^2=\left(a^2+b^2\right)^2$;

b) $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2-(ad-bc)^2$;

c) $(ax+b)^2-(a-bx)^2+c^2x^2+c^2=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+1\right)$;

d) $\dfrac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=a^3+b^3+c^3-3abc$;

e) $1000^3+1003^2+1005^2+1006^2=1001^2+1002^2+1004^2+1007^2$;

17. Cho $10a^2=10b^2+c^2$. Chứng minh rằng:

$(7a-3b+2c)(7a-3b-2c)=(3a-7b)^2$

18. Cho $a+b+c=2p$. Chứng minh rằng:

a) $2bc+b^2+c^2-a^2=4p(p-a)$

b) $(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2=a^2+b^2+c^2-p^2$

19. Viết đa thức x^2+3x+2 dưới dạng đa thức của $x-1$

20. Hiệu các bình phương của hai số tự nhiên chẵn liên tiếp bằng 36. Tìm hai số ấy.

21. Hiệu các bình phương của hai số tự nhiên lẻ liên tiếp bằng 40. Tìm hai số ấy.

22. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp, biết rằng tổng các tích của từng cặp hai số trong ba số ấy bằng 74.

23. Tổng ba số *a, b, c* bằng 9, tổng các bình phương của chúng bằng 54.
Tính $ab+bc+ca$.

24. Tìm *x* và *y*, biết rằng: $x^2+2x+y^2-4y+5=0$.

25. Cho $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$**.** Chứng minh: $a=b=c$.

26. Cho $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=4\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$**.**

Chứng minh: $a=b=c$.

27. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $x^2-10x+26$ với $x=105$;

b) $x^2-0,2x+0,01$ với $x=0,9$;

c) $2(a-5)(a+1)-(a-5)^2+36$ với $a=99$;

28. Chứng minh rằng:

a) $a(a-6)+10>0$;

b) $(x-3)(x-5)+4>0$;

c) $a^2+a+1>0$.

29. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) x^2-4x+1;

b) $4x^2+4x+11$;

c) $3x^2-6x-1$.

30. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a) $5-8x-x^2$;

b) $4x-x^2+1$.

31. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

b) x^2-2x+y^2-4y+6

B – CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC (4), (5), (6), (7)

32. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $a^3+1+3a+3a^2$ với $a=9$;

b) x^3+3x^2+3x với $x=19$;

c) a^3+3a^2+3a+6 với $a=29$;

d) a^3-3a^2+3a+1 với $a=101$.

33. Rút gọn các biểu thức:

a) $x(x-1)(x+1)-(x+1)(x^2-x+1)$;

b) $3x^2(x-1)(x+1)-(x^2-1)(x^4+x^2+1)-(x^2-1)^3$;

c) $(a+b+c)^3+(a-b-c)^3+(b-c-a)^3+(c-a-b)^3$.

34. Tìm x, biết:

$$6(x+1)^2-2(x+1)^3+2(x-1)(x^2+x+1)=1.$$

35. Chứng minh các hằng đẳng thức:

a) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

b) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

36. Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3=3abc$.

37*. Cho $a+b+c+d=0$. Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3+d^3=3(ab-cd)(c+d)$.

38. Cho $a+b=1$. Tính giá trị của $M=2(a^3+b^3)-3(a^2-b^2)$.

§3. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Ba phương pháp thường dùng để phân tích đa thức thành nhân tử:

- Đặt nhân tử chung.
- Nhóm các hạng tử.
- Dùng hằng đẳng thức.

Ngoài ra, để phân tích đa thức thành nhân tử, người ta còn dùng những phương pháp khác, như: tách một hạng tử thành nhiều hạng tử, thêm và bớt cùng một hạng tử, đổi biến, hệ số bất định.

Ví dụ 7. Phân tích thành nhân tử:

a) x^2-6x+8;

b) $9x^2+6x-8$;

Giải: Ba hạng tử của đa thức không có nhân tử chung, cũng không lập thành bình phương của một nhị thức. Do đó ta nghĩ đến việc tách một hạng tử thành hai hạng tử để tạo thành đa thức có bốn hoặc năm hạng tử.

a) Cách 1: $x^2-6x+8=x^2-2x-4x+8=x(x-2)-4(x-2)$

$=(x-2)(x-4)$

Cách 2: $x^2-6x+8=x^2-6x+9-1=(x-3)^2-1$

$=(x-2)(x-4)$

Cách 3: $x^2-4+6x+12=(x+2)(x-2)+6(x+2)$

$=(x-2)(x-4)$

Cách 4: $x^2-16-6x+24=(x+4)(x-4)-6(x-4)$

$=(x-2)(x-4)$

Cách 5: $x^2-4x+4-2\mathrm{x}+4=(x-2)^2-2(x-2)$

$=(x-2)(x-4)$

b) Có nhiều cách tách một hạng tử thành hai hạng tử khác, trong đó hai cách sau là thông dụng nhất:

Cách 1: Tách hạng tử bậc nhất thành hai hạng tử rồi dùng phương pháp nhóm các hạng tử và đặt nhân tử chung mới.

$9x^2+6x-8=9x^2-6x+12x-8$

$=3x(3x-2)+4(3x-2)=(3x-2)(3x+4)$.

Cách 2: Tách hạng tử không đổi thành hai hạng tử rồi đưa đa thức về dạng hiệu hai bình phương.

$9x^2+6x+1-9=(3x+1)-3^2=(3x+4)(3x-2)$.

Chú ý: Cách tách hạng tử bậc nhất thành hai hạng tử dựa vào hằng đẳng thức:

$$mpx^2+(np+mq)x+nq=(mx+n)(mp+q).$$

Như vậy trong tam thức: ax^2+bx+c, hệ số b được tách thành b_1+b_2 sao cho $b_1b_2=ac$

Trong thực hành ta làm như sau:

1. Tìm tích *ac*.
2. Phân tích *ac* ra tích của hai thừa số nguyên bằng mọi cách.
3. Chọn hai thừa số có tổng bằng *b*.

Trong đa thức: $9x^2+6x-8$ thì $a=9,b=6,c=-8$.

Bước 1: Tích $ac=9.(-8)=-72$.

Bước 2: Phân tích -72 ra tích hai thừa số trái dấu, trong đó thừa số dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn (để tổng hai thừa số bằng 6).

$-72=(-1).72=(-2).36=(-3).24=(-4).18=(-8).9$

Bước 3: Chọn hai thừa số có tổng bằng 6. Đó là – 6 và 12.

Trong trường hợp tam thức ax^2+bx+c có *b* là số lẻ, hoặc a không là bình phương của một số nguyên thì giải theo cách 1 gọn hơn so với cách 2.

Ví dụ 8. Phân tích thành nhân tử: $\left(x^2+x\right)^2+4x^2+4x-12$.

Giải: Ta nhận thấy nếu đặt: $x^2+x=y$ thì đa thức có dạng: $y^2+4y-12$ là tam thức bậc hai đối với *y*. Ta có:

$$y^2+4y-12=y^2+6y-2y-12=y(y+6)-2(y+6)$$

$$=(y+6)(y-2)$$

$$=\left(x^2+x+6\right)\left(x^2+x-2\right)$$

$$=\left(x^2+x+6\right)\left(x^2+2x-x-2\right)$$

$$=\left(x^2+x+6\right)\left[x(x+2)-(x+2)\right]$$

$$=\left(x^2+x+6\right)(x+2)(x-1).$$

Cách làm như trên gọi là đổi biến.

***Chú ý*:** Tam thức bậc hai ax^2+bx+c sẽ không phân tích tiếp được thành nhân tử trong phạm vi số hữu tỉ nếu:

Theo cách 1, khi phân tích *ac* ra tích của hai thừa số nguyên bằng mọi cách, không có hai thừa số nào có tổng bằng *b*, hoặc

Theo cách 2, sau khi tam thức về dạng ax^2-k thì *k* không là bình phương của một số hữu tỉ.

Tam thức x^2+x+6 không phân tích thành nhân tử được nữa (trong phạm vi số hữu tỉ) vì:

Theo cách 1, tích $ac = 6 = 1.6 = 2.3$, không có hai thừa số nào có tổng bằng 1.

Còn theo cách 2, $x^2 + x + 6 = x^2 + 2.\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{23}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4}$

Ta thấy $\frac{23}{4}$ không là bình phương của một số hữu tỉ.

Ví dụ 9. Phân tích thành nhân tử: $x^3 + 3x^2 - 4$.

Giải: Ta tách các hạng tử của đa thức trên bằng phương pháp *tìm nghiệm của đa thức***.** Ta nhắc lại *a* là nghiệm của đa thức $f(x)$ nếu $f(a) = 0$. Như vậy, nếu đa thức $f(x)$ chứa nhân tử $x - a$ thì *a* phải là nghiệm của đa thức. Ta lại chú ý rằng nếu đa thức trên có một nhân tử là $x - a$ thì nhân tử còn lại là $x^2 + bx + c$ suy ra $-ac = -4$, tức là *a* phải là ước của – 4. Tổng quát, trong đa thức với hệ số nguyên, nghiệm nguyên nếu có phải là ước của hạng tử không đổi. Ước của – 4 là ±1, ±2, ±4. Kiểm tra, ta thấy 1 là nghiệm của đa thức. Như vậy, đa thức chứa nhân tử $x - 1$, do đó ta tách các hạng tử của đa thức làm xuất hiện nhân tử chung $x - 1$.

Cách 1: $x^3 + 3x^2 - 4 = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4$

$$= x^2(x-1) + 4(x+1)(x-1) = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$$

$$= (x-1)(x+2)^2.$$

Cách 2: $x^3 + 3x^2 - 4 = x^3 - 1 + 3x^2 - 3$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x+1)(x-1)$$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1 + 3x + 3)$$

$$= (x-1)(x+2)^2.$$

Ta cũng chú ý rằng nếu đa thức có tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức chứa nhân tử $x - 1$, nếu đa thức có tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ thì đa thức chứa nhân tử $x + 1$ 9xem ví dụ 14).

Ví dụ 10. Phân tích thành nhân tử: $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$.

Giải: Các số ±1, ±3 không là nghiệm của đa thức, như vậy đa thức không có nghiệm nguyên. Nhưng đa thức có thể có nghiệm hữu tỉ. Trong đa thức với hệ số nguyên, nghiệm hữu tỉ nếu có phải có dạng $\frac{p}{q}$, trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất (bạn đọc tự chứng minh).

Như vậy, nghiệm hữu tỉ nếu có của đa thức trên chỉ có thể là ±1, $\pm\frac{1}{2}$, ±3 hoặc $\pm\frac{3}{2}$. Sau khi kiểm tra ta thấy $x=\frac{1}{2}$ là một nghiệm nên đa thức chứa nhân tử $x-\frac{1}{2}$ hay $2x-1$. Do đó, ta tìm cách tách các hạng tử của đa thức để xuất hiện nhân tử chung $2x-1$.

$2x^3-5x^2+8x-3$

$=2x^3-x^2-4x^2+2x+6x-3$

$=x^2(2x-1)-2x(2x-1)+3(2x-1)$

$=(2x-1)(x^2-2x+3)$.

Có thể giải bài tập trên bằng phương pháp *hệ số bất định*: nếu đa thức trên phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng:

$(ax+b)(cx^2+dx+m)$.

Phép nhân này cho kết quả:

$$acx^3+(ad+bc)x^2+(am+bd)x+bm.$$

Đồng nhất đa thức này với $2x^3-5x^2+8x-3$, ta được:

$$ac=2,\ ad+bc=-5,\ am+bd=8,\ bm=-3.$$

Có thể giả thiết rằng $a>0$ (vì nếu $a<0$ thì ta đổi dấu cả hai nhân tử), do đó $a=2$ hoặc $a=1$.

Xét $a=2$ thì $c=1$, ta có: $2d+b=-5$, $2m+bd=8$, $bm=-3$; b có thể bằng ±1, ±3.

Xét $b=-1$ thì $m=3$, $d=-2$ thỏa mãn các điều kiện trên.

Vậy $a=2$, $c=1$, $b=-1$, $m=3$, $d=-2$.

Ta có: $2x^3-5x^2+8x-3=(2x-1)(x^2-2x+3)$

Ví dụ 11. Phân tích thành nhân tử: $P=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

Giải:

Cách 1. Khai triển hai hạng tử cuối:

$P=ab(a-b)+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$

$=ab(a-b)-bc^2+c^2a-ca^2+b^2c$

$= ab(a-b) + c^2(a-b) - c(a+b)(a-b)$

$= (a-b)(ab + c^2 - ac - bc)$

$= (a-b)\left[a(b-c) - c(b-c)\right]$

$= (a-b)(b-c)(c-a).$

Cách 2. Tách $b-c$ thành $-\left[(a-b)+(c-a)\right]$

$P = ab(a-b) - bc\left[(a-b)+(c-a)\right] + ca(c-a)$

$= b(a-b)(a-c) + c(c-a)(a-b)$

$= (a-b)(b-c)(c-a).$

BÀI TẬP

39. Phân tích thành nhân tử:

a) $x^3 - 4x^2 - 8x + 8;$

b) $1 + 6x - 6x^2 - x^3;$

c) $6x^3 - x^2 - 486x + 81;$

d) $x^4 - 4x^2 + 4x - 1;$

e) $x^2(x^2+4) - x^2 + 4;$

f) $x^2(x+4)^2 - (x+4)^2 - (x^2-1).$

40. Phân tích thành nhân tử:

a) $(xy+1)^2 - (x+y)^2;$

b) $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 - 4c^2;$

c) $4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2;$

d) $a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2);$

e) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc;$

g) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3abc;$

h) $a(b^3-c^3) + b(c^3-a^3) + c(a^3-b^3);$

i*) $a^3(b^2-c^2) + b^3(c^2-a^2) + c^3(a^2-b^2);$

j*) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2-a^3-b^3-c^3+4abc.$

41. Phân tích thành nhân tử:

a) $a^3+b^3+c^3-3abc;$

b) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3.$

42. Phân tích các tam thức bậc hai thành nhân tử:

a) $x^2-7x+12;$

b) $x^2-5x-14;$

c) $4x^2-3x-1.$

43. Phân tích thành nhân tử bằng cách đổi biến để đưa về dạng tam thức bậc hai đối với biến mới:

a) $6x^4-11x^2+3;$

b) $(x^2+x)^2+3(x^2+x)+2;$

c) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1;$

d) $x^2-7xy+12y^2;$

e) $x^2-2xy+y^2+3x-3y-10.$

44. Phân tích x^3-7x-6 thành nhân tử bằng nhiều cách.

45. Phân tích thành nhân tử:

a) $x^3-5x^2+8x-4;$

b) $x^3-3\text{x}+2;$

c) $x^3-5x^2+3x+9;$

d) $x^3+8x^2+17x+10;$

e) $x^3+3x^2+6x+4.$

46. Phân tích thành nhân tử:

a) $x^3-2x-4;$

b) $2x^3-12x^2+17x-2;$

c) $x^3+x^2+4;$

d) $x^3+3x^2+3x+2;$

e) $x^3+9x^2+24x+26;$

g) $2x^3-3x^2+3x-1;$

h) $3x^3-14x^2+4x+3.$

47. Phân tích thành nhân tử:

a) $x^4+2x^3+x^2+x+1;$

b) $(1+x^2)^2-4x(1-x^2);$

c) $(x^2-8)^2+36.$

48. Phân tích thành nhân tử;

a) x^4+4;

b) x^4+64;

c) $64x^4+1$;

d) $81x^4+4$.

49*. Phân tích thành nhân tử:

a) x^5+x+1;

b) x^7+x^2+1.

50*. Phân tích thành nhân tử bằng phương pháp hệ số bất định:

a) $3x^2-22xy-4x+8y+7y^2+1$;

b) $12x^2+5x-12y^2+12y-10xy-3$;

c) $x^4+6x^3+11x^2+6x+1$.

51*. Tìm số nguyên a sao cho đa thức $(x+a)(x-5)+2$ phân tích được thành $(x+b)(x+c)$ với b, c là số nguyên.

52*. Tìm số nguyên m sao cho $(x+m)(x+5)+3$ phân tích được thành $(x+a)(x+b)$ với a, b là số nguyên.

53. Tìm số tự nhiên n để giá trị của biểu thức sau là một số nguyên tố:

a) $A=n^3-4n^2+4n-1$;

b) $B=n^3-6n^2+9n-2$.

54*. Trong hằng đẳng thức $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$, lần lượt thay x bằng $1,2,3,...,n$ rồi cộng các đẳng thức đó lại. Bằng cách đó hãy tính:

$$S=1^2+2^2+3^2+...+n^2.$$

55*. Bằng cách tương tự như bài 54, hãy tính:

$$S=1^3+2^3+3^3+...+n^3.$$

từ hằng đẳng thức $(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$.

§4. CHIA ĐA THỨC

Đa thức $A(x)$ gọi là chia hết cho đa thức $B(x)$ khác 0 nếu tồn tại đa thức $Q(x)$ sao cho $A(x) = B(x).Q(x)$.

Với mọi cặp đa thức $A(x)$ và $B(x)$, trong đó $B(x) \neq 0$, tồn tại duy nhất cặp đa thức $Q(x)$ và $R(x)$ sao cho $A(x) = B(x).Q(x) + R(x)$, trong đó $R(x) = 0$ hoặc bậc của $R(x)$ nhỏ hơn bậc của $B(x)$. Khi đó $Q(x)$ là thương và $R(x)$ là dư của phép chia $A(x)$ cho $B(x)$.

Nếu $R(x) = 0$, ta được phép chia hết. Nếu $R(x) \neq 0$, ta được phép chia có dư.

Ta cũng nhắc lại ở đây rằng hai đa thức gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng giá trị với mọi giá trị của biến. Do đó nếu hai đa thức (được viết dưới dạng thu gọn) có các hệ số tương ứng của các đơn thức đồng dạng chứa trong hai đa thức đó bằng nhau thì hai đa thức đó bằng nhau.

Ví dụ 12. Xác định số *a* sao cho đa thức $x^3 - 3x + a$ chia hết cho $(x-1)^2$.

Giải:

Cách 1. Đặt phép chia:

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3 \qquad -3x+a & x^2-2x+1 \\ \cline{3-3}
- & x^3-2x^2+x & x+2 \\ \cline{2-2}
 & 2x^2-4x+a & \\
- & 2x^2-4x+2 & \\ \cline{2-2}
 & a-2 &
\end{array}$$

Muốn phép chia không dư, ta phải có $a - 2 = 0$ hay $a = 2$;

Cách 2. (Phương pháp hệ số bất định)

Nếu đa thức bậc ba $x^3 - 3x + a$ chia hết cho đa thức bậc hai $x^2 - 2x + 1$ thì thương là nhị thức bậc nhất có hạng tử cao nhất là $x^3 : x^2 = x$, hạng tử thấp nhất là $a : 1 = a$.

Như vậy $x^3 - 3x + a$ đồng nhất với $\left(x^2 - 2x + 1\right)\left(x + a\right)$ tức là đồng nhất $x^3 + \left(a-2\right)x^2 + \left(1-2a\right)x + a$. Do đó các hệ số tương ứng phải bằng nhau tức là:

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \\ 1 - 2a = -3 \end{cases} \text{ hay } a = 2.$$

Cách 3. (Phương pháp xét giá trị riêng)

Gọi thương của phép chia là $Q(x)$, ta có $x^3-3x^2+a=(x-1)^2.Q(x)$ với mọi x.

Với $x=1$ thì $1-3.1+a=0.Q(1)$ hay $-2+a=0$ tức là $a=2$.

Thử lại: $\left(x^3-3x+a\right):\left(x^2-2x+1\right)=x+2$.

Ví dụ 13. Chứng minh định lí "Số dư trong phép chia đa thức *f(x)* cho nhị thức $x-a$ bằng giá trị của đa thức ấy tại $x=a$".

Giải: Chia đa thức *f(x)* cho nhị thức $x-a$, ta được thương là $Q(x)$ và dư là hằng số *r*. Ta có $f(x)=(x-a).Q(x)+r$ với mọi *x*, do đó $x=a$ thì $f(x)=r$.

Chú ý: Định lí trên được gọi là định lí Bê-du mang tên nhà toán học Pháp Bézout (1730 – 1783). Định lí Bê-du giúp ta tính số dư của phép chia đa thức *f(x)* cho nhị thức $x-a$ mà không cần thực hiện phép chia đa thức.

Từ định lí Bê-du, ta thấy đa thức *f(x)* chia hết cho $x-a$ khi và chỉ khi *a* là nghiệm của đa thức.

Ví dụ 14. Cho đa thức $f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$. Chứng minh rằng:

a) Đa thức *f(x)* chia hết cho $x-1$ nếu tổng các hệ số bằng 0.

b) Đa thức *f(x)* chia hết cho $x+1$ nếu tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ.

Giải:

a) Theo định lí Bê-du, số dư *r* của phép chia *f(x)* cho $x-1$ là

$$r=f(1)=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4.$$

Nếu $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=0$ thì $r=0$.

b) Theo định lí Bê-du, số dư *r* của phép chia *f(x)* cho $x+1$ là

$$r=f(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4.$$

Nếu $a_0+a_2+a_4=a_1+a_3$ thì $r=0$.

Chú ý: Chứng minh trên không chỉ đúng đối với đa thức *f(x)* có bậc bốn mà còn đúng với đa thức *f(x)* có bậc bất kì.

Ví dụ 15. Tìm các giá trị nguyên của *n* để giá trị của biểu thức $2n^2+3n+3$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2n-1$.

Giải: Đặt phép chia

$$\begin{array}{r|l} 2n^2+3n+3 & 2n-1 \\ \cline{2-2} -\ 2n^2-n & n+2 \\ \cline{1-1} 4n+3 & \\ -\ 4n-2 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

Đa thức $2n^2+3n+3$ không chia hết cho đa thức $2n-1$, nhưng có những giá trị nguyên của *n* để giá trị của $2n^2+3n+3$ chia hết cho giá trị của $2n-1$.

Muốn vậy $2n-1$ phải là ước của 5. Ước của 5 là $\pm1, \pm5$.

Với $2n-1=1$ ta có $n=1$.

Với $2n-1=-1$ ta có $n=0$.

Với $2n-1=5$ ta có $n=3$.

Với $2n-1=-5$ ta có $n=-2$.

Vậy với *n* bằng $1,0,3,-2$ thì giá trị của biểu thức $2n^2+3n+3$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2n-1$.

BÀI TẬP

56. Rút gọn các biểu thức:

a) $49^{12}:7^4$; b) $\left(\frac{25}{16}\right)^{25}:\left(\frac{5}{4}\right)^{50}$; c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{25}:\left(\frac{9}{16}\right)^{10}$.

57. Rút gọn các biểu thức:

a) $\frac{125^{100}.2^{160}}{5^{298}.4^{80}}$;

c) $\left(15.3^{11}+4.27^4\right):9^7$;

b) $\frac{9^8.5^3}{3^8.27^3.5^4}$;

d) $\frac{8\left(x+2y\right)^5}{2x+4y}$.

58. Xác định các số *a* sao cho:

a) $27x^2+a$ chia hết cho $3x+2$;

b) x^4+ax^2+1 chia hết cho x^2+2x+1;

c) $3x^2+ax+27$ chia cho $x+5$ có số dư bằng 2.

59. Xác định các số *a* và *b* sao cho:

a) x^4+ax^2+b chia hết cho x^2+x+1;

b) $ax^3+bx-24$ chia hết cho $(x+1)(x+3)$;

c) $x^4-x^3-3x^2+ax+b$ chia cho x^2-x-2 có dư là $2x-3$;

d) $2x^3+ax+b$ chia cho $x+1$ dư -6, chia cho $x-2$ dư 21.

60. Không làm phép chia đa thức, hãy xác định xem đa thức $4x^3-7x^2-x-2$ có hay không chia hết cho:

a) $x-2$; b) $x+2$?

61. Xác định dư của phép chia đa thức $x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}$ cho:

a) $x-1$; b) x^2-1.

62. Chứng minh rằng $(x^2+x-1)^{10}+(x^2-x+1)^{10}-2$ chia hết cho $x-1$.

63. Tìm các giá trị nguyên của *x* để:

a) Giá trị của biểu thức $2x^2+x-7$ chia hết cho giá trị của biểu thức $x-2$.

b) Giá trị của biểu thức $10x^2-7x-5$ chia hết cho giá trị của biểu thức $2x-3$.

64. Tìm số tự nhiên *n* để giá trị của biểu thức $25n^2-97n+11$ chia hết cho giá trị của biểu thức $n-4$.

65*. Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên nào để giá trị của biểu thức $2n^3-3n^2+n+3$ chia hết cho giá trị của biểu thức n^2-n.

§5. TÍNH CHIA HẾT

Định nghĩa: Cho hai số nguyên *a* và *b* trong đó $b \neq 0$. Ta nói *a* chia hết cho *b* nếu tìm được số nguyên *q* sao cho $a = bq$.

Các tính chất về chia hết

1. Bất cứ số nào khác 0 cũng chia hết cho chính nó.

2. Nếu *a* chia hết cho *b*, *b* chia hết cho *c* thì *a* cũng chia hết cho *c* (tính chất bắc cầu).

3. Số 0 chia hết cho mọi số $b \neq 0$.

4. Bất cứ số nào cũng chia hết cho 1.

5. Nếu *a* và *b* cùng chia hết cho *m* thì $a+b$ chia hết cho *m*, $a-b$ chia hết cho *m*.

6. Nếu một trong hai số *a* và *b* chia hết cho *m*, số kia không chia hết cho *m* thì $a+b$ không chia hết cho *m*, $a-b$ không chia hết cho *m*.

7. Nếu một thừa số của tích chia hết cho *m* thì tích chia hết cho *m*.

8. Nếu *a* chia hết cho *m*, *b* chia hết cho *n* thì *ab* chia hết cho *mn*.

Hệ quả: Nếu *a* chia hết cho *b* thì a^n chia hết cho b^n.

9. Nếu *a* chia hết cho các số nguyên dương *m* và *n* thì *a* chia hết cho BCNN của *m* và *n*.

Hệ quả: Nếu *a* chia hết cho hai số nguyên tố cùng nhau *m* và *n* thì *a* chia hết cho tích *mn*.

10. Nếu một tích chia hết cho số nguyên tố *p* thì tồn tại một thừa số của tích chia hết cho *p*.

Hệ quả: Nếu a^n chia hết cho số nguyên tố *p* thì *a* chia hết cho *p*.

11. Nếu tích *ab* chia hết cho *m*, trong đó *b* và *m* là hai số nguyên tố cùng nhau thì *a* chia hết cho *m*.

Các nhận xét sau cũng được dùng trong các chứng minh về chia hết:

1. Trong *k* số nguyên liên tiếp, có một số chia hết cho *k*.

2. Khi chia số nguyên *n* cho số nguyên $m \neq 0$, xảy ra một trong *m* dạng sau:

$n = mk,\ n = mk+1,\ n = mk+2, ...,\ n = mk+(m-1)$ với *k* số nguyên.

Ví dụ 16. Chứng minh rằng với mọi số nguyên *n* thì:

a) $n^3 - n$ chia hết cho 3;

b) $n^5 - n$ chia hết cho 5;

c) $n^7 - n$ chia hết cho 7.

Giải:

a) $n^3 - n = n\left(n^2 - 1\right) = \left(n-1\right)n\left(n+1\right).$

Trong ba số nguyên liên tiếp, có một bội của 3. Vậy $n^3 - n$ chia hết cho 3.

b) *Cách 1.* Phân tích $n^5 - n$ thành một tổng, trong đó có một số hạng là tích của năm số nguyên liên tiếp, số hạng kia có một thừa số bằng 5.

$n^5 - n = n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 + 1\right)$

$= n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 - 4 + 5\right)$

$= n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 - 4\right) + 5n\left(n^2 - 1\right)$

$= \left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right) + 5n\left(n^2 - 1\right).$

Cũng có thể giải bằng cách xét hiệu giữa $n^5 - n$ và tích của năm số nguyên liên tiếp:

$\left(n^5 - n\right) - \left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right) = \left(n^5 - n\right) - \left(n^5 - 5n^3 + 4n\right) = 5n^3 - 5n.$

Cách 2. Xét số dư của *n* trong phép chia cho 5.

$A = n^5 - n = n\left(n^4 - 1\right) = n\left(n^2 + 1\right)\left(n^2 - 1\right).$

Nếu $n = 5k$ (*k* nguyên) thì *n* chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 + 1$ chia hết cho 5.

Trường hợp nào cũng có một thừa số của *A* chia hết cho 5.

c) *Cách 1.* Xét hiệu

$\left(n^7 - n\right) - \left(n-3\right)\left(n-2\right)\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right) = 7n\left(2n^4 - 7n^2 + 5\right),$ chia hết cho 7.

Cách 2. Phân tích $n^7 - n$ thành $n\left(n^3 + 1\right)\left(n^3 - 1\right)$ rồi xét các trường hợp

$$n = 7k,\ n = 7k \pm 1,\ n = 7k \pm 2,\ n = 7k \pm 3.$$

Chú ý: $n^9 - 1$ không chia hết cho 9 với mọi số nguyên n (ví dụ $2^9 - 2 = 510$ không chia hết cho 9). Tổng quát của bài toán trên ta có: Nếu *p* là số nguyên tố thì $n^p - n$ chia hết cho *p* với mọi số nguyên *n* (định lí Phéc-ma).

BÀI TẬP

66. Chứng minh rằng tổng các bình phương của hai số lẻ thì không chia hết cho 4, hiệu các bình phương của hai số lẻ thì chia hết cho 8.

67. Chứng minh rằng số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, số chính phương lẻ thì chia cho 8 dư 1 (số chính phương là bình phương của một số nguyên).

68. Chứng minh rằng khi chia một số chính phương cho 3, không bao giờ số dư bằng 2.

b) Tổng các bình phương của bốn số nguyên liên tiếp không là số chính phương.
c) Tổng các bình phương của năm số nguyên liên tiếp không là số chính phương.
70. Số có dạng $n^2 + n + 1$ (n là số nguyên dương) có thể là số chính phương không?

71. Chứng minh rằng số có dạng $9^n + 1$không chia hết cho 4 với mọi số tự nhiên n.

72. Chứng minh rằng:
a) Một số chính phương tận cùng bằng 1 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.
b) Một số chính phương tận cùng bằng 4 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn.
73. Một số chính phương có chữ số hàng chục là 3. Chứng minh rằng chữ số hàng đơn vị của nó bằng 6.
74. Chứng minh rằng $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

75. Chứng minh rằng $a^3b - ab^3$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên a và b.

76. Chứng minh rằng:
a) Tổng các lập phương của hai số nguyên chia hết cho 6 khi và chỉ khi tổng của hai số nguyên đó chia hết cho 6.
b) Tổng các lập phương của ba số nguyên chia hết cho 6 khi và chỉ khi tổng của ba số nguyên đó chia hết cho 6.
77. Cho hai số lẻ có hiệu các lập phương chia chết cho 8. Chứng minh rằng hiệu của hai số ấy cũng chia hết cho 8.
78. Chứng minh rằng nếu bình phương thiếu của tổng hai số nguyên chia hết cho 9 thì tích của hai số ấy cũng chia hết cho 9.
79. Chứng minh rằng tổng các lập phương của ba số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 9.
80. Chứng minh rằng $n^5 - 5n^3 + 4n$ chia hết cho 120 với mọi số nguyên n.

81. Chứng minh rằng $n^3 - 3n^2 - n + 3$ chia hết cho 48 với mọi số lẻ n.

82. Chứng minh rằng $n^4 + 4n^3 - 4n^2 - 16n$ chia hết cho 384 với mọi số chẵn n.

83*. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n:
a) $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.

b) $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

84. Chứng minh rằng lấy tích của bốn số nguyên liên tiếp cộng với 1, ta được một số chính phương.

85. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n > 1:

a) Số n^4+4 là hợp số.

b*) Số n^4+4k^4 (k tự nhiên).

86. a) Tính giá trị của biểu thức: $\left(1+ab-b^4\right)a^4+1$ với $a=2^7$, $b=5$

b) Số $2^{32}+1$ có là số nguyên tố không?

87. Chứng minh rằng số $\underbrace{11....1}_{\text{n chữ số}}\underbrace{22....2}_{\text{n chữ số}}$ là tích của hai số nguyên liên tiếp với mọi số n nguyên dương.

88. Chứng minh rằng số $\underbrace{11....1}_{\text{2n chữ số}}-\underbrace{22....2}_{\text{n chữ số}}$ là một số chính phương với mọi số n nguyên dương.

89. Tìm một số có ba chữ số sao cho chia nó cho 11 thì được thương bằng tổng các chữ số của số bị chia.

90. Tìm một số có bốn chữ số sao cho chữ số hàng nghìn và hàng trăm giống nhau, chữ số hàng chục và hàng đơn vị giống nhau, số phải tìm có thể viết được thành một tích của ba thừa số, mỗi thừa số đều là số có hai chữ số và chia hết cho 11.

91*. Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương:

a) $(n+1)(n+2)(n+3)...(2n)$ chia hết cho 2^n.

b) $(n+1)(n+2)(n+3)...(3n)$ chia hết cho 3^n.

§6. MỘT SỐ HẰNG ĐẲNG THỨC TỔNG QUÁT

Tổng quát của các hằng đẳng thức (3), (6), (7), bằng phép nhân đa thức, ta chứng minh được các hằng đẳng thức sau: $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$ (8) với mọi n nguyên dương.

$a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...-ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$ (9) với mọi n lẻ.

Ví dụ: $a^4-b^4=(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)$

$a^5-b^5=(a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)$

$a^5+b^5=(a+b)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)$

Tổng quát của các hằng đẳng thức (1), (2), (4), (5), ta có công thức lũy thừa bậc n của một nhị thức (Nhị thức Niu- tơn).

$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+...+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$ (10) với mọi n nguyên dương.

Trong công thức trên,

$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, $C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{1.2}$, $C_n^3 = C_n^{n-3} = \dfrac{n(n-1)(n-3)}{1.2.3}$

Tổng quát: $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-3)...\left[n-(k-1)\right]}{1.2.3..k}$ (C_n^k còn gọi là tổ hợp chập k của n phần tử)

Ví dụ: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

Để xác định hệ số của khai triển Niu – tơn nói trên, ngoài cách dùng công thức trên, còn có cách sau:

- Dùng bảng tam giác Pa-xcan:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
1 & \to & 1 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
1 & \to & 2 & \to & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \to & 3 & \to & 3 & \to & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Trong bảng này, các số dọc theo cạnh huyền và một cạnh góc vuông bằng 1 cộng với mỗi số liền bên phải thì được số đứng ở hàng dưới (xem hình trên)

- Hệ số của hạng tử thứ nhất là 1.
- Hệ số của hạng tử thứ $k+1$ bằng $\dfrac{AB}{k}$, trong đó A là hệ số của hạng tử thứ k, B là số mũ của a trong hạng tử thứ k.

Áp dụng các hằng đẳng thức trên vào tính chất chia hết, ta có với mọi số nguyên a, b, số tự nhiên n:

$a^n - b^n$ chia hết cho $(a-b)$ (từ hằng đẳng thức 8).

$a^{2n+1} + b^{2n+1}$ chia hết cho $(a+b)$ (từ hằng đẳng thức 9).

$(a+b)^n$ =(bằng bội số của a) $+b^n$ (từ hằng đẳng thức 10).

Ví dụ 17: Chứng minh rằng $11^{10} - 1$ chia hết cho 100.

Giải: theo hằng đẳng thức (8)

$$11^{10} - 1 = (11-1)\underbrace{\left(11^9 + 11^8 + ... + 11 + 1\right)}_{\text{10 số hạng}}$$

Vậy $11^{10} - 1$ chia hết cho 100 vì mỗi thừa số đều chia hết cho 10.

Ví dụ 18: Chứng minh rằng $2^{1000} - 1$ chia hết cho 3

Giải: $2^{1000} - 1 = 4^{500} - 1$ chia hết cho $4-1$ (hằng đẳng thức 8).

Ví dụ 19*. Tìm giá trị nguyên dương của n để $2^n - 1$ chia hết cho 3

Giải:

Xét n chẵn $\left(n=2k\right)$ thì $2^n-1=2^{2k}-1=4^k-1$ chia hết cho $4-1=3$ (hằng đẳng thức 8)

Xét n lẻ $\left(n=2k+1\right)$ thì $2^n-1=2^{2k+1}-1=2\left(2^{2k}-1\right)4^k+1$ không chia hết cho 3 (hằng đẳng thức 8)

Vậy 2^n-1 chia hết cho 3 khi và chỉ khi n chẵn.

Ví dụ 20. Chứng minh rằng $19^{45}+19^{30}$ chia hết cho 20

Giải.

Cách 1: $19^{45}+19^{30}=19^{30}\left(19^{15}+1\right)$ mà $\left(19^{15}+1\right)\vdots 20$ (hằng đẳng thức 9).

Cách 2: $19^{45}+19^{30}=19^{45}+1^{45}+19^{30}-1^{30}$

Ta thấy $\left(19^{45}+1\right)\vdots 20$ (hằng đẳng thức 9).

$\left(19^{30}-1^{30}\right)=\left(19^{15}-1^{15}\right)\left(19^{15}+1^{15}\right)\vdots 20$ vì $\left(19^{15}+1\right)\vdots\left(19+1\right)$ (hằng đẳng thức 9).

Cách 3: Theo công thức Niu- tơn:

$19^{45}+19^{30}=\left(20-1\right)^{45}+\left(20-1\right)^{30}=20a-1+20b+1=20c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 21. Tìm số dư khi chia 1963^{1964} cho 7

Giải. Ta thấy 1963 là số chia cho 7 dư 3. Do đó:

$1963^{1964}=\left(7a+3\right)^{1964}=7b+3^{1964};\left(a,b\in\mathbb{Z}\right)$

Lại xét tiếp số dư khi chia 3^{1964} cho 7

Lũy thừa của 3 sát với bội của 7 là x^3. Do đó ta viết:

$3^{1964}=3^2.\left(3^3\right)^{654}=9\left(28-1\right)^{654}=9\left(7c+1\right)=7d+9=7m+2$ với $c,d,m\in\mathbb{Z}$

Vậy 3^{1964} chia cho 7 dư 2.

Ví dụ 22. Tìm hai chữ số tận cùng của 2^{1000}

Giải.

Tìm hai chữ số tận cùng của số 2^{1000} là tìm số dư khi chia 2^{1000} cho 100

Trước hết ta xét số dư của 2^{1000} khi chia cho 25. Lũy thừa của 2 sát với một bội của 25 là $2^{10}=1024=1025-1=25a-1;a\in\mathbb{Z}$

Ta có: $2^{1000}=\left(2^{10}\right)^{100}=\left(25a-1\right)^{100}=25b+1;b\in\mathbb{Z}$

Do đó 2^{1000} chia cho 25 dư 1. Số chia cho 25 dư 1 thì có tận cùng là 01 hoặc $26;51;76$

Số $2^{1000}\vdots 4\Rightarrow 2^{1000}$ không thể có tận cùng là $01;26;51$

Vậy 2^{1000} có hai chữ số tận cùng là 76

BÀI TẬP

92. Chứng minh rằng 8.16^n-8 chia hết cho 120.

93. Chứng minh rằng $100....01$ là hợp số ($4n+1$ chữ số 0).

94. Chứng minh rằng 16^n-1 chia hết cho 15 nhưng không chia hết cho 17 với n là số lẻ.

95. Tìm số dư của phép chia 48^{13} cho 7.

96. Tìm tổng các hệ số của đa thức khi khai triển

$a)\left(3x-2\right)^4$ $b)\left(5x-3\right)^{10}$

97*. Tìm mọi giá trị n nguyên dương để 2^n-1 chia hết cho 7

98*. Tìm hai chữ số tận cùng của 7^{1990}

Chương II: PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

§1. TÍNH CHẤT CƠ BẢN VÀ RÚT GỌN PHÂN THỨC

Ví dụ 23. Tìm giá trị của x để phân thức $\dfrac{2x^2+10x+12}{x^3-4x}$ bằng 0

Giải. Phân thức bằng 0 khi tử bằng 0 và mẫu khác 0

Xét tử bằng 0

$2x^2+10x+12=0$

$\Leftrightarrow 2(x+2)(x+3)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-3 \end{array}\right.$

* Với $x=-2$ thì mẫu bằng $x^3-4x=8-8=0$

* Với $x=-3$ thì mẫu bằng $x^3-4x=-27+12\neq 0$

Vậy phân thức bằng 0 khi và chỉ khi $x=-3$

Chú ý: Cũng có thể phân tích mẫu thành nhân tử $x(x-2)(x+2)$ rồi nhận xét với $x=-2$ thì mẫu bằng 0, với $x=-3$ thì mẫu khác 0.

Ví dụ 24. Cho $3a^2+3b^2=10ab; b>a>0$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{a-b}{a+b}$

Giải

Cách 1: Cần biến đổi biểu thức P để sử dụng được điều kiện $3a^2+3b^2=10ab$. Do đó ta xét biểu thức:

$P^2=\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab}=\dfrac{3a^2+3b^2-6ab}{3a^2+3b^2+6ab}$

$=\dfrac{10ab-6ab}{10ab+6ab}=\dfrac{4ab}{16ab}=\dfrac{1}{4}$

Do $b>a>0$ nên $a-b<0; a+b>0\Rightarrow P<0$

Vậy $P=-\dfrac{1}{2}$

Cách 2: từ $3a^2+3b^2=10ab\Rightarrow 3a^2-9ab-ab+3b^2=0\Leftrightarrow (a-3b)(3a-b)=0$

Trường hợp $a-3b=0\Leftrightarrow a=3b$ không xảy ra vì $3b>b>a>0$

Vậy $3a-b=0\Leftrightarrow b=3a$ thay vào P ta được:

$P=\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{a-3a}{a+3a}=\dfrac{1}{2}$; (vì $a\neq 0$)

BÀI TẬP

99. Tìm giá trị của x để phân thức $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x-5}$ bằng 0.

100. Rút gọn các phân thức:

$a)\dfrac{a^4-3a^2+1}{a^4-a^2-2a-1}$;

$b)\dfrac{a^2\left(b-c\right)+b^2\left(c-a\right)+c^2\left(a-b\right)}{a^4\left(b^2-c^2\right)+b^4\left(c^2-a^2\right)+c^4\left(a^2-b^2\right)}$;

$c)\dfrac{\left|x-1\right|+\left|x\right|+x}{3x^2-4x+1}$ với $x<0$;

$d)\dfrac{16a^2-40ab}{8a^2-24ab}$ với $\dfrac{a}{b}=\dfrac{10}{3}$.

101. Cho $4a^2+b^2=5ab; 2a>b>0$. Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{ab}{4a^2-b^2}$.

§2. CÁC PHÉP TÍNH VỀ PHÂN THỨC

Ví dụ 25: Thực hiện phép tính:

$$P=\frac{1}{(b-c)(a^2+ac-b^2-bc)}+\frac{1}{(c-a)(b^2+ab-c^2-ac)}+\frac{1}{(a-b)(c^2+bc-a^2-ab)}$$

Giải:

Phân tích các mẫu thành nhân tử:

$$a^2+ac-b^2-bc=(a^2-b^2)+c(a-b)=(a-b)(a+b+c) \quad (1)$$

$$b^2+ab-c^2-ac=(b^2-c^2)+a(b-c)=(b-c)(b+c+a) \quad (2)$$

$$c^2+bc-a^2-ab=(c^2-a^2)+b(c-a)=(c-a)(c+a+b) \quad (3)$$

Mẫu chung (MC) bằng $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

Do đó $P=\dfrac{(c-a)+(a-b)+(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}=\dfrac{0}{MC}=0$

với a,b,c khác nhau và $a+b+c\neq 0$

Chú ý: Nếu trong đẳng thức

$$a^2+ac-b^2-bc=(a-b)(a+b+c) \quad (1)$$

Ta thay a bằng b, b bằng c, c bằng a thì được:

$$b^2+ba-c^2-ca=(b-c)(b+c+a) \quad (2)$$

Lại làm như vậy đối với (2) ta được:

$$c^2+bc-a^2-ab=(c-a)(c+a+b) \qquad (3)$$

Cách làm như vậy gọi là *hoán vị vòng quanh*. Bằng cách hoán vị vòng quanh, ta có ngay các đẳng thức (2) và (3) mà không cần lặp lại các biến đổi như quá trình chứng minh dẳng thức (1).

Ví dụ 26: Tìm các số a và b sao cho phân thức $\frac{x^2+5}{x^3-3\text{x}-2}$ viết được thành $\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x+1)^2}$.

Giải: *Cách 1 (Phương pháp hệ số bất định)*

$$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+b(x-2)}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{\text{ax}^2+(2\text{a}+b)x+(a-2b)}{x^3-3\text{x}-2}$$

Đồng nhất với phân thức $\frac{x^2+5}{x^3-3\text{x}-2}$ ta được:

$$\begin{cases} a=1 \\ 2\text{a}+b=0 \\ a-2b=5 \end{cases} \qquad \text{Suy ra } a=1; b=-2.$$

Vậy $\frac{x^2+5}{x^3-3\text{x}-2}=\frac{1}{x-2}-\frac{2}{(x+1)^2}$.

Cách 2 (Phương pháp xét giá trị riêng).

$$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+b(x-2)}{(x-2)(x+1)^2}.$$

Đồng nhất với phân thức $\frac{x^2+5}{x^3-3\text{x}-2}$ ta có:

$a(x+1)^2+b(x-2)=x^2+5$ với mọi x (1)

Với $x=-1$ thì $-3b=6$ suy ra $b=-2$

Với $x=2$ thì $9\text{a}=9$ suy ra $a=1$

Chú ý: Trong cách giải này, với $x=-1; x=2$, phân thưc không có nghĩa nhưng do (1) đúng với mọi x nên để xá định $a;b$ ở (1) ta vẫn có thể cho $x=-1; x=2$

Ví dụ 27: Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Tính giá trị của biểu thức $N=\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$.

Giải:

Chú ý rằng nếu $x+y+z=0$ thì $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

Thật vậy $x+y+z=0$ nên $z=-(x+y)$.

Do đó $x^3+y^3+z^3=x^3+y^3-(x+y)^3=-3x^2y-3xy^2=-3xy(x+y)=3xyz$.

Áp dụng nhận xét trên, nếu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ thì $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}=\frac{3}{abc}$. Do đó:

$$N=\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=\frac{abc}{a^3}+\frac{abc}{b^3}+\frac{abc}{c^3}$$
$$=abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=abc.\frac{3}{abc}=3$$

với $a,b,c\neq 0$

BÀI TẬP

102. Rút gọn các biểu thức:

a) $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}+\frac{8a^7}{a^8+b^8}$

b) $\frac{1}{a^2+a}+\frac{1}{a^2+3a+2}+\frac{1}{a^2+5a+6}+\frac{1}{a^2+7a+12}+\frac{1}{a^2+9a+20}$.

103. Rút gọn các biểu thức:

a) $M=a+\frac{2a+b}{2-b}-\frac{2a-b}{2+b}+\frac{4a}{b^2-4}$ với $b=\frac{a}{a+1}$

b) $N=\left(1+\frac{1}{a+x}\right):\left(1-\frac{1}{a+x}\right).\left[1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right]$ với $x=\frac{1}{a-1}$

104. Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$ với $a,b,c\neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

105. Viết phân thức $\frac{10x-4}{x^3-4x}$ dưới dạng tổng của ba phân thức mà mẫu theo thứ tự bằng $x, x+2, x-2$, tử là các hằng số.

106. Xác định các số a,b,c sao cho $\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)}$ viết được thành $\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$.

107. Cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$

Chứng minh rằng trong ba số a,b,c có hai số đối nhau.

108. Cho $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=1$.

Chứng minh rằng:

a) Trong ba số a,b,c có một số bằng tổng hai số kia.

b) Trong ba phân thức đã cho có một phân thức bằng -1, hai phân thức còn lại bằng 1.

109. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)=\frac{x^{32}+x^{16}+1}{x^2+x+1}$$

110. Cho $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\neq 0$. Rút gọn biểu thức: $\frac{(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)}{(ax+by+cz)^2}$

111. Cho $a+b+c=1$ (1)

$a^2+b^2+c^2=1$ (2)

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ (3)

Chứng minh rằng $ax+by+cz=0$

112. Cho $abc=1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1$

113. Cho $\frac{2y+2z-x}{a}=\frac{2z+2x-y}{b}=\frac{2x+2y-z}{c}$

trong đó $a,b,c,2b+2c-a,2c+2a-b,2a+2b-c$ khác 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{2b+2c-a}=\frac{y}{2c+2a-b}=\frac{z}{2a+2b-c}$$

114. Chứng minh rằng nếu có các đẳng thức

$$a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2=d(x-y)^2$$

trong đó $a,b,c\neq 0$ đúng với moi x, y thì $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$

115. Cho $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$. Chúng minh rằng $x=y=z=0$.

116. Gọi a,b,c là ba cạnh của một tam giác và h_a,h_b,h_c là các đường cao tương ứng. Chứng minh hệ thức:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right).$$

117. Tìm số tự nhiên n để phân thức $\frac{n^4-2n^3+5}{n-2}$ có giá trị là số nguyên.

§3. DÃY CÁC PHÂN THỨC VIẾT THEO QUY LUẬT

Ví dụ 28: Rút gọn biểu thức sau với n là số tự nhiên $(n\geq 2)$:

$$A=\frac{2^2-1}{2^2}.\frac{3^2-1}{3^2}.\frac{4^2-1}{4^2}....\frac{n^2-1}{n^2}.$$

Giải:

$$A=\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}.\frac{3.5}{4^2}...\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{1.2.3...(n-1)}{2.3.4...(n-1)n}.\frac{3.4.5...n(n+1)}{2.3.4....n}$$

$$=\frac{1}{n}.\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$$

Ví dụ 29: Chứng minh hằng đẳng thức sau với n là số tự nhiên $(n\geq 1)$:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Giải:

Không thể quy đồng mẫu các phân thức ở vế trái, chú ý rằng vì $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ nên mỗi phân thức đều tách được thành hiệu của hai phân thức, làm cho biểu thức xuất hiện nhiều cặp số đối nhau. Ta có:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

BÀI TẬP

Rút gọn với n là số nguyên dương:

118. $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)...\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)$

119. $\left(1+\frac{2}{4}\right)\left(1+\frac{2}{10}\right)\left(1+\frac{2}{18}\right)...\left(1+\frac{8}{n^2+3n}\right)$

Chứng minh các đẳng thức sau với n là số tự nhiên:

120. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}\ (n\geq 1)$

121. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{(n-1)n(n+1)}{4n(n+1)}\ (n\geq 2)$

§4. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Để chứng minh $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, ngoàicách giải như ở ví dụ 29, còn có thể giải bằng phương pháp quy nạp toán học.

Người ta goi phép quy nạp là phép lập luận suy ra từ các trường hợp riêng tới kết luận tổng quát. Phép quy nạp gọi là *hoàn toàn* nếu xét tất cả các trường hợp riêng để đi tới kết luận tổng quát, chẳng hạn trong bài 97, ta xét các trường hợp $n=3k, n=3k+1, n=3k+2$ để kết luận cho mọi số tự nhiên n. Phép quy nạp gọi là không *hoàn toàn* nếu ta mới xét một số trường hợp đã đi đến kết luận tổng quát. Chẳng hạn: Từ các nhận xét:

$1=1^2$

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

ta đã kết luận $1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$ (1)

Từ nhận xét các số $2^2+1=5, 2^4+1=17, 2^8+1=257, 2^{16}+1=65537$ là các số nguyên tố, ta đã kết luận 2^n+1 (trong đó n là lũy thừa của 2) là số nghuyên tố. (2)

Phép quy nạp không hoàn toàn cho ta những dự đoán, nhưng để khẳng định hay bác bỏ chúng thì phải chứng minh. Trong hai kết luận trên, kết luận (1) đúng, còn kết luận (2) là sai. Chính nhà toán học Pháp Phéc-ma thế kỉ XVII đã đưa ra giả thuyết (2) và ông tin ràng giả thuyết đó là đúng. Đến thế kỉ XVIII, Ơ-le mới bác bỏ giả thuyết trên bằng cách chỉ ra rằng $2^{32}+1$ là hợp số vì nó chia hết cho 641(một cách chứngminh điều này, xem bài 86)

Ta sẽ chứng minh kết luận (1) đúng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ bằng phương pháp quy nạp toán học.

Nội dung của phương pháp này là: Nếu một khẳng định nào đó về số tự nhiên n đúng với $n=1$, và khi giả thiết nó đúng với $n=k$ và cũng chứng minh được nó đúng với $n=k+1$ thì khẳng định ấy đúng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$.

Ta chứng minh kết luận (1) nói trên như sau:

1) Khẳng định (1) đúng với $n=1$ vì $S_1 = 1 = 1^2$

2) Giả sử (1) đúng với $n=k$ tức là $S_k = 1+3+...+(2k-1) = k^2$

Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n=k+1$, tức là:

$S_{k+1} = 1+3+...+(2k+1)-1+[2(k+1)-1] = (k+1)^2$

Thật vậy $S_{k+1} = S_k + 2(k+1)-1 = k^2+2(k+1)-1 = (k+1)^2$

Vậy (1) đúng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$.

Ví dụ 30: Giải ví dụ 29 bằng phương pháp quy nạp toán học.

Giải:

1) Đẳng thức $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (1)

Đúng với $n=1$ vì $S_1 = \frac{1}{2}$

2)Giả sử (1) đúng với $n=k$, tức là $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{k+1}$ với k là số tự nhiên bất kì.

Ta sẽ chứng minh rằng khi đó đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$, tức là $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$

Thật vậy, $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

Vậy (1) đúng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$.

Ví dụ 31. Chứng minh rằng $4^n + 6n - 1$ chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên $n \ge 1$.

Giải:

1) Mệnh đề đúng vớin = 1 vì4+6-1 = 9 chia hết cho 9.

2) Giả sử mệnh đề đúng với n = k, tức là $4^k + 6k - 1$ chia hết cho 9. Ta sẽ chứng minh rằng $4^{k+1} + 6(k+1) - 1$ chia hết cho 9.

Thật vậy $4^{k+1} + 6(k+1) - 1 = 4.4^k + 6k + 5 = 4(4^k + 6k - 1) - 18k + 9$ chia hết cho 9 vì $4^k + 6k - 1$ chia hết cho 9 do giả thiết quy nạp, còn 18k và 9 hiển nhiên chia hết cho 9.

Vậy mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$.

BÀI TẬP

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học với số tự nhiên $n \ge 1$:

122*. $10^n - 9n - 1$ chia hết cho 27.

123*. 1.2 + 2.3 + 3.4 +... + n(n + 1) = $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

124*. 1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + n(3n - 1) = $n^2(n+1)$.

125*. 1.4 + 2.7 +3.10 + ... + n(3n + 1) = $n(n+1)^2$.

126*. Giải bằng phương pháp quy nạp toán học các bài 54, 55, 91, 120, 121.

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§1. KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG TRÌNH, PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Ví dụ 32. Giải phương trình $a^2x+b=a(x+b)$.

Giải: $a^2x+b=ax+ab \Leftrightarrow a^2x-ax=ab-b \Leftrightarrow ax(a-1)=b(a-1).(1)$

Nếu $a\neq 0,\ \text{a}\neq 1$ thì phương trình có một nghiệm duy nhất $x=\dfrac{b}{a}$.

Nếu a = 1 thì (1) có dạng 0x = 0, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Nếu a = 0 thì (1) có dạng 0x = -b, phương trình nghiệm đúng với mọi x nếu b =0,

vô nghiệm nếu $b\neq 0$.

Kết luận: Nếu $a\neq 0,\ \text{a}\neq 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{b}{a}$.

Nếu a = 1 hoặc a = 0 và b = 0, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Nếu a = 0, $b\neq 0$ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 33. Giải phương trình: $\dfrac{a+x}{a-1}-\dfrac{a-x}{a+1}=\dfrac{3a}{a^2-1}$.

Giải: Phương trình trên có hệ số bằng chữ ở mẫu. ta phải có $a\neq \pm 1$. Với điều kiện ấy, phương trình đã cho tương đương với $(a+x)(a+1)-(a-x)(a-1)=3a$.

Sau khi biến đổi ta được 2ax = a. (2)

Nếu $a\neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$.

Nếu a = 0, phương trình (2) trở thành 0x = 0, nghiệm đúng với mọi x.

Kết luận: Nếu $a\neq 0,\ \text{a}\neq \pm 1$, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$.

Nếu a = 0 phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Nếu $a=\pm 1$ phương trìnhvô nghiệm.

BÀI TẬP

127. Tìm giá trị của m sao cho phương trình:

a) $5(m+3x)(x+1)-4(1+2x)=80$ có nghiệm x = 2.

b) $3(2x+m)(3x+2)-2(3x+1)^2=43$ có nghiệm x = 1.

Giải các phương trình:

128. $\frac{x+1}{65}+\frac{x+3}{63}=\frac{x+5}{61}+\frac{x+7}{59}.$

129. $\frac{315-x}{101}+\frac{313-x}{103}+\frac{311-x}{105}+\frac{309-x}{107}+4=0.$

130. $4x-2=a(\text{ax -1})$

131. $\frac{x-a}{a-4}+\frac{x+a-1}{a+4}+\frac{x-a}{16-a^2}=0.$

132. $\frac{x-1}{a-1}+\frac{1-x}{1+a}-\frac{2x-1}{1-a^4}=\frac{2a^2(x-1)}{a^4-1}.$

133. $\frac{ax-b}{a+b}+\frac{bx+a}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$

134. $\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}+\frac{x-a-b}{c}=3.$

§2. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Nhờ phương trình tích, ta có thể giải nhiều phương trình bậc cao dạng f(x) = 0 bằng cách phân tích đa thức f(x) thành nhân tử. Trong bài này ta chỉ xét các đa thức f(x) có thể phân tích thành tích những đơn thức bậc nhất.

Ví dụ 34. Giải phương trình:

$$(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=(x+2)^3.$$

Giải: Sau khi biến đổi phương trình ta được:

$$x^3-3x^2-3x-4=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-1-3x^2-3x-3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)-3(x^2+x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x+1)(x-4)=0$$

Do $x^2+x+1\neq 0$ nên phương trình có một nghiệm x = 4.

Ví dụ 35. Giải phương trình:

$$(x+2)(x-2)(x^2-10)=72.$$

Giải: $(x^2-4)(x^2-10)=72.$

Đặt $x^2-7=y$, phương trình trở thành:

$$(y+3)(y-3)=72$$
$$\Leftrightarrow y^2=81 \Leftrightarrow y=\pm 9.$$

Xét $x^2-7=9$, được $x=\pm 4$.

Xét $x^2-7=-9$, được $x^2=-2$, vô nghiệm.

Vậy $x=\pm 4$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Chú ý: Trong cách giải trên ta đã đặt ẩn phụ

Khi giải phương trình bậc bốn $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ ta thường đặt ẩn phụ

$$y=x+\frac{a+b}{2}.$$

Khi giải phương trình đối xứng bậc chẵn, chẳng hạn

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ ta thường đặt ẩn phụ $y=x+\frac{1}{x}.$

Ví dụ 36*. Giải phương trình: $(x+3)^4+(x+5)^4=2.$

Giải:

Đặt $x+4=y$, phương trình trở thành:

$$(\mathrm{y}-1)^4+(\mathrm{y}+1)^4=2.$$

Sau khi biến đổi ta được $y^2(y^2+6)=0$, do đó y = 0.

Vậy $x=-4$ là nghiệm của phương trình

Ví dụ 37. Giải cácphương trình:

$a)$ $2x^3+7x^2+7x+2=0;$

$b)$ $\mathrm{x}^4-3x^3+4x^2-3x+1=0.$

Giải:

Hai phương trình trên là hai phương trình đối xứng (chú ý các hệ sốcó tính đối xứng). Trong phương trình đối xứng, nếu a là nghiệm thì $\frac{1}{a}$ cũng là nghiệm.

Phương trình đối xứng bậc lẻ bao giờ cũng có một trong các nghiệm là x = -1.

Phương trình đối xứng bậc chẵn 2n đưa được về phương trình bậc n bằng cách đặt ẩn phụ $y = x + \frac{1}{x}$.

a) Biến đổi phương trình thành $(x+1)(x+2)(2x+1) = 0.$

Phương trình có ba nghiệm: $x_1 = -1;\ x_2 = -2;\ x_3 = -\frac{1}{2}.$

b) ***Cách 1.*** Đưa phương trình về dạng $(x-1)^2(x^2 - x + 1) = 0.$

Phương trình có một nghiệm x = 1.

Cách 2. Chia hai vế của phương trình cho x^2(vì $x \neq 0$) ta được:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0.$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, ta được:

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \text{ nên } y_1 = 1;\ y_2 = 2.$$

Với y = 1, ta có $x^2 - x + 1 = 0$, vô nghiệm

Với y = 2, ta có $x^2 - 2x + 1 = 0$, nên x = 1.

Ví dụ 38. Giải phương trình:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Giải: Ta thấy $x - 1 \neq 0$ vì $x = 1$ không nghiệm đúng phương trình.

Nhân hai vế của phương trình với $x - 1 \neq 0$ ta được $x^5 - 1 = 0$ hay $x = 1$, không thoả mãn điều kiện trên.

Vậy phương trình vô nghiệm.

BÀI TẬP

135. Giải các phương trình bậc hai:

a) $3x^2+7x-20=0;$

b) $6ax^2+4ax-9x-6=0$ (a là tham số).

136. Giải các phương trình bậc ba:

a) $x^3-5x^2+8x-4=0$;

b) $9ax^3-18x^2-4ax+8=0$ (a là tham số).

c) $x^3+x^2+4=0;$

d) $\left(x-1\right)^3+\left(x+2\right)^3=\left(2x+1\right)^3.$

137. Giải các phương trình bậc bốn:

a) $\left(x^2+x\right)^2+4\left(x^2+x\right)=12;$

b) $x(x-1)(x+1)((x+2)=24;$

c) $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2)=72;$

d) $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=297;$

e) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6.$

138*. Giải các phương trình:

a) $(x^2-4)^2=8x+1;$

b) $(x^2-4x)^2+2(x-2)^2=43;$

c) $(x-2)^4+(x-6)^4=82;$

d) $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0;$

e) $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0.$

139. Cho phương trình $x^3-(m^2-m+7)x-3(m^2-m-2)=0.$

a) Tìm các giá trị của m để một trong các nghiệm của phương trình bằng 1.

b) Giải phương trình ứng với các giá trị đó của m.

§3. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Ví dụ 39. Giảiphương trình:

$$\frac{3}{1-4x}=\frac{2}{4x+1}-\frac{8+6x}{16x^2-1}.$$

Giải: Điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình là $x\neq\pm\frac{1}{4}.$

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với:

$$3(4x+1)=2(1-4x)+(8+6x)$$

$$\Leftrightarrow 14x=7$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Giá trị này thỏa mãn điều kiện trên. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}.$

Ví dụ 40. Giải phương trình:

$$\frac{3}{5x-1}+\frac{2}{3-5x}=\frac{4}{(1-5x)(5x-3)}.$$

Giải: ĐKXĐ là $x\neq\frac{1}{5};\ \text{x}\neq\frac{3}{5}.$

Với điều kiện đó, phương trình tương đương với

$$3(3-5x)+2(5x-1)=4.$$

Giải phương trình này, ta được $x=\frac{3}{5}$, giá trị này không thỏa mãn ĐKXĐ của phương trình.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

BÀI TẬP

Giải các phương trình:

140. $\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}=\frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$

141. $\frac{5-x}{4x^2-8x}+\frac{7}{8}=\frac{x-1}{2x(x-2)}+\frac{1}{8x-16}$

142. $\dfrac{a}{2a+2b}+\dfrac{a-b}{2bx}=\dfrac{a+b}{4b}-\dfrac{b}{ax+bx}$

143. $\dfrac{x+a+1}{x+a}-\dfrac{x+11}{x+10}=\dfrac{10}{(x+a)(x+10)}$

144. $\dfrac{x+a}{x-3}+\dfrac{x+3}{x-a}=2$

145. Với giá trị nào của a thì phương trình sau có một nghiệm duy nhất?

$$x-a^2x-\frac{1}{1-x^2}+a=\frac{x^2}{x^2-1}$$

§4. TOÁN BẬC NHẤT MỘT ẨN

Ví dụ 41: Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc $40km/h$. Đi được 15 phút, người đó gặp một ô tô từ B đến, vận tốc $50km/h$. Ô tô đến A nghỉ 15 phút rồi trở về B và gặp người đi xe máy cách B là $20km$. Tính quãng đường AB.

Giải:

Gọi C và D là nơi ô tô gặp người đi xe máy lần thứ nhất và lần thứ hai. Gọi quãng đường CD là x (km). Quãng đường AC dài $40.\dfrac{1}{4}=10(km)$. Thời gian người đi xe máy từ C đến D là $\dfrac{x}{40}$ giờ. Thời gian đó, ô tô đi đoạn CA, AD và nghỉ 15 phút. Ta có phương trình:

$$\frac{x}{40}=\frac{10+10+x}{50}+\frac{1}{4}$$

Do đó $x=130$. Quãng đường AB dài: $10+130+20=60$ (km)

Ví dụ 42: Một công trường giao cho các đội công nhân sửa một đoạn đường như sau:

Đội 1 nhận $10m$ và $\dfrac{1}{10}$ phần còn lại.

Đội 2 nhận $20m$ và $\dfrac{1}{10}$ phần còn lại.

Đội 3 nhận $30m$ và $\dfrac{1}{10}$ phần còn lại.

Cứ chia như vậy cho đến đội cuối cùng thì hết và phần đất của mỗi đội đều bằng nhau. Tính số đội tham gia sửa đường và chiều dài toàn bộ đoạn đường phải sửa.

Giải:

Cách 1: Gọi chiều dài đoạn đường phải sửa là $x(m)$

Đoạn đường đội 1 nhận dài: $10+0,1(x-10)$ mét tức là $0,1x+9$ mét.

Phần còn lại sau khi đội 1 nhận là: $x-(0,1x+9)$, tức là $0,9x-9$ mét.

Đoạn đường đội 2 nhận dài $20+0,1(0,9x-9-20)$ mét, tức là $0,09x+17,1$ mét.

Vì chiều dài của đoạn đường hai đội làm bằng nhau nên:

$0,1x+9=0,09x+17,1$

Do đó $x=810$. Đoạn đường dài 810 mét. Mỗi đội phải làm $0,1.810+9=90m$. Số đội tham gia sửa đường là: $810:90=9$ (đội).

Cách 2: Gọi số đội tham gia sửa đường là x. Do đoạn đường được chia hết nên đội cuối cùng nhận $10x$ (mét), chiều dài toàn bộ quãng đường là: $10x^2$ (mét).

Chiều dài đoạn đường đội 1 nhận là: $10+\dfrac{10x^2-10}{10}$ hay $10+x^2-1$

Vì chiều dài đoạn đường mỗi đội bằng nhau nên $10+x^2-1=10x \Leftrightarrow x^2-1=10(x-1)$

Do $x\neq 1$ nên $x+1=10$, hay $x=9$.

Vậy có 9 đội tham gia sửa đường. Cả quãng đường dài $10.9^2=810$ (mét).

BÀI TẬP

146. Tổng của bốn số bằng 45. Nếu lấy số thứ nhất cộng thêm 2, số thứ hai trừ đi 2, số thứ 3 nhân với hai, số thứ tư chia cho hai thì bốn kết quả đó bằng nhau. Tìm bốn số ban đầu.

147. Cho một số tự nhiên có năm chữ số. BNếu viết thêm chữ số 1 vào sau số đó ta được số A có sáu chữ số. Nếu viết thêm chữ số 1 vào trước số đó ta được số B có 6 chữ số. Biết $A=3B$. Tìm số có năm chữ số ban đầu.

148. Một ô tô phải đi quãng đường AB dài $60km$ trong thời gian nhất định. Ô tô đi nửa đầu quãng đường với vận tốc lớn hơn dự định $10km/h$ và đi nửa sau quãng đường với vận tốc kém hơn dự định $6km/h$. Biết ô tô đến B đúng thời gian đã định. Tính thời gian ô tô dự định đi trên quãng đường AB.

149. Hai vòi nước chảy vào bể thì bể sẽ đầy trong 3 giờ 20 phút. Người ta cho vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ, vòi thứ hai chảy trong 2 giờ thì cả hai vòi chảy được $\frac{4}{5}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể?

150. Người ta đặt một vòi nước chảy vào một bể nước và một vòi chảy ra ở lưng chừng bể. Khi bể cạn, nếu mở cả hai vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước. Còn nếu đóng vòi chảy ra, mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ rưỡi đầy bể. Biết vòi chảy vao mạnh gấp 2 lần vòi chảy ra.

a) Tính thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra.

b) Nếu chiều cao của bể là $2m$ thì khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là bao nhiêu?

151. Một của hàng bán trứng trong một số ngày. Ngày thứ nhất cửa hàng bán 150 quả và $\frac{1}{9}$ số còn lại. Ngày thứ hai bán 200 quả và $\frac{1}{9}$ số còn lại, ngày thứ ba bán 250 quả và $\frac{1}{9}$ số còn lại…

Cứ bán như vậy cho đến hết thì số trứng mỗi ngày bán bằng nhau. Hỏi số trứng có tất cả bao nhiêu?

Chương IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§1. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG, PHÉP NHÂN.

Định nghĩa bất đẳng thức: Cho hai số a và b. Ta nói:
$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$, $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

Ta thường gặp không chỉ các *bất đẳng thức chặt*, chẳng hạn $a > b$, mà còn gặp các *bất đẳng thức không chặt*, chẳng hạn $a \geq b$.
Khi chứng minh bất đẳng thức, cần nhớ ***các tính chất của bất đẳng thức:***

1. $a > b \Leftrightarrow b < a$.
2. *Tính chất bắc cầu:* $a > b, b > c \Rightarrow a > c$.
3. *Tính chất đơn điệu của phép cộng:* Cộng cùng một số vào hai vế của bất đẳng thức $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.
4. *Cộng từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều, được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.*
   $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$
   Chú ý: Không được trừ từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều.
5. *Trừ từng vế hai bất đẳng thức ngược chiều, được bất đẳng thức cùng chiều với bất đẳng thức bị trừ.*
   $a > b$, $c < d \Rightarrow a - c > b - d$
6. *Tính chất đơn điệu của phép nhân.*
   a) *Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương:* $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$.
   b) *Nhan hai vế của bất đẳng thức với cùng một số âm và đổi chiều bất đẳng thức:* $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$.
7. *Nhân từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm:*
   $a \geq b \geq 0,\ c \geq d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd$.
8. *Nâng lên lũy thừa hai vế của bất đẳng thức:*
   $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$.
   $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ với n lẻ.
   $|a| > |b| \Rightarrow a^n > b^n$ với n chẵn.
9. *So sánh hai lũy thừa cùng cơ số:*
   Với $m > n > 0$ thì
   $a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$
   $a = 1 \Rightarrow a^m = a^n$
   $0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n$
10. *Lấy nghịch đảo và đổi chiều bất đẳng thức có hai vế cùng dấu.*
   $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (Xem bài 157)

Cần nhớ các bất đẳng thức:

$a^2 \geq 0$. Xảy ra đẳng thức: $a = 0$.
$|a| \geq a$. Xảy ra đẳng thức: $a \geq 0$.
$|a+b| \leq |a| + |b|$. Xảy ra đẳng thức: $ab \geq 0$.
Để **chứng minh bất đẳng thức**, người ta thường dùng các cách sau:
Cách 1: Dùng định nghĩa: Để chứng minh $A > B$, ta xét hiệu $A - B$ và chứng minh $A - B > 0$.
Cách 2: Dùng phép biến đổi tương đương để đưa bất đẳng thức phải chứng minh về một bất đẳng thức đúng đã biết.
Cách 3: Từ các bất đẳng thức đã biết, dùng các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.
Cách 4: Chứng minh bằng phản chứng.
Cách 5: Chứng minh bằng quy nạp toán học

Ví dụ 43: Chứng minh bất đẳng thức: $(a+b)^2 \geq 4ab$

Giải: *Cách 1*: Xét hiệu $(a+b)^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$

Vậy $(a+b)^2 \geq 4ab$. Xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $a = b$.

Cách 2: Biến đổi tương đương:

$(a+b)^2 \geq 4ab$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 - 4ab \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng là đúng, mà các phép biến đổi trên đều tương đương. Vậy $(a+b)^2 \geq 4ab$ là đúng.

Cách 3: Ta có: $(a-b)^2 \geq 0$

$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$\Rightarrow (a+b)^2 - 4ab \geq 0$

$(a+b)^2 \geq 4ab$

Cách 4: (Phản chứng)

Giả sử: $(a+b)^2 < 4ab$ thì $a^2+2ab+b^2 < 4ab$

$\Rightarrow a^2-2ab+b^2<0$

$\Rightarrow (a-b)^2<0$

Bất đẳng thức cuối là sai, vậy phải có $(a+b)^2 \ge 4ab$

Ví dụ 44: Cho $a>2$, $b>2$. Chứng minh rằng: $ab>a+b$

Giải: *Cách 1*: Vì $a>2$, $b>2$ nên $a>0$, $b>0$.

Vì $a>2$, $b>2$ nên $ab>2b$ $\quad(1)$

Vì $a>2$, $b>2$ nên $ab>2a$ $\quad(2)$

Công các vế tương ứng của các bất đẳng thức (1) và (2), ta được: $2ab>2(a+b)$, do đó: $ab>a+b$

Cách 2: Do $a>2$ và hai vế cùng dấu nên $\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$ $\quad(1)$

Do $b>2$ và hai vế cùng dấu nên: $\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$ $\quad(2)$

Cộng (1) với (2) ta được $\frac{a+b}{ab}<1$

Nhân hai vế của bất đẳng thức với số dương ab, ta được $a+b<ab$

Cách 3: Vì $a>2$, $b>2$ nên $a>0$, $b>0$. Giả sử $a \ge b$ (do vai trò của a và b là như nhau), $b>2, a>0$ nên $ab>2a$. $\quad(1)$

Vì $a \ge b$ nên $a+a \ge a+b$ hay $2a \ge a+b$. $\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $ab>a+b$.

Cách 4: Ta có $a>2$, $b>2$ đặt $a=2+x$, $b=2+y$ thì $x, y>0$.

Xét hiệu $ab-(a+b)=(2+x)(2+y)-(4+x+y)=x+y+xy>0$

Vậy $ab>a+b$.

Ví dụ 45: Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab$;

b) $\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \ge abcd$ với $a,b,c,d \ge 0$;

c) $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right) \ge abc$ với $a,b,c \ge 0$.

Giải:

a) Xem ví dụ 43.

b) Đặt $a+b=m$, $c+d=n$. Theo câu a) ta có: $\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2 \ge mn$.

Do $m,n>0$ nên $\left(\dfrac{m-n}{2}\right)^4 \ge m^2n^2$ (1). Mặt khác, theo câu a) ta có $m^2=(a+b)^2 \ge 4ab$ (2), $n^2=(c+d)^2 \ge 4cd$ (3)

Do $a,b,c,d \ge 0$ nên nhân (2) với (3) được $m^2n^2 \ge 16abcd$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra: $\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^4 \ge 16abcd$

Vậy $\left(\dfrac{m+n}{4}\right)^4 \ge abcd$, tức là $\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \ge abcd$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $m=n$, $a=b$, $c=d$ tức là $a=b=c=d$.

c) *Cách 1:*

Theo câu b) ta có: $\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \ge abcd$. Đặt $d=\dfrac{a+b+c}{3}$

Ta có: $\left(\dfrac{a+b+c+\dfrac{a+b+c}{3}}{4}\right)^4 \ge abc\dfrac{a+b+c}{3}$

Hay $\left(\dfrac{4}{3}.\dfrac{a+b+c}{4}\right)^4 \ge abc\dfrac{a+b+c}{3}$ (5)

Chia hai vế của bất đẳng thức (5) cho $\dfrac{a+b+c}{3}>0$ (có thể giả thiết $a,b,c>0$) vì nếu một trong các số đó bằng 0 thì bất đẳng thức phải chứng minh hiển nhiên đúng, ta được:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{a+b+c}{3}$ tức là: $a=b=c$

Cách 2: Giả sử $a \leq b \leq c$ thì $c \geq \frac{a+b}{2}$

Đặt $\frac{a+b}{2}=x$ thì $x \geq 0$ và $c=x+y$ với $y \geq 0$

Ta có $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{2x+c}{3}\right)^3=\left(\frac{2x+x+y}{3}\right)^3=\left(x+\frac{y}{3}\right)^3$

$$\geq x^3+3x^2\frac{y}{3}=x^2\left(x+y\right)=x^2c$$

Nhưng $x^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ (câu a), do đó $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a=b$, $y=0$ tức là $a=b=c$.

Chú ý: Các bất đẳng thức trên là trường hợp riêng của bất đẳng thức Cô-si (Cauchy, nhà toán học Pháp, 1789 – 1857). Cách giải 2 gợi ý cho ta cách chứng minh bất dẳng thức Cô – si tổng quát với n số không âm bằng phương pháp quy nạp toán học.

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}\right)^n \geq a_1a_2a_3...a_n \qquad (1)$$

Thật vậy, bất đẳng thức (1) đúng với $n=2$.

Giả sử bất đẳng thức đó đúng với $n=k$ tức là: $\left(\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}\right)^k \geq a_1a_2...a_k$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$

Giả sử: $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k \leq a_{k+1}$ thì $a_{k+1} \geq \frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}$

Đặt $\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}=x$ thì $x \geq 0$ và $a_{k+1}=x+y$ với $y \geq 0$ và $x^k=a_1a_2...a_k$ do giả thiết quy nạp.

Ta có $\left(\frac{a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}=\left(\frac{kx+x+y}{k+1}\right)^{k+1}=\left(x+\frac{y}{k+1}\right)^{k+1}\ge$

$\ge x^{k+1}+\left(k+1\right)\frac{y}{k+1}.x^k=x^k\left(x+y\right)\ge a_1a_2...a_ka_{k+1}$

Vậy bất đẳng thức (1) đúng với mọi số tự nhiên $n\ge 2$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a_1=a_2=...=a_n$ (đpcm)

Trong một số trường hợp, khi chứng minh bất đẳng thức, ta cần xét các khoảng giá trị của biến.

Ví dụ 46: Chứng minh bất đẳng thức:

$x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$

Giải: Gọi vế trái của bất đẳng thức là $f\left(x\right)$

Xét các trường hợp:

a) $x\ge 1$. Viết $f\left(x\right)$ dưới dạng $x^9\left(x^3-1\right)+x\left(x^3-1\right)+1$

Do $x\ge 1$ nên $x^3-1\ge 0$ (tính chất 8), còn $x^9\ge 1$, $x\ge 1$ do đó $f\left(x\right)>0$

b) $x<1$. Viết $f\left(x\right)$ dưới dạng $x^{12}+x^4\left(1-x^5\right)+\left(1-x\right)$

Do $1>x$ nên $1-x^5>0$ (tính chất 8), $1-x>0$ còn $x^{12}\ge 0, x^4\ge 0$ do đó $f\left(x\right)>0$

BÀI TẬP

Chứng minh các bất đẳng thức:

152. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$.

153. $\left(a^{10}+b^{10}\right)\left(a^2+b^2\right)\ge\left(a^8+b^8\right)\left(a^4+b^4\right)$.

154. $\frac{a^2+a+1}{a^2-a+1}>0$.

155. $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$.

156. $a^2+b^2+c^2+3\ge 2\left(a+b+c\right)$.

157. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ với $a<b$, a và b cùng dấu.

158. a) $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$ với $a+b=1$;

b) $a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}$ với $a+b+c=1$.

c) $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 \ge \frac{1}{n}$ với $a_1+a_2+a_3+...+a_n=1$.

d) $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 \ge \frac{k^2}{n}$ với $a_1+a_2+a_3+...+a_n=k$.

159. $a^2+b^2>2$ với $a+b>2$.

160. $\frac{x-y}{x+y}<\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ với $x>y>0$.

161. $|a+b|<|1+ab|$ với $|a|<1$, $|b|<1$.

162. $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+9 \ge 0.$

163. $4a(a+b)(a+1)(a+b+1)+b^2 \ge 0.$

164. $x^8-x^5+x^2-x+1>0$

165. $4a^2b^2>\left(a^2+b^2-c^2\right)^2$ với a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

166. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2>a^3+b^3+c^3$ với a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

167. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$ với $ab>0$;

b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$ với $a,b,c>0$

c) $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2}$ với $x,y,z>0$

168. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+....+\frac{1}{n^2}<1$ với mọi số tự nhiên $n \ge 2$.

169. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+....+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{2}$ với mọi số tự nhiên $n \ge 2$.

170. Cho ba số dương a,b,c có tích bằng 1 và $a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng:

a) $(a-1)(b-1)(c-1)>0$.

b) Trong ba số dương a,b,c có một số lớn hơn 1, hai số nhỏ hơn 1.

171. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$;

b) $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$;

c) Áp dụng hai bất đẳng thức trên để chứng minh bất đẳng thức Cô – si với ba số không âm.

172. Cho $A=a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2$

$B=b_1^2+b_2^2+b_3^2+...+b_n^2$

$C = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n$

a) Chứng minh rằng với mọi x ta có:
$Ax^2 - 2Cx + B \geq 0$

b) Bằng cách thay $x = \dfrac{C}{A}$ vào bất đẳng thức trên, chứng minh rằng $AB \geq C^2$
(Giả thiết rằng $A \neq 0$. Trường hợp $A = 0$ thì $a_1 = a_2 = a_3 = ...a_n = 0$, bất đẳng thức $AB \geq C^2$ hiển nhiên đúng)

173. Viết kết quả các số 2^{1982} và 5^{1982} liên tiếp nhau. Hỏi số tạo thành có bao nhiêu chữ số?

174. Chứng minh các bất đẳng thức sau bằng phương pháp quy nạp toán học:

a) $2^n > n^2$ với mọi số tự nhiên $n \geq 5$

b) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 2$

§2. TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC.

Để tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của biểu thức A, ta cần chứng minh rằng $A \geq k$ hoặc $A \leq k$ (k là hằng số) với mọi giá trị của biến và chỉ ra trường hợp xảy ra đẳng thức.
Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của một biểu thức là vấn đề không đơn giản. Chúng ta chỉ đề cập tới một số dạng đặc biệt.

Dạng 1: **Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của tam thức bậc hai.**

Ví dụ 47.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 - 4x + 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = 2x^2 - 8x + 1$

c) Tìm giá trị lớn nhất của $C = 1 + 6x - x^2$

d) Cho tam thức bậc hai $P = ax^2 + bx + c$
Tìm giá trị nhỏ nhất của P nếu $a > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của P nếu $a < 0$.

Giải:

a) $A = x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 4 - 3 = (x-2)^2 - 3 \geq -3$

Giá trị nhỏ nhất của A bằng -3 khi và chỉ khi $x = 2$.

b) $B = 2x^2 - 8x + 1 = 2(x^2 - 4x + 4) - 7 = 2(x-2)^2 - 7 \geq -7$

Giá trị nhỏ nhất của B bằng -7 khi và chỉ khi $x = 2$.

c) $C=1+6x-x^2=-\left(x^2-6x+9\right)+10=-\left(x-3\right)^2+10\le 10$

Giá trị lớn nhất của C bằng 10 khi và chỉ khi $x=3$.

d) $P=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(a^2+2x.\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k$ với $k=c-\frac{b^2}{4a}$

Do $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\ge 0$ nên:

Nếu $a>0$ thì $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\ge 0$, do đó $P\ge k$.

Nếu $a<0$ thì $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\le 0$, do đó $P\le k$.

Vậy khi $x=-\frac{b}{2a}$ thì P có giá trị nhỏ nhất bằng k (nếu $a>0$) hoặc có giá trị lớn nhất bằng k nếu ($a>0$).

Dạng 2: **Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của đa thức bậc cao.**

Ví dụ 48: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\left(x^2+x+1\right)^2$.

Giải: Mặc dù $A\ge 0$ nhưng giá trị nhỏ nhất của A không phải bằng 0 vì

$x^2+x+1\ne 0$

Ta có: $x^2+x+1=x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$

Do đó A nhỏ nhất $\Leftrightarrow\left(x^2+x+1\right)$ nhỏ nhất.

Giá trị nhỏ nhất của A bằng $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ khi và chỉ khi $x=-\frac{1}{2}$.

Ví dụ 49: Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4-6x^3+10x^2-6x+9$.

Giải: Viết biểu thức dưới dạng $\left(x^2-3x\right)^2+\left(x-3\right)^2\ge 0$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow x=3.\\ x=3\end{cases}$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 0 với $x=3$.

Dạng 3: **Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của đa thức có dấu giá trị tuyệt đối.**

Ví dụ 50: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=|x-1|+|x-3|$.

Giải:

Cách 1. a) Trong khoảng $x<1$ thì $A=1-x+3-x=4-2x$.

Do $x<1$ nên $-2x>-2$, do đó $4-2x>2$.

b) Trong khoảng $1\le x\le 3$ thì $A=x-1+3-x=2$.

c) Trong khoảng $x>3$ thì $A=x-1+x-3=2x-4$.

Do $x>3$ nên $2x-4>2$

So sánh các giá trị của A trong các khoảng trên, ta thấy giá trị nhỏ nhất của A bằng 2 khi và chỉ khi $1\le x\le 3$

Cách 2: Giá trị tuyệt đối của một số lớn hơn hoặc bằng số đó. Do đó:

$$A=|x-1|+|x-3|\ge x-1+3-x=2$$

$$A=2\Leftrightarrow \begin{cases}x-1\ge 0\\3-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le 3$$

Dạng 4: **Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai.**

Ví dụ 51. Tìm giá trị lớn nhất của $M=\dfrac{3}{4x^2-4x+5}$

Giải: $M=\dfrac{3}{4x^2-4x+5}=\dfrac{3}{(2x-1)^2+4}$

Ta thấy $(2x-1)^2\ge 0$ nên $(2x-1)^2+4\ge 4$.

Do đó $\dfrac{3}{(2x-1)^2+4}\le\dfrac{3}{4}$ (theo quy tắc so sánh hai phân thức cùng tử, tử và mẫu đều dương)

Vậy $\max M=\dfrac{3}{4}$ với $x=\dfrac{1}{2}$.

Chú ý: Sẽ không chính xác nếu lập luận rằng M có tử là hằng số nên M lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất.

Lập luận trên có thể dẫn đến sai lầm, chẳng hạn với phân thức $\dfrac{1}{x^2-3}$.

Mẫu x^2-3 có giá trị nhỏ nhất là -3 khi $x=0$. Nhưng với $x=0$ thì $\dfrac{1}{x^2-3}=-\dfrac{1}{3}$ không phải là giá trị lớn nhất của phân thức.

(chẳng hạn, với $x=2$ thì $\dfrac{1}{x^2-3}=1$, lớn hơn $-\dfrac{1}{3}$)

Như vậy $-3<1$ không thể suy ra $-\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{1}$. Từ $a<b$ chỉ suy được $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ khi a,b là hai số cùng dấu.

Dạng 5: **Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức.**

Ví dụ 52: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$.

Giải:

Cách 1: Viết tử dưới dạng lũy thừa của $x+1$ rồi đổi biến, đặt $y=\dfrac{1}{x+1}$.

$$A=\frac{(x^2+2x+1)-(x+1)+1}{(x+1)^2}=1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=1-y-y^2=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}.$$

$$\min A=\frac{3}{4}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=1.$$

Cách 2: Viết A dưới dạng tổng của $\dfrac{3}{4}$ với một biểu thức không âm.

$$A=\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}=\frac{4x^2+4x+4}{4(x+1)^2}=\frac{3(x+1)^2+(x-1)^2}{4(x+1)^2}$$

$$=\frac{3}{4}+\left[\frac{x-1}{2(x+1)}\right]^2\geq\frac{3}{4},\ \min A=\frac{3}{4} \text{ với } x=1$$

Dạng 6: **Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của các phân thức khác.**

Ví dụ 53*. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của

$$B=\frac{4x+3}{x^2+1}$$

Giải: Để tìm giá trị nhỏ nhất, ta viết $\frac{4x+3}{x^2+1}$ dưới dạng:

$$\frac{x^2+4\mathrm{x}+4-x^2-1}{x^2+1}=\frac{(x+2)^2}{x^2+1}-1\geq-1$$

$\min B=-1$ với $x=-2$

Để tìm giá trị lớn nhất, ta viết $\frac{4x+3}{x^2+1}$ dưới dạng:

$$\frac{4x^2+4-4x^2+4x-1}{x^2+1}=\frac{4\left(x^2+1\right)-\left(4x^2-4x+1\right)}{x^2+1}=4-\frac{(2\mathrm{x}-1)^2}{x^2+1}$$

$\max B=4$ với $x=\frac{1}{2}$.

BÀI TẬP

175. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=2\mathrm{x}^2-20\mathrm{x}+53$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B=2\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}+1$

c) Tìm giá trị lớn nhất của $C=-5\mathrm{x}^2-4x+1$

176. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{x^4+2\mathrm{x}^3+8\mathrm{x}+16}{x^4-2\mathrm{x}^3+8\mathrm{x}^2-8\mathrm{x}+16}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B=\frac{1}{2\mathrm{x}-\mathrm{x}^2-4}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của $C=\frac{3\mathrm{x}^2+6x+10}{\mathrm{x}^2+2x+3}$

177. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{4x^2-2\text{x}+1}{x^2}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B=\frac{2\text{x}+1}{\text{x}^2}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của $C=\frac{\text{x}^2-3x+3}{\text{x}^2-2x+1}$

d) Tìm giá trị lớn nhất của $D=\frac{x}{\left(x+1\right)^2}$

178. Tìm giá trị lớn nhất của:

a) $A=\frac{3\text{x}^2+14}{x^2+4}$ b) $B=\frac{2\text{x}+1}{x^2+2}$

179. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a) $A=\left|x-2\right|+\left|x-5\right|$

b) $B=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+6\right)$

c) $C=x^4-2\text{x}^3+3\text{x}^2-2\text{x}+1$

d) $D=x^2-2\text{x}+y^2+4y+5$

180*. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $x+y+z$ biết rằng $x+5y=21;\ 2\text{x}+3\text{z}=51;\ x,y,z\ge 0$
.

181. a) Chứng minh rằng nếu hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

b) Áp dụng tìm giá trị lớn nhất của $A=x^3\left(16-x^3\right)$.

182. a) Chứng minh rằng nếu hai số dươngcó tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

b) Áp dụng tìm giá trị nhỏ nhất của $B=\frac{4\text{x}^2+1}{x}$ với $x>0$.

c*) Áp dụng tìm giá trị nhỏ nhất của $B=\frac{\text{x}^2+15\text{x}+16}{3x}$ với $x>0$.

183. Chứng minh rằng:

a) Trong các hình chữ nhật cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất.

b) Trong các hình chữ nhật cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

184. Người ta dùng một đoạn dây dài *40m* căng ba phía thành một sân hình chữ nhật, còn một phía là tường. Xác định dạng hình chữ nhật để diện tích sân lớn nhất.

185. Người ta chia một đoạn thẳng dài *12cm* thành ba phần và dựng các hình vuông có cạnh là ba đoạn thẳng ấy. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng các diện tích ba hình vuông dựng được.

186. Tìm số tự nhiên có hai chữ số sao cho tỉ số giữa số đó với tổng các chữ số của nó có giá trị:

a) Lớn nhất;

b) Nhỏ nhất.

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Ví dụ 54. Giải bất phương trình $ax + 4 > 2\text{x} + a^2$ (*a* là số đã biết).

Giải: $(a-2)x > a^2 - 4$

$\Leftrightarrow (a-2)x > (a+2)(a-2)$ (1)

Nếu $a > 2$ thì $x > a+2$.

Nếu $a < 2$ thì $x < a+2$.

Nếu $a = 2$ thì (1) trở thành $0\text{x} > 0$, vô nghiệm.

Ví dụ 55. Giải bất phương trình

$x + \dfrac{x-1}{a} < \dfrac{x+1}{a} - (a-2)x$ với *a* là số đã biết.

Giải:

Không nên nhân hai vế của bất phương trình với *a*, vì như vậy phải xét hai trường hợp $a > 0$, và $a < 0$.

Chuyển vế ta được:

$$(a-2)x + x < \frac{x+1}{a} - \frac{x-1}{a}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)x < \frac{2}{a} \quad (1).$$

Nếu $a > 1$ thì $x < \dfrac{2}{a(a-1)}$ là nghiệm của bất phương trình.

Nếu $a < 1, a \neq 0$ thì $x > \dfrac{2}{a(a-1)}$ là nghiệm của bất phương trình.

Nếu $a = 1$ thì (1) có dạng $0x < 2$, gnhiệm đúng với mọi x.

BÀI TẬP

187. Rút gọn biểu thức rồi tìm giá trị của biến để biểu thức:

a) $A = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$ có giá trị dương;

b) $B = \left(\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{x^3 - 8}{x^3 + 8} . \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}\right) : \dfrac{4}{x+2}$ có giá trị âm.

Giải các bất phương trình:

188. $ax - b > bx + a$.

189. $\dfrac{x}{a} + a > x + 1$ với $a > 1$.

190. $\dfrac{ax+1}{a-1} > \dfrac{ax-1}{a+1}$ với $a > 1$.

191*. $(a+1)x + \dfrac{ax-1}{a} > \dfrac{1}{a}$.

192. Tìm các giá trị của *x* thoả mãn cả hai bất phương trình:

a) $2x + 1 > x + 4$ và $x + 3 > 3x - 5$;

b) $3x - 1 > x + 3$ và $4x + 1 > 6x - 9$.

193. Kí hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá *a* (như vậy $[a] = n$ thì *n* là số nguyên là $0 \leq a - n < 1$).

a) $\left[\dfrac{3x+7}{12}\right] = x$; b) $\left[\dfrac{4x-1}{9}\right] = x$; c) $\left[\dfrac{3x+1}{5}\right] = 2x - 1$.

§4. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Khi giải các phương trình mà ẩn nằm trong dấu giá trị tuyệt đối, để bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta xét từng khoảng giá trị của biến. Cần nhớ:

a) Định nghĩa giá trị tuyệt đối:

$$|A| = \begin{cases} A \text{ voi } A \geq 0 \\ -A \text{ voi } A < 0. \end{cases}$$

b) Định lí về dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b\ (a \neq 0)$:

Nhị thức cùng dấu với *a* khi $x > -\dfrac{b}{a}$, nhị thức trái dấu với *a* khi $x < -\dfrac{b}{a}$.

Chứng minh: Xét $\dfrac{ax+b}{a} = x + \dfrac{b}{a}$.

Nếu $x > -\dfrac{b}{a}$ thì $x + \dfrac{b}{a} > 0$, do đó $\dfrac{ax+b}{a} > 0$, tức là $ax + b$ cùng dấu với *a*.

Nếu $x < -\dfrac{b}{a}$ thì $x + \dfrac{b}{a} < 0$, do đó $\dfrac{ax+b}{a} < 0$, tức là $ax + b$ trái dấu với *a* (đpcm).

Chú ý: Vì $-\dfrac{b}{a}$ là nghiệm của nhị thức nên định lí trên được phát biểu:

Nhị thức $ax + b\ (a \neq 0)$**,** cùng dấu với *a* với các giá trị của *x* lớn hơn nghiệm của nhị thức, trái dấu với *a* với các giá trị của *x* nhỏ hơn nghiệm của nhị thức.

Ví dụ 56. Giải phương trình:

$|x-3| + |x+2| = 7$

Giải: a) Trong khoảng $x < -2$, phương trình có dạng

$3 - x - x - 2 = 7 \Leftrightarrow x = -3$, thuộc khoảng đang xét.

b) Trong khoảng $-2 \leq x \leq 3$, phương trình có dạng:

$3 - x + x + 2 = 7 \Leftrightarrow 0\text{x} = 2$, vô nghiệm.

c) Trong khoảng $x > 3$, phương trình có dạng:

$x - 3 + x + 2 = 7 \Leftrightarrow x = 4$, thuộc khoảng đang xét.

Vậy phương trình có nghiệm $x_1 = -3$; $x_2 = 4$.

Ví dụ 57. Giải phương trình:

$|x-4|+|x-9|=5$

Giải: *Cách 1.* a) Trong khoảng $x<4$, phương trình có dạng

$4-x+9-x=5 \Leftrightarrow x=4$, không thuộc khoảng đang xét.

b) Trong khoảng $4 \le x \le 9$, phương trình có dạng: $x-4+9-x=5 \Leftrightarrow 0\text{x}=0$, nghiệm đúng với mọi *x* thuộc khoảng đang xét, tức là $4 \le x \le 9$.

c) Trong khoảng $x>9$, phương trình có dạng:

$x-4+x-9=5 \Leftrightarrow x=9,$

không thuộc khoảng đang xét.

Vậy phương trình có nghiệm $4 \le x \le 9$.

Cách 2. Viết phương trình dưới dạng $|x-4|+|9-x|=5$.

Chú ý rằng $|A| \ge A$ nên $|x-4|+|9-x| \ge x-4+9-x=5.$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x-4 \ge 0$ và $9-x \ge 0$, tức là $4 \le x \le 9$.

Vậy phương trình có nghiệm $4 \le x \le 9$.

BÀI TẬP

Giải các phương trình:

194. $|x-3|-x=7$.

195. $|x+3|=|5-x|$.

196. $|x|-|2x+3|=x-1.$

197. $x-|x+1|+2|x-1|=0.$

198. $|x|+|1-x|=x+|x-3|.$

199. $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4.$

§5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Cần chú ý đến các dạng sau:

Dạng 1. a) $\left|f(x)\right|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a \text{ voi } a>0.$

b) $\left|f(x)\right|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x).$

Dạng 2. a) $\left|f(x)\right|>a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)<-a \\ f(x)>a \end{array}\right. \text{ voi } a>0$

b) $\left|f(x)\right|>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)<-g(x) \\ f(x)>g(x) \end{array}\right.$

Dạng 3. $\left|f(x)\right|>\left|g(x)\right| \Leftrightarrow \left[f(x)\right]^2>\left[g(x)\right]^2.$

Ví dụ 58. Giải bất phương trình $2\left|x-1\right|<x+1.$

Giải: Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} -x-1<2(x-1) \\ 2(x-1)<x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-1<2\text{x}-2 \\ 2\text{x}-2<x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\text{x}<-1 \\ x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3.$$

BÀI TẬP

Giải các bất phương trình:

200. a) $\left|2\text{x}+3\right|<7$;

b) $\left|2\text{x - }3\right|<x.$

201. a) $\left|2\text{x - }3\right|>5$;

b) $\left|\text{x - }3\right|>\frac{x+1}{2}.$

202. $\left|x-3\right|>\left|x+2\right|.$

203. $\left|x-1\right|+\left|x-2\right|>x+3.$

§6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH DẠNG TÍCH. BẤT PHƯƠNG TRÌNH DẠNG THƯƠNG.

Để giải các bất phương trình dạng tích, bất phương trình dạng thương, cần phân tích các đa thức thành nhân tử rồi xét dấu của các nhân tử.

Ví dụ 59. Giải bất phương trình $(x+5)(7-2x)>0$.

Giải: Lập bảng xét dấu:

x		-5		3, 5	
$x+5$	-	0	+		+
$7-2x$	+		+	0	-
$(x+5)(7-2x)$	-	0	+	0	-

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-5<x<3,5$.

Ví dụ 60. Giải bất phương trình $\dfrac{2x+1}{x+2}\le 1$.

Giải:

Chuyển 1 sang vế trái ta được:

$$\frac{2x+1}{x+2}-1\le 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-x-2}{x+2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2}\le 0.$$

Lập bảng xét dấu:

x		-2		1	
$x-1$	-		-	0	+
$x+2$	-	0	+		+
$\dfrac{x-1}{x+2}$	+	‖	-	0	+

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-2<x\le 1$.

BÀI TẬP

Giải các bất phương trình:

204. $(x-4)(9-x)\ge 0$.

205. $\dfrac{2x^2+10x}{1-x}\le 0.$

206. $\dfrac{3x-4}{x+2}\ge 4$

207. $\dfrac{1}{x+4}\le\dfrac{1}{x-2}.$

Phần đề thi

GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI VÀ KIỂM TRA

HỌC SINH GIỎI CỦA HÀ NỘI

PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA ĐA THỨC

208. Tìm số tận cùng của

$P=\left[\left(7^7\right)^7\right]^7:\left[\left(7^6\right)^6\right]^6.$

(Đề dự bị thi vào lớp 8 chuyên toán năm 1978 – 1979).

209. Chứng minh rằng biểu thức $z^2+y\left(2x-y\right)-x^2$ chia hết cho biểu thức $x-y+z$.

(Đề dự bị chọn học sinh giỏi toán lớp 8 vòng 1 năm 1981 – 1982).

210. Tìm *a, b, c* sao cho đa thức x^4+ax^2+bx+c chia hết cho $\left(x-3\right)^3$.

(Đề thi học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1979 – 1980).

211. Tìm những giá trị nguyên của *x* để giá trị của biểu thức x^3-3x^2-3x-1 chia hết cho giá trị của biểu thức x^2+x+1.

(Đề kiểm tra học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1977 – 1978).

212. Phân tích đa thức sau ra thừa số: $a^4+8a^3+14a^2-8a-15$.

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán năm 1981 – 1982).

213. Chứng minh rằng đa thức sau: $\left(a^2+3a+1\right)^2-1$ chia hết cho 24 với *a* là số tự nhiên.

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán năm 1980 – 1981).

214. Chứng minh rằng hiệu các bình phương của hai số lẻ thì chia hết cho 8.

(Đề dự bị thi vào lớp 8 chuyên toán năm 1980 – 1981).

215. Chứng minh rằng biểu thức $10^n+18n-1$ chia hết cho 27 với *n* là số tự nhiên.

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán năm 1978 – 1979).

216. Chứng minh rằng $25n^4+50n^3-n^2-2n$ chia hết cho 24 nếu *n* là số nguyên dương tuỳ ý.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1979 – 1980).

218. Chứng minh rằng: $2^0+2^1+2^2+...+2^{5n-3}+2^{5n-2}+2^{5n-1}$

chia hết cho 31 nếu *n* là số nguyên dương bất kì.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1978 – 1979).

219. Chứng minh rằng:

Nếu *a* và *b* không chia hết cho 3 thì $a^6 - b^6$ chia hết cho 9.

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán năm 1981 – 1982).

220. Chứng minh rằng: $4a^2 + 3a + 5$ chỉ chia hết cho 6 nếu *a* là số nguyên không chia hết cho 2 và cũng không chia hết cho 3.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1977 – 1978).

221. Hai lần của một số lẻ bất kì có thể là hiệu các bình phương của hai số nguyên không?

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1980 – 1981).

222. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng tổng các tích của từng cặp hai số trong ba số ấy bằng 242.

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán năm 1977 – 1978).

223. Chứng minh rằng nếu một số chính phương tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán năm 1979 – 1980).

224. Chứng minh rằng nếu số tự nhiên *n* có tận cùng bằng 5 thì n^2 tận cùng bằng 25. Số n^2 có thể tận cùng bằng 125 không?

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán năm 1980 – 1981).

225. Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9.

(Đề kiểm tra học sinh giỏi năm 1979 – 1980).

226. Phân tích thành nhân tử:

a) $4x^2 - 3x - 1$;

b) $3x^2 - 22xy - 4x + 8y + 7y^2 + 1$.

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán quận Đống Đa năm 1992 – 1993).

227*. Giả sử *a, b, c, d* là các số nguyên. Chứng minh rằng

$\left[(a-c)^2 + (b-d)^2\right](a^2+b^2) - (ad-bc)^2$ là số chính phương.

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán quận Hai Bà Trưng năm 1992 – 1993).

228*. Cho $x+y=1$; $x^3+y^3=a$; $x^5+y^5=b$.

Chứng minh rằng $5a\left(a+1\right)=9b+1$.

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán quận Hai Bà Trưng năm 1992 – 1993).

229. Chứng minh rằng tổng các lập phương của ba số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 9.

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán quận Hoàn Kiếm năm 1992 – 1993).

230. Tìm giá trị tự nhiên của *n* sao cho $n^2+3n+39$ và n^2+n+37 cùng chia hết cho 49.

(Đề thi vào lớp 9 chuyên toán quận Hoàn Kiếm năm 1992 – 1993).

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

231. Rút gọn phân số $\dfrac{19...9}{99...5}$

với *n* chữ số 9 ở tử và *n* chữ số 9 ở mẫu (*n* là số tự nhiên).

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1981 – 1982).

232. Tính số trị của phân thức sau bằng cách nhanh nhất:

$$\frac{a^3-4a^2-a+4}{a^3-7a^2+14a-8} \quad \text{với } a=102.$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1979 – 1980).

233. Số nào lớn hơn:

$$\frac{1981-1980}{1981+1980} \text{ hay } \frac{1981^2-1980^2}{1981^2+1980^2}?$$

(Đề dự bị thi vào lớp 8 chuyên toán năm 1980 – 1981).

234. Số nào lớn hơn:

$$\frac{10^{1979}+1}{10^{1980}+1} \text{ hay } \frac{10^{1980}+1}{10^{1981}+1}?$$

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán năm 1980 – 1981).

235. Tìm giá trị của $\dfrac{a+b}{a-b}$ nếu $2a^2+2b^2=5ab$ và $b>a>0$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1979 – 1980).

236. Chứng minh rằng nếu:

$c^2+2(ab-ac-bc)=0,\ b\neq 0,\ a+b\neq c$ thì

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1981 – 1982).

237. Rút gọn phân thức sau:

$$\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$$

Chứng minh rằng phân thức trên không phụ thuộc vào *x*, có nghĩa với mọi *x* và *a*.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1980 – 1981).

238. Chứng minh rằng nếu:

$x=by+cz\ (1),\ y=ax+by\ (2),\ z=ax+by\ (3)$ và $x+y+z\neq 0$ thì

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1977 – 1978).

239. Thực hiện phép tính:

$$\frac{1}{(b-c)(a^2+ac-b^2-bc)}+\frac{1}{(c-a)(b^2+ab-c^2-ac)}+\frac{1}{(a-b)(c^2+bc-a^2-ab)}.$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1979 – 1980).

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

240. Cho $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$. Hỏi năm số trên còn có những bộ năm số nguyên nào có tính chất như vậy không?

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán năm 1979 – 1980).

241. Chứng minh rằng nghiệm của phương trình sau là một số nguyên:

$$\frac{x-29}{1970}+\frac{x-27}{1972}+\frac{x-25}{1974}+\frac{x-23}{1976}+\frac{x-21}{1978}+\frac{x-19}{1980}=$$

$$\frac{x-1970}{29}+\frac{x-1972}{27}+\frac{x-1974}{25}+\frac{x-1976}{23}+\frac{x-1978}{21}+\frac{x-1980}{19}.$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 8 năm 1977 – 1979).

242. Đầu năm học, một tổ học sinh được mua một số sách vở và phải trả 72 đồng. Nếu bớt đi 3 người thì mỗi người còn lại phải trả thêm 4 đồng. Hỏi tổ đó có bao nhiêu người?

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán năm 1979 – 1980).

BẤT ĐẲNG THỨC, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

244. Chứng minh $2a^4+1\geq 2a^3+a^2$ với *a* là số bất kì.

(Đề thi chọn học sinh giỏi năm 1977 – 1979).

245. Với giá trị nào của *x* thì biểu thức:

$P=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ có giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1980 – 1981).

246. Chứng minh rằn với *n* là số tự nhiên ta luôn có

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{1}{2}.$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán vòng 2 năm 1980 – 1981).

247. Cho x_1 là số dương nhỏ hơn 1 và

$x_k^2=x_k-x_{k+1}\ (k=1,2...)$

Chứng minh rằng $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2<1$ (*n* là số tự nhiên).

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1978 – 1979).

248. Cho bảy số tự nhiên khác nhau có tổng bằng 100. Chứng minh rằng trong bảy số đó có ba số mà tổng của chúng lớn hơn hoặc bằng 50.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1981 – 1982).

249. Chứng minh rằng trong mọi tam giác, ta luôn có

$60^0<\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}<90^0$ với *A, B, C* là số đo (độ) các góc của tam giác và *a, b, c* là các cạnh đối diện với các góc đó.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1979 – 1980).

MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

250. Có số nguyên x, y nào thoả mãn đẳng thức

$15x^2 - 7y^2 = 9$ không?

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1980 – 1981).

251. Tìm số tự nhiên biết rằng nếu ta bỏ đi ba chữ số cuối cùng của số đó thì ta được số mới mà lập phương của nó chính bằng số cần tìm.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1979 – 1980).

252. Giải phương trình $n + S(n) = 1982$ với $S(n)$ là tổng các chữ số của n (n là số nguyên không âm).

(Đề chọn lọc học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1981 – 1982)

253. Tổng của sáu cố nguyên không âm bằng tích của chúng. Tìm các số đó.

(Đề thi chọn lọc học sinh giỏi toán lớ 8, năm 1981 – 1992)

254. Cặp số 44 và 18 có tính chất sau: Tổng và hiệu của chúng là số có hai chữ số, nhưng vị trí đổi chỗ nhau.

Hãy tìm các cặp số mà mỗi số có hai chữ số có tính chất như trên.

255. Cho biểu thức: $P = \left\{ \dfrac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \dfrac{2x-8}{13x-20x^2-20} - \dfrac{3}{2x-1} \right\} : \dfrac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức P có nghĩa.

b) Rút gọn biểu thức P

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán quận Ba Đình năm học 1992 -1993)

256. Chứng minh rằng nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{bc}{a^2} + \dfrac{ca}{b^2} + \dfrac{ab}{c^2}$ biết $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$ $(a, b, c \neq 0)$

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán quận Hai Bà Trưng năm học 1992 - 1993)

257*. Giả sử x, y, z thỏa mãn $x.y.z = 1992$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1992x}{xy + 1992x + 1992} + \frac{y}{yz + y + 1992} + \frac{z}{xz + z + 1} = 1$$

(Đề thi vào lớp 9 chuyên toán quận Đống Đa năm học 1992 – 1993)

258. Tìm hai phân số dương có tử bằng 1, sao cho tổng của chúng cộng với $\frac{1}{6}$ tích của chúng thì bằng $\frac{1}{6}$.

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán quận Hoàn Kiếm năm 1992 – 1993)

259*. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình:

$$x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2 = y^2$$

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán quận Hoàn Kiến năm học 1992 – 1993)

260*. Cho biểu thức:

$$A = x^2 + 15y^2 + xy + 8x + y + 1992$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

(Đề thi vào lớp 8 chuyên toán quận Ba Đình năm 1992 -1993)

261. Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số dương và $a+b+c=1$ thì:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2>33$$

(Đề thi vào lớp 9 chuyên toán quận Ba Đình năm học 1992 – 1993)

262. Giải bất phương trình:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}>1992$$

(Đề thi vào lớp 9 chuyên toán quận Đống Đa năm học 1992 – 1993)

263. Chứng minh rằng với a,b là số dương thì $a^3-3ab^2+2b^3$ cũng là số dương.

(Đề kiểm tra học sinh giỏi năm học 1983 – 1984)

264. Cho a,b,c,d,e là các số nguyên và $1\le a\le b\le c\le d\le e$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,d]}+\frac{1}{[d,e]}<1$$

Với $[x,y]$ là kí hiệu BCNN của x và y.

(Đề kiểm tra học sinh giỏi năm 1983 – 1984)

265. Chứng minh rằng nếu một số có tám chữ số chia hết cho 101 thì khi viết chữ số cuối cùng lên đầu cũng được một số có tám chữ số chia hết cho 101.

(Đề kiểm tra học sinh giỏi năm 1984 – 1985)

266. Cho tổng của năm số nguyên bằng 0. Chứng minh rằng tổng các lũy thừa bậc năm của năm số nguyên ấy chia hết cho 15.

(Đề kiểm tra học sinh giỏi năm 1984 – 1985)

267. Thực hiện phép tính:

$$\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)...\left(1-\frac{1}{1+2+3+....+1986}\right)$$

(Đề kiểm tra học sinh giỏi năm 1984 – 1985)

268. Chứng minh rằng:

$$\frac{40^4+51^4+91^4}{79^4}=\frac{40^2+51^2+91^2}{79^2}$$

(Đề kiểm tra học sinh giỏi năm 1984 – 1985)

269. Chứng minh rằng nếu $x+y=1$ và $xy\neq 0$ thì

$$\frac{y}{x^3-1}-\frac{x}{y^3-1}=\frac{2(x-y)}{x^2y^2+3}$$

(Đề chọn học sinh giỏi năm 1984 – 1985)

270. So sánh hai biểu thức A và B:

$$A=124.\left(\frac{1}{1.1985}+\frac{1}{2.1986}+\frac{1}{3.1987}+...+\frac{1}{16.2000}\right),$$

$$B=\frac{1}{1.17}+\frac{1}{2.18}+\frac{1}{3.19}+...+\frac{1}{1984.2000}$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi năm 1985 – 1986)

271. Có tồn tại số nguyên dương mà nếu ta bỏ đi chữ số đầu tiên thì số đó giảm đi:

a) 57 lần?

b) 58 lần?

(Đề thi chọn học sinh giỏi năm 1985 – 1986)

272. Cho bốn số a,b,c,d sao cho $ab=1,\ ac+bd=2$.

Chứng minh rằng $1-cd$ không thể là số âm.

(Đề thi chọn học sinh giỏi năm 1984 – 1985)

273. Cho dãy số nguyên dương $a_i\left(i=1,2,...,k\right)$ và $a_k<a_{k-1}<...<a_2<a_1\le n$ với n là giá trị lớn nhất trong các BCNN của hai số bất kì của dãy a_i.

Chứng minh rằng: $m.a_m\le n\ \left(m=2,3,...,k\right)$

(Đề thi chọn học sinh giỏi năm 1984 – 1985)

274. Tìm x biết:

$$\frac{x-1986-1987}{1985}+\frac{x-1985-1987}{1986}+\frac{x-1985-1986}{1987}=3$$

(Đề thi học sinh giỏi năm 1985 – 1986)

275. Tìm x biết:

$$\frac{\left(1985-x\right)^2+\left(1985-x\right)\left(x-1986\right)+\left(x-1986\right)^2}{\left(1985-x\right)^2-\left(1985-x\right)\left(x-1986\right)+\left(x-1986\right)^2}=\frac{19}{49}$$

(Đề kiểm tra học sinh giỏi năm 1985 – 1986)

276. Cho bốn số a,b,c,d khác 0 trong đó $c+d=1$ và $\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=\frac{1}{ac+bd}$.

Chứng minh rằng $a=b$

(Đề thi chọn học sinh giỏi năm 1985 – 1986)

277. Chứng minh bất đẳng thức:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\ge x_1\left(x_2+x_3+x_4+x_5\right)$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi năm 1985 – 1986)

278. Cho $\frac{x}{x^2+x+1}=a$. Tính $P=\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$ theo a.

(Đề thi chọn học sinh giỏi năm 1986 – 1987)

279. Chứng minh rằng $n^n - n^2 + n - 1$ chia hết cho $(n-1)^2$ với mọi số nguyên n lớn hơn 1.

(Đề kiểm tra học sinh giỏi năm 1989 – 1990)

280. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ không thể có nghiệm chuyên.

(Đề kiểm tra học sinh giỏi năm 1989 – 1990)

281. Xét biểu thức

$$S = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + ... + \frac{1992}{2^{1991}}.$$

Chứng minh rằng: $S < 4$

(Đề thi chọn học sinh giỏi năm 1991 – 1992)

282. Xét hai biểu thức:

$$P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\ ;\ Q = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

a) Chứng minh rằng nếu $P = 1$ thì $Q = 0$.

b) Nếu $Q = 0$ thì có nhất thiết là $P = 1$ không?

(Đề thi chọn học sinh giỏi năm 1991 – 1992)

283. Chứng minh rằng số $A - 2B + 1$ là số chính phương, trong đó:

$$A = \underbrace{111...1}_{2k \text{ chu so}};\ B = \underbrace{444...4}_{k \text{ chu so}}$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi năm 1996 – 1997)

LỜI GIẢI HOẶC CHỈ DẪN

Chương I. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA ĐA THỨC

1. Rút gọn theo x và y, được $x-y$. Sau đó rút gọn theo a và b, được $4ab$.

2. $2.x^{n+1}-3.x^{n}$.

3. a) $10^{n+1}-6.10^{n}=10.10^{n}-6.10^{n}=4.10^{n}$

b) $90.10^{k}-10^{k+2}+10^{k+1}=20.10^{k}-100.10^{k}+10.10^{k}=0$

c) 0

4. a) $2^{10}+2^{11}+2^{12}=2^{10}+2.2^{10}+4.2^{10}=7.2^{10}$ chia hết cho 7.

b) $7.32=7.2^{5}=2^{5}+2.2^{5}+4.2^{5}=2^{5}+2^{6}+2^{7}$.

5. Đặt $\dfrac{1}{117}=a$, $\dfrac{1}{119}=b$, ta có:

$$3ab-4a\left(6-b\right)-5ab+24a=2ab=\frac{2}{117.119}$$

6. Thay 8 bằng $x+1$. Đáp số: 2.

7. $a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc$.

8. Cả hai vế đều bằng $a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc$.

9. Gọi x là số bất kì lớn hơn 100, ta gọi hiệu $x-100$ là phần hơn. Muốn nhân hai số lớn hơn 100 một chút, ta lấy số này cộng với phần hơn của số kia, rồi viết tiếp vào sau tích của hai phần hơn (bằng hai chữ số). Ví dụ: $112.103=11536$; $102.104=10608$.

10. Gọi x là số bất kì nhỏ hơn 100, ta gọi hiệu $100-x$ là phần bù. Muốn nhân hai số nhỏ hơn 100 một chút, ta lấy số này trừ đi phần bù của số kia, rồi viết tiếp vào sau tích của hai phần bù (bằng hai chữ số). Ví dụ: $98.94=9212$.

11. $\left(x+a\right)\left(x+b\right)\left(x+c\right)=\left(x^{2}+bx+ax+ab\right)\left(x+c\right)$

$=x^{3}+cx^{2}+bx^{2}+bcx+ax^{2}+acx+abx+abc$

$=x^{3}+\left(a+b+c\right)x^{2}+\left(ab+bc+ca\right)x+abc=x^{3}+6x^{2}-7x-60$.

12. a) $\left(127+73\right)^{2}=200^{2}=40000$.

b) $18^{8}-\left(18^{8}-1\right)=1$.

c) $(100+99)(100-99)+(98+97)(98-97)+...+(2+1)(2-1)$

$=100+99+98+97+...+2+1=5050$.

d) Biến đổi thành $20^2-19^2+18^2-17^2+...+2^2-1^2$ rồi giải nhưu bài toán trên.

Đáp số: 210.

e) $\dfrac{(780+220)(780-220)}{(125+75)^2}=\dfrac{1000.560}{200.200}=14$.

13. a) Đặt $1990=x$ thì $A=(x-1)(x+1)=x^2-1$, còn $B=x^2$.

Vậy B lớn hơn A là 1.

b) $A=\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}<\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=B$ (vì $x>y>0$)

c) $(3-1)A=3^{32}-1$ nên $A=\dfrac{3^{32}-1}{2}$.

Vậy B lớn gấp đôi A.

14. a) $6x^2+48x-57$

b) $(2a^2+2a+1)(2a^2-2a+1)-(2a^2+1)^2=(2a^2+1+2a)(2a^2+1-2a)-(2a^2+1)^2$

$=(2a^2+1)^2-4a^2-(2a^2+1)^2=-4a^2$

c) Đặt $9x-1=a, 1-5x=b$, biểu thức trở thành:

$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=(9x-1+1-5x)^2=(4x)^2=16x^2$

d) Giải như bài toán trên. Đáp số: x^4

15. a) Áp dụng: $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ ta được:

$(a^2+b^2-c^2+a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2-a^2+b^2-c^2)=2a^2(2b^2-2c^2)=4a^2b^2-4a^2c^2$

b) $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-2(a+b)^2$

$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2+(a+b)^2-2c(a+b)+c^2-2(a+b)^2=2c^2$

c) $[(a+b)+c]^2+[(a-b)+c]^2+[(a+b)-c]^2+[c-(a-b)]^2$

$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2+(a-b)^2+2c(a-b)^2+c^2+(a+b)^2$
$-2c(a+b)+c^2+c^2-2c(a-b)+(a-b)^2$

$=2(a+b)^2+2(a-b)^2+4c^2$

$=2(a^2+2ab+b^2)+2(a^2-2ab+b^2)+4c^2$

$=4(a^2+b^2+c^2)$

16. c) Xét hiệu vế trái và vế phải:

$1000^2+1003^2+1005^2+1006^2-1001^2-1002^2-1004^2-1007^2$

$=(1003^2-1002^2)+(1005^2-1004^2)-(1007^2-1006^2)-(1001^2-1000^2)$

$=(1003+1002)+(1005+1004)-(1007+1006)-(1001+1000)$

$=2005+2009-2013-2001=0$

17. Biến dổi vế trái thành $(7a-3b)^2-(2c)^2$ rồi thay $c^2=10a^2=10b^2$

18. a) Biến đổi vế phải thành:

$2p(2p-2a)=(a+b+c)(b+c-a)=(b+c)^2-a^2=b^2+2bc+c^2-a^2=VT$.

b) $VP=3p^2-2p(a+b+c)+a^2+b^2+c^2=3p^2-4p^2+a^2+b^2+c^2$

$=a^2+b^2+c^2-p^2=VT$.

19. $(x-1)^2+5(x-1)+6$.

20. Gọi hai số chẵn liên tiếp là x và $x+2$ (x chẵn). Ta có:

$(x+2)^2-x^2=36$, suy ra $x=8$. Đáp số: 8 và 10.

21. 9 và 11.

22. Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $x-1, x, x+1$.

Ta có: $x(x-1)+(x-1)(x+1)+x(x+1)=74$ suy ra $x^2=25$, mà $x>0$ nên $x=5$.

Đáp số: $4,5,6$.

23. Áp dụng: $(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$, Đáp số: $ab+bc+ca=14$.

24. $(x-1)^2+(y+2)^2=0$, do đó $x-1=y+2=0$.

Vậy $x=1, y=-2$.

25. Biến đổi $2\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)=0$ thành $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

26. Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng:

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

27. a) $(x-5)^2+1=100^2+1=10001$.

b) $(x+0{,}1)^2=1^2=1$

c) $(a+1)^2=100=10000$.

28. a) Vế trái bằng $a^2-6a+10=(a-3)^2+1$

b) Vế trái bằng $x^2-8x+19=(x-4)^2+3$

c) $a^2+a+1=a^2+2a.\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$.

29. a) Biến đổi: $x^2-4x+1=x^2-4x+4-3=(x-2)^2-3$.

Do đó: $(x-2)\geq 0$ nên $(x-2)^2-3\geq -3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng -3 khi $x=2$.

b) $4x^2+4x+11=(2x+1)^2+10$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 10 khi $x=-\dfrac{1}{2}$.

c) $3x^2-6x-1=3(x-1)^2-4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng -4 khi $x=1$.

30. a) $5-8x-x^2=-\left(x^2+8x+16\right)+21=-(x+4)^2+21$

Do $-(x+4)^2\leq 0$ nên $-(x+4)^2+21\leq 21$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức bằng 21 khi $x=-4$.

b) $4x-x^2+1=-(x-2)^2+5$ có giá trị lớn nhất bằng 5 khi $x=2$.

31. a) $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)=(x^2+5x+6)(x^2+5x-6)=(x^2+5x)^2-36\geq -36$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thwucs bằng -36 khi $x^2+5x=0$, tức là $x=0$ hoặc $x=-5$

b) Biến dổi thành $(x-1)^2+(y-2)^2+1$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 1 khi $x=1$, $y=2$.

32. a) $(a+1)^3=1000$.

b) $(x+1)^3-1=7999$.

c) $(a+1)^3+5=27005$

d) $(a-1)^3+2=1000002$.

33. a) $-x-1$; b) 0.

c) $[a+(b+c)]^3+[a-(b+c)]^3+[(b-c)-a]^3-[(b-c)+a]^3$.

Đáp số: $24abc$.

34. $x=-\dfrac{1}{6}$.

35. Bạn đọc tự giải.

36. Ta có $a+b+c=0$ nên $c=-(a+b)$. Do đó:

$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=-3ab(a+b)=3abc$.

37. Ta có: $a+b+c+d=0$ nên $a+b=-(c+d)$.

Suy ra $(a+b)^3=-(c+d)^3$, tức ;à:

$a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3-d^3-3cd(c+d)$

Hay $a^3+b^3+c^3+d^3=-3ab(a+b)-3cd(c+d)$.

Chú ý rằng: $a+b=-(c+d)$ nên vế phải của đẳng thức trên bằng

$3ab(c+d)-3cd(c+d)=3(c+d)(ab-cd)$.

38. $M=2(a+b)(a^2-ab+b^2)-3(a^2+b^2)=2(a^2-ab+b^2)-3(a^2+b^2)=-(a+b)^2=-1$

39. a) $(x+2)(x^2-6x+4)$

b) $(1-x)(1+7x+x^2)$

c) $(6x-1)(x-9)(x+9)$

d) $x^4-(4x^2-4x+1)=(x^2)^2-(2x-1)^2=(x^2+2x-1)(x-1)^2$

e) $x^4+4x^2+4-x^2=(x^2+2)^2-x^2=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

g) $(x+1)(x-1)(x+5)(x+3)$.

40. a) $(xy+1)^2-(x+y)^2=(xy+1+x+y)(xy+1-x-y)$

$=(x+1)(y+1)(x-1)(y-1)$.

b) *Cách 1:* $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-4c^2$

$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2+(a+b)^2-2c(a+b)+c^2-4c^2$

$=2(a+b)^2-2c^2=2(a+b+c)(a+b-c)$.

Cách 2: $(a+b+c)^2+(a+b-c+2c)(a+b-c-2c)$

$=(a+b+c)^2+(a+b+c)(a+b-3c)$

$=(a+b+c)(a+b+c+a+b-3c)$

$=2(a+b+c)(a+b-c)$.

c) $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)$

$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$

d) $(a-b)(b-c)(c-a)$

e) $(a+b)(b+c)(c+a)$

g) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc$

$=ab(a+b)+abc+bc(b+c)+abc+ac(c+a)+abc$.

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

h) Chú ý: $c^3-a^3--\left[\left(b^3-c^3\right)+\left(a^3-b^3\right)\right]$

Đáp số: $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

i) $(a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca)$

k) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2-a^3-b^3-c^3+4abc$

$=a(b-c)^2-c^3+4abc+b(c-a)^2-b^3+c(a-b)^2-c^3$

$=a\left[(b-c)^2+4bc-a^2\right]+b\left[(c-a)^2-b^2\right]+c\left[(a-b)^2-c^2\right]$

$=a\left[(b+c)^2-a^2\right]+b\left[(c-a)^2-b^2\right]+c\left[(a-b)^2-c^2\right]$

$=a(b+c+a)(b+c-a)+b(c-a+b)(c-a-b)+c(a-b+a)(a-b-c)$

$=(b+c-a)\left[a(b+c+a)+b(c-a-b)\right]+c(a-b+c)(a-b-c)$

$=(b+c-a)\left[ab+ac+a^2+bc-ab-b^2\right]+c(a-b+c)(a-b-c)$

$=(b+c-a)\left[c(a+b)+(a-b)(a+b)\right]+c(a-b+c)(a-b-c)$

$=(b+c-a)(a+b)(a-b+c)+c(a-b+c)(a-b-c)$

$=(a-b+c)\left[(a+b)(b+c-a)+c(a-b-c)\right]$

$=(a-b+c)\left(ab+ac-a^2+b^2+bc-ab+ac-bc-c^2\right)$

$=(a-b+c)\left[a^2-(a-c)^2\right]=(a-b+c)(b+a-c)(b-a+c)$

41. a) Viết a^3+b^3 dưới dạng $(a+b)^3-3a^2b-3ab^2$.

Do đó: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$

$=(a+b+c)\left[(a+b)^2-c(a+b)+c^2\right]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$

b) Áp dụng $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ ta có:

$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3 \;=(a+b)^3+c^3+3c(a+b)(a+b+c)-a^3-b^3-c^3$

$=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+3c(a+b)(a+b+c)-a^3-b^3-c^3$

$3(a+b)(ab+ac+bc+c^2)=3(a+b)(b+c)(c+a)$

42. a) $(x-3)(x-4)$.

b) $(x-7)(x+2)$

c) $(x-1)(4x+1)$.

43. Đặt $x^2=y$. Đáp số: $(3x^2-1)(2x^2-3)$.

b) Đặt $x^2+x=y$. Đáp số: $(x^2+x+1)(x^2+x+2)$.

c) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$.

Đặt $x^2+3x=y$, đa thức bằng: $y(y+2)+1=y^2+2y+1=(y+1)^2=(x^2+3x+1)^2$

d) $(x-3y)(x-4y)$.

e) Viết đa thức thành $(x-y)^2+3(x-y)-10$.

Đáp số: $(x-y+5)(x-y-2)$.

44. $(x+1)(x+2)(x-3)$.

Cách 1. $x^3-7x-6=x^3+1-7x-7$.

Cách 2. $x^3-7x-6=x^3-x-6x-6$

Cách 3. $x^3-7x-6=x^3-4x-3x-6$

Cách 4. $x^3-7x-6=x^3-27-7x+21$.

45. a) Chú ý rằng đa thức có tổng các hệ số bằng 0.

$x^3-5x^2+8x-4=x^3-x^2-4x^2+4x+4x-4$

$=x^2(x-1)-4x(x-1)+4(x-1) \;=(x-1)(x-2)^2$.

b) *Cách 1.* Đa thức cũng có tổng các hệ số bằng 0.

$x^3-3x+2=x^3-1-3x+3=(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)$

Tiếp tục phân tích $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

Kết quả được $(x-1)^2(x+2)$.

Cách 2. Đa thức có nghiệm -2.

$x^3-3x+2=x^3+8-3x-6 =(x+2)(x^2-2x+4)-3(x+2) =(x+2)(x^2-2x+1)$

$=(x+2)(x-1)^2$

c) $(x+1)(x-3)^2$

d) $(x+1)(x+2)(x+5)$.

e) $x^3+3x^2+6x+4=x^3-8+3x^2+6x+12$

$=(x-2)(x^2+2x+4)+3(x^2+2x+4)$

$=(x^2+2x+4)(x+1)$.

46. a) 2 là nghiệm của đa thức.

Đáp số: $(x-2)(x^2+2x+2)$.

b) 2 là nghiệm của đa thức. Đáp số: $(x-2)(2x^2-8x+1)$.

c) -2 là nghiệm của đa thức.

Cách 1. x^3+x^2+4

$=x^3+2x^2-x^2+4$

$=x^2(x+2)-(x+2)(x-2)$

$=(x+2)(x^2-x+2)$.

Cách 2. $x^3+x^2+4=x^3+8+x^2-4$

$=(x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)(x-2)$

$=(x+2)(x^2-x+2)$.

d) -2 là nghiệm của đa thức. Đáp số: $(x+2)(x^2+x+1)$.

e) Biến đổi đa thức thành: $x^3+9x^2+27x+27-x-3=(x+3)^3=(x+3)$

Đáp số: $(x+3)(x+4)(x+2)$.

g) $\frac{1}{2}$ là nghiệm của đa thức. Đáp số: $(2x-1)(x^2-x+1)$.

h) $-\frac{1}{3}$ là nghiệm của đa thức. Đáp số: $(3x+1)(x^2-5x+3)$.

47. a) $(x+1)(x^3+x^2+1)$.

b) $(1+x^2)^2-4x(1-x^2)=(1-x^2)^2+4x^2-4x(1-x^2)=\left[(1-x^2)-2x\right]^2=(x^2+2x-1)^2$

c) $(x^2-8)^2+36=x^4-16x^2+100=(x^2+10)^2-36x^2=(x^2+6x+10)(x^2-6x+10)$.

48. a) Thêm bớt hạng tử $4x^2$. Đáp số: $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

b) Thêm bớt $16x^2$. Đáp số: $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$.

c) $(8x^2-4x+1)(8x^2+4x+1)$.

d) $(9x^2-6x+2)(9x^2+6x+2)$.

49. a) *Cách 1.* Để "nối" từ x^5 đến x, ta thêm bớt x^4, x^3, x^2.

Ta có $x^5+x+1=x^5+x^4-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x+1$

$=x^3(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$.

Cách 2. Thêm bớt x^2 để làm xuất hiện nhận tử chung x^2+x+1. Ta có:

$x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1$ $=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$

$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$.

b) Thêm bớt x. Đáp số: $(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x+1)$.

Chú ý: Các đa thức $x^{3m+1}+x^{3n+2}+1$ như x^7+x^2+1, x^7+x^5+1, $x+x^5+1$, $x+x^8+1$. . . . đều phân tích được thành nhân tử như ở bài trên

50. a) Đồng nhất với đa thức $(3x+ayb+b)(x+cy+d)$.

Đáp số: $(3x-y-1)(x-7y-1)$.

b) Đồng nhất với đa thức $(\mathrm{ax}+by+3)(x+dy-1)$.

Đáp số: $(4x-6y+3)(3x+2y-1)$.

c) Dễ thấy đa thức không có nghiệm hữu tỉ. Nếu đa thức phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng $(x^2+\mathrm{ax}+1)(x^2+bx+1)$ hoặc $(x^2+\mathrm{ax}\ \text{-}1)(x^2+bx-1)$.

Xét dạng thứ nhất, ta được $a=b=3$. Vậy đa thức phân tích thành $(x^2+3x+1)^2$.

Cũng có thể giải như sau:

$$x^4+6x^3+11x^2+6x+1=x^4+2x^2(3x+1)+(9x^2+6x+1)$$

$$=x^4+2x^2(3x+1)+(3x+1)^2$$

$$=(x^2+3x+1)^2.$$

51. Với mọi x, ta có $(x+a)(x-5)+2=(x+b)(x+c)$ (1), Với $x=5$ thì $2=(5+b)(5+c)$.

Vì b và c nguyên nên $(5+b)(5+c)$ là tích của hai số nguyên. Số 2 chỉ viết được dưới dạng tích của hai số nguyên bằng hai cách 1.2 và $(-1)(-2)$.

Giả sử $b\le c$, ta xét hai trường hợp:

$\begin{cases}5+b=1\\5+c=2\end{cases}$ Suy ra $b=-4, c=-3$

Thay vào (1) được $(x+a)(x-5)+2=(x-4)(x-3)$ với mọi x.

Với $x=4$ thì $-(4+a)+2=0$ suy ra $a=-2$.

Đa thức được phân tích thành $(x-2)(x-5)+2=(x-4)(x-3)$.

2) $\begin{cases}5+b=-2\\5+c=-1\end{cases}$ Suy ra $b=-7, c=-6$

Thay vào (1) được $(x+a)(x-5)+2=(x-7)(x-6)$ với mọi x.

Với $x=6$ thì $(6+a)+2=0$ nên $a=-8$. Đa thức được phân tích thành .

$$(x-8)(x-5)+2=(x-7)(x-6).$$

52. Giải tương tự bài trên được $m=9, m=1$.

Đáp số: $(x+9)(x+5)+3=(x+8)(x+6)$;

$$(x+1)(x+5)+3=(x+2)(x+4).$$

53. a) Phân tích thành nhân tử $A=(n-1)(n^2-3n+1)$.

Nếu $n=0;1;2$ thì A thứ tự bằng $-1;0;-1$.

Nếu $n=3$ thì $A=2$ là số nguyên tố.

Nếu $n\ge 4$ thì $n-1\ge 3$ còn $n^2-3n+1=n(n-3)+1\ge 5$ nên A là hợp số.

Vậy chỉ còn $n=3$ thì A là số nguyên tố.

b) $B=(n-2)(n^2-4n+1)$. Đáp số: $n=1$ hoặc $n=4$.

54. Thay $x=1,2,3,...,$ vào đẳng thức $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$, ta được:

$$2^3=1^3+3.1^2+3.1+1$$
$$3^3=2^3+3.2^2+3.2+1$$
...
$$(n+1)^3=n^3+3.n^2+3.n+1$$

Cộng các vế tương ứng của các đẳng thức trên ta được:

$$(n+1)^3=1+3(1^2+2^2+...+n^2)+3(1+2+...+n)+n.$$

Do đó $3(1^2+2^2+...+n)=(n+1)^3-\dfrac{3n(n+1)}{2}-(n+1)$

$$=(n+1)\left[(n+1)^2-\frac{3n}{2}-1\right]$$

Suy ra $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

55. Giải tương tự bài trên và áp dụng kết quả của bài trên.

Đáp số: $S=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

56. a) Đổi thành các lũy thừa cùng cơ số.

Cách 1: $49^{12}:7^4=(7^2)^{12}:7^4=7^{24}:7^4=7^{20}$.

Cách 2: $49^{12}:7^4=49^{12}:7^4=7^{24}:7^4=7^{20}$.

b) 1.

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$.

57. a) $\frac{5^{300}.2^{160}}{5^{298}.2^{160}}=5^2=25$.

b) $\frac{1}{15}$.

c) 1.

d) $\frac{8\left(x+2y\right)^5}{2x+4y}=\frac{8\left(x+2y\right)^5}{2\left(x+2y\right)}=4\left(x+2y\right)^4$.

58. a) $a=-12$

b) $a=-2$

c) Gọi thương của phép chia là $Q\left(x\right)$ thì $3x^2+\text{ax}+27=\left(x+5\right).Q\left(x\right)+2$ với mọi x.

Sau đó cho $x=-5$ ta được $a=20$.

59. a) *Cách 1:* Làm phép chia, ta được thương bằng x^2-x+a, dư $\left(1-a\right)x+\left(b-a\right)$.

Muốn chia hết thì đa thức dư phải đồng nhất bằng 0, tức là $1-a=0,b-a=0$.

Do đó $a=b=1$.

Cách 2: Nhận xét rằng thương là đa thức bậc hai có hạng tử cao nhất là $x^4:x^2=x^2$, hạng tử thấp nhất là $b:1=b$.

Gọi thương là x^2+cx+b rồi đồng nhất $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+cx+b\right)$ với $\left(x^4+\text{ax}^2+b\right)$, ta được $c+1=0,b+c+1=a,b+c=0$, suy ra $c=-1,b=1,a=1$.

b) Đáp số: $a=2,b=-26$.

Cách 1: Thực hiện phép chia, được thương là $\text{ax}-4a$, dư $\left(13a+b\right)x+\left(12a-24\right)$.

Cách 2: Đồng nhất đa thức $\text{ax}^3+bx-24$ với $\left(x^2+4x+3\right)\left(\text{ax-8}\right)$ suy ra $4a-8=0,3a-32=b$.

Cách 3: Với mọi x, ta có $\text{ax}^3+bx-24=\left(x+1\right)\left(x+3\right).Q\left(x\right)$. Lần lượt cho $x=-1,x=-3$.

c) $a=3,b=-1$

d) Với mọi x, ta có $2x^3+ax+b=(x+1).P(x)-6$ (1)

$$2x^3+ax+b=(x-2).Q(x)+21 \quad (2)$$

Với $x=-1$ thì $-1-a+b=-6$. Với $x=2$ thì $16+2a+b=21$.

Do đó $a=3,b=-1$.

60. a) $4x^3-7x^2-x-2=(x-2)P(x)+r$ với mọi x.

Với $x=2$ thì $4.2^3-7.2^2-2-2=0$ nên $r=0$.

Vậy $4x^3-7x^2-x-2$ chia hết cho $x-2$.

b) Số dư của phép chia bằng -60.

61. a) Dư trong phép chia cho $x-1$ là hằng số. Gọi thương của phép chia là $Q(x)$, dư là r, với mọi x ta có $x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}=(x-1).Q(x)+r$.

Với $x=1$ thì $1+1+1+1+1=r$ hay $r=5$.

Vậy dư của phép chia là 5.

b) Dư trong phép chia cho x^2-1 có bậc cao nhất là bậc nhất. Gọi thương của phép chia là $Q(x)$ và dư là $ax+b$, với mọi x ta có:

$$x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}=(x^2-1).Q(x)+ax+b.$$

Với $x=1$ thì $5=a+b$, Với $x=-1$ thì $-5=-a+b$. Từ đó $a=5,b=0$. Dư của phép chia là $5x$.

62. Trong hằng đẳng thức $(x^2+x-1)^{10}+(x^2-x+1)^{10}-2=(x-1).Q(x)+r$ ta cho $x=1$, được $r=0$.

63. a) $3;1;5;-1$.

b) $2;1;-2;5$.

64. $n-4$ phải là ước của 23. Đáp số: $5;3;27$.

65. Ta phải có n^2-n là ước của 3. Điều này không xảy ra vì n^2-n là số chẵn.

66. Gọi hai số lẻ là $2a+1$ và $2b+1(a,b\in N)$.

$(2a+1)^2+(2b+1)^2=4a^2+4a+4b^2+4b+2$ không chia hết cho 4;

Chia hết cho 8 (chú ý rằng tích của hai sô nguyên liên tiếp thì chia hết cho 2).

67. Số chính phương chẵn là bình phương của một số. Ta có $(2k)^2 = 4k^2$ chia hết cho 4.

Số chính phương lẻ là bình phương của một số lẻ. Ta có $(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$ chia 8 dư 1.

68. Xét $(3k)^2, (3k+1)^2, (3k-1)^2$.

69. a) Xét tổng $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2$.

b) Xét tổng $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$.

c) Xét tổng $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2+2)$.

Ta thấy n^2 không tận cùng bằng 3, bằng 8 nên n^2+2 không chia hết cho 5. Do đó $5(n^2+2)$ không là số chính phương.

70. Nhận xét $n^2 < n^2+n+1 < (n+1)^2$ với mọi n nguyên dương.

Số n^2+n+1 nằm lọt giữa hai số chính phương liên tiếp nên không phải là số chính phương.

71. Biến đổi $9^n + 1 = (3^2)^n + 1 = (3^n)^2 + 1 = (2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ không chia hết cho 4.

72. a) Số chính phương tận cùng bằng 1 là bình phương của số tận cùng 1 hay 9, tức là bình phương của số đó có dạng $10a \pm 1$.

Xét $(10a \pm 1)^2 = 100a^2 \pm 20a + 1 = 10(10a^2 \pm 2a) + 1$. Ta thấy $10a^2 \pm 2a$ là số hàng chục của số chính phương. Đó là số cawhnx. Vậy chữ số hàng chục của số chính phương có tận cùng bằng 1 là chữ số chẵn.

b) *Cách 1:* Xét $(10a \pm 2)^2$

Cách 2: Số chính phương tận cùng chẵn thì chia hết cho 4. Giả sử chữ số hàng chục của số chính phương đó là số lẻ thì số chính phương đó tận cùng $14, 34, 54, 74$ hoặc 94 đều không chia hết cho 4. Vậy chữ số hàng chục của số chính phương đó là chữ số chẵn.

73. Biết chữ số hàng chục của số chính phương là 3. Nếu số chính phương đó chẵn thì tận cùng $32, 36$ (để chia hết cho 4). Nếu số chính phương đó lẻ thì tận cùng $33, 37$ (để chia cho 4 dư 1). Nhưng số chính phương không tận cùng $2, 3, 7$. Vậy số chính phương này tận cùng 36.

74. $2n^3 + 3n^2 + n = 2n^3 - 2n + 3n^2 = 2n(n^2-1) + 3n(n+1) = 2n(n-1)(n+1) + 3n(n+1)$ chia hết cho 6 vì mỗi hạng tử chia hết cho 6.

75. $a^3b-ab^3=a^3b-ab-ab^3+ab=b\left(a^3-a\right)-a\left(b^3-b\right)$.

Các số a^3-a và b^3-b đều chia hết cho 6.

76. a) Gọi các số nguyên đó là a và b. Xét hiệu $\left(a^3+b^3\right)-\left(a+b\right)=\left(a^3-a\right)+\left(b^3-b\right)$ chia hết cho 6. Do đó nếu $a+b$ chia hết cho 6 thì a^3+b^3 chia hết cho 6 thì $a+b$ chia hết cho 6.

b) Xết hiệu $\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a+b+c\right)$ và chứng minh rằng hiệu đó chia hết cho 6.

77. Nếu a^3-b^3 chia hết cho 8 thì $\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$ chia hết cho 8. Nhưng a và b là số lẻ nên a^2,ab,b^2 là số lẻ, do đó a^2+ab+b^2 là số lẻ. Vậy $a-b$ chia hết cho 8.

78. Ta có $a^2+ab+b^2=\left(a-b\right)^2+3ab$. Nếu a^2+ab+b^2 chia hết cho 9 thì cũng chia hết cho 3, nên $\left(a-b\right)^2$ chia hết cho 3, suy ra $a-b$ chia hết cho 3 (vì 3 là số nguyên tố). Do đó $\left(a-b\right)^2$ chia hết cho 9.

Theo giả thiết $\left(a-b\right)^2+3ab$ chia hết cho 9. Suy ra $3ab$ chia hết cho 9, do đó ab chia hết cho 3. Do 3 là số nguyên tố nên trong hai thừa số a và b, tồn tại một thừa số chia hết cho 3 chẳng hạn a chia hết cho 3. Nhưng do $a-b$ chia hết cho 3 nên b cũng chia hết cho 3. Vậy ab chia hết cho 9.

79. *Cách 1*. Gọi ba số nguyên liên tiếp là $n-1,n,n+1$. Ta có:

$\left(n-1\right)^3+n^3+\left(n+1\right)^3=3n^3+6n=3n^3-3n+6n+3n=3\left(n^3-n\right)+9n$ chia hết cho 9.

Cách 2. Cũng biến đổi như trên được $3n^3+6n=3n\left(n^2+2\right)$ rồi xét các trường hợp $n=3k,n=3k\pm$.

Cách 3. Trong ba số nguyên liên tiếp, có một số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2. Tổng các lập phương của chúng có dạng $\left(3a\right)^3+\left(3b+1\right)^3+\left(3c-1\right)^3$. Khai triển, ta thấy tổng trên chia hết cho 9.

80. $n^5-5n^3+4n=n\left(n^4-5n^2+4\right)=n\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)=n\left(n+1\right)\left(n-1\right)\left(n+2\right)\left(n-2\right)$, là tích của năm số nguyên liên tiếp.

Trong năm số nguyên liên tiếp, có ít nhất hai bội của 2 (trong đó có một bội của 4), một bội của 3, một bội của 5. Do đó tích của năm số nguyên liên tiếp chia hết cho $8.3.5=120$ (vì các số $8,3,5$ nguyên tố cùng nhau đôi một).

81. $n^3-3n^2-n+3=n^2\left(n-3\right)-\left(n-3\right)=\left(n-3\right)\left(n-1\right)\left(n+1\right)$.

Thay $n=2k+1$ (k nguyên)_ ta được $(2k-2).2k.(2k+2)$ hay $8(k-1).k.(k+1)$, chia hết cho 48 (chú ý rằng tích của ba số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 6).

82. Phân tích thành $n(n+4)(n-2)(n+2)$ rồi thay $n=2k$ được $16k(k+2)(k-1)(k+1)$.

Chú ý rằng tích của bốn số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 24.

83. a) *Cách 1:* Viết biểu thức dưới dạng

$n^2+11n+39=n^2+11n+18+21=(n+9)(n+2)=A$

Ta thấy $n+9$ và $n+2$ có hiệu bằng 7 nên chúng cùng chia hết cho 7, hoặc cùng không chia hết cho 7.

Nếu $n+9$ và $n+2$ cùng chia hết cho 7 thì $(n+9)(n+2)$ chia hết cho 49, nhưng 21 không chia hết cho 49, nên A không chia hết cho 49.

Vậy $n^2+11n+39$ không chia hết cho 49 với mọi số nguyên n.

Chú ý: Trong biến đổi trên, ta đưa biểu thức $n^2+11n+39$ về dạng $(n+a)(n+b)+c$ trong đó $(n-a)-(n+b)=7, a+b=11$.

Như vậy chỉ cần chọn a và b sao cho $a-b=7, a+b=11$. Do đó ta chọn $a=9, b=2$.

Cách 2: Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử có số nguyên n mà $n^2+11n+39$ chia hết cho 49 thì $n^2+11n+39$ chia hết cho 7, do đó n^2+4n+4 hay $(n+2)^2$ chia hết cho 7. Suy ra $n+2$ chia hết cho 7. Vậy $n=7k-2$.

Nhưng khi đó $n^2+11n+39=(7k-2)^2+11(7k-2)+39=49k^2+49k+21$ không chia hết cho 49, Mâu thuẫn.

Vậy $n^2+11n+39$ không chia hết cho 49 với mọi số nguyên n.

b) Viết n^2+n+1 thành $(n+2)(n-1)+3$.

84. Xem bài 43c.

85. a) Để chứng tỏ n^4+4 là hợp số, ta chứng minh rằng n^4+4 phân tích được ra tích của hai thừa số lớn hơn 1. Thêm bớt $4n^2$ vào biểu thức, ta đực:

$n^4+4=(n^2+2n+2)\left[(n-1)^2+1\right]$. Với n >1, cả hai thừa số đều lớn hơn 1.

b) $n^4+4k^4=(n^2+2nk+2k^2)(n^2-2nk+2k^2)$ rồi chứng minh rằng mỗi thừa số đều lớn hơn 1.

86. a) $2^{32}+1$.

b) Dựa vào câu a) rồi chứng minh rằng $\left(1+ab-b^4\right)a^4+1$ chia hết cho $1+ab$.

Do đó $2^{32}+1$ chia hết $1+2^7.5=641$.

87. Đặt $\underbrace{11...1}_{n}=k$ thì $9k+1=\underbrace{99...9}_{n}+1=10^n$

Ta có $A=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n}=\underbrace{11...1}_{n}.10^n+2.\underbrace{11...1}_{n}$

$=k.10^n+2k=k\left(10^n+2\right)=k\left(9k+1+2\right)$

$=3k\left(3k+1\right)$.

Vậy A là tích của hai sô nguyên liên tiếp $\underbrace{33...3}_{n}$ và $\underbrace{33...3}_{n-1}4$.

88. Cũng đặt $\underbrace{11...1}_{n}=k$,

Ta có $k.10^n+k-2k=k.10^n-k=k\left(10^n-1\right)=k.9k=\left(3k\right)^2=\left(\underbrace{33...3}_{n}\right)^2$.

89. Gọi số phải tìm là $\overline{xyz}$ (x,y,z nguyên, $1\le x\le 9;0\le y,z\le 9$).

Ta có $\overline{xyz}=11\left(x+y+z\right)$

$\Rightarrow 100x+10y+z=11x+11y+11z$

$\Rightarrow 89x=10z+y$

$\Rightarrow 89x=\overline{zy}$.

Như vậy $89x$ là số không quá hai chữ số, do đó $x=1,\overline{=89}$, nên $z=8,y=9$.

Số phải tìm là 198. Thử lại $198=11\left(1+9+8\right)$.

90. Gọi số phải tìm $\overline{xxyy}$ (x, y nguyên, $1\le x\le 9,0\le y\le 9$.

Ta có $\overline{xxyy}=\overline{\text{aa}}.\overline{bb}.\overline{cc}$

$\Rightarrow 1100x+11y=11a.11b.11c$

$\Rightarrow 100x+y=121abc$

$\Rightarrow \overline{x0y}=121abc$

Như vậy $\overline{x0y}$ chia hết cho 121. Các bội của 121 có ba chữ số là $121, 242, 363, 484, 605, 726, 847, 968$ trong đó chỉ có số 605 có chữ số hàng chục bằng 0. Vậy $\overline{x0y} = 605$. Suy ra $abc = 5$, do đó trong ba số a, b, c có một số bằng 5, hai số kia bằng 1.

Thử lại $6655 = 11.11.55$

91. a) Ta cần viết tích $(n+1)(n+2)(n+3)...(2n)$ thành một tích trong đó có n thừa số 2. Viết tích trên thành:

$$\frac{1.2.3...(2n)}{1.2.3...n} = \left[1.3.5...(2n-1)\right].\frac{2.4.6...(2n)}{1.2.3...n}.$$

Biểu thức $\frac{2.4.6...(2n)}{1.2.3...n}$ rút gọn thành $\frac{(1.2.3...n).2^n}{1.2.3...n} = 2^n$.

Như vậy $(n+1)(n+2)(n+3)...(2n)$ chia hết cho 2^n.

Chú ý: còn có thể nói rằng tích trên chứa đúng n thừa số 2 vì biểu thức trong dấu móc là tích của các số lẻ nên không chứa thừa số 2 nào.

b) Viết tích $(n+1)(n+2)(n+3)...(2n)$ dưới dang

$$\frac{1.2.3...(3n)}{1.2.3...n} = \left[1.4.7...(3n+1)\right].\left[2.5.8...(3n+2)\right]\frac{3.6.9...(3n)}{1.2.3...n}$$

92. $8.16^n - 8 = 8\left(16^n - 1\right)$ chai hết cho $8.15 = 120$.

93. $\underbrace{100...01}_{4n+1} = 10^{4n+2} + 1 = 100^{2n+1} + 1$ chia hết cho $100 + 1$ (hằng đẳng thức 9) nên là hợp số.

94. $16^n - 1$ chia hết cho 15 (hằng đẳng thức 8).

$16^n - 1 = 16^n + 1 - 2$ không chia hết cho 17, vì $16^n + 1$ chia hết cho 17.

95. $48^{13} = (49-1)^{13} = bs7 - 1$. Vậy 48^{13} chia cho 7 dư 6.

96. a) Với mọi x, ta có $(3x-2)^4 = c_0x^{10} + c_1x^9 + ... + c_9$ cho $x = 1$ được $2^{10} = c_0 + c_1 + ... + c_9$

Vậy tổng của các hệu số bằng 1024.

97. Nếu $n = 3k$ thì $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1$ chia hết cho 7.

Nếu $n = 3k+1$ thì $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2\left(2^{3k} - 1\right) + 1$ không chia hết cho 7.

Nếu $n = 3k+2$ thì $2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4\left(2^{3k} - 1\right) + 3$ không chia hết cho 7.

Vậy $2^n - 1$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi n là bội của 3.

98. Lũy thừa của 7 sát với một số bội số của 100 là $7^4 = 2401$.

Do đó $7^{1990} = 7^{4k+2} = 49.7^{4k} = 49\left(2400+1\right)^k = 49\left(bs100+1\right) = bs100+49$.

Vậy 7^{1990} tận cùng bằng 49

Chương II. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

99. $x \pm 1$.

100. a) Tử bằng $\left(a^2-1+a\right)\left(a^2-1-a\right)$, mẫu bằng $\left(a^2+a-1\right)\left(a^2-a-1\right)$.

Phân thức bằng $\dfrac{a^2+a-1}{a^2+a+1}$, điều kiện $a^2-a-1 \neq 0$

b) Tử bằng $\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(a-c\right)$, Mâu thuẫn $\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-c^2\right)$.

Phân thức bằng $\dfrac{1}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(a+c\right)}$ với a,b,c khác nhau.

c) Với $x<0$ thì $x-1<0$ nên $|x-1| = 1-x, |x| = -x$.

Do đó $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1} = \dfrac{1-x-x+x}{3x^2-3x-x+1} = \dfrac{1-x}{\left(1-x\right)\left(1-3x\right)} = \dfrac{1}{1-3x}$.

d) ta có $\dfrac{16a^2-40ab}{8a^2-24ab} = \dfrac{8a\left(2a-5b\right)}{8a\left(a-3b\right)} = \dfrac{2\dfrac{a}{b}-5}{\dfrac{a}{b}-3} = \dfrac{2\dfrac{10}{3}-5}{\dfrac{10}{3}-3} = 5$

101. Từ $4a^2+b^2 = 5ab \Rightarrow \left(2a+b\right)^2 = 9ab$ và $\left(2a-b\right)^2 = ab$

$M = \dfrac{ab}{4a^2-b^2} = \dfrac{\left(2a-b\right)^2}{\left(2a-b\right)\left(2a+b\right)} = \dfrac{2a-b}{2a+b} \Rightarrow M^2 = \dfrac{1}{9}$ nên $M = \dfrac{1}{3}$ do $M>0$.

102. a) Không nên quy đồng mẫu tất cả cá phân thức. Nên cộng hai phân thức đầu, rồi cộng tiếp vào phân thức thứ ba, …Cuối cùng ta được $\dfrac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}}$.

b) Mẫu của các phân thức lần lượt là. Tách mỗi phân thức thành hiệu của hai phân thức.

Đáp số: $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+5} = \dfrac{5}{a\left(a+5\right)}$.

103. a) Cộng ba phân thức cuối, ta được $\dfrac{4ab+4b-4a}{4-b^2} = \dfrac{4b\left(a+1\right)-4a}{4-b^2}$.

Thay $b=\frac{a}{a+1}$ vào biểu thức trên ta có $\frac{4a-4a}{4-b^2}=0$.

Vậy $M=a$ với điều kiện $b\neq\pm2, a\neq-1$

(điều kiện $b\neq\pm2$ có thể thay bằng $a\neq-\frac{2}{3}$ và $a\neq-2$).

b) Rút gọn N được $\frac{(a+x+1)^2}{2ax}$ rồi thay $x=\frac{1}{a-1}$ vào biểu thức, ta được $N=\frac{a^3}{2(a-1)}$, điều kiện $a\neq0, a\neq1$.

(Khi đó các điều kiện $x\neq, a+x\neq0, a+x\neq1$ thỏa mãn).

104. Áp dụng hằng đẳng thức

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (xem bài 41a).

Theo đề bài

$a^3+b^3+c^3-3abc$ nên $a+b+c=0$ hoặc $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$.

a) Nếu $a+b+c=0$ thì $P=\frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{a+c}{c}=\frac{-c}{b}.\frac{-a}{c}.\frac{-b}{a}=-1$.

b) Nếu $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ thì $a=b=c$ (xem bài 25).

Khi đó $P=(1+1)(1+1)(1+1)=8$.

Vậy $P=-1$ hoặc $P=8$.

105. $\frac{10x-4}{x^3-4x}=\frac{1}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-2}$.

106. $\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2-x+1}$.

107. Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ suy ra $\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$

Do đó $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0 \quad (1)$.

Để chứng tỏ trong ba số a,b,c có hai số đối nhau, ta sẽ chứng minh rằng $(a+b)(b+c)(c+a)=0$. Hãy phân tích vế trái của (1) thành nhân tử.

108. a) Để chứng tỏ trong ba số a,b,c có một số bằng tổng hai số kia, ta sẽ chứng minh: $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=0$.

Từ giả thiết, ta có $\left(a^2+b^2-c^2\right)c+\left(b^2+c^2-a^2\right)a+\left(c^2+a^2-b^2\right)b=2abc$.

Thêm bơt $2abc$, ta được:

$\left(a^2+b^2-c^2+2ab\right)c+\left(b^2+c^2-a^2-2bc\right)a+\left(c^2+a^2-b^2-2ac\right)b=0$

$(a+b+c)(a+b-c)c+(b-c+a)(b-c-a)a+(c-a+b)(c-a-b)b=0$

Đặt $a+b-c$ làm nhân tử chung ở vế trái, ta được:

$$(a+b-c)\left(c^2-a^2+2ab-b^2\right)=0$$

$$(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)=0$$

Suy ra điều phải chứng minh.

b) Trường hợp $a+b-c=0$ thì phân thức đầu bằng -1, hai phân thức sau bằng 1.

Tương tự đối với hai trường hợp còn lại.

109. Nhân hai vế của hằng đẳng thức với x^2+x+1 và chú ý rằng

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=x^4+x^2+1.$$

110. Đặt $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k\neq 0$ thì $x=ak, y=bk, z=ck$.

Do đó:

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(\mathrm{ax}+by+cz)^2}=\frac{\left(a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(a^2k+b^2k+c^2k\right)^2}=\frac{k^2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{k^2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}=1.$$

111. Đặt $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ thì $x=ak, y=bk, z=ck$.

Khi đó $xy+xz+yz=abk^2+ack^2+bck^2=k^2(ab+ac+bc)$. $\quad (4)$

Từ (1) ta có $(a+b+c)^2=1$ hay $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1$.

Do (2) nên $2ab+2ac+2bc=0$ tức là. Thay vào (4) được $xy+xz+yz=0$.

112. Để các ba phân thức có mẫu giống nhau (chẳng hạn $bc+b+1$), ta nhân cả tử và mẫu của phân thức thứ ba với b, phân thức thứ nhất với c, biến đổi tương tự như phân thức thứ ba và chú ý rằng $abc=1$.

113. Đặt $\frac{2y+2z-x}{a}=\frac{2z+2x-y}{b}=\frac{2x+2y-z}{c}=k$.

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$k=\frac{4z+4x-2y}{2b}=\frac{4x+4y-2z}{2c}=\frac{-2y-2z+x}{-a}=\frac{9x}{2b+2c-a}.$$

Tương tự (do hoán vị vòng quanh):

$$k=\frac{9y}{2c+2a-b};k=\frac{9z}{2a+2b-c}.$$

Vậy $\frac{x}{2b+2c-a}=\frac{y}{2c+2a-b}=\frac{z}{2a+2b-c}$.

114. Vì đẳng thức đúng với mọi x,y nên lần lượt cho $x=1,y=0$ và $x=0,y=1$ vào đẳng thức.

115. Từ đẳng thức đã cho, ta có:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=0$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{z^2}{a^2+b^2+c^2}=0.$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)=0.$$

Hãy chứng tỏ rằng mỗi dấu ngoặc đều dương.

116. Gọi S là diện tích tam giác. Ta có $a=\frac{2S}{h_a},b=\frac{2S}{h_b},c=\frac{2S}{h_c}$,

Nên

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(a+b+c)\left(\frac{h_a+h_b+h_c}{2S}\right)=(h_a+h_b+h_c).\frac{a+b+c}{2S}=(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

117. Biến đổi: $\frac{n^4-2n^3+5}{n-2}=n^3+\frac{5}{n-2}$.

Muốn biểu thức có giá trị nguyên thì $n-2$ phải là ước của 5.

Đáp số: $1;3;7$.

118. Xét $1+\frac{1}{n^2+2n}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

Đáp số: $\frac{2(n+1)}{n+2}$.

119. Xét $1+\frac{2}{n^2+3n}=\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}=\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$.

Đáp số: $\frac{3(n+1)}{n+3}$.

120. Nhận xét $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$.

Đặt $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=S$, trước hết tính $2S$, Được $\frac{2n}{2n+1}$.

121. Cần tách mỗi phân số ở vế trái thành hiệu của hai phân số để làm xuất hiện trong biểu thức những số hạng đối nhau. Đó là hiệu của hai phân số nào? Ta xét các hiệu:

$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3},\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4},...$; tổng quát $\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{k(k+1)}$.

Gọi vế trái của đẳng thức phải chứng minh là S.

Do $\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{k(k+1)}=\frac{2}{(k-1)k(k+1)}$ nên

$$2S=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+...+\frac{2}{(n-1)n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n^2+n-2}{2n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{2n(n+1)}.$$

Vậy $S=\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$.

122. Mệnh đề đúng với $n=1$ vì $10-9-1$ chia hết cho 27.

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k$, tức là 10^k-9k-1 chia hết cho 27. Ta có:

$10^{k+1}-9(k+1)-1=10.10^k-9k-10=10\left(10^k-9k-1\right)+81k$ chai hết cho 27.

Vậy 10^n-9n-1 chia hết cho 27 với mọi số tự nhiên $n\geq 1$.

Cách khác: $10^n-9n-1=10^n-1-9n$

$=\underbrace{99...9}_{n}-9n=9\left(\underbrace{11...1}_{n}-n\right)$. Sau đó chứng minh rằng

$\underbrace{11...1}_{n}-n$ chia hết cho 3

(Chú ý rằng n và số có tổng các chữ số bằng n có cùng số dư trong phép chia cho 3).

123. Đẳng thức đúng với $n=1$ vì $1.2=\dfrac{1.2.3}{3}$.

Giả sử đẳng thức đúng với $n=k$, tức là:

$S_k=1.2+2.3+...+k\left(k+1\right)=\dfrac{k\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{3}$.

Ta có $S_{k+1}=S_k+\left(k+1\right)\left(k+2\right)$

$$=\frac{k\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{3}+\left(k+1\right)\left(k+2\right)$$

$$=\left(k+1\right)\left(k+1\right)\left(\frac{k}{3}+1\right)=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)}{3}.$$

Cách khác: $S=1.2+2.3+3.4+...+n\left(n+1\right)$.

Với mục đích làm xuất hiện trong biểu thức các số đối nhau, ta nhân hai vế của đẳng thức với 3, trong đó các thừa số 3 ở vế phải được viết lần lượt dưới dạng các hiệu $3-0, 4-1, 5-2, ..., \left(n-2\right)-\left(n-1\right)$.

$$3S=1.2\left(3-0\right)+2.3\left(4-1\right)+3.4\left(5-2\right)+...+n\left(n+1\right)\left[\left(n+2\right)-\left(n-1\right)\right]$$

$$=1.2.3+2.3.4-1.2.3+3.4.5-2.3.4+...+n\left(n+1\right)\left(n+2\right)-\left(n-1\right)n\left(n+1\right)$$

$$=n\left(n+1\right)\left(n+2\right).$$

Vậy $S=\dfrac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{3}$.

124. $S_{k+1}=S_k+\left(k+1\right)\left[3\left(k+1\right)-1\right]$

$$=k^2\left(k+1\right)+\left(k+1\right)\left(3k+2\right)$$

$$=\left(k+1\right)\left(k^2+3k+2\right)$$

$$=\left(k+1\right)^2\left(k+2\right).$$

125. Giải tương tự như bài trên.

126. *Bài 54, 55.* Phải dự đoán kết quả trước rồi chứng minh bằng quy nạp toán học.

Bài 91a. Mệnh đề đúng với $n=1$ vì $1+1$ chia hết cho 2^1. Giả sử mệnh đề đúng với $n=k$ tức là $(k+1)(k+2)...(2k)$ chia hết cho 2^k. Ta sẽ chứng minh rằng mệnh đề đúng với $n=k+1$, tức là $(k+2)(k+3)...[2(k+1)]$ chia hết cho 2^{k+1}.

Xét $(k+2)(k+3)...(2k)(2k+1)[2(k+1)]=2(k+1)(k+2)...(2k)(2k+1)$ chia hết cho $2.2^k=2^{k+1}$. Vậy mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n\ge 1$.

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

127. a) Thay $x=2$ vào phương trình được $15(m+6)-20=80$ do đó $m=\dfrac{2}{3}$.

b) $m=3$.

128. Nếu nhân hai vế của phương trình với mẫu chung theo đúng thứ tự các bước giải phương trình thì rất phức tạp. Ta thấy rằng nếu cộng 1 vào mỗi phân thức thì các phân thức đều có tử bằng nhau.

$$\left(\frac{x+1}{65}+1\right)+\left(\frac{x+1}{63}+1\right)=\left(\frac{x+1}{61}+1\right)+\left(\frac{x+1}{59}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+66}{65}+\frac{x+66}{63}=\frac{x+66}{61}+\frac{x+66}{59}$$

$$\Leftrightarrow (x+66)\left(\frac{1}{65}+\frac{1}{63}-\frac{1}{61}-\frac{1}{59}\right)=0.$$

Rõ ràng biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai khác 0. Do đó $x+66=0$.

Phương trình có một nghiệm duy nhất $x=-66$.

129. Viết phương trình có dạng:

$$\left(\frac{315-x}{101}+1\right)+\left(\frac{313-x}{103}+1\right)+\left(\frac{311-x}{105}+1\right)+\left(\frac{309-x}{107}+1\right)=0.$$

Đáp số $x=416$.

130. Nếu $a\ne \pm 2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{a+2}$.

Nếu $a=2$ thì phương trình có nghiệm đúng với mọi x.

Nếu $a=-2$ thì phương trình vô nghiệm.

131. Điều kiện $a\neq\pm4$. Sau khi biến đổi được: $(2a-1)x=4(2a-1)$.

Nếu $a\neq\frac{1}{2}$ thì $x=4$.

Nếu $a=\frac{1}{2}$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi x.

132. $x=\frac{3}{4}$ với $a\neq\pm1$.

133. $x=0$ với $a\neq\pm b$.

134. Trừ 1 vào mỗi phân thức ở vế trái, trừ 3 vào vế phải, ta được:

$$(x-a-b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0.$$

Nếu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x=a+b+c$.

Nếu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, phương trình có nghiệm đúng với mọi x.

135. a) $-4;\frac{5}{3}$.

b) nếu $a\neq0$, phương trình có hai nghiệm $-\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{2a}$.

Nếu $a=0$, phương trình có nghiệm $-\frac{2}{3}$.

136. a) $(x-1)(x-2)^2=0$. Nghiệm 1 và 2.

b) Nếu $a\neq0$, phương trình có nghiệm $\frac{2}{a},\ \pm\frac{2}{3}$.

Nếu $a=0$, phương trình có nghiệm $\pm\frac{2}{3}$.

c) $(x+2)(x^2-x+2)=0$. Một nghiệm $x=-2$.

d) Đặt $x-1=a, x+2=b$ thì phương trình có dạng:

$a^3+b^3-(a+b)^3=0$

$\Leftrightarrow a^3+b^3-a^3-b^3-3ab(a+b)=0 \Leftrightarrow ab(a+b)=0.$

Xét $x-1=0; x+2=0; 2x+1=0,$ phương trình có ba nghiệm $1;\ -2;\ -\dfrac{1}{2}.$

137. a) Đặt ẩn phụ $y=x^2+x.$ ta được $y^2+4y-12=0,$ nên $y_1=-6, y_2=2.$

Với $y=-6$ thì $x^2+x+6=0,$ vô nghiệm.

Với $y=2$ thì $x^2+x-2=0$ có hai nghiệm -2 và $1.$

b) Nên nhân các đa thức ở vế trái một cách hợp lý làm xuất hiện những biểu thức chứa ẩn như nhau, từ đó mà đặt ẩn phụ.

Biến đổi phương trình thành $(x^2+x)(x^2+x-2)=24.$

Đặt $x^2+x-1=y$ ta được $(y+1)(y-1)=24.$ Do đó $y=\pm 5.$

Với $y=5$ ta có $x^2+x-1=5$ hay $x^2+x-6=0$. Suy ra $x_1=-3;\ x_2=2.$

Với $y=-5$ ta có $x^2+x-1=-5$ hay $x^2+x+4=0,$ vô nghiệm.

c) $(x^2-9x+14)(x^2-9x+20)=72.$ Đặt $x^2-9x+17=y$ ta được $y=\pm 9$.

Do đó $x_1=1; x_2=8.$

d) 4 và $-8.$

e) Nhân hai vế của phương trình với với 12 được $(6x+7)^2(6x+8)(6x+6)=72.$

Đặt $6x+7=y,$ được $y=\pm 3.$ Nghiệm $-\dfrac{2}{3}$ và $-\dfrac{5}{3}.$

138. a) Thêm $16x^2$ vào hai vế ta được:

$(x^2+4)^2=(4x+1)^2$

$\Leftrightarrow (x^2+4+4x+1)(x^2+4-4x-1)=0.$

Hai nghiệm 1 và 3.

b) $\left(x^2-4x\right)^2+2\left(x^2-4x+4\right)=43.$

Đặt $x^2-4x+4=y\left(y\geq 0\right)$ được $y_1=9;\ y_2=-3$ (loại).

Do đó $x_1=5, x_2=-1.$

c) 5 và 3.

d) Vô nghiệm.

e) $1;-2;-\dfrac{1}{2}.$

139. a) Thay $x=1$ vào phương trình ta được $-4m^2+4m=0,$ tức là $m^2-m=0$ nên $m=0$ hoặc $m=1.$

b) Thay $m^2-m=0$ vào phương trình ban đầu, được $x^3-7x+6=0.$ Phương trình có ba nghiệm: 1 ; 2; -3.

140. Nghiệm của phương trình, nếu có, phải thỏa mãn điều kiện $x\neq 0$ (còn $x^2+x+1,$ $x^2-x+1,$ x^4+x^2+1 luôn luôn dương).

Chú ý rằng $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=x^4+x^2+1$.

Sau khi biến đổi ta được $2x=3.$ Vậy $x=\dfrac{3}{2}$ là nghiệm của phương trình.

141. Sau khi biến đổi ta được $x^2-3x+2=0.$ Phương trình có nghiệm $x=1$ (giá trị $x=2$ bị loại).

142. $x=2$ với điều kiện $b\neq 0, a+b\neq 0.$

143. Nếu $a=0$, phương trình có nghiệm đúng với mọi x, trừ $x=0$ và $x=-10.$

Nếu $a\neq 0,$ phương trình vô nghiệm.

144. Điều kiện của nghiệm, nếu có là $x\neq a, x\neq 3.$

Sau khi biến đổi ta được: $2\left(a+3\right)x=\left(a+3\right)^2$. (1)

a) Nếu $a\neq -3$ thì $x=\dfrac{a+3}{2}.$ Giá trị này là nghiệm của phương trình nếu $\dfrac{a+3}{2}\neq a;\dfrac{a+3}{2}\neq 3$

tức là $a\neq 3.$

b) Nếu $a=-3$ phương trình (1) có dạng $0x=0.$ Phương trình nghiệm đúng với mọi $x\neq\pm 3.$

Kết luận:

Nếu $a\neq\pm 3$, phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{a+3}{2}.$

Nếu $a=-3$, phương trình nghiệm đúng với mọi x trừ $x=3, x=-3.$

Nếu $a=3$, phương trình vô nghiệm.

145. Điều kiện của nghiệm, nếu có, là $x\neq\pm 1.$ Viết phương trình dưới dạng:

$$x-a^2x+a=\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow\ x-a^2x+a=1$$

$$\Leftrightarrow\left(1-a^2\right)x=1-a. \qquad (1)$$

Nếu $a\neq\pm 1$ thì $x=\dfrac{1}{1+a}.$ Giá trị này là nghiệm nếu $\dfrac{1}{1+a}\neq\pm 1$, tức là $a\neq 0, a\neq -2$.

Nếu $a=1$, phương trình (1) có dạng $0x=0$, trình nghiệm đúng với mọi $x\neq\pm 1.$

Nếu $a=-1$, phương trình (1) có dạng $0x=2$,vô nghiệm.

Vậy muốn phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì $a\neq\pm 1,\ a\neq 0, a\neq -2$.

146. Gọi x là kết quả một số sau khi thay đổi. Ta có phương trình:

$\left(x-2\right)+\left(x+2\right)+\dfrac{x}{2}+2x=45.$ Ta được $x=10.$

Các số ban đầu là $8;12;5;20.$

147. Gọi số phải tìm là $\overline{abcde}=x$. Ta có

$$\overline{abcde1}=3.\overline{1abcde}$$
$$\Leftrightarrow 10x+1=3\left(100000+x\right)$$
$$\Leftrightarrow x=42857.$$

148. Gọi vận tốc dự định đi AB là x (km/h). Ta có phương trình:

$$\frac{30}{x+10}+\frac{30}{x-6}=\frac{60}{x}.$$

Ta được $x = 30$. Thời gian ô tô dự định đi AB là: $60 : 30 = 2$ (giờ)

149. 5 giờ và 10 giờ.

150. a) Gọi thời gian nước chảy vào từ lú bể cạn đến lúc mức nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là x giờ.

Trong 1 giờ vòi chảy vào được: $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ bể.

Trong 1 giờ vòi chảy ra được: $\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$ bể

Nếu mở cả hai vòi, lượng nước chảy vào bể trong 1 giờ được: $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ bể.

Trong x giờ đầu, chỉ có vòi chảy vào làm việc nên lượng nước chảy vào bể là: $\frac{2}{3}x$ bể

Trong 2 giờ 42 phút – x giờ (tức 2, 7 – x giờ) còn lại, cả hai vòi làm việc nên lượng nước chảy vào bể là: $\frac{1}{3}\left(2,7 - x\right)$.

Ta có phương trình: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\left(2,7 - x\right) = 1$.

Do đó $x = 0,3$.

Thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mực nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là $0,3$ giờ.

b) Theo đề bài, nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 1, 5 giờ thì mực nước cao 2m. Vậy nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 0, 3 giờ thì mực nước cao: $\frac{2m.0,3}{1,5} = 0,4m$.

Khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là 0, 4m.

151. 2400 quả.

Chương IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

152. Xét hiệu

$$\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{2\left(a^2+b^2\right)-\left(a^2+2ab+b^2\right)}{4}=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{\left(a-b\right)^2}{4}\geq 0.$$

153. Xét hiệu $\left(a^{10}+b^{10}\right)\left(a^2+b^2\right)-\left(a^8+b^8\right)\left(a^4+b^4\right)$ rồi phân tích thành nhân tử được

$a^2b^2\left(a^2-b^2\right)^2\left(a^4+a^2b^2+b^4\right)\geq 0.$

154. Tử dương vì $a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$

Mẫu dương vì $a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$.

155. Ta có $a^2+b^2\geq 2ab, b^2+c^2\geq 2bc, c^2+a^2\geq 2ac$. Cộng từng vế các bất đẳng thức trên.

156. *Cách 1.* Xét hiệu hai vế

$a^2+b^2+c^2+3-2\left(a+b+c\right)=\left(a-1\right)^2+\left(b-1\right)^2+\left(c-1\right)^2$.

Cách 2. Cộng từng vế các bất đẳng thức

$a^2+1\geq 2a,\ b^2+1\geq 2b, c^2+1\geq 2c.$

157. Xét hiệu $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$ mà $b-a>0, ab>0.$

158. a) *Cách 1.* Từ $a+b=1$ suy ra $\left(a+b\right)^2=1$ hay $a^2+2ab+b^2=1\left(1\right)$.

Từ $\left(a-b\right)^2\geq 0$ suy ra $a^2+2ab+b^2\geq 0\ \ \left(2\right)$.

Cộng các vế tương ứng của $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có $2\left(a^2+b^2\right)\geq 1$ nên $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$.

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Cách 2. Đặt $a=\frac{1}{2}+x$ thì $b=1-a=\frac{1}{2}-x$.

Khi đó $a^2+b^2=\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=2x^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}.$

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow x=0\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}.$

b) Đặt $a=\frac{1}{3}+x, b=\frac{1}{3}+y, c=\frac{1}{3}+z.$

Do $a+b+c=1$ nên $x+y+z=0.$

Xét $a^2+b^2+c^2=\left(\frac{1}{3}+x\right)^2+\left(\frac{1}{3}+y\right)^2+\left(\frac{1}{3}+z\right)^2.$

$$=\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x+x^2+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}y+y^2++\frac{1}{9}+\frac{2}{3}z+z^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(x+y+z)+x^2+y^2+z^2$$

$$=\frac{1}{3}+x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}.$$

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow x=y=z=0\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$

c) Đặt $a_1=\frac{1}{n}+x_1, a_2=\frac{1}{n}+x_2,..., a_n=\frac{1}{n}+x_n.$

Do $a_1+a_2+...+a_n=1$ nên $x_1+x_2+...+x_n=0.$

Sau đó giải tương tự như câu b)

d) Giải tương tự như câu c)

159. Bình phương hai vế của $a+b>2$ (vì hai vế đều dương)

Ta được $a^2+2ab+b^2>4$ $\quad(1)$

Mặt khác $(a-b)^2\ge0$ nên $a^2-2ab+b^2\ge0.$ (2)

Cộng các vế tương ứng của (1) và (2).

160. Nhân tử và mẫu của $\frac{x-y}{x+y}$ với $x+y>0.$

161. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với $(a+b)^2<(1+ab)^2$.

Xét hiệu: $(1+ab)^2-(a+b)^2=1+a^2b^2-a^2-b^2=(1-a^2)(1-b^2).$

Do $|a|<1, |b|<1$ nên $a^2<1, b^2<1,$ suy ra

$$(1-a^2)(1-b^2)>0.$$

Vậy $(a+b)^2<(1+ab)^2$, do đó $|a+b|<|1+ab|.$

162. Xét $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+9=(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+9=A.$

Đặt $x^2-7x+9=y$ thì $A=(y-3)(y+3)+9=y^2\ge 0.$

163. $4a(a+b)(a+1)(a+b+1)+b^2=4(a^2+ab+a)(a^2+ab+a+b)+b^2.$

Đặt $a^2+ab+a=m$ rồi biến đổi biểu thức thành bình phương của một đa thức.

164. Gọi $A=x^8-x^5+x^2-x+1.$

Cách 1. Xét $x\ge 1$ và viết A dưới dạng $x^5(x^3-1)+x(x-1)+1.$

Xét $x<1$ và viết A dưới dạng $x^8+x^2(1-x^3)+(1-x).$

Cách 2. $2A=2x^8-2x^5-2x^2-2x+2=(x^4-x)^2+(x-1)^2+x^8+1>0.$

165. a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác gợi cho ta các bất đẳng thức

$$a+b>c, c+a>b, c+b>a.$$

Xét hiệu $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$, phân tích thành nhân tử và sử dụng các bất đẳng thức trên.

166. Xét hiệu

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2-a^3-b^3-c^3$$

$$=a\left[(b-c)^2-a^2\right]+b\left[(c-a)^2-b^2\right]+c\left[(a+b)^2-c^2\right]$$

rồi phân tích thành nhân tử.

167. a) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}\ge 0$ vì $ab>0.$

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow a=b.$

b) Xét $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$$=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$$

$$=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right).$$

Do a,b,c dương nên theo câu a) ta có $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2.$

Do đó $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9.$

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow a=b,\ b=c, c=a \Leftrightarrow a=b=c.$

c) Trong bất đẳng thức $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$ với $a,b,c>0$ (câu b).

thay $a=y+z,\ b=x+z,\ c=x+y$ ta được:

$$2(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\right)\ge 9$$

$$\Rightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\right)\ge \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{x+z}+\frac{x+y+z}{x+y}\ge \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{x+z}+1+\frac{z}{x+y}+1\ge \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\ge \frac{3}{2}.$$

Xảy ra đẳng thức $y+z=x+z=x+y \Leftrightarrow x=y=z$.

168. *Cách 1.* Đặt $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}=A$.

Để chứng minh $A<1$, ta xét một biểu thức trung gian B sao cho $A<B<1$ và biểu thức B có thể rút gọn dễ dàng. Ta thấy:

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2},\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3},\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4},...,\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}$$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}<1$ (xem ví dụ 29).

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2. Chọn biểu thức trung gian

$B=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+...+\frac{1}{n^2-1}$ thì $A<B$.

Còn $B=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(n-1)(n+1)}$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-...-\frac{1}{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{3}{4}.$$

Vậy $A<\frac{3}{4}$.

169. Nếu họn biểu thức trung gian là

$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+...+\frac{1}{(2n-1)2n}$ thì rút gọn rất khó.

Cách 1. Đặt $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}$.

Chọn biểu thức trung gian

$B=\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{4^2-1}+\dfrac{1}{6^2-1}+...+\dfrac{1}{(2n)^2-1}$. Dễ thấy $A<B$, còn

$B=\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$ (xem bài 120).

Vậy $A<\dfrac{n}{2n+1}<\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

Cách 2. $A=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{6^2}+...+\dfrac{1}{(2n)^2}$.

$=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2.2^2}+\dfrac{1}{2^2.3^2}+...+\dfrac{1}{2^2.n^2}$

$=\dfrac{1}{2^2}\left(1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{n^2}\right)$

Theo bài 168 thì $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{n^2}<1$.

Do đó $A<\dfrac{1}{4}(1+1)=\dfrac{1}{2}$.

Chú ý: có thể giải các bài 168, 169 bằng phương pháp quy nạp toán học.

170. a) Từ $a+b+c>\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ với $a,b,c>0$.

Ta có: $abc(a+b+c)>bc+ac+ab\ (1)$.

Xét $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-ab-bc-ca+a+b+c-1$

$=(a+b+c)-(ab+bc+ca)>0$ do (1).

b) Xét $(a-1)(b-1)(c-1)$ dương nên số thừa số âm chẵn, tức là trong các số $a-1,b-1,c-1$ có một số dương hoặc ba số dương.

Trường hợp $a-1,b-1,c-1$ đều dương thì $a>1,b>1,c>1$ nên $abc>1$, trái với giả thiết $abc=1$. Vậy trong các số $a-1,b-1,c-1$ chỉ có một số dương, còn hai số âm, tức là trong ba số a,b,c có một số lớn hơn 1, hai số nhỏ hơn 1.

171. a) Chú ý rằng

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

b) Ta có:

$$(a+b)^2\ge 4ab$$
$$(b+c)^2\ge 4bc$$
$$(c+a)^2\ge 4ca$$

Vì hai vế của bất đẳng thức trên đều không âm nên nhân từng vế ta được

$$\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2\ge\left[8abc\right]^2.$$

Vì các biểu thức trong dấu ngoặc vuông đều không âm nên

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc.$$

c) Chú ý rằng $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3abc(a+b)(b+c)(c+a)$ (xem bài 41).

172. a) Với mọi x ta có:

$$(a_1x-b_1)^2\ge 0\Rightarrow a_1^2x^2-2a_1b_1x+b_1^2\ge 0$$

$$(a_2x-b_2)^2\ge 0\Rightarrow a_2^2x^2-2a_2b_2x+b_2^2\ge 0$$

…

$$(a_nx-b_n)^2\ge 0\Rightarrow a_n^2x^2-2a_nb_nx+b_n^2\ge 0$$

Cộng các vế tương ứng của các bất đẳng thức trên ta được:

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)x^2-2\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)x+\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\ge 0.$$

Tức là $Ax^2-2Cx+B\ge 0\ (1)$.

b) Vì (1) đúng với mọi x nên thay $x=\frac{C}{A}$ vào (1) ta được:

$$A\frac{C^2}{A^2}-2\frac{C^2}{A}+B\ge 0$$

$$\Rightarrow\frac{C^2}{A}+B\ge\frac{2C^2}{A}$$

$\Rightarrow C^2 + AB \geq 2C^2$ (vì $A > 0$)

$\Rightarrow AB \geq C^2$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a_1x = b_1, a_2x = b_2, ..., a_nx = b_n$

Tức là $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = ... = \frac{b_n}{a_n}$ (quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử bằng 0).

Chú ý: Bất đẳng thức trên được gọi là bất đẳng thức Svac – Bu – nhi – a – cốp – xki.

Có thể chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp toán học.

173. Giả sử 2^{1982} viết trong hệ thập phân có x chữ số. Số nhỏ nhất có x chữ số là 10^{x-1}, số nhỏ nhất có $x+1$ chữ số là 10^x. Do đó: $10^{x-1} < 2^{1982} < 10^x \quad (1)$

Giả sử 5^{1982} có y chữ số. Ta có: $10^{y-1} < 5^{1982} < 10^y \quad (2)$

Số $2^{1982}, 5^{1982}$ viết liên tiếp tạo thành số có $x+y$ chữ số. Ta cần tìm $x+y$

Nhân từng vế của (1) và (2) (vì hai vế đều dương ta được):

$$10^{x-1}.10^{y-1} < 2^{1982}.5^{1982} < 10^x.10^y$$

$$\Rightarrow x+y-2 < 1982 < x+y.$$

Vì $x+y$ nguyên nên $1982 = x+y-1$. Do đó $x+y = 1983$

Vậy viết liên tiếp kết quả của các số $2^{1982}, 5^{1982}$ ta được số có 1983 chữ số.

174. Bất đẳng thức đúng với $n = 5$ vì $2^5 > 5^2$

Giả sử $2^k > k^2$ với $k \geq 5$. Ta sẽ chứng minh $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Xét $2^{k+1} - (k+1)^2$

$$= 2.2^k - k^2 - 2k - 1 > 2k^2 - k^2 - 2k - 1 \quad \left(2^k > k^2\right)$$

$$= k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 > 0 \quad (k \geq 5)$$

b) Bất đẳng thức đúng với $n = 2$ vì $S_2 = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k$ tức là $S_k>\frac{13}{24}$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức với $n=k+1$, tức là $S_{k+1}>\frac{13}{24}$.

Ta có $S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$.

$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2(k+1)}$

Do đó $S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}>0.$

Suy ra $S_{k+1}>S_k$, mà $S_k>\frac{13}{24}$. Vậy $S_{k+1}>\frac{13}{24}$.

175. a) $A=2(x-5)^2+3\ge 3$. Do đó $min\,A=3\Leftrightarrow x=5$.

b) $B=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}\ge -\frac{1}{8}$. Do đó $min\,B=-\frac{1}{8}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$.

c) $C=-5\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{9}{5}\le\frac{9}{5}$. Do đó $max\,C=\frac{9}{5}\Leftrightarrow x=-\frac{2}{5}$.

176. a) Rút gọn $A=\frac{(x+2)^2}{x^2+4}$. Do đó $min\,A=0\Leftrightarrow x=-2$.

b) $B=\frac{1}{2x-x^2-4}=-\frac{1}{x^2-2x+4}=-\frac{1}{(x-1)^2+3}$

Ta có $(x-1)^2\ge 0\Rightarrow (x-1)^2+3\ge 3$

$\Rightarrow\frac{1}{(x-1)^2+3}\le\frac{1}{3}\Rightarrow -\frac{1}{(x-1)^2+3}\ge -\frac{1}{3}$

$min\,B=\frac{-1}{3}\Leftrightarrow x=1$.

c) $C=\frac{3x^2+6x+10}{x^2+2x+3}=3+\frac{1}{x^2+2x+3}=3+\frac{1}{(x+1)^2+2}$

$max C = 3,5 \Leftrightarrow x = -1.$

177. a) *Cách 1.* $A = \dfrac{4x^2 - 2x + 1}{x^2} = 4 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 4 - 2y + y^2$ với $y = \dfrac{1}{x}.$

Ta có $A = \left(y - 1\right)^2 + 3 \geq 3,$ do đó $min A = 3 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = 1.$

Cách 2. $A = \dfrac{4x^2 - 2x + 1}{x^2} = \dfrac{3x^2 + x^2 - 2x + 1}{x^2} = 3 + \left(\dfrac{x - 1}{x}\right)^2 \geq 3.$

$min A = 3 \Leftrightarrow x = 1.$

b) *Cách 1.* $B = \dfrac{2x + 1}{x^2} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 2y + y^2$ với $y = \dfrac{1}{x}.$

$B = \left(y + 1\right)^2 - 1 \geq -1,$ do đó $min B = -1 \Leftrightarrow y = -1 \Leftrightarrow x = -1.$

Cách 2. $B = \dfrac{2x + 1}{x^2} = \dfrac{\left(x + 1\right)^2 - x^2}{x^2} = \left(\dfrac{x + 1}{x}\right)^2 - 1 \geq -1.$

$min B = -1 \Leftrightarrow x = -1.$

c) $min C = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = 3.$

d) $max D = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = 1.$

178. a) $A = \dfrac{3x^2 + 14}{x^2 + 4} = \dfrac{3(x^2 + 4) + 2}{x^2 + 4} = 3 + \dfrac{2}{x^2 + 4} \leq 3,5$

$\max A = 3,5 \Leftrightarrow x = 0$

b) $B = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2} = \dfrac{x^2 + 2 - x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2} = 1 - \dfrac{(x - 1)^2}{x^2 + 4} \leq 1$

$\max B = 1 \Leftrightarrow x = 1$

179. a) $\min A = 3 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5$

b) $B = (x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x - 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$

$min B = -36 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = -5$

c) $C=(x^2-x+1)^2$, Chú ý rằng $x^2-x+1>0$ nên $(x^2-x+1)^2{}_{\min}\Leftrightarrow(x^2-x+1)_{\min}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$min\ C=\frac{9}{16}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Chú ý rằng $C=(x^2-x+1)^2\ge 0$ nhưng giá trị $C=0$ không đạt được.

d) $D=(x-1)^2+(y+2)^2\ge 0$

$\min D=0\Leftrightarrow x=1; y=-2$

180. Cộng từng vế các đẳng thức $x+5y=21$ và $2x+3z=51$,

Ta được $3(x+y+z)+2y=72$. Như vậy $3(x+y+z)$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $2y$ nhỏ nhất.

Vì $y\ge 0$ nên $2y$ nhỏ nhất bằng $0\Leftrightarrow y=0$. Khi đó $x=21,\ z=3$

$3(x+y+z)$ lớn nhất bằng 72

Vậy x + y +z lớn nhất bằng 24 $\Leftrightarrow x=21, y=0, z=3$

181. a) Xét hằng đẳng thức $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$. Nếu $x+y=k$ (hằng số) thì

$4xy=k^2-(x-y)^2\le k^2$

Vậy xy lớn nhất bằng $\frac{k^2}{4}$ khi $x=y$

b) A = $x^3(16-x^3)$. Hai số x^3 và 16 – x^3 có tổng không đổi (bằng 16) nên có giá trị lớn nhất khi chúng bằng nhau. Giải phương trình $x^3=16-x^3$, ta được $x=2$.

Vậy với x = 2 thì A đạt giá trị lớn nhất bằng 64.

182. a) Xét hằng đẳng thức $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$. Nếu xy = k (hằng số) thì $(x+y)^2\ge 4k$

Vì x, y > 0 nên $x+y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (x+y)^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $x=y$.

b) $B=\frac{4x^2+1}{x}=4x+\frac{1}{x}$. Với $x>0$ thì $4x$ và $\frac{1}{x}$ là hai số dương, tích của chúng bằng 4, không đổi. Do đó tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi 4x = $\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (vì $x>0$)

c) Cách 1: Viết biểu thức đã cho thành

$$\frac{x^2+15x+16}{3x}=\frac{x}{3}+5+\frac{16}{3x}=5+\left(\frac{x}{3}+\frac{16}{3x}\right)$$

Sau đó lập luận như câu b)

Cách 2: Viết biểu thức đã cho thành $\frac{x^2+15x+16}{3x}=\frac{x^2-8x+16+23x}{3x}=\frac{(x-4)^2}{3x}+\frac{23}{3}$

Vì $3x > 0$ nên $\frac{(x-4)^2}{3x}\ge 0$ (xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = 4$)

Từ đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng $\frac{23}{3}$ khi và chỉ khi $x = 4$

Chú ý: Nếu viết biểu thức thành $\frac{x^2+8x+16+7x}{3x}=\frac{(x+4)^2}{3x}+\frac{7}{3}$ rồi kết luận giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng $\frac{7}{3}$ khi $x = -4$ thì không đúng, vì đề bài cho x > 0

183. Áp dụng kết quả của các bài 181, 182.

184. Gọi độ dài hai cạnh của hình chữ nhật vuông góc với mặt tường là x (mét), cạnh song song với mặt tường dài $40 - 2x$ (mét)

Tìm giá trị lớn nhất của $S = x.(40-2x)$ được:

$Max\,S = 200 \Leftrightarrow x = 10$

Hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng $200m^2$ khi chiều rộng bằng $10m$, chiều dài bằng $20m$.

185. Gọi độ dài các phần bị chia ra là x, y, z (cm) thì diện tích các hình vuông tương ứng là x^2, y^2, z^2 (cm^2)

Ta có: $x + y + z = 12$

Cần tìm giá tri nhỏ nhất của $x^2+y^2+z^2$ (xem bài 158d)

186. Gọi số có hai chữ số là $\overline{ab}$ $\left(1\le a\le 9; 0\le b\le 9\right)$

Tỉ số giữa số đó với tổng các chữ số của nó bằng:

$$k=\frac{10a+b}{a+b}=\frac{a+b+9a}{a+b}=1+\frac{9a}{a+b}=1+\frac{9}{1+\frac{b}{a}}$$

a) k lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{9}{1+\dfrac{b}{a}}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ 1+ $\dfrac{b}{a}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{b}{a}$ nhỏ nhất$\Leftrightarrow$ b = 0, a $\neq 0$

Vậy k lớn nhất khi số có hai chữ số là 10, 20, 30, … 90. Lúc đó tỉ số k bằng 10.

b) Tương tự như trên, k nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{b}{a}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $b = 9,\ a = 1$.

Số phải tìm là 19, tỉ số k bằng $19:(1+9)=1,9$

187. a) $A=\dfrac{1}{x+2}$ với $x\neq -2$

$A > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2}>0$ và $x\neq -2 \Leftrightarrow x > -2$

b) $B=-\dfrac{1}{x+2}$với $x\neq -2$

$B < 0 \Leftrightarrow x > 2$

188. Nếu $a > b$ thì $x>\dfrac{a+b}{a-b}$

Nếu $a < b$ thì $x<\dfrac{a+b}{a-b}$

Nếu $a = b$ thì $0x > 2b$, nghiệm đúng với mọi x nếu $b < 0$, vô nghiệm nếu $b\geq 0$

189. Do $a > 1$nên nhân hai vế của bất phương trình với số dương a, ta được:

$x+a^2>\text{ax}+a \Leftrightarrow x-\text{ax}>\text{a}-\text{a}^2 \Leftrightarrow x(1-a)>a(1-a) \Leftrightarrow x<a$ (vì $1-a<0$)

190. Nhân hai vế của bất phương trình với số dương$(a-1)(a+1)$

Đáp số $x > 1$

191. Điều kiện để bất phương trình có nghĩa là $a\neq 0$

Ở bài này cũng không nên nhân hai vế của bất phương trình với a vì phải xét hai trường hợp $a > 0$và $a < 0$. Nên viết bất phương trình đã cho thành:

$$(a+1)x+x-\frac{1}{a}>\frac{1}{a} \Leftrightarrow (a+2)x>\frac{2}{a}$$

Nếu $a<2$ thì $x>\dfrac{2}{a(a+2)}$

Nếu $a > 2$ $(a \neq 0)$ thì $x < \dfrac{2}{a(a+2)}$

Nếu $a = 2$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

192. a) $3 < x < 4$; b) $x > 5$

193. a) Giải bất phương trình $0 \le \dfrac{3x+7}{12} - x < 1$ với x là số nguyên, ta được: $-\dfrac{5}{9} < x \le \dfrac{7}{9}$ và $x \in Z$, do đó $x = 0$

b) $x = 1$

c) Giải bất phương trình $0 \le \dfrac{3x+1}{5} - (2x-1) < 1$ (1) với $2x - 1 \in Z$ (2)

Nghiệm của (1) là $\dfrac{1}{7} < x \le \dfrac{6}{7}$. Từ đó $-\dfrac{5}{7} < 2x - 1 \le \dfrac{5}{7}$

Do (2) nên $2x - 1 = 0$. Vậy $x = \dfrac{1}{2}$

194. $x = -2$

195. Cách 1: hai số có giá trị tuyệt đối bằng nhau khi chúng bằng nhau hoặc đối nhau. Xét hai trường hợp:

$x + 3 = 5 - x$, được $x = 1$

$x + 3 = x - 5$, vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Cách 2: Vì hai vế không âm nên bình phương hai vế ta được:

$x^2 + 6x + 9 = 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow 16x = 16 \Leftrightarrow x = 1$

196. $x = -\dfrac{1}{2}$

197. $x_1 = -\dfrac{1}{2}; x_2 = \dfrac{3}{2}$

198. $x = 2$

199. Xét các khoảng $x < 1$; $1 \le x \le 2; 2 < x \le 3; x > 3$

Nghiệm của phương trình là $1 \le x \le 2; x = 5$

200. a) Giải $-7 < 2x + 3 < 7$, được $5 < x < 2$

b) Giải $-x < 2x - 3 < x$, được $1 < x < 3$

201. a) Giải $2x - 3 > 5$ hoặc $2x - 3 < -5$. Đáp số $x > 4$; $x < 1$.

b) $x > 7$; $x < \frac{5}{3}$

202. $x < \frac{1}{2}$

203. $x < 0$; $x < 6$

204. $4 \le x \le 9$

205. $-5 \le x \le 0$

206. Đưa về dạng $\frac{x+12}{x+2} \le 0$. Đáp số: $-12 \le x < -2$

207. $x < 4$; $x > 2$

PHẦN ĐỀ THI

208. $P = 7^{343} : 7^{216} = 7^{127} = 7^{4.31+3} = 7^{4k+3} (k = 31) = (7^4)^k . 7^3$ mà $7^4 = 2401$ nên $\left(7^4\right)^k$ tận cùng bằng 1. Còn $7^3 = 343$ tận cùng bằng 3. Do đó P có tận cùng bằng 3.

209. Cách 1:

$$z^2 + y(2x - y) - x^2 = z^2 + 2xy - y^2 - x^2 = z^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = z^2 - (x - y)^2 = (z + x - y)(z - x + y)$$

Do đó biểu thức chia hết cho $x - y + z$

Cách 2: $z^2 + y(2x - y) - x^2 = z^2 + 2xy - y^2 - x^2$

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rl} - & z^2 + 2xy - y^2 - x^2 \\ & z^2 + xz - yz \\ \hline - & 2xy - y^2 - x^2 - xz + yz \\ & xy - y^2 \qquad\quad + yz \\ \hline - & xy - x^2 \qquad\quad + xz \\ & xy - x^2 \qquad\quad + xz \\ \hline & 0 \end{array} & \begin{array}{l} x - y + z \\ \hline z + y - x \end{array}
\end{array}$$

Do đó biểu thức $z^2 + y(2x - y) - x^2$ chia hết cho $x - y + z$

210. Chia đa thức x^4+ax^2+bx+c cho $\left(x-3\right)^3$ được thương là $x+9$ và còn dư $\text{ax}^2+54x^2+bx-216x+243+c$

Muốn cho đa thức x^4+ax^2+bx+c chia hết cho $(x-3)^3$ thì số dư phỉ bằng 0, tức là $x^2(a+54)+x(b-216)+243+c=0$ với mọi x. Từ đó suy ra

$a+54=0$ hay $a=-54$

$b-216=0$ hay $b=216$

$243+c=0$ hay $c=-243$

211. Thực hiện phép chia:

$$\begin{array}{rl|l} - & x^3-3x^2-3x-1 & x^2+x+1 \\ & x^3+x^2+x & \overline{\text{x} - 4} \\ \hline - & -4x^2-4x-1 & \\ & -4x^2-4x-4 & \\ \hline & 3 & \end{array}$$

Suy ra giá trị của x^3-3x^2-3x-1 chia hết cho giá trị của x^2+x+1, khi 3 chia hết cho x^2+x+1Do đó: $x^2+x+1=\pm3$ hoặc $x^2+x+1=\pm1$

Biến đổi $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$, suy ra $x^2+x+1>0$ với mọi x

Vậy loại trường hợp $x^2+x+1=-3$ và $x^2+x+1=-1$

a) Từ $x^2+x+1=3$, suy ra $x^2+x-2=0$ Do đó $x^2+x-2=(x-1)(x+2)=0$. Vậy $x=1$ hoặc $x=-2$.
b) Từ $x^2+x+1=1$, suy ra $x^2+x=0\Leftrightarrow x\left(x+1\right)=0\Leftrightarrow$. Vậy $x=0$ hoặc $x=1$.
c) Trả lời có 4 giá trị nguyên của x: $x=\pm1$; $x=0$; $x=-2$

212. $a^4+8a^3+14a^2-8a-15$

$$\begin{aligned}
&=a^4+8a^3+16a^2-a^2-8a-16-a^2+1\\
&=(a^4+8a^3+16a^2)-(a^2+8a+16)-(a^2-1)\\
&=(a^2+4a)^2-(a+4)^2-(a^2-1)\\
&=a^2(a+4)^2-(a+4)^2-(a^2-1)\\
&=(a+4)^2(a^2-1)-(a^2-1)\\
&=(a^2-1)\left[(a+4)^2-1\right]\\
&=(a-1)(a+1)(a+3)(a+5)
\end{aligned}$$

213. Trước hết phân tích đa thức đã cho thành nhân tử:

$$\left(a^2+3a+1\right)^2-1=(a^2+3a+1+1)(a^2+3a+1-1)$$
$$=(a^2+3a+2)(a^2+3a)$$
$$=(a+2)(a+1)(a+3)a$$
$$=a(a+1)(a+2)(a+3)$$

Như vậy đa thức đã cho là một tích của bốn số tự nhiên liên tiếp.

Ta biết rằng:

a) Trong ba số tự nhiên liên tiếp ắt có một số chia hết cho 3, vậy đa thức đã cho chia hết cho 3.
b) Trong bốn số tự nhiên liên tiếp bao giờ cũng có hai số chẵn liên tiếp nên một trong hai số chia hết cho 2 và số còn lại sẽ chia hết cho 4, vậy đa thức đã cho chia hết cho 8.
c) Nhưng (3, 8)=1 nên tích của bốn số ự nhiên liên tiếp luôn luôn chia hết cho 24, do đó $\left(a^2+3a+1\right)^2-1$ chia hết cho 24.

214.Gọi hai số l là $2p+1$ và $2q+1$với p, q là hai số nguyên.

Ta phải chứng minh $\left(2p+1\right)^2-(2q+1)^2$ chia hết cho 8.

Thực vậy:

$$\left(2p+1\right)^2-(2q+1)^2=4p^2+4p+1-4q^2-4q-1=4p(p+1)-4q(q+1)$$

$p\left(p+1\right)$ cũng như $q\left(q+1\right)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2.

Vậy $4p\left(p+1\right)$ và $4q\left(q+1\right)$ chia hết cho 8 và biểu thức đã cho chia hết cho 8

215. Ta có: $10^n-1=\underbrace{99...9}_{n\,\text{chöõ soá}}$

Vậy $10^n+18n-1=\underbrace{99...9}_{n\,\text{chöõ soá}}+9.2n$

$$=9.(\underbrace{11...1}_{n\,\text{chöõ soá}}+.2n)$$

Tích này chia hết cho 9 vì một thừa số là 9. cần chứng minh tổng trong ngoặc chia hết cho 3. Biến đổi tổng trong ngoặc:

$$\underbrace{11...1}_{n\,\text{chöõ soá}}+2n=\underbrace{11...1}_{n\,\text{chöõ soá}}-n+3n$$

Số n và số có tổng chữ số bằng n có cùng số dư trong phép chia cho 3 (theo dấu hiệu chia hết cho 3) nên $\underbrace{11...1}_{n\ chöõ\ soá} - n$ chia hết cho 3.

Vậy $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27

216. Bằng cách thêm, bớt hạng tử có:

$$m = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2+2)^2 - (2a)^2$$
$$= (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$$
$$= \left[(a+1)^2 + 1\right]\left[(a-1)^2 + 1\right]$$

Giá trị nhỏ nhất của thừa số th nhất là 1 nếu $a = -1$, giá trị nhỏ nhất của thừa số thứ hai là 1 nếu $a = 1$. Còn trong tất cả các trường hợp khác thì tích lớn hơn 1.

Vậy ta có thể nói rằng ngoài trường hợp $a = 1$ và $a = -1$ (khi đó m=5) thì m có thể phân tích thành tích của hai thừa số lớn hơn 1, cho nên m không thể là số nguyên tố.

217. $25n^4 + 50n^3 - n^2 - 2n = n(25n^3 + 50n^2 - n - 2)$
$$= n(n+2)(25n^2 - 1) = n(n+2)24n^2 + n(n+2)(n^2 - 1)$$
$$= 24n^3(n+2) + (n-1)n(n+1)(n+2)$$

Biểu thức cuối cùng này có số hạng thứ nhất chia hết cho 24. Còn số hạng thứ hai là tích của bốn số nguyên liên tiếp phải chia hết cho 1. 2. 3. 4 =24

Vậy đa thức $25n^4 + 50n^3 - n^2 - 2n$ chia hết cho 24.

218. Nhóm năm số hạng rồi đặt thừa số chung của từng nhóm:

$$2^0 + 2^2 + 2^2 + ... + 2^{5n-3} + 2^{5n-2} + 2^{5n-1}$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^{5.2}(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) +$$
$$... + 2^{5.(n-1)}(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$
$$= (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(1 + 2^5 + 2^{5.2} + ... + 2^{5(n-1)})$$
$$= 31.(1 + 2^5 + 2^{5.2} + ... + 2^{5(n-1)})$$

Vậy $2^0 + 2^2 + 2^2 + ... + 2^{5n-3} + 2^{5n-2} + 2^{5n-1}$ chia hết cho 31

219. Trước hết phân tích đa thức đã cho: $a^6 - b^6 = (a^2 - b^2)\left[(a^2 - b^2)^2 + 3a^2b^2\right]$

Vì a và b không chia hết cho 3, cho nên:

$a = 3p \pm 1, b = 3q \pm 1$

$a^2 = 3p' + 1; b^2 = 3q' + 1$

ta thấy rằng cả hai thừa số đều chia hết cho 3 nên tích chia hết cho 9.

Vậy a và b không chia hết cho 3 thì $a^6 - b^6$ chia hết cho 9

220. Trước hết, ta biến đổi đa thức đã cho:

Dựa vào tính chất chia hết của một tổng cho một số, ta cần chứng minh $(a+1)(4a-1)$ cũng chia hết cho 6. Đặt A= $(a+1)(4a-1)$

- Nếu $a = 2k$ thì A = $(2k+1)(8k-1)$ Cả hai thừa số của A đều lẻ nên tích cũng lẻ. Một số lẻ không chia hết cho 6 nên A không chia hết cho 6.

- Nếu $a = 3k$ thì A = $(3k+1)(12k-1) = 36k^2 + 9k - 1$. Ta thấy 36k^2 chia hết cho 6, nhưng 9k-1 không chia hết cho 6. Vậy A không chia hết cho 6.

- Nếu $a = 6k + 1$ thì $A = (6k+2)(24k+3) = 144k^2 + 66k + 6$. Các số hạng của A chia hết cho 6 nên A chia hết cho 6.

- Nếu $a = 6k - 1$ thì $A = 6k(24k-5)$. Có một thừa số chia hết cho 6 nên A chia hết cho 6.

Vậy $4a^2 + 3a + 5$ chỉ chia hết cho 6 nếu a là một số nguyên không chia hết cho 2 và cũng không chia hết cho 3.

221. Giả sử được, ta gọi số lẻ bất kì là $2a+1$ và có:

$2(2a+1) = b^2 - c^2 = (b+c)(b-c)$ với b, c là những số nguyên

Ta thấy $2(2a+1)$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 do đó $(b+c)(b-c)$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 (1)

a) Nếu b và c là những số chẵn thì $(b+c)$, $(b-c)$ chẵn, do đó $(b+c)(b-c)$ cũng chẵn và chia hết cho 4, điều này mâu thuẫn với (1)
b) Nếu b chẵn, c lẻ (hoặc ngược lại) thì $(b+c)$, $(b-c)$ lẻ, do đó $(b+c)(b-c)$ lẻ và không chia hết cho 2. Điều này mâu thuẫn với (1)
c) Nếu b và c là những số lẻ thì $(b+c)$, $(b-c)$ chẵn và $(b+c)(b-c)$ chi hết cho 4. Điều này mâu thuẫn với (1)

Vậy hai lần của một số lẻ bất kì không thể là hiệu bình phương của hai số nguyên.

222. Giải tương tự bài 22. Đáp số 8;9;10

223. Giải tương tự bài 72.

224. Số tận cùng bằng 5 có dạng $10a + 5$ (a là số thực)

Xét $n^2 = (10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25$

Vậy n^2 tận cùng bằng 25, còn số trăm là số chẵn vì a(a+1) là tích của hai số nguyên liên tiếp, nên n^2 không thể tận cùng bằng 125.

225. Gọi hai số đó là a và b, ta có a + b chia hết cho 3.

Ta có $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$= (a+b) \leq \left[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab \right]$

$= (a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab \right]$

Chia hết cho 9.

226. a) Đáp số:

b) Đáp số:

227. . $P = \left[(a^2+b^2) + (c^2+d^2) - 2(ac+bd) \right](a^2+b^2) - (ad+-bc)^2$

$= (a^2+b^2)^2 - 2(a^2+b^2)(ac+bd) + (c^2+d^2)(a^2+b^2) - (ad-bc)^2$

Biến đổi hai hạng tử cuối thành (ac + bd)^2, do đó:

$P = \left[(a^2+b^2) - 2ac + bd) \right]^2 = (a^2 + b^2 - ac - bd)^2$

Biến đổi hai hạng tử cuối thành (ac + bd)^2, do đó:

228. Ta có: $\left(x + y\right)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\left(x+y\right)$ nên:

$1 = a + 3xy \Rightarrow xy = \dfrac{1-a}{3}$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= x^5 + y^5 + x^2y^3 + x^3y^2 - x^2y^3 - x^3y^2 \\ &= x^2(x^3+y^3) + y^2(x^3+y^3) - x^2y^2)(x+y) \\ &= (x^2+y^2)(x^3+y^3) - x^2y^2(x+y) \end{aligned}$$

Do đó $b = \left[(x+y)^2 - 2xy \right]a - \left(\dfrac{1-a}{3} \right)^2 = \left[1 - \dfrac{2(1-a)}{3} \right]a - \left(\dfrac{1-a}{3} \right)^2$

Rút gọn biểu thức trên được điều phải chứng minh.

229. Xem bài 79.

230. Đặt $A = n^2 + 3n + 39 = (n+5)(n-5) + 49$ A, A chia hết cho 49⇔ n+5 và n-2 chia hết cho 7 ⇔ $n = 7k + 2$ (1)

Đặt $B = n^2 + n + 37 = (n+4)(n-3) + 49$

B chia hết cho 49 ⇔ $n + 4$ và $n - 3$ chia hết cho 7 ⇔ $n = 7m + 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, B không đồng thời chia hết cho 49, do đó không tồn tại số tự nhiên n để A và B cùng chia hết cho 49.

Đặt A, A chia hết cho 49⇔ n+5 và n-2 chia hết cho 7 ⇔ (1)

231. Cách 1: Nếu lấy mẫu chia cho tử thì được đúng 5 lần.

Vậy $\frac{199...9}{99...95} = \frac{1}{5}$

Cách 2: $19 = 20 - 1 = 2.10 - 1$

$199 = 200 - 1 = 2.10^2 - 1$

$199...9 = 2.10^n - 1$

$95 = 100 - 5 = 10^2 - 5 = 10^{1+1} - 5$

$995 = 1000 - 5 = 10^3 - 5 = 10^{2+1} - 5$

…

$99...95 = 10^{n+1} - 5$

Vậy $\frac{199...9}{99...95} = \frac{2.10^n - 1}{10^{n+1} - 5} = \frac{2\left(10^n - \frac{1}{2}\right)}{10\left(10^n - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{5}$

232. Trước hết phân tích tử và mẫu thành nhân tử:

$a^3 - 4a^2 - a + 4 = a^3 - a - 4a^2 + 4$

$= a(a^2 - 1) - 4(a^2 - 1)$

$= (a^2 - 1)(a - 4)$

$= (a-1)(a+1)(a-4)$

$a^3 - 7a^2 + 14a - 8 = a^3 - 2^3 - 7a^2 + 14a$

$= (a-2)(a^2 + 2a + 4) - 7a(a-2)$

$= (a-2)(a^2 + 2a + 4 - 7a)$

$$= (a-2)(a^2-5a+4)$$

$$= (a-2)(a-1)(a-4)$$

Vậy: $\dfrac{a^3-4a^2-a+4}{a^3-7a^2+14a-8} = \dfrac{(a-1)(a+1)(a-4)}{(a-2)(a-1)(a-4)} = \dfrac{a+1}{a-2}$

Tính số trị:

$\dfrac{a+1}{a-2} = \dfrac{102+1}{102-2} = \dfrac{103}{100} = 1,03$

233. Theo tính chất cơ bản của phân thức ta có:

$$\frac{1981-1980}{1981+1980} = \frac{1981-1980}{1981+1980}.\frac{1981+1980}{1980+1981} = \frac{1981^2-1980^2}{(1981+1980)^2} = \frac{1981^2-1980^2}{1981^2+2.1981.1980+1980^2}$$

Vậy $\dfrac{1981-1980}{1981+1980} = \dfrac{1981^2-1980^2}{1981^2+2.1981.1980+1980^2} < \dfrac{1981^2-1980^2}{1981^2+1980^2}$

Từ bài toán trên có thẻ ra bài toán tổng quát như sau:

Số nào lớn hơn: $\dfrac{x-y}{x+y}$ hay $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ với x > y > 0?

234. $\dfrac{10^{1979}+1}{10^{1980}+1} = \dfrac{(10^{1979}+0,1)+0,9}{10^{1980}+1} = \dfrac{(10^{1979}+0,1)+0,9}{10(10^{1979}+0,1)} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{0,9}{10^{1980}+1}$

Còn $\dfrac{10^{1980}+1}{10^{1981}+1} = \dfrac{(10^{1980}+0,1)+0,9}{10^{1981}+0,1.10} = \dfrac{(10^{1980}+0,1)+0,9}{10(10^{1980}+0,1)} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{0,9}{10^{1981}+1}$

Bằng cách so sánh hai phân số có cùng tử ta có: $\dfrac{10^{1979}+1}{10^{1980}+1} > \dfrac{10^{1980}+1}{10^{1981}+1}$

Từ bài toán trên, ta có thể ra bài toán tổng quát sau:

Số nào lớn hơn: $\dfrac{10^n+1}{10^{n+1}+1}$ hay $\dfrac{10^{n+1}+1}{10^{n+2}+1}$ với n là số tự nhiên?

235. $2a^2+2b^2=5ab$, suy ra $2a^2-5ab+2b^2=0$ suy ra $\left(2a-b\right)\left(a-2b\right)=0$ (1)

Vì b> a > 0 nên $a \neq 2b$. Để thảo mãn (1) thì $b\ =2a$

Vậy $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{a+2a}{a-2a} = \dfrac{3a}{-a} = -3$

236. Cộng hai vế của $c^2+2(ab-ac-bc)=0$ lần lượt với a^2, b^2 ta có:

$a^2 = c^2 + 2ab - 2ac - 2bc + a^2 = (a-c)^2 + 2b(a-c)$ (1)

$b^2 = c^2 + 2ab - 2ac - 2bc + b^2 = (b-c)^2 + 2b(b-c)$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra vế trái của đẳng thức phải chứng minh có dạng:

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2} = \frac{(a-c)^2+2b(a-c)+(a-c)^2}{(b-c)^2+2a(b-c)+(b-c)^2}$$

$$= \frac{2(a-c)^2+2b(a-c)}{2(b-c)^2+2a(b-c)} = \frac{2(a-c)(a-c+b)}{2(b-c)(b-c+a)} = \frac{a-c}{b-c}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

237. $\dfrac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1} = \dfrac{x^2+x^2a+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-x^2a-a+a^2+a^2x^2+1}$

$= \dfrac{x^2(a^2+a+1)+(a^2+a+1)}{x^2(a^2-a+1)+(a^2-a+1)} = \dfrac{(x^2+1)(a^2+a+1)}{(x^2+1)(a^2-a+1)} = \dfrac{a^2+a+1}{a^2-a+1}$ do $x^2 + 1 \neq 0$

Điều đó chứng tỏ rằng phân thức đã cho không phụ thuộc vào x

Xét mẫu $a^2 - a + 1 = \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ cho nên phân thức $\dfrac{a^2+a+1}{a^2-a+1}$

Hay $\dfrac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$ có nghĩa với mọi x và a

238. Cộng các vế tương ứng của (1), (2), (3) được:

$x + y + z = by + cz + ax + cz + ax + by = 2(ax + by + cz)$

Thay $ax + by = z$ vào vế phải của đẳng thức ta được:

$x + y + z = 2(z + cz) = 2z(1 + c)$ Suy ra $\dfrac{1}{1+c} = \dfrac{2z}{x+y+z}$

Tương tự như vậy được:

$$\frac{1}{1+a} = \frac{2x}{x+y+z}$$

$$\frac{1}{1+b} = \frac{2y}{x+y+z}$$

Cộng các vế tương ứng của ba đẳng thức trên được:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2$$

239. Phân tích thành nhân tử:

$$\begin{aligned}a^2+ac-b^2-bc&=a(a+c)-b(b+c)\\&=a(a+b+c)-b(a+b+c)\\&=(a-b)(a+b+c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b^2+ab-c^2-ac&=b(b+a)-c(c+a)\\&=b(a+b+c)-c(a+b+c)\\&=(b-c)(a+b+c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c^2+bc-a^2-ab&=c(c+b)-a(a+b)\\&=c(a+b+c)-a(a+b+c)\\&=(c-a)(a+b+c)\end{aligned}$$

Mẫu chung (MC) $\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(c-a\right)\left(a+b+c\right)$

Điều kiện $a+b+c\neq 0$, $a\neq b\neq c$

Quy đồng mãu các phân thức trên được:

$$\frac{c-a}{MC}+\frac{a-b}{MC}+\frac{b-c}{MC}=0$$

240. Gọi năm số nguyên liên tiếp là $x-2, x-1, x, x+1, x+2$ thì

$$\left(x-2\right)^2+\left(x-1\right)^2+x^2=\left(x+1\right)^2+\left(x+2\right)^2$$

Sau khi rút gọn và chuyển vế được:

$x^2-12x=0\Leftrightarrow x(x-12)=0$ Suy ra $x_1=0; x_2=12$ (như đầu bài)

Vậy ngoài năm số trên thì còn năm số sau có tính chất như đầu bài: $-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2$

241. Nhận xét rằng ở tất cả các số hạng của hai vế, nếu ta cộng mẫu với số trừ của tử đều được 1999. Vì vậy, tất cả các số hạng của hai vế đều trừ đi 1 để được tử là $\text{x}-1999$. Chuyển các số hạng ở vế trái sang vế phải và đặt $\text{x}-1999$ làm nhân tử chung ta được:

$$\left(x-1999\right)\left(\frac{1}{29}+\frac{1}{27}+...+\frac{1}{19}-\frac{1}{1970}-\frac{1}{1972}-...-\frac{1}{1980}\right)$$

Nhân tử thứ hai không thể bằng 0. Vậy $x-1999=0$, suy ra $x=1999$.

242. Gọi x là số người của tổ đó (x nguyên dương). Ta có phương trình:

$$\left(x-3\right)\left(\frac{72}{x}+4\right)=72.$$

Giải phương trình: $x^2-3x-54=0$

$$\Leftrightarrow\left(x-9\right)\left(x+6\right)=0.$$

Suy ra $x_1=9; x_2=-6$ (loại bỏ).

Vậy số người của tổ đó là 9 người.

243. Xét hai trường hợp:

a) Trường hợp 1: $\left|x+2\right|-3=1$

$$\Leftrightarrow\left|x+2\right|=4$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=4\\x+2=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=-6.\end{array}\right.$$

b) Trường hợp 2: $\left|x+2\right|-3=-1$

$$\Leftrightarrow\left|x+2\right|=2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2=2\\x+2=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_3=0\\x_4=-4.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có bốn nghiệm: $x_1=2; x_2=-6; x_3=0; x_4=-4.$

244. Xét hiệu: $\left(2a^4+1\right)-\left(2a^3+a^2\right)$

$$=a^4-2a^2+1+a^4-2a^3+a^2=(a^2-1)^2+(a^2-a)^2.$$

Vì $(a^2-1)^2\geq 0,\left(a^2-a\right)^2\geq 0$ nên $(2a^4+1)-(2a^3+a^2)\geq 0$ hay $2a^4+1\geq 2a^3+a^2.$

245. Biến đổi: $P=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

$$=(x+2)(x+3)(x-1)(x+6)=(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)$$

$$=(x^2+5x)^2-36\geq -36 \text{ vì } (x^2+5x)^2\geq 0.$$

$$P=-36 \text{ khi } \left(x^2+5x\right)^2=0\Leftrightarrow x_1=0; x_2=-5.$$

Vậy với $x=0$ hoặc $x=-5$ thì P có giá trị nhỏ nhất là $-36.$

246. Vì $n^2+(n+1)^2=2n^2+2n+1>2n^2+2n$ nên:

$$\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{1}{2n^2+2n}=\frac{1}{2n(n+1)}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right):2$$

Do đó ta có:

$$\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right):2;\ \frac{1}{13}<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):2;\ \frac{1}{25}<\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):2;$$

$$...\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right):2.$$

Cộng các vế tương ứng của các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\left(1-\frac{1}{n+1}\right):2<\frac{1}{2}.$$

247. Vì $0<x_1<1$ nên $x_2=x_1(1-x_1)>0.$

Mặt khác $x_3,x_4,...,x_{n+1}>0,$ do đó $x_1-x_{k+1}<x_1<1.$

Theo giả thiết có $x_k^2=x_k-x_{k+1}$. Với $k=1,2,3,...$ thì:

$x_1^2=x_1-x_2$

$x_2^2=x_2-x_3$

. . .

$x_n^2=x_n-x_{n+1}.$

Do đó $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=x_1-x_{n+1}<x_1<1.$

248. Gọi các số theo thứ tự giảm dần:

$a>b>c>d>e>f>g$ (1). Ta sẽ chứng tỏ rằng $a+b+c\ge 50$ (2).

Nếu $c>15$ thì $a+b+c\ge(c+2)+(c+1)+c\ge 51.$

Nếu $c\le 15$ thì $d+e+f+g\le(c-1)+(c-2)+(c-3)+(c-4)\le 50.$

Vậy trong trường hợp nào thì (2) cũng đúng vì tổng của 7 số là 100.

249. Biết rằng trong một tam giác, đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn nên $(a-b)(A-B),(b-c)(B-C),(c-a)(C-A)$ đều không âm và có

$(a-b)(A-B)+(b-c)(B-C)+(c-a)(C-A)\geq 0.$

$\Rightarrow aA-aB-bA+2bB-bC-cB+2cC-cA-aC+aA\geq 0$

$\Rightarrow 2aA+2bB+2cC-aB-aC-bC-bA-cA-cB\geq 0.$

Cộng hai vế với $aA+bB+cC$ và chuyển vế ta được:

$3(aA+bB+cC)\geq aA+bB+cC+aB+aC+bC+bA+cA+cB=$

$=A(a+b+c)+B(a+b+c)+C(a+b+c)=$

$=(a+b+c)(A+B+B)=(a+b+c).180^o.$

Suy ra $\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}\geq 60^o.$ (1)

Mặt khác trong tam giác ta có:

$a<b+c$ hay $2a<a+b+c,$

$b<c+a$ hay $2b<a+b+c,$

$c<a+b$ hay $2c<a+b+c.$

Nhân hai vế lần lượt với A, B, C ta được:

$2aA<A(a+b+c),$

$2bB<B(a+b+c),$

$2cC<C(a+b+c).$

Do đó $2(aA+bB+cC)<(A+B+C)(a+b+c)=180^o.(a+b+c).$

Suy ra $\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}<90^o.$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

250. Từ $15x^2-7y^2=9$ suy ra $y^2=\dfrac{15-9}{7}.$

Ta thấy $15x^2$ tận cùng là 5 hay 0 nên $15x^2-9$ tận cùng là 6 hay 1.

Do đó y^2 tận cùng là 8 hay 3 (vì 8. 7=56 và 3. 7=21).

Nhưng số chính phương không tận cùng bằng 8, bằng 3.

Vậy không có số nguyên x, y nào thỏa mãn đẳng thức trên.

251. Số đó phải ó năm chữ số vì nếu có bốn chữ số mà bỏ đi ba chữ số thì số còn lại lớn nhất là 9 mà 9^3 =729, chỉ ó 3 chữ số. Giải thích tương tự nếu số đó có 6 chữ số.

Gọi số cần tìm là $z = \overline{abcde}$. Đặt $\overline{ab} = x, \overline{cde} = y$ thì $z = x^3$, do đó $1000x + y = x^3$

Suy ra $1000x \le x^2$ nên $1000 \le x^2$, vậy $x > 31$. (1)

Vì y < 1000 nên $x^3 - 1000x < 1000$ hay $x(x^2 - 1000) < 1000$

Với $x \ge 33$ thì $x(x^2 - 1000) \ge 33.89 = 2937 > 1000$ nên ta có x < 33. (2)

Từ (1) và (2) ta có x = 32. Vậy số đó là $z = x^3 = 32^3 = 32768.$.

252. Vì $n \le 1982$ nên n có nhiều nhất là bốn chữ số. Gọi bốn chữ số đó là x, y, z, t với $0 \le x \le 9; 0 \le y \le 9; 0 \le z \le 9; 0 \le t \le 9.$

Ta có $\overline{xyzt} + x + y + z + t = 1982$ (1)

Do $0 \le x + y + z + t \le 36$ nên từ (1) suy ra $1982 - 36 \le \overline{xyzt} \le 1982,$ suy ra $x = 1, y = 9.$

Thay vào (1) có $\overline{19zt} + 1 + 9 + z + t = 1982,$

hay $\overline{zt} + z + t = 72$

hay $11z + 2t = 72$ (2)

Do $0 \le t \le 9$ nên $0 \le 2t \le 18$ suy ra

$72 - 18 \le 11z + 2t \le 72$

hay $54 \le 11z \le 72$

hay $4\frac{10}{11} \le z \le 6\frac{6}{11},$ suy ra $z = 5$ hoặc $z = 6.$

Thay vào (2) với $z = 5$ thì $t = 8,5$ (loại)

với $z = 6$ thì $t = 3.$

Vậy $n = 1963.$

253. Nếu trong sáu số đã cho có số 0 thì tích bằng 0. Như thế tổng của 6 số bằng 0 nên mỗi số bằng 0.

Gọi sáu số tự nhiên tăng dần là $1 \le a \le b \le c \le d \le e \le g.$

Theo đề bài ta có $\overline{abcdeg} = a + b + c + d + e + g \le 6g$ (1).

Suy ra $abcde \le 6$ (vì $g > 0$).

Không thể có ba số lớn hơn hay bằng 2 vì 2. 2. 2 = 8 >6, do đó $a = b = c = 1$.

Thay vào (1) ta có $deg = 3 + d + e + g$ (2)

và $de \le 6$ (3)

Nếu $d = 1$ thì (2) là $eg = 4 + e + g$

$\Leftrightarrow eg - e - g + 1 = 5$

$\Leftrightarrow (e-1)(g-1) = 5.$

Suy ra $e - 1 = 1, g - 1 = 5,$ do đó $e = 2, g = 6.$

Nếu $d = 2$ thì do (3) nên $e = 2$ hoặc 3.

Nếu $e = 2$ thì (2) là $4g = 7 + g \Rightarrow 3g = 7,$ loại.

Nếu $e = 3$ thì (2) là $6g = 8 + g \Rightarrow 5g = 8,$ loại.

Nếu $d \ge 3$ thì vì $e > d$ nên $e \ge 3,$ trái với (3).

Kết luận: Các số đó là (0, 0, 0, 0, 0, 0) và (1, 1, 1, 1, 2, 6).

254. Gọi hai số phải tìm là A và B. Ta có:

$A + B = 10x + y, A - B = 10y + x$ với $9 \ge x \ge y \ge 1.$ (1).

Suy ra $A = \dfrac{11(x+y)}{2} = 11a$ với $a = \dfrac{x+y}{2}$ (2).

$B = \dfrac{9(x-y)}{2} = 9b$ với $b = \dfrac{x-y}{2}.$ (3).

Vì A, B có hai chữ số và $y \ne 0$ nên $9 \ge a > b \ge 2.$ (4).

Từ (2) và (3) suy ra $x = a + b,\ y = a - b.$

Do (4) suy ra $a + b \ge 5,$ do (1) suy ra $a + b \le 9.$

Nếu $a + b = 9$ thì $a = 7,\ b = 2,\ A = 77,\ B = 18.$

$a = 6,\ b = 3,\ A = 66,\ B = 27.$

$a = 5,\ b = 4,\ A = 55,\ B = 36.$

Nếu $a+b=8$ thì $a=6,\ b=2,\ A=66,\ B=18.$

$a=5,\ b=3,\ A=55,\ B=27.$

Nếu $a+b=6$ thì $a=4,\ b=2,\ A=44,\ B=18.$

Nếu $a+b=5$ thì $a=3,\ b=2,\ A=33,\ B=18.$

Vậy có 9 cặp số như trên (kể cả 44 và 18).

255. a) Phân tích:

$4x^2-12x+5=(2x-1)(2x-5)$

$13x-2x^2-20=(x-4)(5-2x)$

$21+2x-8x^2=(3+2x)(7-4x)$

$4x^2+4x-3=(2x-1)(2x+3)$

Điều kiện để P có nghĩa: $x\neq\frac{1}{2}, x\neq\frac{5}{2}, x\neq 4, x\neq-\frac{3}{2}, x\neq\frac{7}{4}.$

b) Kết quả rút gọn: $P=\frac{2x-3}{2x-5}.$

256. Xem ví dụ 27.

257. Nhận xét: $\frac{1992x}{xy+1992x+1992}=\frac{1992}{y+1992+\frac{1992}{x}}=\frac{1992}{y+1992+yz};$

$$\frac{z}{xz+z+1}=\frac{yz}{xyz+yz+y}=\frac{yz}{1992+y+yz}.$$

Vậy $P=\frac{1992}{1992+y+yz}+\frac{y}{1992+y+yz}+\frac{yz}{1992+y+yz}=1.$

258. Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}\Rightarrow 6y+6x+1=xy.$

$$\Rightarrow (x-6)(y-6)=37.$$

Giả sử $x\geq y$ thì: $\begin{cases}x-6=-1\\y-6=-37\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x-6=37\\y-6=1\end{cases}.$

Trường hợp đầu loại, trường hợp sau cho $x=43, y=7.$

259. Biến đổi vế trái:

$M = x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2 = x^2(x+1)^2\left[(x-1)^2+1\right].$

Nếu $x = 0$ thì $(x-1)^2+1$ không là số chính phương.

Nếu $x = 1$ thì $M = 4 \Rightarrow y = 2.$

Nếu $x \geq 2$ thì $(x-1)^2+1$ không là số chính phương.

260. $A = \left(x^2 + xy + \frac{y^2}{4}\right) + \frac{59}{4}y^2 + 8x + y + 1992.$

$$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{59}{4}y^2 + 8x + y + 1992$$

$$= \left(x + \frac{y}{2} + 4\right)^2 + \frac{59}{4}y^2 - 3y + 1992 - 16$$

$$= \left(x + \frac{y}{2} + 4\right)^2 + \frac{59}{4}\left(y^2 - \frac{12}{59}y\right) + 1976$$

$$= \left(x + \frac{y}{2} + 4\right)^2 + \frac{59}{4}\left(y - \frac{6}{59}\right)^2 + 1976 - \frac{9}{59}.$$

Vậy $\text{Min}\, A = 1975\frac{50}{59} \Leftrightarrow x = -4\frac{3}{59}.$

261. Nếu A, B, C > 0 thì $A^2 + B^2 + C^2 > AB + BC + CA$

$\Rightarrow 3(A^2 + B^2 + C^2) \geq (A+B+C)^2 \Rightarrow A^2 + B^2 + C^2 \geq \frac{(A+B+C)^2}{3}.$

Đặt $A = a + \frac{1}{a}, B = b + \frac{1}{b}, C = c + \frac{1}{c},$ vế trái là P.

Ta có:

$$P > \frac{1}{3}\left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(a + b + c + \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1\right)^2$$

Chú ý rằng $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ (với a, b > 0) nên:

$$P\ge\frac{1}{3}(4+6)^2=\frac{100}{3}>33.$$

262. Biến đổi thành $\frac{5x+3}{3x+2}>1992.$

Giải bất phương trình trên (giải tương tự như ví dụ 60) được:

$$-\frac{3981}{5971}<x<-\frac{2}{3}.$$

263. $M=a^3-3ab^2+2b^3$

$=a(a^2-b^2)+2b^2(b-a)$

$=(a-b)(a^2+ab-2b^2)$

$=(a-b)\left[a^2-b^2+b(a-b)\right]$

$=(a-b)^2(a+2b).$

Do $a\ge 0, b\ge 0$ nên $M\ge 0.$

264. Vì $[x,y]$ là BCNN của x và y nên y[x, y] và x[x, y] là bội của xy. Hiệu ủa chúng cũng là bội của xy. Nếu hiệu này khác 0 thì giá trị tuyệt đối nhỏ nhất là xy.

Vậy nếu $0<x<y$ thì $y[x,y]-x[x,y]\ge xy.$

$$\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,d]}+\frac{1}{[d,e]}\le\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+\frac{1}{c}-\frac{1}{d}+\frac{1}{d}-\frac{1}{e}=\frac{1}{a}-\frac{1}{e}<1.$$

265. Gọi số gồm bảy chữ số đầu là a, chữ số thứ tám là b, ta có $10a+b$ chia hết cho 101.

Viết chữ số cuối lên đầu ta được $10^7b+a.$

Ta có: $10^7b+a=10b(10^6+1)+101a-10(10a+b).$

Biểu thức này chia hết cho 101 (chú ý rằng $10^6+1=101.9901$)

266. Gọi năm số nguyên là a, b, c, d, e ta có:

$a+b+c+d+e=0.$ Ta có:

$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=(a^5-a)+(b^5-b)+(c^5-c)+(d^5-d)+(e^5-e).$

Chứng minh rằng mỗi dấu ngoặc đều chia hết cho 15.

267. $A=\left(1-\dfrac{1}{\dfrac{(1+2).2}{2}}\right)\left(1-\dfrac{1}{\dfrac{(1+3).3}{2}}\right)...\left(1-\dfrac{1}{\dfrac{(1+1986).1986}{2}}\right)$

$$=\frac{2}{3}.\frac{5}{6}.\frac{9}{10}...\frac{1987.1986-2}{1986.1987}$$

$$=\frac{4}{6}.\frac{10}{12}.\frac{18}{20}...\frac{1987.1986-2}{1986.1987} \quad (1)$$

Biến đổi tử của phân số cuối cùng:

$1987.1986-2=1986(1988-1)+1986-1988$

$=1986(1988-1+1)-1988=1988(1986-1)$

$=1988.1985. \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có:

$$A=\frac{4.1}{2.3}.\frac{5.2}{3.4}.\frac{6.3}{4.5}...\frac{1988.1985}{1986.1987}$$

$$=\frac{(4.5.6...1988)(1.2.3...1985)}{(2.3.4...1986)(3.4.5...1987)}$$

$$=\frac{1988}{1986.3}=\frac{994}{2979}.$$

268. Đặt $40=a, 51=b, 91=a+b$

Ta có: $a^4+b^4+(a+b)^4$

$=a^4+b^4+a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$=2(a^4+b^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3)$

$=2(a^2+ab+b^2)^2.$

$a^2+ab+b^2=40^2+40.51+51^2=6241=79^2.$

$\Rightarrow (a^2+ab+b^2)^2 = 79^4.$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

269. Biến đổi:

$$\frac{y}{x^3-1}=\frac{y}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{-(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{-1}{x^2+x+1}$$

(điều kiện $x \neq 1$)

Tương tự: $\dfrac{x}{y^3-1}=\dfrac{-1}{y^2+y+1}$ $(y \neq 1)$.

Ta có:

$$\frac{y}{x^3-1}-\frac{x}{y^3-1}=\frac{-1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{x^2+x+1-y^2-y-1}{(x^2+x+1)(y^2+y+1)}$$

$$=\frac{(x^2-y^2)+(x-y)}{[x^2y^2+(x+y+1)]+(x^2+y^2)+xy(x+y+1)}$$

$$=\frac{(x-y)(x+y+1)}{(x^2y^2+2)+(x^2+y^2+2xy)}=\frac{2(x-y)}{x^2y^2+3}.$$

270. $A=124.\dfrac{1}{1984}\left(1-\dfrac{1}{1985}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1986}+...+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{2000}\right)$

$$=\frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$B=\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{17}+\frac{1}{2}-\frac{1}{18}+...+\frac{1}{1984}-\frac{1}{2000}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1984}\right)-\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{17}+...+\frac{1}{1984}-\frac{1}{17}-\frac{1}{18}-...-\frac{1}{1984}-\left(\frac{1}{1985}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

Vậy $A = B$.

271. Gọi a là chữ số đầu tiên của số A có n chữ số.

Gọi B là số sau khi đã bỏ đi chữ số a ta có:

$A = a.10^{n-1} + B \quad (1)$

a) Nếu $A = 57B$ thì theo (1) có:

$a.10^{n-1} = 56B = 7.8B \quad (2)$

Giả sử $a = 7$ thì:

$$10^{n-1} = 8B \Rightarrow B = \frac{10^{n-1}}{2^3} = \frac{10^{n-1}.5^3}{10^3} = 125.10^{n-4}.$$

Vậy có số nguyên dương dạng $7125.10^k (k \ge 0)$ mà nếu bỏ chữ số 7 thì số đó giảm đi 57 lần.

b) Nếu $A = 58B$ thì từ (1) ta có:

$a.10^{n-1} = 57B = 3.19B.$

Vế trái $a.10^{n-1}$ không chia hết cho 19 do a là số có một chữ số.

Vậy không có số nguyên dương nào mà khi bỏ chữ số đầu tiên thì số đó giảm đi 58 lần.

272. Vì $ab = 1$ nên ta có:

$ac + bd = 2 = 2ab = ab + ab$

$\Rightarrow ac - ab = ab - bd$

$\Rightarrow a(c - b) = b(a - d).$

Tích của hai số bằng nhau không thể là số âm nên:

$ab(c - b)(a - d) \ge 0.$

$\Rightarrow ac + bd - ab - cd \ge 0.$

$\Rightarrow 2 - 1 - cd \ge 0$

$\Rightarrow 1 - cd \ge 0.$

273. Gọi t là BCNN của a_{m-1} và a_m, vậy $t \le n,$ ta có: $a_m < a_{m-1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_m} > \frac{1}{a_{m-1}} \Rightarrow \frac{t}{a_m} > \frac{t}{a_{m-1}}$$

$$\Rightarrow 1 \le \frac{t}{a_m} - \frac{t}{a_{m-1}} \le \frac{n}{a_m} - \frac{n}{a_{m-1}} \text{ với } m = 2,3,...,k.$$

Từ $n \geq a_1$ suy ra $1 \leq \frac{n}{a_1}$. Ta có:

$$1 \leq \frac{n}{a_1}$$

$$1 \leq \frac{n}{a_2} - \frac{n}{a_1}$$

. . .

$$1 \leq \frac{n}{a_m} - \frac{n}{a_{m-1}}.$$

Cộng các vế tương ứng của các bất đẳng thức trên:

$$m \leq \frac{n}{a_m} \Rightarrow m.a_m \leq n \ (m = 2, 3, ..., k).$$

274. trừ 1 vào mỗi phân thức ở vế trái. Đáp số $x = 5958$.

275. Theo tính chất của tỉ kệ thức và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Áp dụng nhận xét trên ta có:

$$\frac{2\left[(1985-x)^2 + (x-1986)^2\right]}{2(1985-x)(x-1986)} = \frac{68}{-30}$$

$$\Rightarrow \frac{(1985-x)^2 + (x-1986)^2}{2(1985-x)(x-1986)} = \frac{34}{-30}$$

Lại áp dụng nhận xét trên:

$$\frac{(-1)^2}{(3971-2x)^2} = \frac{4}{64}.$$

Do đó:

$$\frac{1}{2x-3971} = \pm\frac{1}{4}.$$

Đáp số: $x_1 = 1987,5$; $x_2 = 1983,5$.

276. $\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=\frac{1}{ac+bd}$.

$\Rightarrow \frac{bc+ad}{ab}=\frac{1}{ac+bd}$

$\Rightarrow abc^2+b^2cd+a^2cd+abd^2-ab=0$

$\Rightarrow cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2-1)=0.\quad (1)$

Từ $c+d=1$, bình phương hai vế ta được:

$c^2+d^2+2cd=1 \Rightarrow c^2+d^2=1-2cd.\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$cd(a^2+b^2)-2abcd=0$

$\Rightarrow cd(a-b)^2=0.$

Do $c\neq 0, d\neq 0$ nên $a=b.$

277. Xét hiệu:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5\right).$

Vì $x_1^2=4\left(\frac{x_1}{2}\right)^2$ nên hiệu trên bằng:

$$\left(\frac{x_1}{2}-x_2\right)^2+\left(\frac{x_1}{2}-x_3\right)^2+\left(\frac{x_1}{2}-x_4\right)^2+\left(\frac{x_1}{2}-x_5\right)^2\geq 0.$$

Xảy ra dấu bằng khi $\frac{x_1}{2}=x_2=x_3=x_4=x_5.$

278. Nếu $a=0$ thì $x=0, P=0.$

Nếu $a\neq 0$ thì P có nghĩa (vì mẫu $x^4-x^2+1=(x^2-1)^2+x^2>0$) và $P\neq 0.$

Ta tính: $\frac{1}{a}=\frac{1}{x}+x+1 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-1.$

Mặt khác: $\frac{1}{P}=x^2+\frac{1}{x^2}-1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3=\left(\frac{1}{a}-1\right)^2-3=\frac{1-2a-2a^2}{a^2}.$

Do đó $P=\frac{a^2}{1-2a-2a^2}$. (1)

Với biểu thức (1), khi $a=0$ ta có $P=0$.

Vậy $P=\frac{a^2}{1-2a-2a^2}$ với mọi giá trị của $a=\frac{x}{x^2+x+1}$.

279. Với $n=2$ thì $n^n-n^2+n-1=1$, chia hết cho $(n-1)^2=(2-1)^2=1$.

Với $n>2$, ta có:

$A=n^n-n^2+n-1$

$=(n^{n-2}-1)n^2+(n-1)$

$=(n-1)(n^{n-3}+...+1)n^2+(n-1)$

$=(n-1)(n^{n-1}+...+n^2+1)$.

Xét tổng $B=n^{n-1}+...+n^2+1$, B có $n-1$ số hạng, có thể viết:

$B=(n^{n-1}-1)+(n^{n-2}-1)+...+(n^2-1)+(1-1)+(n-1)$.

Mỗi hiệu trong ngoặc đều chia hết cho $n-1$.

Vậy A chia hết cho $(n-1)^2$.

280. Với $x\in Z$ có: $P(x)=x^5-3x^4+6x^3-3x^2+9x-6$.

Nếu x chia hết cho 3 thì năm số hạng đầu của $P(x)$ chia hết cho 9, còn 6 không chia hết cho 9, do đó $P(x)$ không chia hết cho 9, nghĩa là $P(x)\neq 0$.

Nếu x không chia hết cho 3 thì x^5 không chia hết cho 3, còn ác số hạng khác của $P(x)$ đều chia hết cho 3, do đó $P(x)$ không chia hết cho 3, nghĩa là $P(x)\neq 0$.

281. Nhân hai vế của S với 2:

$2S=\frac{2}{2^0}+\frac{4}{2^1}+\frac{3}{2^1}+\frac{4}{2^2}+...+\frac{1991}{2^{1989}}+\frac{1992}{2^{1990}}$

$=4+\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+...+\left(\frac{1991}{2^{1989}}+\frac{1}{2^{1990}}\right)$

$$=3\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{1991}{2^{1990}}+\frac{1992}{2^{1991}}\right)-\frac{1992}{2^{1991}}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{1990}}$$

$$=3\frac{1}{2}+S-\frac{1992}{2^{1991}}+\frac{1}{2^2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1989}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=3\frac{1}{2}+S-\frac{1992}{2^{1991}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{1990}$$

$$\Rightarrow S=4-\frac{1992}{2^{1991}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{1990}<4.$$

282. Nhân hai vế của P với x, y, z được:

$$Px=\frac{x^2}{y+z}+\frac{xy}{z+x}+\frac{xz}{x+y}$$

$$Py=\frac{yx}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{yz}{y+x}$$

$$Pz=\frac{xz}{y+z}+\frac{zy}{z+x}+\frac{z^2}{y+x}.$$

Suy ra: $P(x+y+z)=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{y+x}+\frac{y(x+z)}{x+z}+\frac{z(x+y)}{x+y}+\frac{x(y+z)}{(y+z)}=Q+(x+y+z).$

Do đó: $(P-1)(x+y+z)=Q.$ (1)

a) Nếu $P=1$ thì từ (1) ta có $Q=0.$

b) Nếu $Q=0$ thì có thể $P\neq 1$ mà $x+y+z=0,$ chẳng hạn với $x=1,\ y=2, z=-3,$ ta có:

$$P=\frac{1}{-1}+\frac{2}{-2}+\frac{-3}{3}=-3\neq 1.$$

Vậy nếu $Q=0$ thì không nhất thiết $P=1.$

283. Đặt $\underbrace{11...1}_{k\ c/s}=a$ thì $A=\underbrace{11...1}_{k\ /s}\ \underbrace{11...1}_{k\ /s}=a.10^k+a.$

$B=4.\underbrace{11...1}_{k\ /s}=4a.$ Do $10^k=\underbrace{99...9}_{k\ /s}+1=9a+1$

nên $A-2B+1=a(9a+1)+a-2.4a+1$

$=9a^2-6a+1=(3a-1)^2$ là số chính phương.

MỤC LỤC

LỜI GIẢI HOẶC CHỈ DẪN

Chương I. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA ĐA THỨC

1. Rút gọn theo x và y, được $x-y$. Sau đó rút gọn theo a và b, được $4ab$.

2. $2.x^{n+1}-3.x^{n}$.

3. a) $10^{n+1}-6.10^{n}=10.10^{n}-6.10^{n}=4.10^{n}$

b) $90.10^{k}-10^{k+2}+10^{k+1}=20.10^{k}-100.10^{k}+10.10^{k}=0$

c) 0

4. a) $2^{10}+2^{11}+2^{12}=2^{10}+2.2^{10}+4.2^{10}=7.2^{10}$ chia hết cho 7.

b) $7.32=7.2^{5}=2^{5}+2.2^{5}+4.2^{5}=2^{5}+2^{6}+2^{7}$.

5. Đặt $\dfrac{1}{117}=a$, $\dfrac{1}{119}=b$, ta có:

$$3ab-4a(6-b)-5ab+24a=2ab=\frac{2}{117.119}$$

6. Thay 8 bằng $x+1$. Đáp số: 2.

7. $a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc$.

8. Cả hai vế đều bằng $a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc$.

9. Gọi x là số bất kì lớn hơn 100, ta gọi hiệu $x-100$ là phần hơn. Muốn nhân hai số lớn hơn 100 một chút, ta lấy số này cộng với phần hơn của số kia, rồi viết tiếp vào sau tích của hai phần hơn (bằng hai chữ số). Ví dụ: $112.103=11536$; $102.104=10608$.

10. Gọi x là số bất kì nhỏ hơn 100, ta gọi hiệu $100-x$ là phần bù. Muốn nhân hai số nhỏ hơn 100 một chút, ta lấy số này trừ đi phần bù của số kia, rồi viết tiếp vào sau tích của hai phần bù (bằng hai chữ số). Ví dụ: $98.94=9212$.

11. $(x+a)(x+b)(x+c)=(x^{2}+bx+ax+ab)(x+c)$

$=x^{3}+cx^{2}+bx^{2}+bcx+ax^{2}+acx+abx+abc$

$=x^{3}+(a+b+c)x^{2}+(ab+bc+ca)x+abc\ =x^{3}+6x^{2}-7x-60$.

12. a) $(127+73)^{2}=200^{2}=40000$.

b) $18^{8}-(18^{8}-1)=1$.

c) $(100+99)(100-99)+(98+97)(98-97)+...+(2+1)(2-1)$

$=100+99+98+97+...+2+1=5050$.

d) Biến đổi thành $20^2-19^2+18^2-17^2+...+2^2-1^2$ rồi giải nhưu bài toán trên.

Đáp số: 210.

e) $\dfrac{(780+220)(780-220)}{(125+75)^2}=\dfrac{1000.560}{200.200}=14$.

13. a) Đặt $1990=x$ thì $A=(x-1)(x+1)=x^2-1$, còn $B=x^2$.

Vậy B lớn hơn A là 1.

b) $A=\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}<\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=B$ (vì $x>y>0$)

c) $(3-1)A=3^{32}-1$ nên $A=\dfrac{3^{32}-1}{2}$.

Vậy B lớn gấp đôi A.

14. a) $6x^2+48x-57$

b)$(2a^2+2a+1)(2a^2-2a+1)-(2a^2+1)^2=(2a^2+1+2a)(2a^2+1-2a)-(2a^2+1)^2$

$=(2a^2+1)^2-4a^2-(2a^2+1)^2=-4a^2$

c) Đặt $9x-1=a, 1-5x=b$, biểu thức trở thành:

$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2=(9x-1+1-5x)^2=(4x)^2=16x^2$

d) Giải như bài toán trên. Đáp số: x^4

15. a) Áp dụng: $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ ta được:

$(a^2+b^2-c^2+a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2-a^2+b^2-c^2)=2a^2(2b^2-2c^2)=4a^2b^2-4a^2c^2$

b) $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-2(a+b)^2$

$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2+(a+b)^2-2c(a+b)+c^2-2(a+b)^2=2c^2$

c) $[(a+b)+c]^2+[(a-b)+c]^2+[(a+b)-c]^2+[c-(a-b)]^2$

$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2+(a-b)^2+2c(a-b)^2+c^2+(a+b)^2$
$-2c(a+b)+c^2+c^2-2c(a-b)+(a-b)^2$

$=2(a+b)^2+2(a-b)^2+4c^2$

$=2(a^2+2ab+b^2)+2(a^2-2ab+b^2)+4c^2$

$=4(a^2+b^2+c^2)$

16. c) Xét hiệu vế trái và vế phải:

$1000^2+1003^2+1005^2+1006^2-1001^2-1002^2-1004^2-1007^2$

$=(1003^2-1002^2)+(1005^2-1004^2)-(1007^2-1006^2)-(1001^2-1000^2)$

$=(1003+1002)+(1005+1004)-(1007+1006)-(1001+1000)$

$=2005+2009-2013-2001=0$

17. Biến dổi vế trái thành $(7a-3b)^2-(2c)^2$ rồi thay $c^2=10a^2=10b^2$

18. a) Biến đổi vế phải thành:

$2p(2p-2a)=(a+b+c)(b+c-a)=(b+c)^2-a^2=b^2+2bc+c^2-a^2=VT$.

b) $VP=3p^2-2p(a+b+c)+a^2+b^2+c^2=3p^2-4p^2+a^2+b^2+c^2$

$=a^2+b^2+c^2-p^2=VT$.

19. $(x-1)^2+5(x-1)+6$.

20. Gọi hai số chẵn liên tiếp là x và $x+2$ (x chẵn). Ta có:

$(x+2)^2-x^2=36$, suy ra $x=8$. Đáp số: 8 và 10.

21. 9 và 11.

22. Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $x-1,\ x,\ x+1$.

Ta có: $x(x-1)+(x-1)(x+1)+x(x+1)=74$ suy ra $x^2=25$, mà $x>0$ nên $x=5$.

Đáp số: $4,5,6$.

23. Áp dụng: $(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$, Đáp số: $ab+bc+ca=14$.

24. $(x-1)^2+(y+2)^2=0$, do đó $x-1=y+2=0$.

Vậy $x=1, y=-2$.

25. Biến đổi $2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0$ thành $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

26. Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng:

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

27. a) $(x-5)^2+1=100^2+1=10001$.

b) $(x+0,1)^2=1^2=1$

c) $(a+1)^2=100=10000$.

28. a) Vế trái bằng $a^2-6a+10=(a-3)^2+1$

b) Vế trái bằng $x^2-8x+19=(x-4)^2+3$

c) $a^2+a+1=a^2+2a.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$.

29. a) Biến đổi: $x^2-4x+1=x^2-4x+4-3=(x-2)^2-3$.

Do đó: $(x-2)\geq 0$ nên $(x-2)^2-3\geq -3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng -3 khi $x=2$.

b) $4x^2+4x+11=(2x+1)^2+10$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 10 khi $x=-\frac{1}{2}$.

c) $3x^2-6x-1=3(x-1)^2-4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng -4 khi $x=1$.

30. a) $5-8x-x^2=-(x^2+8x+16)+21=-(x+4)^2+21$

Do $-(x+4)^2\leq 0$ nên $-(x+4)^2+21\leq 21$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức bằng 21 khi $x=-4$.

b) $4x-x^2+1=-(x-2)^2+5$ có giá trị lớn nhất bằng 5 khi $x=2$.

31. a) $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)=(x^2+5x+6)(x^2+5x-6)=(x^2+5x)^2-36\geq -36$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thwucs bằng -36 khi $x^2+5x=0$, tức là $x=0$ hoặc $x=-5$

b) Biến dổi thành $\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+1$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 1 khi $x=1$, $y=2$.

32. a) $\left(a+1\right)^3=1000$.

b) $\left(x+1\right)^3-1=7999$.

c) $\left(a+1\right)^3+5=27005$

d) $\left(a-1\right)^3+2=1000002$.

33. a) $-x-1$; b) 0.

c) $\left[a+\left(b+c\right)\right]^3+\left[a-\left(b+c\right)\right]^3+\left[\left(b-c\right)-a\right]^3-\left[\left(b-c\right)+a\right]^3$.

Đáp số: $24abc$.

34. $x=-\dfrac{1}{6}$.

35. Bạn đọc tự giải.

36. Ta có $a+b+c=0$ nên $c=-\left(a+b\right)$. Do đó:

$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-\left(a+b\right)^3=-3ab\left(a+b\right)=3abc$.

37. Ta có: $a+b+c+d=0$ nên $a+b=-\left(c+d\right)$.

Suy ra $\left(a+b\right)^3=-\left(c+d\right)^3$, tức ;à:

$a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)=-c^3-d^3-3cd\left(c+d\right)$

Hay $a^3+b^3+c^3+d^3=-3ab\left(a+b\right)-3cd\left(c+d\right)$.

Chú ý rằng: $a+b=-\left(c+d\right)$ nên vế phải của đẳng thức trên bằng

$3ab\left(c+d\right)-3cd\left(c+d\right)=3\left(c+d\right)\left(ab-cd\right)$.

38. $M=2\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)-3\left(a^2+b^2\right)=2\left(a^2-ab+b^2\right)-3\left(a^2+b^2\right)=-\left(a+b\right)^2=-1$

39. a) $\left(x+2\right)\left(x^2-6x+4\right)$

b) $(1-x)(1+7x+x^2)$

c) $(6x-1)(x-9)(x+9)$

d) $x^4-(4x^2-4x+1)=(x^2)^2-(2x-1)^2=(x^2+2x-1)(x-1)^2$

e) $x^4+4x^2+4-x^2=(x^2+2)^2-x^2=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

g) $(x+1)(x-1)(x+5)(x+3)$.

40. a) $(xy+1)^2-(x+y)^2=(xy+1+x+y)(xy+1-x-y)$

$=(x+1)(y+1)(x-1)(y-1)$.

b) *Cách 1:* $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-4c^2$

$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2+(a+b)^2-2c(a+b)+c^2-4c^2$

$=2(a+b)^2-2c^2=2(a+b+c)(a+b-c)$.

Cách 2: $(a+b+c)^2+(a+b-c+2c)(a+b-c-2c)$

$=(a+b+c)^2+(a+b+c)(a+b-3c)$

$=(a+b+c)(a+b+c+a+b-3c)$

$=2(a+b+c)(a+b-c)$.

c) $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)$

$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$

d) $(a-b)(b-c)(c-a)$

e) $(a+b)(b+c)(c+a)$

g) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc$

$=ab(a+b)+abc+bc(b+c)+abc+ac(c+a)+abc$.

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

h) Chú ý: $c^3-a^3--\left[(b^3-c^3)+(a^3-b^3)\right]$

Đáp số: $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

i) $(a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca)$

k) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2-a^3-b^3-c^3+4abc$

$=a(b-c)^2-c^3+4abc+b(c-a)^2-b^3+c(a-b)^2-c^3$

$=a\left[(b-c)^2+4bc-a^2\right]+b\left[(c-a)^2-b^2\right]+c\left[(a-b)^2-c^2\right]$

$=a\left[(b+c)^2-a^2\right]+b\left[(c-a)^2-b^2\right]+c\left[(a-b)^2-c^2\right]$

$=a(b+c+a)(b+c-a)+b(c-a+b)(c-a-b)+c(a-b+a)(a-b-c)$

$=(b+c-a)\left[a(b+c+a)+b(c-a-b)\right]+c(a-b+c)(a-b-c)$

$=(b+c-a)\left[ab+ac+a^2+bc-ab-b^2\right]+c(a-b+c)(a-b-c)$

$=(b+c-a)\left[c(a+b)+(a-b)(a+b)\right]+c(a-b+c)(a-b-c)$

$=(b+c-a)(a+b)(a-b+c)+c(a-b+c)(a-b-c)$

$=(a-b+c)\left[(a+b)(b+c-a)+c(a-b-c)\right]$

$=(a-b+c)\left(ab+ac-a^2+b^2+bc-ab+ac-bc-c^2\right)$

$=(a-b+c)\left[a^2-(a-c)^2\right]=(a-b+c)(b+a-c)(b-a+c)$

41. a) Viết a^3+b^3 dưới dạng $(a+b)^3-3a^2b-3ab^2$.

Do đó: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$

$=(a+b+c)\left[(a+b)^2-c(a+b)+c^2\right]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$

b) Áp dụng $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ ta có:

$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=(a+b)^3+c^3+3c(a+b)(a+b+c)-a^3-b^3-c^3$

$=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+3c(a+b)(a+b+c)-a^3-b^3-c^3$

$3(a+b)(ab+ac+bc+c^2)=3(a+b)(b+c)(c+a)$

42. a) $(x-3)(x-4)$.

b) $(x-7)(x+2)$

c) $(x-1)(4x+1)$.

43. Đặt $x^2=y$. Đáp số: $(3x^2-1)(2x^2-3)$.

b) Đặt $x^2+x=y$. Đáp số: $(x^2+x+1)(x^2+x+2)$.

c) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$.

Đặt $x^2+3x=y$, đa thức bằng: $y(y+2)+1=y^2+2y+1=(y+1)^2=(x^2+3x+1)^2$

d) $(x-3y)(x-4y)$.

e) Viết đa thức thành $(x-y)^2+3(x-y)-10$.

Đáp số: $(x-y+5)(x-y-2)$.

44. $(x+1)(x+2)(x-3)$.

Cách 1. $x^3-7x-6=x^3+1-7x-7$.

Cách 2. $x^3-7x-6=x^3-x-6x-6$

Cách 3. $x^3-7x-6=x^3-4x-3x-6$

Cách 4. $x^3-7x-6=x^3-27-7x+21$.

45. a) Chú ý rằng đa thức có tổng các hệ số bằng 0.

$x^3-5x^2+8x-4=x^3-x^2-4x^2+4x+4x-4$

$=x^2(x-1)-4x(x-1)+4(x-1)\ =(x-1)(x-2)^2$.

b) *Cách 1.* Đa thức cũng có tổng các hệ số bằng 0.

$x^3-3x+2=x^3-1-3x+3=(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)$

Tiếp tục phân tích $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

Kết quả được $(x-1)^2(x+2)$.

Cách 2. Đa thức có nghiệm -2.

$x^3-3x+2=x^3+8-3x-6=(x+2)(x^2-2x+4)-3(x+2)=(x+2)(x^2-2x+1)$

$=(x+2)(x-1)^2$

c) $(x+1)(x-3)^2$

d) $(x+1)(x+2)(x+5)$.

e) $x^3+3x^2+6x+4=x^3-8+3x^2+6x+12$

$=(x-2)(x^2+2x+4)+3(x^2+2x+4)$

$=(x^2+2x+4)(x+1)$.

46. a) 2 là nghiệm của đa thức.

Đáp số: $(x-2)(x^2+2x+2)$.

b) 2 là nghiệm của đa thức. Đáp số: $(x-2)(2x^2-8x+1)$.

c) -2 là nghiệm của đa thức.

Cách 1. x^3+x^2+4

$=x^3+2x^2-x^2+4$

$=x^2(x+2)-(x+2)(x-2)$

$=(x+2)(x^2-x+2)$.

Cách 2. $x^3+x^2+4=x^3+8+x^2-4$

$=(x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)(x-2)$

$=(x+2)(x^2-x+2)$.

d) -2 là nghiệm của đa thức. Đáp số: $(x+2)(x^2+x+1)$.

e) Biến đổi đa thức thành: $x^3+9x^2+27x+27-x-3=(x+3)^3=(x+3)$

Đáp số: $(x+3)(x+4)(x+2)$.

g) $\frac{1}{2}$ là nghiệm của đa thức. Đáp số: $(2x-1)(x^2-x+1)$.

h) $-\frac{1}{3}$ là nghiệm của đa thức. Đáp số: $(3x+1)(x^2-5x+3)$.

47. a) $(x+1)(x^3+x^2+1)$.

b) $(1+x^2)^2-4x(1-x^2)=(1-x^2)^2+4x^2-4x(1-x^2)=[(1-x^2)-2x]^2=(x^2+2x-1)^2$

c) $(x^2-8)^2+36=x^4-16x^2+100=(x^2+10)^2-36x^2=(x^2+6x+10)(x^2-6x+10)$.

48. a) Thêm bớt hạng tử $4x^2$. Đáp số: $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

b) Thêm bớt $16x^2$. Đáp số: $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$.

c) $(8x^2-4x+1)(8x^2+4x+1)$.

d) $(9x^2-6x+2)(9x^2+6x+2)$.

49. a) *Cách 1.* Để "nối" từ x^5 đến x, ta thêm bớt x^4, x^3, x^2.

Ta có $x^5+x+1=x^5+x^4-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x+1$

$=x^3(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$.

Cách 2. Thêm bớt x^2 để làm xuất hiện nhận tử chung x^2+x+1. Ta có:

$x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$

$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$.

b) Thêm bớt x. Đáp số: $(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x+1)$.

Chú ý: Các đa thức $x^{3m+1}+x^{3n+2}+1$ như x^7+x^2+1, x^7+x^5+1, $x+x^5+1$, $x+x^8+1$. . . . đều phân tích được thành nhân tử như ở bài trên

50. a) Đồng nhất với đa thức $(3x+ayb+b)(x+cy+d)$.

Đáp số: $(3x-y-1)(x-7y-1)$.

b) Đồng nhất với đa thức $(\mathrm{ax}+by+3)(x+dy-1)$.

Đáp số: $(4x-6y+3)(3x+2y-1)$.

c) Dễ thấy đa thức không có nghiệm hữu tỉ. Nếu đa thức phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng $(x^2+\text{ax}+1)(x^2+bx+1)$ hoặc $(x^2+\text{ax -1})(x^2+bx-1)$.

Xét dạng thứ nhất, ta được $a=b=3$. Vậy đa thức phân tích thành $(x^2+3x+1)^2$.

Cũng có thể giải như sau:

$$x^4+6x^3+11x^2+6x+1=x^4+2x^2(3x+1)+(9x^2+6x+1)$$

$$=x^4+2x^2(3x+1)+(3x+1)^2$$

$$=(x^2+3x+1)^2.$$

51. Với mọi x, ta có $(x+a)(x-5)+2=(x+b)(x+c)$ (1), Với $x=5$ thì $2=(5+b)(5+c)$.

Vì b và c nguyên nên $(5+b)(5+c)$ là tích của hai số nguyên. Số 2 chỉ viết được dưới dạng tích của hai số nguyên bằng hai cách 1.2 và $(-1)(-2)$.

Giả sử $b\le c$, ta xét hai trường hợp:

$\begin{cases}5+b=1\\5+c=2\end{cases}$ Suy ra $b=-4, c=-3$

Thay vào (1) được $(x+a)(x-5)+2=(x-4)(x-3)$ với mọi x.

Với $x=4$ thì $-(4+a)+2=0$ suy ra $a=-2$.

Đa thức được phân tích thành $(x-2)(x-5)+2=(x-4)(x-3)$.

2) $\begin{cases}5+b=-2\\5+c=-1\end{cases}$ Suy ra $b=-7, c=-6$

Thay vào (1) được $(x+a)(x-5)+2=(x-7)(x-6)$ với mọi x.

Với $x=6$ thì $(6+a)+2=0$ nên $a=-8$. Đa thức được phân tích thành .

$$(x-8)(x-5)+2=(x-7)(x-6).$$

52. Giải tương tự bài trên được $m=9, m=1$.

Đáp số: $(x+9)(x+5)+3=(x+8)(x+6)$;

$$(x+1)(x+5)+3=(x+2)(x+4).$$

53. a) Phân tích thành nhân tử $A=(n-1)(n^2-3n+1)$.

Nếu $n=0;1;2$ thì A thứ tự bằng $-1;0;-1$.

Nếu $n=3$ thì $A=2$ là số nguyên tố.

Nếu $n\ge 4$ thì $n-1\ge 3$ còn $n^2-3n+1=n(n-3)+1\ge 5$ nên A là hợp số.

Vậy chỉ còn $n=3$ thì A là số nguyên tố.

b) $B=(n-2)(n^2-4n+1)$. Đáp số: $n=1$ hoặc $n=4$.

54. Thay $x=1,2,3,...,$ vào đẳng thức $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$, ta được:

$$2^3=1^3+3.1^2+3.1+1$$
$$3^3=2^3+3.2^2+3.2+1$$
...
$$(n+1)^3=n^3+3.n^2+3.n+1$$

Cộng các vế tương ứng của các đẳng thức trên ta được:

$$(n+1)^3=1+3(1^2+2^2+...+n^2)+3(1+2+...+n)+n.$$

Do đó $3(1^2+2^2+...+n)=(n+1)^3-\dfrac{3n(n+1)}{2}-(n+1)$

$$=(n+1)\left[(n+1)^2-\frac{3n}{2}-1\right]$$

Suy ra $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

55. Giải tương tự bài trên và áp dụng kết quả của bài trên.

Đáp số: $S=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

56. a) Đổi thành các lũy thừa cùng cơ số.

Cách 1: $49^{12}:7^4=(7^2)^{12}:7^4=7^{24}:7^4=7^{20}$.

Cách 2: $49^{12}:7^4=49^{12}:7^4=7^{24}:7^4=7^{20}$.

b) 1.

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$.

57. a) $\frac{5^{300}.2^{160}}{5^{298}.2^{160}}=5^2=25$.

b) $\frac{1}{15}$.

c) 1.

d) $\frac{8(x+2y)^5}{2x+4y}=\frac{8(x+2y)^5}{2(x+2y)}=4(x+2y)^4$.

58. a) $a=-12$

b) $a=-2$

c) Gọi thương của phép chia là $Q(x)$ thì $3x^2+\text{ax}+27=(x+5).Q(x)+2$ với mọi x.

Sau đó cho $x=-5$ ta được $a=20$.

59. a) *Cách 1:* Làm phép chia, ta được thương bằng x^2-x+a, dư $(1-a)x+(b-a)$.

Muốn chia hết thì đa thức dư phải đồng nhất bằng 0, tức là $1-a=0, b-a=0$.

Do đó $a=b=1$.

Cách 2: Nhận xét rằng thương là đa thức bậc hai có hạng tử cao nhất là $x^4:x^2=x^2$, hạng tử thấp nhất là $b:1=b$.

Gọi thương là x^2+cx+b rồi đồng nhất $(x^2+x+1)(x^2+cx+b)$ với $(x^4+\text{ax}^2+b)$, ta được $c+1=0, b+c+1=a, b+c=0$, suy ra $c=-1, b=1, a=1$.

b) Đáp số: $a=2, b=-26$.

Cách 1: Thực hiện phép chia, được thương là $\text{ax}-4a$, dư $(13a+b)x+(12a-24)$.

Cách 2: Đồng nhất đa thức $\text{ax}^3+bx-24$ với $(x^2+4x+3)(\text{ax-8})$ suy ra $4a-8=0, 3a-32=b$.

Cách 3: Với mọi x, ta có $\text{ax}^3+bx-24=(x+1)(x+3).Q(x)$. Lần lượt cho $x=-1, x=-3$.

c) $a=3, b=-1$

d) Với mọi x, ta có $2x^3+\text{ax}+b=(x+1).P(x)-6$ (1)

$2x^3+\text{ax}+b=(x-2).Q(x)+21$ (2)

Với $x=-1$ thì $-1-a+b=-6$. Với $x=2$ thì $16+2a+b=21$.

Do đó $a=3,b=-1$.

60. a) $4x^3-7x^2-x-2=(x-2)P(x)+r$ với mọi x.

Với $x=2$ thì $4.2^3-7.2^2-2-2=0$ nên $r=0$.

Vậy $4x^3-7x^2-x-2$ chia hết cho $x-2$.

b) Số dư của phép chia bằng -60.

61. a) Dư trong phép chia cho $x-1$ là hằng số. Gọi thương của phép chia là $Q(x)$, dư là r, với mọi x ta có $x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}=(x-1).Q(x)+r$.

Với $x=1$ thì $1+1+1+1+1=r$ hay $r=5$.

Vậy dư của phép chia là 5.

b) Dư trong phép chia cho x^2-1 có bậc cao nhất là bậc nhất. Gọi thương của phép chia là $Q(x)$ và dư là $\text{ax}+b$, với mọi x ta có:

$$x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}=\left(x^2-1\right).Q(x)+\text{ax}+b.$$

Với $x=1$ thì $5=a+b$, Với $x=-1$ thì $-5=-a+b$. Từ đó $a=5,b=0$. Dư của phép chia là $5x$.

62. Trong hằng đẳng thức $\left(x^2+x-1\right)^{10}+\left(x^2-x+1\right)^{10}-2=(x-1).Q(x)+r$ ta cho $x=1$, được $r=0$.

63. a) $3;1;5;-1$.

b) $2;1;-2;5$.

64. $n-4$ phải là ước của 23. Đáp số: $5;3;27$.

65. Ta phải có n^2-n là ước của 3. Điều này không xảy ra vì n^2-n là số chẵn.

66. Gọi hai số lẻ là $2a+1$ và $2b+1(a,b\in N)$.

$(2a+1)^2+(2b+1)^2=4a^2+4a+4b^2+4b+2$ không chia hết cho 4;

Chia hết cho 8 (chú ý rằng tích của hai sô nguyên liên tiếp thì chia hết cho 2).

67. Số chính phương chẵn là bình phương của một số. Ta có $(2k)^2=4k^2$ chia hết cho 4.

Số chính phương lẻ là bình phương của một số lẻ. Ta có $(2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$ chia 8 dư 1.

68. Xét $(3k)^2, (3k+1)^2, (3k-1)^2$.

69. a) Xét tổng $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2$.

b) Xét tổng $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$.

c) Xét tổng $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2+2)$.

Ta thấy n^2 không tận cùng bằng 3, bằng 8 nên n^2+2 không chia hết cho 5. Do đó $5(n^2+2)$ không là số chính phương.

70. Nhận xét $n^2 < n^2+n+1 < (n+1)^2$ với mọi n nguyên dương.

Số n^2+n+1 nằm lọt giữa hai số chính phương liên tiếp nên không phải là số chính phương.

71. Biến đổi $9^n + 1 = (3^2)^n + 1 = (3^n)^2 + 1 = (2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ không chia hết cho 4.

72. a) Số chính phương tận cùng bằng 1 là bình phương của số tận cùng 1 hay 9, tức là bình phương của số đó có dạng $10a \pm 1$.

Xét $(10a \pm 1)^2 = 100a^2 \pm 20a + 1 = 10(10a^2 \pm 2a) + 1$. Ta thấy $10a^2 \pm 2a$ là số hàng chục của số chính phương. Đó là số cawhnx. Vậy chữ số hàng chục của số chính phương có tận cùng bằng 1 là chữ số chẵn.

b) *Cách 1:* Xét $(10a \pm 2)^2$

Cách 2: Số chính phương tận cùng chẵn thì chia hết cho 4. Giả sử chữ số hàng chục của số chính phương đó là số lẻ thì số chính phương đó tận cùng $14, 34, 54, 74$ hoặc 94 đều không chia hết cho 4. Vậy chữ số hàng chục của số chính phương đó là chữ số chẵn.

73. Biết chữ số hàng chục của số chính phương là 3. Nếu số chính phương đó chẵn thì tận cùng $32, 36$ (để chia hết cho 4). Nếu số chính phương đó lẻ thì tận cùng $33, 37$ (để chia cho 4 dư 1). Nhưng số chính phương không tận cùng $2, 3, 7$. Vậy số chính phương này tận cùng 36.

74. $2n^3 + 3n^2 + n = 2n^3 - 2n + 3n^2 = 2n(n^2-1) + 3n(n+1) = 2n(n-1)(n+1) + 3n(n+1)$ chia hết cho 6 vì mỗi hạng tử chia hết cho 6.

75. $a^3b - ab^3 = a^3b - ab - ab^3 + ab = b(a^3 - a) - a(b^3 - b)$.

Các số $a^3 - a$ và $b^3 - b$ đều chia hết cho 6.

76. a) Gọi các số nguyên đó là a và b. Xét hiệu $\left(a^3+b^3\right)-\left(a+b\right)=\left(a^3-a\right)+\left(b^3-b\right)$ chia hết cho 6. Do đó nếu $a+b$ chia hết cho 6 thì a^3+b^3 chia hết cho 6 thì $a+b$ chia hết cho 6.

b) Xết hiệu $\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a+b+c\right)$ và chứng minh rằng hiệu đó chia hết cho 6.

77. Nếu a^3-b^3 chia hết cho 8 thì $\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$ chia hết cho 8. Nhưng a và b là số lẻ nên a^2,ab,b^2 là số lẻ, do đó a^2+ab+b^2 là số lẻ. Vậy $a-b$ chia hết cho 8.

78. Ta có $a^2+ab+b^2=\left(a-b\right)^2+3ab$. Nếu a^2+ab+b^2 chia hết cho 9 thì cũng chia hết cho 3, nên $\left(a-b\right)^2$ chia hết cho 3, suy ra $a-b$ chia hết cho 3 (vì 3 là số nguyên tố). Do đó $\left(a-b\right)^2$ chia hết cho 9.

Theo giả thiết $\left(a-b\right)^2+3ab$ chia hết cho 9. Suy ra $3ab$ chia hết cho 9, do đó ab chia hết cho 3. Do 3 là số nguyên tố nên trong hai thừa số a và b, tồn tại một thừa số chia hết cho 3 chẳng hạn a chia hết cho 3. Nhưng do $a-b$ chia hết cho 3 nên b cũng chia hết cho 3. Vậy ab chia hết cho 9.

79. *Cách 1*. Gọi ba số nguyên liên tiếp là $n-1,n,n+1$. Ta có:

$\left(n-1\right)^3+n^3+\left(n+1\right)^3=3n^3+6n=3n^3-3n+6n+3n=3\left(n^3-n\right)+9n$ chia hết cho 9.

Cách 2. Cũng biến đổi như trên được $3n^3+6n=3n\left(n^2+2\right)$ rồi xét các trường hợp $n=3k,n=3k\pm$.

Cách 3. Trong ba số nguyên liên tiếp, có một số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1, một số chia 3 dư 2. Tổng các lập phương của chúng có dạng $(3a)^3+(3b+1)^3+(3c-1)^3$. Khai triển, ta thấy tổng trên chia hết cho 9.

80. $n^5-5n^3+4n=n\left(n^4-5n^2+4\right)=n\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)=n\left(n+1\right)\left(n-1\right)\left(n+2\right)\left(n-2\right)$, là tích của năm số nguyên liên tiếp.

Trong năm số nguyên liên tiếp, có ít nhất hai bội của 2 (trong đó có một bội của 4), một bội của 3, một bội của 5. Do đó tích của năm số nguyên liên tiếp chia hết cho $8.3.5=120$ (vì các số $8,3,5$ nguyên tố cùng nhau đôi một).

81. $n^3-3n^2-n+3=n^2\left(n-3\right)-\left(n-3\right)=\left(n-3\right)\left(n-1\right)\left(n+1\right)$.

Thay $n=2k+1$ (k nguyên)_ ta được $\left(2k-2\right).2k.\left(2k+2\right)$ hay $8\left(k-1\right).k.\left(k+1\right)$, chia hết cho 48 (chú ý rằng tích của ba số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 6).

82. Phân tích thành $n\left(n+4\right)\left(n-2\right)\left(n+2\right)$ rồi thay $n=2k$ được $16k\left(k+2\right)\left(k-1\right)\left(k+1\right)$.

Chú ý rằng tích của bốn số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 24.

83. a) *Cách 1:* Viết biểu thức dưới dạng

$n^2+11n+39=n^2+11n+18+21=(n+9)(n+2)=A$

Ta thấy $n+9$ và $n+2$ có hiệu bằng 7 nên chúng cùng chia hết cho 7, hoặc cùng không chia hết cho 7.

Nếu $n+9$ và $n+2$ cùng chia hết cho 7 thì $(n+9)(n+2)$ chia hết cho 49, nhưng 21 không chia hết cho 49, nên A không chia hết cho 49.

Vậy $n^2+11n+39$ không chia hết cho 49 với mọi số nguyên n.

Chú ý: Trong biến đổi trên, ta đưa biểu thức $n^2+11n+39$ về dạng $(n+a)(n+b)+c$ trong đó $(n-a)-(n+b)=7, a+b=11$.

Như vậy chỉ cần chọn a và b sao cho $a-b=7, a+b=11$. Do đó ta chọn $a=9, b=2$.

Cách 2: Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử có số nguyên n mà $n^2+11n+39$ chia hết cho 49 thì $n^2+11n+39$ chia hết cho 7, do đó n^2+4n+4 hay $(n+2)^2$ chia hết cho 7. Suy ra $n+2$ chia hết cho 7. Vậy $n=7k-2$.

Nhưng khi đó $n^2+11n+39=(7k-2)^2+11(7k-2)+39=49k^2+49k+21$ không chia hết cho 49, Mâu thuẫn.

Vậy $n^2+11n+39$ không chia hết cho 49 với mọi số nguyên n.

b) Viết n^2+n+1 thành $(n+2)(n-1)+3$.

84. Xem bài 43c.

85. a) Để chứng tỏ n^4+4 là hợp số, ta chứng minh rằng n^4+4 phân tích được ra tích của hai thừa số lớn hơn 1. Thêm bớt $4n^2$ vào biểu thức, ta đực:

$n^4+4=(n^2+2n+2)\left[(n-1)^2+1\right]$. Với n >1, cả hai thừa số đều lớn hơn 1.

b) $n^4+4k^4=(n^2+2nk+2k^2)(n^2-2nk+2k^2)$ rồi chứng minh rằng mỗi thừa số đều lớn hơn 1.

86. a) $2^{32}+1$.

b) Dựa vào câu a) rồi chứng minh rằng $(1+ab-b^4)a^4+1$ chia hết cho $1+ab$.

Do đó $2^{32}+1$ chia hết $1+2^7.5=641$.

87. Đặt $\underbrace{11...1}_{n}=k$ thì $9k+1=\underbrace{99...9}_{n}+1=10^n$

Ta có $A=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n}=\underbrace{11...1}_{n}.10^n+2.\underbrace{11...1}_{n}$

$=k.10^n+2k=k\left(10^n+2\right)=k\left(9k+1+2\right)$

$=3k\left(3k+1\right)$.

Vậy A là tích của hai sô nguyên liên tiếp $\underbrace{33...3}_{n}$ và $\underbrace{33...3}_{n-1}4$.

88. Cũng đặt $\underbrace{11...1}_{n}=k$,

Ta có $k.10^n+k-2k=k.10^n-k=k\left(10^n-1\right)=k.9k=\left(3k\right)^2=\left(\underbrace{33...3}_{n}\right)^2$.

89. Gọi số phải tìm là $\overline{xyz}$ (x,y,z nguyên, $1\le x\le 9;0\le y,z\le 9$).

Ta có $\overline{xyz}=11\left(x+y+z\right)$

$\Rightarrow 100x+10y+z=11x+11y+11z$

$\Rightarrow 89x=10z+y$

$\Rightarrow 89x=\overline{zy}$.

Như vậy $89x$ là số không quá hai chữ số, do đó $x=1,\overline{=89}$, nên $z=8,y=9$.

Số phải tìm là 198. Thử lại $198=11\left(1+9+8\right)$.

90. Gọi số phải tìm $\overline{xxyy}$ (x, y nguyên, $1\le x\le 9,0\le y\le 9$.

Ta có $\overline{xxyy}=\overline{\text{aa}}.\overline{bb}.\overline{cc}$

$\Rightarrow 1100x+11y=11a.11b.11c$

$\Rightarrow 100x+y=121abc$

$\Rightarrow \overline{x0y}=121abc$

Như vậy $\overline{x0y}$ chia hết cho 121. Các bội của 121 có ba chữ số là $121,242,363,484,605,726,847,968$ trong đó chỉ có số 605 có chữ số hàng chục bằng 0. Vậy $\overline{x0y}=605$. Suy ra $abc=5$, do đó trong ba số a,b,c có một số bằng 5, hai số kia bằng 1.

Thử lại $6655=11.11.55$

91. a) Ta cần viết tích $(n+1)(n+2)(n+3)...(2n)$ thành một tích trong đó có n thừa số 2. Viết tích trên thành:

$$\frac{1.2.3...(2n)}{1.2.3...n}=\left[1.3.5...(2n-1)\right].\frac{2.4.6...(2n)}{1.2.3...n}.$$

Biểu thức $\frac{2.4.6...(2n)}{1.2.3...n}$ rút gọn thành $\frac{(1.2.3...n).2^n}{1.2.3...n}=2^n$.

Như vậy $(n+1)(n+2)(n+3)...(2n)$ chia hết cho 2^n.

Chú ý: còn có thể nói rằng tích trên chứa đúng n thừa số 2 vì biểu thức trong dấu móc là tích của các số lẻ nên không chứa thừa số 2 nào.

b) Viết tích $(n+1)(n+2)(n+3)...(2n)$ dưới dang

$$\frac{1.2.3...(3n)}{1.2.3...n}=\left[1.4.7...(3n+1)\right].\left[2.5.8...(3n+2)\right]\frac{3.6.9...(3n)}{1.2.3...n}$$

92. $8.16^n-8=8\left(16^n-1\right)$ chai hết cho $8.15=120$.

93. $\underbrace{100...01}_{4n+1}=10^{4n+2}+1=100^{2n+1}+1$ chia hết cho $100+1$ (hằng đẳng thức 9) nên là hợp số.

94. 16^n-1 chia hết cho 15 (hằng đẳng thức 8).

$16^n-1=16^n+1-2$ không chia hết cho 17, vì 16^n+1 chia hết cho 17.

95. $48^{13}=(49-1)^{13}=bs7-1$. Vậy 48^{13} chia cho 7 dư 6.

96. a) Với mọi x, ta có $(3x-2)^4=c_0x^{10}+c_1x^9+...+c_9$ cho $x=1$ được $2^{10}=c_0+c_1+...+c_9$

Vậy tổng của các hệu số bằng 1024.

97. Nếu $n=3k$ thì $2^n-1=2^{3k}-1=8^k-1$ chia hết cho 7.

Nếu $n=3k+1$ thì $2^n-1=2^{3k+1}-1=2\left(2^{3k}-1\right)+1$ không chia hết cho 7.

Nếu $n=3k+2$ thì $2^n-1=2^{3k+2}-1=4\left(2^{3k}-1\right)+3$ không chia hết cho 7.

Vậy 2^n-1 chia hết cho 7 khi và chỉ khi n là bội của 3.

98. Lũy thừa của 7 sát với một số bội số của 100 là $7^4=2401$.

Do đó $7^{1990}=7^{4k+2}=49.7^{4k}=49(2400+1)^k=49(bs100+1)=bs100+49$.

Vậy 7^{1990} tận cùng bằng 49

Chương II. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

99. $x \pm 1$.

100. a) Tử bằng $\left(a^2-1+a\right)\left(a^2-1-a\right)$, mẫu bằng $\left(a^2+a-1\right)\left(a^2-a-1\right)$.

Phân thức bằng $\dfrac{a^2+a-1}{a^2+a+1}$, điều kiện $a^2-a-1 \neq 0$

b) Tử bằng $(a-b)(b-c)(a-c)$, Mâu thuẫn $\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(a^2-c^2\right)$.

Phân thức bằng $\dfrac{1}{(a+b)(b+c)(a+c)}$ với a,b,c khác nhau.

c) Với $x<0$ thì $x-1<0$ nên $|x-1| = 1-x, |x| = -x$.

Do đó $\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1} = \dfrac{1-x-x+x}{3x^2-3x-x+1} = \dfrac{1-x}{(1-x)(1-3x)} = \dfrac{1}{1-3x}$.

d) ta có $\dfrac{16a^2-40ab}{8a^2-24ab} = \dfrac{8a(2a-5b)}{8a(a-3b)} = \dfrac{2\dfrac{a}{b}-5}{\dfrac{a}{b}-3} = \dfrac{2\dfrac{10}{3}-5}{\dfrac{10}{3}-3} = 5$

101. Từ $4a^2+b^2=5ab \Rightarrow (2a+b)^2 = 9ab$ và $(2a-b)^2 = ab$

$$M = \frac{ab}{4a^2-b^2} = \frac{(2a-b)^2}{(2a-b)(2a+b)} = \frac{2a-b}{2a+b} \Rightarrow M^2 = \frac{1}{9} \text{ nên } M = \frac{1}{3} \text{ do } M>0.$$

102. a) Không nên quy đồng mẫu tất cả cá phân thức. Nên cộng hai phân thức đầu, rồi cộng tiếp vào phân thức thứ ba, …Cuối cùng ta được $\dfrac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}}$.

b) Mẫu của các phân thức lần lượt là. Tách mỗi phân thức thành hiệu của hai phân thức.

Đáp số: $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+5} = \dfrac{5}{a(a+5)}$.

103. a) Cộng ba phân thức cuối, ta được $\dfrac{4ab+4b-4a}{4-b^2} = \dfrac{4b(a+1)-4a}{4-b^2}$.

Thay $b = \dfrac{a}{a+1}$ vào biểu thức trên ta có $\dfrac{4a-4a}{4-b^2} = 0$.

Vậy $M = a$ với điều kiện $b \neq \pm 2, a \neq -1$

(điều kiện $b \neq \pm 2$ có thể thay bằng $a \neq -\frac{2}{3}$ và $a \neq -2$).

b) Rút gọn N được $\frac{(a+x+1)^2}{2ax}$ rồi thay $x = \frac{1}{a-1}$ vào biểu thức, ta được $N = \frac{a^3}{2(a-1)}$, điều kiện $a \neq 0, a \neq 1$.

(Khi đó các điều kiện $x \neq, a+x \neq 0, a+x \neq 1$ thỏa mãn).

104. Áp dụng hằng đẳng thức

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (xem bài 41a).

Theo đề bài

$a^3+b^3+c^3-3abc$ nên $a+b+c=0$ hoặc $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$.

a) Nếu $a+b+c=0$ thì $P = \frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{a+c}{c} = \frac{-c}{b}.\frac{-a}{c}.\frac{-b}{a} = -1$.

b) Nếu $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ thì $a=b=c$ (xem bài 25).

Khi đó $P=(1+1)(1+1)(1+1)=8$.

Vậy $P=-1$ hoặc $P=8$.

105. $\frac{10x-4}{x^3-4x} = \frac{1}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2}$.

106. $\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2-x+1}$.

107. Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ suy ra $\frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{1}{a+b+c}$

Do đó $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0 \qquad (1)$.

Để chứng tỏ trong ba số a,b,c có hai số đối nhau, ta sẽ chứng minh rằng $(a+b)(b+c)(c+a)=0$. Hãy phân tích vế trái của (1) thành nhân tử.

108. a) Để chứng tỏ trong ba số a,b,c có một số bằng tổng hai số kia, ta sẽ chứng minh: $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=0$.

Từ giả thiết, ta có $(a^2+b^2-c^2)c+(b^2+c^2-a^2)a+(c^2+a^2-b^2)b=2abc$.

Thêm bớt $2abc$, ta được:

$\left(a^2+b^2-c^2+2ab\right)c+\left(b^2+c^2-a^2-2bc\right)a+\left(c^2+a^2-b^2-2ac\right)b=0$

$\left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right)c+\left(b-c+a\right)\left(b-c-a\right)a+\left(c-a+b\right)\left(c-a-b\right)b=0$

Đặt $a+b-c$ làm nhân tử chung ở vế trái, ta được:

$$\left(a+b-c\right)\left(c^2-a^2+2ab-b^2\right)=0$$

$$\left(a+b-c\right)\left(c+a-b\right)\left(c-a+b\right)=0$$

Suy ra điều phải chứng minh.

b) Trường hợp $a+b-c=0$ thì phân thức đầu bằng -1, hai phân thức sau bằng 1.

Tương tự đối với hai trường hợp còn lại.

109. Nhân hai vế của hằng đẳng thức với x^2+x+1 và chú ý rằng

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=x^4+x^2+1.$$

110. Đặt $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k\neq 0$ thì $x=ak, y=bk, z=ck$.

Do đó:

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(\text{ax}+by+cz\right)^2}=\frac{\left(a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(a^2k+b^2k+c^2k\right)^2}=\frac{k^2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{k^2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}=1.$$

111. Đặt $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ thì $x=ak, y=bk, z=ck$.

Khi đó $xy+xz+yz=abk^2+ack^2+bck^2=k^2\left(ab+ac+bc\right)$. $\quad(4)$

Từ (1) ta có $\left(a+b+c\right)^2=1$ hay $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1$.

Do (2) nên $2ab+2ac+2bc=0$ tức là. Thay vào (4) được $xy+xz+yz=0$.

112. Để các ba phân thức có mẫu giống nhau (chẳng hạn $bc+b+1$), ta nhân cả tử và mẫu của phân thức thứ ba với b, phân thức thứ nhất với c, biến đổi tương tự như phân thức thứ ba và chú ý rằng $abc=1$.

113. Đặt $\frac{2y+2z-x}{a}=\frac{2z+2x-y}{b}=\frac{2x+2y-z}{c}=k$.

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$k=\frac{4z+4x-2y}{2b}=\frac{4x+4y-2z}{2c}=\frac{-2y-2z+x}{-a}=\frac{9x}{2b+2c-a}.$$

Tương tự (do hoán vị vòng quanh):

$$k=\frac{9y}{2c+2a-b};k=\frac{9z}{2a+2b-c}.$$

Vậy $\frac{x}{2b+2c-a}=\frac{y}{2c+2a-b}=\frac{z}{2a+2b-c}$.

114. Vì đẳng thức đúng với mọi x,y nên lần lượt cho $x=1,y=0$ và $x=0,y=1$ vào đẳng thức.

115. Từ đẳng thức đã cho, ta có:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{z^2}{a^2+b^2+c^2}=0.$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)=0.$$

Hãy chứng tỏ rằng mỗi dấu ngoặc đều dương.

116. Gọi S là diện tích tam giác. Ta có $a=\frac{2S}{h_a},b=\frac{2S}{h_b},c=\frac{2S}{h_c}$,

Nên

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(a+b+c)\left(\frac{h_a+h_b+h_c}{2S}\right)=(h_a+h_b+h_c).\frac{a+b+c}{2S}=(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

117. Biến đổi: $\frac{n^4-2n^3+5}{n-2}=n^3+\frac{5}{n-2}$.

Muốn biểu thức có giá trị nguyên thì $n-2$ phải là ước của 5.

Đáp số: $1;3;7$.

118. Xét $1+\frac{1}{n^2+2n}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

Đáp số: $\frac{2(n+1)}{n+2}$.

119. Xét $1+\frac{2}{n^2+3n}=\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}=\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$.

Đáp số: $\frac{3(n+1)}{n+3}$.

120. Nhận xét $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$.

Đặt $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=S$, trước hết tính $2S$, Được $\frac{2n}{2n+1}$.

121. Cần tách mỗi phân số ở vế trái thành hiệu của hai phân số để làm xuất hiện trong biểu thức những số hạng đối nhau. Đó là hiệu của hai phân số nào? Ta xét các hiệu:

$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3},\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4},...$; tổng quát $\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{k(k+1)}$.

Gọi vế trái của đẳng thức phải chứng minh là S.

Do $\frac{1}{k(k-1)}-\frac{1}{k(k+1)}=\frac{2}{(k-1)k(k+1)}$ nên

$$2S=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+...+\frac{2}{(n-1)n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n^2+n-2}{2n(n+1)}=\frac{(n-1)(n+2)}{2n(n+1)}.$$

Vậy $S=\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$.

122. Mệnh đề đúng với $n=1$ vì $10-9-1$ chia hết cho 27.

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k$, tức là 10^k-9k-1 chia hết cho 27. Ta có:

$10^{k+1}-9(k+1)-1=10.10^k-9k-10=10\left(10^k-9k-1\right)+81k$ chai hết cho 27.

Vậy 10^n-9n-1 chia hết cho 27 với mọi số tự nhiên $n\geq 1$.

Cách khác: $10^n-9n-1=10^n-1-9n$

$=\underbrace{99...9}_{n}-9n=9\left(\underbrace{11...1}_{n}-n\right)$. Sau đó chứng minh rằng

$\underbrace{11...1}_{n}-n$ chia hết cho 3

(Chú ý rằng n và số có tổng các chữ số bằng n có cùng số dư trong phép chia cho 3).

123. Đẳng thức đúng với $n=1$ vì $1.2=\frac{1.2.3}{3}$.

Giả sử đẳng thức đúng với $n=k$, tức là:

$$S_k=1.2+2.3+...+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Ta có $S_{k+1}=S_k+(k+1)(k+2)$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$

$$=(k+1)(k+1)\left(\frac{k}{3}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Cách khác: $S=1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)$.

Với mục đích làm xuất hiện trong biểu thức các số đối nhau, ta nhân hai vế của đẳng thức với 3, trong đó các thừa số 3 ở vế phải được viết lần lượt dưới dạng các hiệu $3-0, 4-1, 5-2, ..., (n-2)-(n-1)$.

$$3S=1.2(3-0)+2.3(4-1)+3.4(5-2)+...+n(n+1)\left[(n+2)-(n-1)\right]$$

$$=1.2.3+2.3.4-1.2.3+3.4.5-2.3.4+...+n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)$$

$$=n(n+1)(n+2).$$

Vậy $S=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

124. $S_{k+1}=S_k+(k+1)\left[3(k+1)-1\right]$

$$=k^2(k+1)+(k+1)(3k+2)$$

$$=(k+1)(k^2+3k+2)$$

$$=(k+1)^2(k+2).$$

125. Giải tương tự như bài trên.

126. *Bài 54, 55.* Phải dự đoán kết quả trước rồi chứng minh bằng quy nạp toán học.

Bài 91a. Mệnh đề đúng với $n=1$ vì $1+1$ chia hết cho 2^1. Giả sử mệnh đề đúng với $n=k$ tức là $(k+1)(k+2)...(2k)$ chia hết cho 2^k. Ta sẽ chứng minh rằng mệnh đề đúng với $n=k+1$, tức là $(k+2)(k+3)...\left[2(k+1)\right]$ chia hết cho 2^{k+1}.

Xét $(k+2)(k+3)...(2k)(2k+1)\left[2(k+1)\right]=2(k+1)(k+2)...(2k)(2k+1)$ chia hết cho $2.2^k=2^{k+1}$. Vậy mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n\geq 1$.

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

127. a) Thay $x=2$ vào phương trình được $15(m+6)-20=80$ do đó $m=\dfrac{2}{3}$.

b) $m=3$.

128. Nếu nhân hai vế của phương trình với mẫu chung theo đúng thứ tự các bước giải phương trình thì rất phức tạp. Ta thấy rằng nếu cộng 1 vào mỗi phân thức thì các phân thức đều có tử bằng nhau.

$$\left(\frac{x+1}{65}+1\right)+\left(\frac{x+1}{63}+1\right)=\left(\frac{x+1}{61}+1\right)+\left(\frac{x+1}{59}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+66}{65}+\frac{x+66}{63}=\frac{x+66}{61}+\frac{x+66}{59}$$

$$\Leftrightarrow (x+66)\left(\frac{1}{65}+\frac{1}{63}-\frac{1}{61}-\frac{1}{59}\right)=0.$$

Rõ ràng biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai khác 0. Do đó $x+66=0$.

Phương trình có một nghiệm duy nhất $x=-66$.

129. Viết phương trình có dạng:

$$\left(\frac{315-x}{101}+1\right)+\left(\frac{313-x}{103}+1\right)+\left(\frac{311-x}{105}+1\right)+\left(\frac{309-x}{107}+1\right)=0.$$

Đáp số $x=416$.

130. Nếu $a\neq\pm 2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{a+2}$.

Nếu $a=2$ thì phương trình có nghiệm đúng với mọi x.

Nếu $a=-2$ thì phương trình vô nghiệm.

131. Điều kiện $a \neq \pm 4$. Sau khi biến đổi được: $(2a-1)x = 4(2a-1)$.

Nếu $a \neq \frac{1}{2}$ thì $x = 4$.

Nếu $a = \frac{1}{2}$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi x.

132. $x = \frac{3}{4}$ với $a \neq \pm 1$.

133. $x = 0$ với $a \neq \pm b$.

134. Trừ 1 vào mỗi phân thức ở vế trái, trừ 3 vào vế phải, ta được:

$$(x-a-b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 0.$$

Nếu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = a+b+c$.

Nếu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0$, phương trình có nghiệm đúng với mọi x.

135. a) $-4; \frac{5}{3}$.

b) nếu $a \neq 0$, phương trình có hai nghiệm $-\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{2a}$.

Nếu $a = 0$, phương trình có nghiệm $-\frac{2}{3}$.

136. a) $(x-1)(x-2)^2 = 0$. Nghiệm 1 và 2.

b) Nếu $a \neq 0$, phương trình có nghiệm $\frac{2}{a}, \pm\frac{2}{3}$.

Nếu $a = 0$, phương trình có nghiệm $\pm\frac{2}{3}$.

c) $(x+2)(x^2-x+2) = 0$. Một nghiệm $x = -2$.

d) Đặt $x-1 = a, x+2 = b$ thì phương trình có dạng:

$a^3+b^3-\left(a+b\right)^3=0$

$\Leftrightarrow a^3+b^3-a^3-b^3-3ab\left(a+b\right)=0 \Leftrightarrow ab\left(a+b\right)=0.$

Xét $x-1=0; x+2=0; 2x+1=0,$ phương trình có ba nghiệm $1;\ -2;\ -\dfrac{1}{2}.$

137. a) Đặt ẩn phụ $y=x^2+x.$ ta được $y^2+4y-12=0,$ nên $y_1=-6, y_2=2.$

Với $y=-6$ thì $x^2+x+6=0,$ vô nghiệm.

Với $y=2$ thì $x^2+x-2=0$ có hai nghiệm -2 và $1.$

b) Nên nhân các đa thức ở vế trái một cách hợp lý làm xuất hiện những biểu thức chứa ẩn như nhau, từ đó mà đặt ẩn phụ.

Biến đổi phương trình thành $\left(x^2+x\right)\left(x^2+x-2\right)=24.$

Đặt $x^2+x-1=y$ ta được $\left(y+1\right)\left(y-1\right)=24.$ Do đó $y=\pm 5.$

Với $y=5$ ta có $x^2+x-1=5$ hay $x^2+x-6=0$. Suy ra $x_1=-3;\ x_2=2.$

Với $y=-5$ ta có $x^2+x-1=-5$ hay $x^2+x+4=0$, vô nghiệm.

c) $\left(x^2-9x+14\right)\left(x^2-9x+20\right)=72.$ Đặt $x^2-9x+17=y$ ta được $y=\pm 9$.

Do đó $x_1=1; x_2=8.$

d) 4 và $-8.$

e) Nhân hai vế của phương trình với với 12 được $\left(6x+7\right)^2\left(6x+8\right)\left(6x+6\right)=72.$

Đặt $6x+7=y,$ được $y=\pm 3.$ Nghiệm $-\dfrac{2}{3}$ và $-\dfrac{5}{3}.$

138. a) Thêm $16x^2$ vào hai vế ta được:

$\left(x^2+4\right)^2=\left(4x+1\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(x^2+4+4x+1\right)\left(x^2+4-4x-1\right)=0.$

Hai nghiệm 1 và 3.

b) $\left(x^2-4x\right)^2+2\left(x^2-4x+4\right)=43.$

Đặt $x^2-4x+4=y\left(y\geq 0\right)$ được $y_1=9;\ y_2=-3$ (loại).

Do đó $x_1=5, x_2=-1.$

c) 5 và 3.

d) Vô nghiệm.

e) $1;-2;-\dfrac{1}{2}.$

139. a) Thay $x=1$ vào phương trình ta được $-4m^2+4m=0,$ tức là $m^2-m=0$ nên $m=0$ hoặc $m=1.$

b) Thay $m^2-m=0$ vào phương trình ban đầu, được $x^3-7x+6=0.$ Phương trình có ba nghiệm: 1 ; 2; -3.

140. Nghiệm của phương trình, nếu có, phải thỏa mãn điều kiện $x\neq 0$ (còn $x^2+x+1,$ $x^2-x+1,$ x^4+x^2+1 luôn luôn dương).

Chú ý rằng $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=x^4+x^2+1$.

Sau khi biến đổi ta được $2x=3.$ Vậy $x=\dfrac{3}{2}$ là nghiệm của phương trình.

141. Sau khi biến đổi ta được $x^2-3x+2=0.$ Phương trình có nghiệm $x=1$ (giá trị $x=2$ bị loại).

142. $x=2$ với điều kiện $b\neq 0, a+b\neq 0.$

143. Nếu $a=0$, phương trình có nghiệm đúng với mọi x, trừ $x=0$ và $x=-10.$

Nếu $a\neq 0,$ phương trình vô nghiệm.

144. Điều kiện của nghiệm, nếu có là $x\neq a, x\neq 3.$

Sau khi biến đổi ta được: $2\left(a+3\right)x=\left(a+3\right)^2$. (1)

a) Nếu $a\neq -3$ thì $x=\dfrac{a+3}{2}.$ Giá trị này là nghiệm của phương trình nếu $\dfrac{a+3}{2}\neq a;\dfrac{a+3}{2}\neq 3$ tức là $a\neq 3.$

b) Nếu $a=-3$ phương trình (1) có dạng $0x=0.$ Phương trình nghiệm đúng với mọi $x\neq \pm 3.$

Kết luận:

Nếu $a \neq \pm 3$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a+3}{2}$.

Nếu $a = -3$, phương trình nghiệm đúng với mọi x trừ $x = 3, x = -3$.

Nếu $a = 3$, phương trình vô nghiệm.

145. Điều kiện của nghiệm, nếu có, là $x \neq \pm 1$. Viết phương trình dưới dạng:

$$x - a^2x + a = \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \ x - a^2x + a = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(1-a^2\right)x = 1 - a. \qquad (1)$$

Nếu $a \neq \pm 1$ thì $x = \dfrac{1}{1+a}$. Giá trị này là nghiệm nếu $\dfrac{1}{1+a} \neq \pm 1$, tức là $a \neq 0, a \neq -2$.

Nếu $a = 1$, phương trình (1) có dạng $0x = 0$, trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \pm 1$.

Nếu $a = -1$, phương trình (1) có dạng $0x = 2$,vô nghiệm.

Vậy muốn phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì $a \neq \pm 1$, $a \neq 0, a \neq -2$.

146. Gọi x là kết quả một số sau khi thay đổi. Ta có phương trình:

$$\left(x-2\right) + \left(x+2\right) + \frac{x}{2} + 2x = 45. \text{ Ta được } x = 10.$$

Các số ban đầu là $8;12;5;20$.

147. Gọi số phải tìm là $\overline{abcde} = x$. Ta có

$$\overline{abcde1} = 3.\overline{1abcde}$$

$$\Leftrightarrow 10x + 1 = 3\left(100000 + x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = 42857.$$

148. Gọi vận tốc dự định đi AB là x (km/h). Ta có phương trình:

$$\frac{30}{x+10} + \frac{30}{x-6} = \frac{60}{x}.$$

Ta được $x = 30$. Thời gian ô tô dự định đi AB là: $60 : 30 = 2$ (giờ)

149. 5 giờ và 10 giờ.

150. a) Gọi thời gian nước chảy vào từ lú bể cạn đến lúc mức nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là x giờ.

Trong 1 giờ vòi chảy vào được: $\frac{1}{1,5}=\frac{2}{3}$ bể.

Trong 1 giờ vòi chảy ra được: $\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$ bể

Nếu mở cả hai vòi, lượng nước chảy vào bể trong 1 giờ được: $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ bể.

Trong x giờ đầu, chỉ có vòi chảy vào làm việc nên lượng nước chảy vào bể là: $\frac{2}{3}x$ bể

Trong 2 giờ 42 phút – x giờ (tức 2, 7 – x giờ) còn lại, cả hai vòi làm việc nên lượng nước chảy vào bể là: $\frac{1}{3}(2,7-x)$.

Ta có phương trình: $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}(2,7-x)=1$.

Do đó $x=0,3$.

Thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mực nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là $0,3$ giờ.

b) Theo đề bài, nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 1, 5 giờ thì mực nước cao 2m. Vậy nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 0, 3 giờ thì mực nước cao: $\frac{2m.0,3}{1,5}=0,4m$.

Khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là 0, 4m.

151. 2400 quả.

Chương IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

152. Xét hiệu

$$\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{2\left(a^2+b^2\right)-\left(a^2+2ab+b^2\right)}{4}=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}\ge 0.$$

153. Xét hiệu $\left(a^{10}+b^{10}\right)\left(a^2+b^2\right)-\left(a^8+b^8\right)\left(a^4+b^4\right)$ rồi phân tích thành nhân tử được

$a^2b^2\left(a^2-b^2\right)^2\left(a^4+a^2b^2+b^4\right)\ge 0.$

154. Tử dương vì $a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$

Mẫu dương vì $a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$.

155. Ta có $a^2+b^2\ge 2ab, b^2+c^2\ge 2bc, c^2+a^2\ge 2ac$. Cộng từng vế các bất đẳng thức trên.

156. *Cách 1.* Xét hiệu hai vế

$a^2+b^2+c^2+3-2(a+b+c)=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2$.

Cách 2. Cộng từng vế các bất đẳng thức

$a^2+1\ge 2a,\ b^2+1\ge 2b, c^2+1\ge 2c.$

157. Xét hiệu $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$ mà $b-a>0, ab>0.$

158. a) *Cách 1.* Từ $a+b=1$ suy ra $(a+b)^2=1$ hay $a^2+2ab+b^2=1\ (1)$.

Từ $(a-b)^2\ge 0$ suy ra $a^2+2ab+b^2\ge 0\ \ (2)$.

Cộng các vế tương ứng của (1) và (2) ta có $2\left(a^2+b^2\right)\ge 1$ nên $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$.

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Cách 2. Đặt $a=\frac{1}{2}+x$ thì $b=1-a=\frac{1}{2}-x$.

Khi đó $a^2+b^2=\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=2x^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}.$

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow x=0\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}.$

b) Đặt $a=\frac{1}{3}+x, b=\frac{1}{3}+y, c=\frac{1}{3}+z.$

Do $a+b+c=1$ nên $x+y+z=0.$

Xét $a^2+b^2+c^2=\left(\frac{1}{3}+x\right)^2+\left(\frac{1}{3}+y\right)^2+\left(\frac{1}{3}+z\right)^2.$

$$=\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x+x^2+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}y+y^2++\frac{1}{9}+\frac{2}{3}z+z^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(x+y+z)+x^2+y^2+z^2$$

$$=\frac{1}{3}+x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}.$$

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow x=y=z=0\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$

c) Đặt $a_1=\frac{1}{n}+x_1, a_2=\frac{1}{n}+x_2,..., a_n=\frac{1}{n}+x_n.$

Do $a_1+a_2+...+a_n=1$ nên $x_1+x_2+...+x_n=0.$

Sau đó giải tương tự như câu b)

d) Giải tương tự như câu c)

159. Bình phương hai vế của $a+b>2$ (vì hai vế đều dương)

Ta được $a^2+2ab+b^2>4 \qquad (1)$

Mặt khác $(a-b)^2\ge 0$ nên $a^2-2ab+b^2\ge 0.$ (2)

Cộng các vế tương ứng của (1) và (2).

160. Nhân tử và mẫu của $\frac{x-y}{x+y}$ với $x+y>0.$

161. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với $(a+b)^2<(1+ab)^2$.

Xét hiệu: $(1+ab)^2-(a+b)^2=1+a^2b^2-a^2-b^2=(1-a^2)(1-b^2)$.

Do $|a|<1,|b|<1$ nên $a^2<1,b^2<1$, suy ra

$$(1-a^2)(1-b^2)>0.$$

Vậy $(a+b)^2<(1+ab)^2$, do đó $|a+b|<|1+ab|$.

162. Xét $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+9=(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+9=A.$

Đặt $x^2-7x+9=y$ thì $A=(y-3)(y+3)+9=y^2\ge 0.$

163. $4a(a+b)(a+1)(a+b+1)+b^2=4(a^2+ab+a)(a^2+ab+a+b)+b^2.$

Đặt $a^2+ab+a=m$ rồi biến đổi biểu thức thành bình phương của một đa thức.

164. Gọi $A=x^8-x^5+x^2-x+1.$

Cách 1. Xét $x\ge 1$ và viết A dưới dạng $x^5(x^3-1)+x(x-1)+1.$

Xét $x<1$ và viết A dưới dạng $x^8+x^2(1-x^3)+(1-x).$

Cách 2. $2A=2x^8-2x^5-2x^2-2x+2=(x^4-x)^2+(x-1)^2+x^8+1>0.$

165. a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác gợi cho ta các bất đẳng thức

$$a+b>c, c+a>b, c+b>a.$$

Xét hiệu $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$, phân tích thành nhân tử và sử dụng các bất đẳng thức trên.

166. Xét hiệu

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2-a^3-b^3-c^3$$

$$=a\left[(b-c)^2-a^2\right]+b\left[(c-a)^2-b^2\right]+c\left[(a+b)^2-c^2\right]$$

rồi phân tích thành nhân tử.

167. a) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$ vì $ab>0.$

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow a=b.$

b) Xét $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right).$

Do a,b,c dương nên theo câu a) ta có $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2.$

Do đó $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9.$

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow a=b,\ b=c, c=a \Leftrightarrow a=b=c.$

c) Trong bất đẳng thức $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ với $a,b,c>0$ (câu b).

thay $a=y+z,\ b=x+z,\ c=x+y$ ta được:

$2(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\right)\geq 9$

$\Rightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\right)\geq \frac{9}{2}$

$\Rightarrow \frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{x+z}+\frac{x+y+z}{x+y}\geq \frac{9}{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{x+z}+1+\frac{z}{x+y}+1\geq \frac{9}{2}$

$\Rightarrow \frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\geq \frac{3}{2}.$

Xảy ra đẳng thức $y+z=x+z=x+y \Leftrightarrow x=y=z.$

168. *Cách 1.* Đặt $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}=A.$

Để chứng minh $A<1$, ta xét một biểu thức trung gian B sao cho $A<B<1$ và biểu thức B có thể rút gọn dễ dàng. Ta thấy:

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2},\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3},\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4},...,\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}$$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}<1$ (xem ví dụ 29).

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2. Chọn biểu thức trung gian

$B=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+...+\frac{1}{n^2-1}$ thì $A<B.$

Còn $B=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(n-1)(n+1)}$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-...-\frac{1}{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{3}{4}.$$

Vậy $A<\frac{3}{4}.$

169. Nếu họn biểu thức trung gian là

$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+...+\frac{1}{(2n-1)2n}$ thì rút gọn rất khó.

Cách 1. Đặt $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}.$

Chọn biểu thức trung gian

$B=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+...+\frac{1}{(2n)^2-1}$. Dễ thấy $A<B,$ còn

$B=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ (xem bài 120).

Vậy $A<\frac{n}{2n+1}<\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$

Cách 2. $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}.$

$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2.2^2}+\frac{1}{2^2.3^2}+...+\frac{1}{2^2.n^2}$

$=\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)$

Theo bài 168 thì $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1.$

Do đó $A<\frac{1}{4}(1+1)=\frac{1}{2}.$

Chú ý: có thể giải các bài 168, 169 bằng phương pháp quy nạp toán học.

170. a) Từ $a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ với $a,b,c>0.$

Ta có: $abc(a+b+c)>bc+ac+ab$ $(1).$

Xét $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-ab-bc-ca+a+b+c-1$

$=(a+b+c)-(ab+bc+ca)>0$ do (1).

b) Xét $(a-1)(b-1)(c-1)$ dương nên số thừa số âm chẵn, tức là trong các số $a-1,b-1,c-1$ có một số dương hoặc ba số dương.

Trường hợp $a-1,b-1,c-1$đều dương thì $a>1,b>1,c>1$ nên $abc>1$, trái với giả thiết $abc=1$. Vậy trong các số $a-1,b-1,c-1$ chỉ có một số dương, còn hai số âm, tức là trong ba số a,b,c có một số lớn hơn 1, hai số nhỏ hơn 1.

171. a) Chú ý rằng

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

b) Ta có:

$$(a+b)^2 \ge 4ab$$
$$(b+c)^2 \ge 4bc$$
$$(c+a)^2 \ge 4ca$$

Vì hai vế của bất đẳng thức trên đều không âm nên nhân từng vế ta được

$$\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2 \ge [8abc]^2.$$

Vì các biểu thức trong dấu ngoặc vuông đều không âm nên

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc.$$

c) Chú ý rằng $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3abc(a+b)(b+c)(c+a)$ (xem bài 41).

172. a) Với mọi x ta có:

$$(a_1x-b_1)^2 \ge 0 \Rightarrow a_1^2x^2-2a_1b_1x+b_1^2 \ge 0$$

$$(a_2x-b_2)^2 \ge 0 \Rightarrow a_2^2x^2-2a_2b_2x+b_2^2 \ge 0$$

…

$$(a_nx-b_n)^2 \ge 0 \Rightarrow a_n^2x^2-2a_nb_nx+b_n^2 \ge 0$$

Cộng các vế tương ứng của các bất đẳng thức trên ta được:

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)x^2-2\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)x+\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right) \ge 0.$$

Tức là $Ax^2-2Cx+B \ge 0\ (1)$.

b) Vì (1) đúng với mọi x nên thay $x=\frac{C}{A}$ vào (1) ta được:

$$A\frac{C^2}{A^2}-2\frac{C^2}{A}+B \ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{C^2}{A}+B \ge \frac{2C^2}{A}$$

$\Rightarrow C^2 + AB \ge 2C^2$ (vì $A > 0$)

$\Rightarrow AB \ge C^2$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a_1x = b_1, a_2x = b_2, ..., a_nx = b_n$

Tức là $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = ... = \frac{b_n}{a_n}$ (quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử bằng 0).

Chú ý: Bất đẳng thức trên được gọi là bất đẳng thức Svac – Bu – nhi – a – cốp – xki.

Có thể chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp toán học.

173. Giả sử 2^{1982} viết trong hệ thập phân có x chữ số. Số nhỏ nhất có x chữ số là 10^{x-1}, số nhỏ nhất có $x+1$ chữ số là 10^x. Do đó: $10^{x-1} < 2^{1982} < 10^x \quad (1)$

Giả sử 5^{1982} có y chữ số. Ta có: $10^{y-1} < 5^{1982} < 10^y \quad (2)$

Số $2^{1982}, 5^{1982}$ viết liên tiếp tạo thành số có $x+y$ chữ số. Ta cần tìm $x+y$

Nhân từng vế của (1) và (2) (vì hai vế đều dương ta được):

$$10^{x-1}.10^{y-1} < 2^{1982}.5^{1982} < 10^x.10^y$$

$$\Rightarrow x+y-2 < 1982 < x+y.$$

Vì $x+y$ nguyên nên $1982 = x+y-1$. Do đó $x+y=1983$

Vậy viết liên tiếp kết quả của các số $2^{1982}, 5^{1982}$ ta được số có 1983 chữ số.

174. Bất đẳng thức đúng với $n=5$ vì $2^5 > 5^2$

Giả sử $2^k > k^2$ với $k \ge 5$. Ta sẽ chứng minh $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Xét $2^{k+1} - (k+1)^2$

$$= 2.2^k - k^2 - 2k - 1 > 2k^2 - k^2 - 2k - 1 \quad (2^k > k^2)$$

$$= k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 > 0 \quad (k \ge 5)$$

b) Bất đẳng thức đúng với $n=2$ vì $S_2 = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k$ tức là $S_k > \frac{13}{24}$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức với $n=k+1$, tức là $S_{k+1} > \frac{13}{24}$.

Ta có $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$.

$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2(k+1)}$

Do đó $S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > 0$.

Suy ra $S_{k+1} > S_k$, mà $S_k > \frac{13}{24}$. Vậy $S_{k+1} > \frac{13}{24}$.

175. a) $A = 2(x-5)^2 + 3 \geq 3$. Do đó $min\, A = 3 \Leftrightarrow x = 5$.

b) $B = 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \geq -\frac{1}{8}$. Do đó $min\, B = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$.

c) $C = -5\left(x+\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \leq \frac{9}{5}$. Do đó $max\, C = \frac{9}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$.

176. a) Rút gọn $A = \frac{(x+2)^2}{x^2+4}$. Do đó $min\, A = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

b) $B = \frac{1}{2x-x^2-4} = -\frac{1}{x^2-2x+4} = -\frac{1}{(x-1)^2+3}$

Ta có $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 3 \geq 3$

$\Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2+3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{(x-1)^2+3} \geq -\frac{1}{3}$

$min\, B = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow x = 1$.

c) $C = \frac{3x^2+6x+10}{x^2+2x+3} = 3 + \frac{1}{x^2+2x+3} = 3 + \frac{1}{(x+1)^2+2}$

$max\,C = 3,5 \Leftrightarrow x = -1.$

177. a) *Cách 1.* $A = \dfrac{4x^2 - 2x + 1}{x^2} = 4 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 4 - 2y + y^2$ với $y = \dfrac{1}{x}.$

Ta có $A = \left(y-1\right)^2 + 3 \ge 3,$ do đó $min\,A = 3 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = 1.$

Cách 2. $A = \dfrac{4x^2 - 2x + 1}{x^2} = \dfrac{3x^2 + x^2 - 2x + 1}{x^2} = 3 + \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2 \ge 3.$

$min\,A = 3 \Leftrightarrow x = 1.$

b) *Cách 1.* $B = \dfrac{2x+1}{x^2} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 2y + y^2$ với $y = \dfrac{1}{x}.$

$B = \left(y+1\right)^2 - 1 \ge -1,$ do đó $min\,B = -1 \Leftrightarrow y = -1 \Leftrightarrow x = -1.$

Cách 2. $B = \dfrac{2x+1}{x^2} = \dfrac{\left(x+1\right)^2 - x^2}{x^2} = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 - 1 \ge -1.$

$min\,B = -1 \Leftrightarrow x = -1.$

c) $min\,C = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = 3.$

d) $max\,D = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = 1.$

178. a) $A = \dfrac{3x^2 + 14}{x^2 + 4} = \dfrac{3(x^2 + 4) + 2}{x^2 + 4} = 3 + \dfrac{2}{x^2 + 4} \le 3,5$

$\text{maxA} = 3,5 \Leftrightarrow \text{x} = 0$

b) $B = \dfrac{2x+1}{x^2+2} = \dfrac{x^2 + 2 - x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2} = 1 - \dfrac{(x-1)^2}{x^2 + 4} \le 1$

$\text{max B} = 1 \Leftrightarrow \text{x} = 1$

179. a) $\min A = 3 \Leftrightarrow 2 \le x \le 5$

b) $B = (x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x - 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36 \ge -36$

$minB = -36 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x+5) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = -5$

c) $C=(x^2-x+1)^2$, Chú ý rằng $x^2-x+1>0$ nên $(x^2-x+1)^2{}_{\min}\Leftrightarrow(x^2-x+1)_{\min}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$min\ C=\dfrac{9}{16}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Chú ý rằng $C=(x^2-x+1)^2\ge 0$ nhưng giá trị $C=0$ không đạt được.

d) $D=(x-1)^2+(y+2)^2\ge 0$

$\min D=0\Leftrightarrow x=1; y=-2$

180. Cộng từng vế các đẳng thức $x+5y=21$ và $2x+3z=51$,

Ta được $3\left(x+y+z\right)+2y=72$. Như vậy $3\left(x+y+z\right)$ lớn nhất $\Leftrightarrow\ 2y$ nhỏ nhất.

Vì $y\ge 0$ nên $2y$ nhỏ nhất bằng $0\Leftrightarrow y=0$. Khi đó $x=21,\ z=3$

$3\left(x+y+z\right)$ lớn nhất bằng 72

Vậy x + y +z lớn nhất bằng 24 $\Leftrightarrow x=21, y=0, z=3$

181. a) Xét hằng đẳng thức $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$. Nếu $x+y=k$ (hằng số) thì

$4xy=k^2-(x-y)^2\le k^2$

Vậy xy lớn nhất bằng $\dfrac{k^2}{4}$ khi $x=y$

b) A = $x^3(16-x^3)$. Hai số x^3 và 16 – x^3 có tổng không đổi (bằng 16) nên có giá trị lớn nhất khi chúng bằng nhau. Giải phương trình $x^3=16-x^3$, ta được $x=2$.

Vậy với x = 2 thì A đạt giá trị lớn nhất bằng 64.

182. a) Xét hằng đẳng thức $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$. Nếu xy = k (hằng số) thì $(x+y)^2\ge 4k$

Vì x, y > 0 nên $x+y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (x+y)^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow\ x=y$.

b) $B=\dfrac{4x^2+1}{x}=4x+\dfrac{1}{x}$. Với $x>0$ thì $4x$ và $\dfrac{1}{x}$ là hai số dương, tích của chúng bằng 4, không đổi. Do đó tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi 4x = $\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (vì $x>0$)

c) Cách 1: Viết biểu thức đã cho thành

$$\frac{x^2+15x+16}{3x}=\frac{x}{3}+5+\frac{16}{3x}=5+\left(\frac{x}{3}+\frac{16}{3x}\right)$$

Sau đó lập luận như câu b)

Cách 2: Viết biểu thức đã cho thành $\frac{x^2+15x+16}{3x}=\frac{x^2-8x+16+23x}{3x}=\frac{(x-4)^2}{3x}+\frac{23}{3}$

Vì $3x > 0$ nên $\frac{(x-4)^2}{3x}\ge 0$ (xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = 4$)

Từ đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng $\frac{23}{3}$ khi và chỉ khi $x = 4$

Chú ý: Nếu viết biểu thức thành $\frac{x^2+8x+16+7x}{3x}=\frac{(x+4)^2}{3x}+\frac{7}{3}$ rồi kết luận giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng $\frac{7}{3}$ khi $x = -4$ thì không đúng, vì đề bài cho x > 0

183. Áp dụng kết quả của các bài 181, 182.

184. Gọi độ dài hai cạnh của hình chữ nhật vuông góc với mặt tường là x (mét), cạnh song song với mặt tường dài $40 - 2x$ (mét)

Tìm giá trị lớn nhất của $S = x.(40-2x)$ được:

$Max\,S = 200 \Leftrightarrow x = 10$

Hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng $200m^2$ khi chiều rộng bằng $10m$, chiều dài bằng $20m$.

185. Gọi độ dài các phần bị chia ra là x, y, z (cm) thì diện tích các hình vuông tương ứng là x^2, y^2, z^2 (cm^2)

Ta có: $x + y + z = 12$

Cần tìm giá tri nhỏ nhất của $x^2+y^2+z^2$ (xem bài 158d)

186. Gọi số có hai chữ số là $\overline{ab}$ $(1\le a\le 9; 0\le b\le 9)$

Tỉ số giữa số đó với tổng các chữ số của nó bằng:

$$k=\frac{10a+b}{a+b}=\frac{a+b+9a}{a+b}=1+\frac{9a}{a+b}=1+\frac{9}{1+\frac{b}{a}}$$

a) k lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{9}{1+\dfrac{b}{a}}$ lớn nhất $\Leftrightarrow 1+\dfrac{b}{a}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{b}{a}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ b = 0, a $\neq 0$

Vậy k lớn nhất khi số có hai chữ số là 10, 20, 30, … 90. Lúc đó tỉ số k bằng 10.

b) Tương tự như trên, k nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{b}{a}$ lớn nhất $\Leftrightarrow b = 9,\ a = 1.$

Số phải tìm là 19, tỉ số k bằng $19:(1+9)=1{,}9$

187. a) $A=\dfrac{1}{x+2}$ với $x\neq -2$

$A > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2}>0$ và $x\neq -2 \Leftrightarrow x > -2$

b) $B=-\dfrac{1}{x+2}$ với $x\neq -2$

$B < 0 \Leftrightarrow x > 2$

188. Nếu $a > b$ thì $x>\dfrac{a+b}{a-b}$

Nếu $a < b$ thì $x<\dfrac{a+b}{a-b}$

Nếu $a = b$ thì $0x > 2b$, nghiệm đúng với mọi x nếu $b < 0$, vô nghiệm nếu $b\geq 0$

189. Do $a > 1$ nên nhân hai vế của bất phương trình với số dương a, ta được:

$x+a^2>\text{ax}+a \Leftrightarrow x-\text{ax}>\text{a}-\text{a}^2 \Leftrightarrow x(1-a)>a(1-a) \Leftrightarrow x<a$ (vì $1-a<0$)

190. Nhân hai vế của bất phương trình với số dương $(a-1)(a+1)$

Đáp số $x > 1$

191. Điều kiện để bất phương trình có nghĩa là $a\neq 0$

Ở bài này cũng không nên nhân hai vế của bất phương trình với a vì phải xét hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$. Nên viết bất phương trình đã cho thành:

$$(a+1)x+x-\frac{1}{a}>\frac{1}{a}\Leftrightarrow (a+2)x>\frac{2}{a}$$

Nếu $a<2$ thì $x>\dfrac{2}{a(a+2)}$

Nếu $a > 2\ (a \neq 0)$ thì $x < \dfrac{2}{a(a+2)}$

Nếu $a = 2$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

192. a) $3 < x < 4$; b) $x > 5$

193. a) Giải bất phương trình $0 \le \dfrac{3x+7}{12} - x < 1$ với x là số nguyên, ta được: $-\dfrac{5}{9} < x \le \dfrac{7}{9}$ và $x \in Z$, do đó $x = 0$

b) $x = 1$

c) Giải bất phương trình $0 \le \dfrac{3x+1}{5} - (2x-1) < 1$ (1) với $2x - 1 \in Z$ (2)

Nghiệm của (1) là $\dfrac{1}{7} < x \le \dfrac{6}{7}$. Từ đó $-\dfrac{5}{7} < 2x - 1 \le \dfrac{5}{7}$

Do (2) nên $2x - 1 = 0$. Vậy $x = \dfrac{1}{2}$

194. $x = -2$

195. Cách 1: hai số có giá trị tuyệt đối bằng nhau khi chúng bằng nhau hoặc đối nhau. Xét hai trường hợp:

$x + 3 = 5 - x$, được $x = 1$

$x + 3 = x - 5$, vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Cách 2: Vì hai vế không âm nên bình phương hai vế ta được:

$x^2 + 6x + 9 = 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow 16x = 16 \Leftrightarrow x = 1$

196. $x = -\dfrac{1}{2}$

197. $x_1 = -\dfrac{1}{2}; x_2 = \dfrac{3}{2}$

198. $x = 2$

199. Xét các khoảng $x < 1$; $1 \le x \le 2; 2 < x \le 3; x > 3$

Nghiệm của phương trình là $1 \le x \le 2; x = 5$

200. a) Giải $-7 < 2x + 3 < 7$, được $5 < x < 2$

b) Giải $-x < 2x - 3 < x$, được $1 < x < 3$

201. a) Giải $2x - 3 > 5$ hoặc $2x - 3 < -5$. Đáp số $x > 4$; $x < 1$.

b) $x > 7$; $x < \dfrac{5}{3}$

202. $x < \dfrac{1}{2}$

203. $x < 0$; $x < 6$

204. $4 \le x \le 9$

205. $-5 \le x \le 0$

206. Đưa về dạng $\dfrac{x+12}{x+2} \le 0$. Đáp số: $-12 \le x < -2$

207. $x < 4$; $x > 2$

PHẦN ĐỀ THI

208. $P = 7^{343} : 7^{216} = 7^{127} = 7^{4.31+3} = 7^{4k+3} (k = 31) = (7^4)^k.7^3$ mà $7^4 = 2401$ nên $\left(7^4\right)^k$ tận cùng bằng 1. Còn $7^3 = 343$ tận cùng bằng 3. Do đó P có tận cùng bằng 3.

209. Cách 1:

$$z^2 + y(2x - y) - x^2 = z^2 + 2xy - y^2 - x^2 = z^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = z^2 - (x - y)^2 = (z + x - y)(z - x + y)$$

Do đó biểu thức chia hết cho $x - y + z$

Cách 2: $z^2 + y(2x - y) - x^2 = z^2 + 2xy - y^2 - x^2$

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rl} - & z^2 + 2xy - y^2 - x^2 \\ & z^2 + xz - yz \\ \hline - & 2xy - y^2 - x^2 - xz + yz \\ & xy - y^2 \qquad\qquad + yz \\ \hline - & xy - x^2 \qquad\qquad + xz \\ & xy - x^2 \qquad\qquad + xz \\ \hline & 0 \end{array} & \begin{array}{l} x - y + z \\ \hline z + y - x \end{array}
\end{array}$$

Do đó biểu thức $z^2 + y(2x - y) - x^2$ chia hết cho $x - y + z$

210. Chia đa thức x^4+ax^2+bx+c cho $\left(x-3\right)^3$ được thương là $x + 9$ và còn dư $\mathrm{ax}^2+54x^2+bx-216x+243+c$

Muốn cho đa thức x^4+ax^2+bx+c chia hết cho $(x-3)^3$ thì số dư phỉ bằng 0, tức là $x^2(a+54)+x(b-216)+243+c=0$ với mọi x. Từ đó suy ra

$a+54=0$ hay $a=-54$

$b-216=0$ hay $b=216$

$243+c=0$ hay $c=-243$

211. Thực hiện phép chia:

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2-3x-1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2} -\quad x^3+x^2+x & x-4 \\ \cline{1-1} -4x^2-4x-1 & \\ -\quad -4x^2-4x-4 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Suy ra giá trị của x^3-3x^2-3x-1 chia hết cho giá trị của x^2+x+1, khi 3 chia hết cho x^2+x+1Do đó: $x^2+x+1=\pm3$ hoặc $x^2+x+1=\pm1$

Biến đổi $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$, suy ra $x^2+x+1>0$ với mọi x

Vậy loại trường hợp $x^2+x+1=-3$ và $x^2+x+1=-1$

a) Từ $x^2+x+1=3$, suy ra $x^2+x-2=0$ Do đó $x^2+x-2=(x-1)(x+2)=0$. Vậy $x=1$ hoặc $x=-2$.
b) Từ $x^2+x+1=1$, suy ra $x^2+x=0\Leftrightarrow x\left(x+1\right)=0\Leftrightarrow$. Vậy $x=0$ hoặc $x=1$.
c) Trả lời có 4 giá trị nguyên của x: $x=\pm1$; $x=0$; $x=-2$

212. $a^4+8a^3+14a^2-8a-15$

$=a^4+8a^3+16a^2-a^2-8a-16-a^2+1$
$=(a^4+8a^3+16a^2)-(a^2+8a+16)-(a^2-1)$
$=(a^2+4a)^2-(a+4)^2-(a^2-1)$
$=a^2(a+4)^2-(a+4)^2-(a^2-1)$
$=(a+4)^2(a^2-1)-(a^2-1)$
$=(a^2-1)\left[(a+4)^2-1\right]$
$=(a-1)(a+1)(a+3)(a+5)$

213. Trước hết phân tích đa thức đã cho thành nhân tử:

$$\left(a^2+3a+1\right)^2-1=(a^2+3a+1+1)(a^2+3a+1-1)$$
$$=(a^2+3a+2)(a^2+3a)$$
$$=(a+2)(a+1)(a+3)a$$
$$=a(a+1)(a+2)(a+3)$$

Như vậy đa thức đã cho là một tích của bốn số tự nhiên liên tiếp.

Ta biết rằng:

a) Trong ba số tự nhiên liên tiếp ắt có một số chia hết cho 3, vậy đa thức đã cho chia hết cho 3.
b) Trong bốn số tự nhiên liên tiếp bao giờ cũng có hai số chẵn liên tiếp nên một trong hai số chia hết cho 2 và số còn lại sẽ chia hết cho 4, vậy đa thức đã cho chia hết cho 8.
c) Nhưng (3, 8)=1 nên tích của bốn số ự nhiên liên tiếp luôn luôn chia hết cho 24, do đó $\left(a^2+3a+1\right)^2-1$ chia hết cho 24.

214. Gọi hai số l là $2p+1$ và $2q+1$ với p, q là hai số nguyên.

Ta phải chứng minh $\left(2p+1\right)^2-(2q+1)^2$ chia hết cho 8.

Thực vậy:

$$\left(2p+1\right)^2-(2q+1)^2=4p^2+4p+1-4q^2-4q-1=4p(p+1)-4q(q+1)$$

$p\left(p+1\right)$ cũng như $q\left(q+1\right)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2.

Vậy $4p\left(p+1\right)$ và $4q\left(q+1\right)$ chia hết cho 8 và biểu thức đã cho chia hết cho 8

215. Ta có: $10^n-1=\underbrace{99...9}_{n\ chöõ\ soá}$

Vậy $10^n+18n-1=\underbrace{99...9}_{n\ chöõ\ soá}+9.2n$

$$=9.(\underbrace{11...1}_{n\ chöõ\ soá}+.2n)$$

Tích này chia hết cho 9 vì một thừa số là 9. cần chứng minh tổng trong ngoặc chia hết cho 3. Biến đổi tổng trong ngoặc:

$$\underbrace{11...1}_{n\ chöõ\ soá}+2n=\underbrace{11...1}_{n\ chöõ\ soá}-n+3n$$

Số n và số có tổng chữ số bằng n có cùng số dư trong phép chia cho 3 (theo dấu hiệu chia hết cho 3) nên $\underbrace{11...1}_{n\ chöõ\ soá} - n$ chia hết cho 3.

Vậy $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27

216. Bằng cách thêm, bớt hạng tử có:

$$m = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2+2)^2 - (2a)^2$$
$$= (a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$$
$$= \left[(a+1)^2+1\right]\left[(a-1)^2+1\right]$$

Giá trị nhỏ nhất của thừa số th nhất là 1 nếu $a = -1$, giá trị nhỏ nhất của thừa số thứ hai là 1 nếu $a = 1$. Còn trong tất cả các trường hợp khác thì tích lớn hơn 1.

Vậy ta có thể nói rằng ngoài trường hợp $a = 1$ và $a = -1$ (khi đó m=5) thì m có thể phân tích thành tích của hai thừa số lớn hơn 1, cho nên m không thể là số nguyên tố.

217. $25n^4 + 50n^3 - n^2 - 2n = n(25n^3 + 50n^2 - n - 2)$

$$= n(n+2)(25n^2-1) = n(n+2)24n^2 + n(n+2)(n^2-1)$$
$$= 24n^3(n+2) + (n-1)n(n+1)(n+2)$$

Biểu thức cuối cùng này có số hạng thứ nhất chia hết cho 24. Còn số hạng thứ hai là tích của bốn số nguyên liên tiếp phải chia hết cho 1. 2. 3. 4 =24

Vậy đa thức $25n^4 + 50n^3 - n^2 - 2n$ chia hết cho 24.

218. Nhóm năm số hạng rồi đặt thừa số chung của từng nhóm:

$$2^0 + 2^2 + 2^2 + ... + 2^{5n-3} + 2^{5n-2} + 2^{5n-1}$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5(1+2+2^2+2^3+2^4) + 2^{5.2}(1+2+2^2+2^3+2^4) +$$
$$... + 2^{5.(n-1)}(1+2+2^2+2^3+2^4)$$
$$= (1+2+2^2+2^3+2^4)(1+2^5+2^{5.2}+...+2^{5(n-1)})$$
$$= 31.(1+2^5+2^{5.2}+...+2^{5(n-1)})$$

Vậy $2^0 + 2^2 + 2^2 + ... + 2^{5n-3} + 2^{5n-2} + 2^{5n-1}$ chia hết cho 31

219. Trước hết phân tích đa thức đã cho: $a^6 - b^6 = (a^2-b^2)\left[(a^2-b^2)^2 + 3a^2b^2\right]$

Vì a và b không chia hết cho 3, cho nên:

$$a = 3p \pm 1, b = 3q \pm 1$$

$$a^2 = 3p' + 1; b^2 = 3q' + 1$$

ta thấy rằng cả hai thừa số đều chia hết cho 3 nên tích chia hết cho 9.

Vậy a và b không chia hết cho 3 thì $a^6 - b^6$ chia hết cho 9

220. Trước hết, ta biến đổi đa thức đã cho:

Dựa vào tính chất chia hết của một tổng cho một số, ta cần chứng minh $(a+1)(4a-1)$ cũng chia hết cho 6. Đặt A= $(a+1)(4a-1)$

- Nếu $a = 2k$ thì A = $(2k+1)(8k-1)$ Cả hai thừa số của A đều lẻ nên tích cũng lẻ. Một số lẻ không chia hết cho 6 nên A không chia hết cho 6.

- Nếu $a = 3k$ thì A = $(3k+1)(12k-1) = 36k^2 + 9k - 1$. Ta thấy $36k^2$ chia hết cho 6, nhưng 9k-1 không chia hết cho 6. Vậy A không chia hết cho 6.

- Nếu $a = 6k + 1$ thì $A = (6k+2)(24k+3) = 144k^2 + 66k + 6$. Các số hạng của A chia hết cho 6 nên A chia hết cho 6.

- Nếu $a = 6k - 1$ thì $A = 6k(24k-5)$. Có một thừa số chia hết cho 6 nên A chia hết cho 6.

Vậy $4a^2 + 3a + 5$ chỉ chia hết cho 6 nếu a là một số nguyên không chia hết cho 2 và cũng không chia hết cho 3.

221. Giả sử được, ta gọi số lẻ bất kì là $2a+1$ và có:

$2(2a+1) = b^2 - c^2 = (b+c)(b-c)$ với b, c là những số nguyên

Ta thấy $2(2a+1)$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 do đó $(b+c)(b-c)$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 (1)

a) Nếu b và c là những số chẵn thì $(b+c)$, $(b-c)$ chẵn, do đó $(b+c)(b-c)$ cũng chẵn và chia hết cho 4, điều này mâu thuẫn với (1)
b) Nếu b chẵn, c lẻ (hoặc ngược lại) thì $(b+c)$, $(b-c)$ lẻ, do đó $(b+c)(b-c)$ lẻ và không chia hết cho 2. Điều này mâu thuẫn với (1)
c) Nếu b và c là những số lẻ thì $(b+c)$, $(b-c)$ chẵn và $(b+c)(b-c)$ chi hết cho 4. Điều này mâu thuẫn với (1)

Vậy hai lần của một số lẻ bất kì không thể là hiệu bình phương của hai số nguyên.

222. Giải tương tự bài 22. Đáp số 8;9;10

223. Giải tương tự bài 72.

224. Số tận cùng bằng 5 có dạng $10a + 5$ (a là số thực)

Xét $n^2 = (10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25$

Vậy n^2 tận cùng bằng 25, còn số trăm là số chẵn vì a(a+1) là tích của hai số nguyên liên tiếp, nên n^2 không thể tận cùng bằng 125.

225. Gọi hai số đó là a và b, ta có a + b chia hết cho 3.

Ta có $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$= (a+b) \leq \left[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab\right]$

$= (a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right]$

Chia hết cho 9.

226. a) Đáp số:

b) Đáp số:

227. . $P = \left[(a^2+b^2) + (c^2+d^2) - 2(ac+bd)\right](a^2+b^2) - (ad + -bc)^2$

$= (a^2+b^2)^2 - 2(a^2+b^2)(ac+bd) + (c^2+d^2)(a^2+b^2) - (ad-bc)^2$

Biến đổi hai hạng tử cuối thành (ac + bd)^2, do đó:

$P = \left[(a^2+b^2) - 2ac + bd)\right]^2 = (a^2 + b^2 - ac - bd)^2$

Biến đổi hai hạng tử cuối thành (ac + bd)^2, do đó:

228. Ta có: $\left(x\ +\ y\right)^3 = x^3 +\ y^3 +\ 3xy\left(x+y\right)$ nên:

$1 = a + 3xy \Rightarrow xy = \dfrac{1-a}{3}$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= x^5 + y^5 + x^2y^3 + x^3y^2 - x^2y^3 - x^3y^2 \\ &= x^2(x^3+y^3) + y^2(x^3+y^3) - x^2y^2)(x+y) \\ &= (x^2+y^2)(x^3+y^3) - x^2y^2(x+y) \end{aligned}$$

Do đó $b = \left[(x+y)^2 - 2xy\right]a - \left(\dfrac{1-a}{3}\right)^2 = \left[1 - \dfrac{2(1-a)}{3}\right]a - \left(\dfrac{1-a}{3}\right)^2$

Rút gọn biểu thức trên được điều phải chứng minh.

229. Xem bài 79.

230. Đặt $A = n^2 + 3n + 39 = (n+5)(n-5) + 49$ A, A chia hết cho 49⇔ n+5 và n-2 chia hết cho 7 ⇔ $n = 7k + 2\,(1)$

Đặt $B = n^2 + n + 37 = (n+4)(n-3) + 49$

B chia hết cho 49 ⇔ $n + 4$ và $n - 3$ chia hết cho 7 ⇔ $n = 7m + 3(2)$

Từ (1) và (2) suy ra A, B không đồng thời chia hết cho 49, do đó không tồn tại số tự nhiên n để A và B cùng chia hết cho 49.

Đặt A, A chia hết cho 49⇔ n+5 và n-2 chia hết cho 7 ⇔ (1)

231. Cách 1: Nếu lấy mẫu chia cho tử thì được đúng 5 lần.

Vậy $\frac{199...9}{99...95} = \frac{1}{5}$

Cách 2: $19 = 20 - 1 = 2.10 - 1$

$199 = 200 - 1 = 2.10^2 - 1$

$199...9 = 2.10^n - 1$

$95 = 100 - 5 = 10^2 - 5 = 10^{1+1} - 5$

$995 = 1000 - 5 = 10^3 - 5 = 10^{2+1} - 5$

…

$99...95 = 10^{n+1} - 5$

Vậy $\frac{199...9}{99...95} = \frac{2.10^n - 1}{10^{n+1} - 5} = \frac{2\left(10^n - \frac{1}{2}\right)}{10\left(10^n - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{5}$

232. Trước hết phân tích tử và mẫu thành nhân tử:

$a^3 - 4a^2 - a + 4 = a^3 - a - 4a^2 + 4$

$= a(a^2 - 1) - 4(a^2 - 1)$
$= (a^2 - 1)(a - 4)$
$= (a-1)(a+1)(a-4)$

$a^3 - 7a^2 + 14a - 8 = a^3 - 2^3 - 7a^2 + 14a$

$= (a-2)(a^2 + 2a + 4) - 7a(a-2)$

$= (a-2)(a^2 + 2a + 4 - 7a)$

$$= (a-2)(a^2-5a+4)$$

$$= (a-2)(a-1)(a-4)$$

Vậy: $\dfrac{a^3-4a^2-a+4}{a^3-7a^2+14a-8} = \dfrac{(a-1)(a+1)(a-4)}{(a-2)(a-1)(a-4)} = \dfrac{a+1}{a-2}$

Tính số trị:

$\dfrac{a+1}{a-2} = \dfrac{102+1}{102-2} = \dfrac{103}{100} = 1,03$

233. Theo tính chất cơ bản của phân thức ta có:

$$\frac{1981-1980}{1981+1980} = \frac{1981-1980}{1981+1980}.\frac{1981+1980}{1980+1981} = \frac{1981^2-1980^2}{(1981+1980)^2} = \frac{1981^2-1980^2}{1981^2+2.1981.1980+1980^2}$$

Vậy $\dfrac{1981-1980}{1981+1980} = \dfrac{1981^2-1980^2}{1981^2+2.1981.1980+1980^2} < \dfrac{1981^2-1980^2}{1981^2+1980^2}$

Từ bài toán trên có thẻ ra bài toán tổng quát như sau:

Số nào lớn hơn: $\dfrac{x-y}{x+y}$ hay $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ với x > y > 0?

234. $\dfrac{10^{1979}+1}{10^{1980}+1} = \dfrac{(10^{1979}+0,1)+0,9}{10^{1980}+1} = \dfrac{(10^{1979}+0,1)+0,9}{10(10^{1979}+0,1)} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{0,9}{10^{1980}+1}$

Còn $\dfrac{10^{1980}+1}{10^{1981}+1} = \dfrac{(10^{1980}+0,1)+0,9}{10^{1981}+0,1.10} = \dfrac{(10^{1980}+0,1)+0,9}{10(10^{1980}+0,1)} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{0,9}{10^{1981}+1}$

Bằng cách so sánh hai phân số có cùng tử ta có: $\dfrac{10^{1979}+1}{10^{1980}+1} > \dfrac{10^{1980}+1}{10^{1981}+1}$

Từ bài toán trên, ta có thể ra bài toán tổng quát sau:

Số nào lớn hơn: $\dfrac{10^n+1}{10^{n+1}+1}$ hay $\dfrac{10^{n+1}+1}{10^{n+2}+1}$ với n là số tự nhiên?

235. $2a^2+2b^2=5ab$, suy ra $2a^2-5ab+2b^2=0$ suy ra $(2a-b)(a-2b)=0$ (1)

Vì b> a > 0 nên $a \neq 2b$. Để thảo mãn (1) thì $b = 2a$

Vậy $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{a+2a}{a-2a} = \dfrac{3a}{-a} = -3$

236. Cộng hai vế của $c^2+2(ab-ac-bc)=0$ lần lượt với a^2, b^2 ta có:

$a^2 = c^2 + 2ab - 2ac - 2bc + a^2 = (a-c)^2 + 2b(a-c)$ (1)

$b^2 = c^2 + 2ab - 2ac - 2bc + b^2 = (b-c)^2 + 2b(b-c)$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra vế trái của đẳng thức phải chứng minh có dạng:

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2} = \frac{(a-c)^2+2b(a-c)+(a-c)^2}{(b-c)^2+2a(b-c)+(b-c)^2}$$

$$= \frac{2(a-c)^2+2b(a-c)}{2(b-c)^2+2a(b-c)} = \frac{2(a-c)(a-c+b)}{2(b-c)(b-c+a)} = \frac{a-c}{b-c}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

237. $\dfrac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1} = \dfrac{x^2+x^2a+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-x^2a-a+a^2+a^2x^2+1}$

$= \dfrac{x^2(a^2+a+1)+(a^2+a+1)}{x^2(a^2-a+1)+(a^2-a+1)} = \dfrac{(x^2+1)(a^2+a+1)}{(x^2+1)(a^2-a+1)} = \dfrac{a^2+a+1}{a^2-a+1}$ do $x^2 + 1 \neq 0$

Điều đó chứng tỏ rằng phân thức đã cho không phụ thuộc vào x

Xét mẫu $a^2 - a + 1 = \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ cho nên phân thức $\dfrac{a^2+a+1}{a^2-a+1}$

Hay $\dfrac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$ có nghĩa với mọi x và a

238. Cộng các vế tương ứng của (1), (2), (3) được:

$x + y + z = by + cz + ax + cz + ax + by = 2(ax + by + cz)$

Thay $ax + by = z$ vào vế phải của đẳng thức ta được:

$x + y + z = 2(z + cz) = 2z(1 + c)$ Suy ra $\dfrac{1}{1+c} = \dfrac{2z}{x+y+z}$

Tương tự như vậy được:

$$\frac{1}{1+a} = \frac{2x}{x+y+z}$$

$$\frac{1}{1+b} = \frac{2y}{x+y+z}$$

Cộng các vế tương ứng của ba đẳng thức trên được:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2$$

239. Phân tích thành nhân tử:

$$\begin{aligned}a^2+ac-b^2-bc&=a(a+c)-b(b+c)\\&=a(a+b+c)-b(a+b+c)\\&=(a-b)(a+b+c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b^2+ab-c^2-ac&=b(b+a)-c(c+a)\\&=b(a+b+c)-c(a+b+c)\\&=(b-c)(a+b+c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c^2+bc-a^2-ab&=c(c+b)-a(a+b)\\&=c(a+b+c)-a(a+b+c)\\&=(c-a)(a+b+c)\end{aligned}$$

Mẫu chung (MC) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

Điều kiện $a+b+c\neq 0$, $a\neq b\neq c$

Quy đồng mãu các phân thức trên được:

$$\frac{c-a}{MC}+\frac{a-b}{MC}+\frac{b-c}{MC}=0$$

240. Gọi năm số nguyên liên tiếp là $x-2, x-1, x, x+1, x+2$ thì

$$(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+(x+2)^2$$

Sau khi rút gọn và chuyển vế được:

$x^2-12x=0\Leftrightarrow x(x-12)=0$ Suy ra $x_1=0; x_2=12$ (như đầu bài)

Vậy ngoài năm số trên thì còn năm số sau có tính chất như đầu bài: $-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2$

241. Nhận xét rằng ở tất cả các số hạng của hai vế, nếu ta cộng mẫu với số trừ của tử đều được 1999. Vì vậy, tất cả các số hạng của hai vế đều trừ đi 1 để được tử là $\text{x}-1999$. Chuyển các số hạng ở vế trái sang vế phải và đặt $\text{x}-1999$ làm nhân tử chung ta được:

$$(x-1999)\left(\frac{1}{29}+\frac{1}{27}+...+\frac{1}{19}-\frac{1}{1970}-\frac{1}{1972}-...-\frac{1}{1980}\right)$$

Nhân tử thứ hai không thể bằng 0. Vậy $x-1999=0$, suy ra $x=1999$.

242. Gọi x là số người của tổ đó (x nguyên dương). Ta có phương trình:

$$(x-3)\left(\frac{72}{x}+4\right)=72.$$

Giải phương trình: $x^2-3x-54=0$

$$\Leftrightarrow (x-9)(x+6)=0.$$

Suy ra $x_1=9; x_2=-6$ (loại bỏ).

Vậy số người của tổ đó là 9 người.

243. Xét hai trường hợp:

a) Trường hợp 1: $|x+2|-3=1$

$$\Leftrightarrow |x+2|=4$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=4 \\ x+2=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-6. \end{array}\right.$$

b) Trường hợp 2: $|x+2|-3=-1$

$$\Leftrightarrow |x+2|=2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=2 \\ x+2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3=0 \\ x_4=-4. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có bốn nghiệm: $x_1=2; x_2=-6; x_3=0; x_4=-4$.

244. Xét hiệu: $\left(2a^4+1\right)-\left(2a^3+a^2\right)$

$$=a^4-2a^2+1+a^4-2a^3+a^2=(a^2-1)^2+(a^2-a)^2.$$

Vì $(a^2-1)^2\geq 0, \left(a^2-a\right)^2\geq 0$ nên $(2a^4+1)-(2a^3+a^2)\geq 0$ hay $2a^4+1\geq 2a^3+a^2$.

245. Biến đổi: $P=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

$$=(x+2)(x+3)(x-1)(x+6)=(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)$$

$$=(x^2+5x)^2-36\geq -36 \text{ vì } (x^2+5x)^2\geq 0.$$

$$P=-36 \text{ khi } \left(x^2+5x\right)^2=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-5.$$

Vậy với $x=0$ hoặc $x=-5$ thì P có giá trị nhỏ nhất là -36.

246. Vì $n^2+(n+1)^2=2n^2+2n+1>2n^2+2n$ nên:

$$\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{1}{2n^2+2n}=\frac{1}{2n(n+1)}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right):2$$

Do đó ta có:

$$\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right):2;\ \frac{1}{13}<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):2;\ \frac{1}{25}<\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):2;$$

$$...\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right):2.$$

Cộng các vế tương ứng của các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\left(1-\frac{1}{n+1}\right):2<\frac{1}{2}.$$

247. Vì $0<x_1<1$ nên $x_2=x_1(1-x_1)>0.$

Mặt khác $x_3,x_4,...,x_{n+1}>0,$ do đó $x_1-x_{k+1}<x_1<1.$

Theo giả thiết có $x_k^2=x_k-x_{k+1}.$ Với $k=1,2,3,...$ thì:

$x_1^2=x_1-x_2$

$x_2^2=x_2-x_3$

. . .

$x_n^2=x_n-x_{n+1}.$

Do đó $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=x_1-x_{n+1}<x_1<1.$

248. Gọi các số theo thứ tự giảm dần:

$a>b>c>d>e>f>g$ (1). Ta sẽ chứng tỏ rằng $a+b+c\ge 50$ (2).

Nếu $c>15$ thì $a+b+c\ge(c+2)+(c+1)+c\ge 51.$

Nếu $c\le 15$ thì $d+e+f+g\le(c-1)+(c-2)+(c-3)+(c-4)\le 50.$

Vậy trong trường hợp nào thì (2) cũng đúng vì tổng của 7 số là 100.

249. Biết rằng trong một tam giác, đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn nên $(a-b)(A-B),(b-c)(B-C),(c-a)(C-A)$ đều không âm và có

$(a-b)(A-B)+(b-c)(B-C)+(c-a)(C-A)\geq 0.$

$\Rightarrow aA-aB-bA+2bB-bC-cB+2cC-cA-aC+aA\geq 0$

$\Rightarrow 2aA+2bB+2cC-aB-aC-bC-bA-cA-cB\geq 0.$

Cộng hai vế với $aA+bB+cC$ và chuyển vế ta được:

$3(aA+bB+cC)\geq aA+bB+cC+aB+aC+bC+bA+cA+cB=$

$=A(a+b+c)+B(a+b+c)+C(a+b+c)=$

$=(a+b+c)(A+B+B)=(a+b+c).180^o.$

Suy ra $\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}\geq 60^o.$ (1)

Mặt khác trong tam giác ta có:

$a<b+c$ hay $2a<a+b+c,$

$b<c+a$ hay $2b<a+b+c,$

$c<a+b$ hay $2c<a+b+c.$

Nhân hai vế lần lượt với A, B, C ta được:

$2aA<A(a+b+c),$

$2bB<B(a+b+c),$

$2cC<C(a+b+c).$

Do đó $2(aA+bB+cC)<(A+B+C)(a+b+c)=180^o.(a+b+c).$

Suy ra $\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}<90^o.$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

250. Từ $15x^2-7y^2=9$ suy ra $y^2=\dfrac{15-9}{7}$.

Ta thấy $15x^2$ tận cùng là 5 hay 0 nên $15x^2-9$ tận cùng là 6 hay 1.

Do đó y^2 tận cùng là 8 hay 3 (vì 8. 7=56 và 3. 7=21).

Nhưng số chính phương không tận cùng bằng 8, bằng 3.

Vậy không có số nguyên x, y nào thỏa mãn đẳng thức trên.

251. Số đó phải ó năm chữ số vì nếu có bốn chữ số mà bỏ đi ba chữ số thì số còn lại lớn nhất là 9 mà 9^3 =729, chỉ ó 3 chữ số. Giải thích tương tự nếu số đó có 6 chữ số.

Gọi số cần tìm là $z = \overline{abcde}$. Đặt $\overline{ab} = x, \overline{cde} = y$ thì $z = x^3$, do đó $1000x + y = x^3$

Suy ra $1000x \le x^2$ nên $1000 \le x^2$, vậy $x > 31$. (1)

Vì y < 1000 nên $x^3 - 1000x < 1000$ hay $x(x^2 - 1000) < 1000$

Với $x \ge 33$ thì $x(x^2 - 1000) \ge 33.89 = 2937 > 1000$ nên ta có x < 33. (2)

Từ (1) và (2) ta có x = 32. Vậy số đó là $z = x^3 = 32^3 = 32768.$.

252. Vì $n \le 1982$ nên n có nhiều nhất là bốn chữ số. Gọi bốn chữ số đó là x, y, z, t với $0 \le x \le 9; 0 \le y \le 9; 0 \le z \le 9; 0 \le t \le 9$.

Ta có $\overline{xyzt} + x + y + z + t = 1982$ (1)

Do $0 \le x + y + z + t \le 36$ nên từ (1) suy ra $1982 - 36 \le \overline{xyzt} \le 1982,$ suy ra $x = 1, y = 9$.

Thay vào (1) có $\overline{19zt} + 1 + 9 + z + t = 1982,$

hay $\overline{zt} + z + t = 72$

hay $11z + 2t = 72$ (2)

Do $0 \le t \le 9$ nên $0 \le 2t \le 18$ suy ra

$72 - 18 \le 11z + 2t \le 72$

hay $54 \le 11z \le 72$

hay $4\frac{10}{11} \le z \le 6\frac{6}{11},$ suy ra $z = 5$ hoặc $z = 6$.

Thay vào (2) với $z = 5$ thì $t = 8,5$ (loại)

với $z = 6$ thì $t = 3$.

Vậy $n = 1963$.

253. Nếu trong sáu số đã cho có số 0 thì tích bằng 0. Như thế tổng của 6 số bằng 0 nên mỗi số bằng 0.

Gọi sáu số tự nhiên tăng dần là $1 \le a \le b \le c \le d \le e \le g$.

Theo đề bài ta có $abcdeg = a + b + c + d + e + g \le 6g$ (1).

Suy ra $abcde \le 6$ (vì $g > 0$).

Không thể có ba số lớn hơn hay bằng 2 vì 2. 2. 2 = 8 >6, do đó $a = b = c = 1$.

Thay vào (1) ta có $deg = 3 + d + e + g$ (2)

và $de \le 6$ (3)

Nếu $d = 1$ thì (2) là $eg = 4 + e + g$

$\Leftrightarrow eg - e - g + 1 = 5$

$\Leftrightarrow (e-1)(g-1) = 5.$

Suy ra $e - 1 = 1, g - 1 = 5,$ do đó $e = 2, g = 6.$

Nếu $d = 2$ thì do (3) nên $e = 2$ hoặc 3.

Nếu $e = 2$ thì (2) là $4g = 7 + g \Rightarrow 3g = 7,$ loại.

Nếu $e = 3$ thì (2) là $6g = 8 + g \Rightarrow 5g = 8,$ loại.

Nếu $d \ge 3$ thì vì $e > d$ nên $e \ge 3,$ trái với (3).

Kết luận: Các số đó là (0, 0, 0, 0, 0, 0) và (1, 1, 1, 1, 2, 6).

254. Gọi hai số phải tìm là A và B. Ta có:

$A + B = 10x + y, A - B = 10y + x$ với $9 \ge x \ge y \ge 1.$ (1).

Suy ra $A = \dfrac{11(x+y)}{2} = 11a$ với $a = \dfrac{x+y}{2}$ (2).

$B = \dfrac{9(x-y)}{2} = 9b$ với $b = \dfrac{x-y}{2}.$ (3).

Vì A, B có hai chữ số và $y \ne 0$ nên $9 \ge a > b \ge 2.$ (4).

Từ (2) và (3) suy ra $x = a + b,\ y = a - b.$

Do (4) suy ra $a + b \ge 5,$ do (1) suy ra $a + b \le 9.$

Nếu $a + b = 9$ thì $a = 7,\ b = 2,\ A = 77,\ B = 18.$

$a = 6,\ b = 3,\ A = 66,\ B = 27.$

$a = 5,\ b = 4,\ A = 55,\ B = 36.$

Nếu $a + b = 8$ thì $a = 6,\ b = 2,\ A = 66,\ B = 18.$

$a=5,\ b=3,\ A=55,\ B=27.$

Nếu $a+b=6$ thì $a=4,\ b=2,\ A=44,\ B=18.$

Nếu $a+b=5$ thì $a=3,\ b=2,\ A=33,\ B=18.$

Vậy có 9 cặp số như trên (kể cả 44 và 18).

255. a) Phân tích:

$4x^2-12x+5=(2x-1)(2x-5)$

$13x-2x^2-20=(x-4)(5-2x)$

$21+2x-8x^2=(3+2x)(7-4x)$

$4x^2+4x-3=(2x-1)(2x+3)$

Điều kiện để P có nghĩa: $x\neq\frac{1}{2}, x\neq\frac{5}{2}, x\neq 4, x\neq-\frac{3}{2}, x\neq\frac{7}{4}.$

b) Kết quả rút gọn: $P=\frac{2x-3}{2x-5}.$

256. Xem ví dụ 27.

257. Nhận xét: $\frac{1992x}{xy+1992x+1992}=\frac{1992}{y+1992+\frac{1992}{x}}=\frac{1992}{y+1992+yz};$

$$\frac{z}{xz+z+1}=\frac{yz}{xyz+yz+y}=\frac{yz}{1992+y+yz}.$$

Vậy $P=\frac{1992}{1992+y+yz}+\frac{y}{1992+y+yz}+\frac{yz}{1992+y+yz}=1.$

258. Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}\Rightarrow 6y+6x+1=xy.$

$$\Rightarrow (x-6)(y-6)=37.$$

Giả sử $x\geq y$ thì: $\begin{cases}x-6=-1\\ y-6=-37\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x-6=37\\ y-6=1\end{cases}.$

Trường hợp đầu loại, trường hợp sau cho $x=43, y=7.$

259. Biến đổi vế trái:

$M = x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2 = x^2(x+1)^2\left[(x-1)^2+1\right].$

Nếu $x = 0$ thì $(x-1)^2+1$ không là số chính phương.

Nếu $x = 1$ thì $M = 4 \Rightarrow y = 2.$

Nếu $x \ge 2$ thì $(x-1)^2+1$ không là số chính phương.

260. $A = \left(x^2 + xy + \frac{y^2}{4}\right) + \frac{59}{4}y^2 + 8x + y + 1992.$

$$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{59}{4}y^2 + 8x + y + 1992$$

$$= \left(x + \frac{y}{2} + 4\right)^2 + \frac{59}{4}y^2 - 3y + 1992 - 16$$

$$= \left(x + \frac{y}{2} + 4\right)^2 + \frac{59}{4}\left(y^2 - \frac{12}{59}y\right) + 1976$$

$$= \left(x + \frac{y}{2} + 4\right)^2 + \frac{59}{4}\left(y - \frac{6}{59}\right)^2 + 1976 - \frac{9}{59}.$$

Vậy $\text{Min}\,A = 1975\frac{50}{59} \Leftrightarrow x = -4\frac{3}{59}.$

261. Nếu A, B, C > 0 thì $A^2 + B^2 + C^2 > AB + BC + CA$

$\Rightarrow 3(A^2 + B^2 + C^2) \ge (A+B+C)^2 \Rightarrow A^2 + B^2 + C^2 \ge \frac{(A+B+C)^2}{3}.$

Đặt $A = a + \frac{1}{a}, B = b + \frac{1}{b}, C = c + \frac{1}{c},$ vế trái là P.

Ta có:

$$P > \frac{1}{3}\left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(a + b + c + \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1\right)^2$$

Chú ý rằng $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ (với a, b > 0) nên:

$$P\geq\frac{1}{3}(4+6)^2=\frac{100}{3}>33.$$

262. Biến đổi thành $\frac{5x+3}{3x+2}>1992.$

Giải bất phương trình trên (giải tương tự như ví dụ 60) được:

$$-\frac{3981}{5971}<x<-\frac{2}{3}.$$

263. $M=a^3-3ab^2+2b^3$

$=a(a^2-b^2)+2b^2(b-a)$

$=(a-b)(a^2+ab-2b^2)$

$=(a-b)\left[a^2-b^2+b(a-b)\right]$

$=(a-b)^2(a+2b).$

Do $a\geq 0, b\geq 0$ nên $M\geq 0.$

264. Vì $[x,y]$ là BCNN của x và y nên y[x, y] và x[x, y] là bội của xy. Hiệu ủa chúng cũng là bội của xy. Nếu hiệu này khác 0 thì giá trị tuyệt đối nhỏ nhất là xy.

Vậy nếu $0<x<y$ thì $y[x,y]-x[x,y]\geq xy.$

$$\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,d]}+\frac{1}{[d,e]}\leq\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+\frac{1}{c}-\frac{1}{d}+\frac{1}{d}-\frac{1}{e}=\frac{1}{a}-\frac{1}{e}<1.$$

265. Gọi số gồm bảy chữ số đầu là a, chữ số thứ tám là b, ta có $10a+b$ chia hết cho 101.

Viết chữ số cuối lên đầu ta được $10^7b+a.$

Ta có: $10^7b+a=10b(10^6+1)+101a-10(10a+b).$

Biểu thức này chia hết cho 101 (chú ý rằng $10^6+1=101.9901$)

266. Gọi năm số nguyên là a, b, c, d, e ta có:

$a+b+c+d+e=0.$ Ta có:

$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=(a^5-a)+(b^5-b)+(c^5-c)+(d^5-d)+(e^5-e).$

Chứng minh rằng mỗi dấu ngoặc đều chia hết cho 15.

267. $A=\left(1-\dfrac{1}{\frac{(1+2).2}{2}}\right)\left(1-\dfrac{1}{\frac{(1+3).3}{2}}\right)...\left(1-\dfrac{1}{\frac{(1+1986).1986}{2}}\right)$

$=\dfrac{2}{3}.\dfrac{5}{6}.\dfrac{9}{10}...\dfrac{1987.1986-2}{1986.1987}$

$=\dfrac{4}{6}.\dfrac{10}{12}.\dfrac{18}{20}...\dfrac{1987.1986-2}{1986.1987}$ (1)

Biến đổi tử của phân số cuối cùng:

$1987.1986-2=1986(1988-1)+1986-1988$

$=1986(1988-1+1)-1988=1988(1986-1)$

$=1988.1985.$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$A=\dfrac{4.1}{2.3}.\dfrac{5.2}{3.4}.\dfrac{6.3}{4.5}...\dfrac{1988.1985}{1986.1987}$

$=\dfrac{(4.5.6...1988)(1.2.3...1985)}{(2.3.4...1986)(3.4.5...1987)}$

$=\dfrac{1988}{1986.3}=\dfrac{994}{2979}.$

268. Đặt $40=a, 51=b, 91=a+b$

Ta có: $a^4+b^4+(a+b)^4$

$=a^4+b^4+a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$=2(a^4+b^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3)$

$=2(a^2+ab+b^2)^2.$

$a^2+ab+b^2=40^2+40.51+51^2=6241=79^2.$

$\Rightarrow (a^2+ab+b^2)^2 = 79^4.$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

269. Biến đổi:

$$\frac{y}{x^3-1}=\frac{y}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{-(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{-1}{x^2+x+1}$$

(điều kiện $x\neq 1$)

Tương tự: $\frac{x}{y^3-1}=\frac{-1}{y^2+y+1}$ $(y\neq 1)$.

Ta có:

$$\frac{y}{x^3-1}-\frac{x}{y^3-1}=\frac{-1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{x^2+x+1-y^2-y-1}{(x^2+x+1)(y^2+y+1)}$$

$$=\frac{(x^2-y^2)+(x-y)}{[x^2y^2+(x+y+1)]+(x^2+y^2)+xy(x+y+1)}$$

$$=\frac{(x-y)(x+y+1)}{(x^2y^2+2)+(x^2+y^2+2xy)}=\frac{2(x-y)}{x^2y^2+3}.$$

270. $A=124.\frac{1}{1984}\left(1-\frac{1}{1985}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1986}+...+\frac{1}{16}-\frac{1}{2000}\right)$

$$=\frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$B=\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{17}+\frac{1}{2}-\frac{1}{18}+...+\frac{1}{1984}-\frac{1}{2000}\right)$

$$=\frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1984}\right)-\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{17}+...+\frac{1}{1984}-\frac{1}{17}-\frac{1}{18}-...-\frac{1}{1984}-\left(\frac{1}{1985}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

Vậy $A=B.$

271. Gọi a là chữ số đầu tiên của số A có n chữ số.

Gọi B là số sau khi đã bỏ đi chữ số a ta có:

$A = a.10^{n-1} + B \quad (1)$

a) Nếu $A = 57B$ thì theo (1) có:

$a.10^{n-1} = 56B = 7.8B \quad (2)$

Giả sử $a = 7$ thì:

$$10^{n-1} = 8B \Rightarrow B = \frac{10^{n-1}}{2^3} = \frac{10^{n-1}.5^3}{10^3} = 125.10^{n-4}.$$

Vậy có số nguyên dương dạng $7125.10^k (k \ge 0)$ mà nếu bỏ chữ số 7 thì số đó giảm đi 57 lần.

b) Nếu $A = 58B$ thì từ (1) ta có:

$a.10^{n-1} = 57B = 3.19B.$

Vế trái $a.10^{n-1}$ không chia hết cho 19 do a là số có một chữ số.

Vậy không có số nguyên dương nào mà khi bỏ chữ số đầu tiên thì số đó giảm đi 58 lần.

272. Vì $ab = 1$ nên ta có:

$ac + bd = 2 = 2ab = ab + ab$

$\Rightarrow ac - ab = ab - bd$

$\Rightarrow a(c - b) = b(a - d).$

Tích của hai số bằng nhau không thể là số âm nên:

$ab(c - b)(a - d) \ge 0.$

$\Rightarrow ac + bd - ab - cd \ge 0.$

$\Rightarrow 2 - 1 - cd \ge 0$

$\Rightarrow 1 - cd \ge 0.$

273. Gọi t là BCNN của a_{m-1} và a_m, vậy $t \le n,$ ta có: $a_m < a_{m-1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_m} > \frac{1}{a_{m-1}} \Rightarrow \frac{t}{a_m} > \frac{t}{a_{m-1}}$$

$$\Rightarrow 1 \le \frac{t}{a_m} - \frac{t}{a_{m-1}} \le \frac{n}{a_m} - \frac{n}{a_{m-1}} \text{ với } m = 2,3,...,k.$$

Từ $n \ge a_1$ suy ra $1 \le \frac{n}{a_1}$. Ta có:

$$1 \le \frac{n}{a_1}$$

$$1 \le \frac{n}{a_2} - \frac{n}{a_1}$$

. . .

$$1 \le \frac{n}{a_m} - \frac{n}{a_{m-1}}.$$

Cộng các vế tương ứng của các bất đẳng thức trên:

$$m \le \frac{n}{a_m} \Rightarrow m.a_m \le n \ (m = 2, 3, ..., k).$$

274. trừ 1 vào mỗi phân thức ở vế trái. Đáp số $x = 5958$.

275. Theo tính chất của tỉ kệ thức và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Áp dụng nhận xét trên ta có:

$$\frac{2\left[(1985-x)^2 + (x-1986)^2\right]}{2(1985-x)(x-1986)} = \frac{68}{-30}$$

$$\Rightarrow \frac{(1985-x)^2 + (x-1986)^2}{2(1985-x)(x-1986)} = \frac{34}{-30}$$

Lại áp dụng nhận xét trên:

$$\frac{(-1)^2}{(3971-2x)^2} = \frac{4}{64}.$$

Do đó:

$$\frac{1}{2x-3971} = \pm\frac{1}{4}.$$

Đáp số: $x_1 = 1987,5$; $x_2 = 1983,5$.

276. $\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=\frac{1}{ac+bd}$.

$\Rightarrow \frac{bc+ad}{ab}=\frac{1}{ac+bd}$

$\Rightarrow abc^2+b^2cd+a^2cd+abd^2-ab=0$

$\Rightarrow cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2-1)=0.\quad (1)$

Từ $c+d=1$, bình phương hai vế ta được:

$c^2+d^2+2cd=1\Rightarrow c^2+d^2=1-2cd.\quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$cd(a^2+b^2)-2abcd=0$

$\Rightarrow cd(a-b)^2=0.$

Do $c\neq 0, d\neq 0$ nên $a=b.$

277. Xét hiệu:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5\right).$

Vì $x_1^2=4\left(\frac{x_1}{2}\right)^2$ nên hiệu trên bằng:

$\left(\frac{x_1}{2}-x_2\right)^2+\left(\frac{x_1}{2}-x_3\right)^2+\left(\frac{x_1}{2}-x_4\right)^2+\left(\frac{x_1}{2}-x_5\right)^2\geq 0.$

Xảy ra dấu bằng khi $\frac{x_1}{2}=x_2=x_3=x_4=x_5.$

278. Nếu $a=0$ thì $x=0, P=0.$

Nếu $a\neq 0$ thì P có nghĩa (vì mẫu $x^4-x^2+1=(x^2-1)^2+x^2>0$) và $P\neq 0.$

Ta tính: $\frac{1}{a}=\frac{1}{x}+x+1\Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-1.$

Mặt khác: $\frac{1}{P}=x^2+\frac{1}{x^2}-1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3=\left(\frac{1}{a}-1\right)^2-3=\frac{1-2a-2a^2}{a^2}.$

Do đó $P = \dfrac{a^2}{1-2a-2a^2}$. (1)

Với biểu thức (1), khi $a = 0$ ta có $P = 0$.

Vậy $P = \dfrac{a^2}{1-2a-2a^2}$ với mọi giá trị của $a = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

279. Với $n = 2$ thì $n^n - n^2 + n - 1 = 1$, chia hết cho $(n-1)^2 = (2-1)^2 = 1$.

Với $n > 2$, ta có:

$A = n^n - n^2 + n - 1$

$= (n^{n-2} - 1)n^2 + (n-1)$

$= (n-1)(n^{n-3} + ... + 1)n^2 + (n-1)$

$= (n-1)(n^{n-1} + ... + n^2 + 1)$.

Xét tổng $B = n^{n-1} + ... + n^2 + 1$, B có $n-1$ số hạng, có thể viết:

$B = (n^{n-1} - 1) + (n^{n-2} - 1) + ... + (n^2 - 1) + (1-1) + (n-1)$.

Mỗi hiệu trong ngoặc đều chia hết cho $n-1$.

Vậy A chia hết cho $(n-1)^2$.

280. Với $x \in Z$ có: $P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6$.

Nếu x chia hết cho 3 thì năm số hạng đầu của $P(x)$ chia hết cho 9, còn 6 không chia hết cho 9, do đó $P(x)$ không chia hết cho 9, nghĩa là $P(x) \neq 0$.

Nếu x không chia hết cho 3 thì x^5 không chia hết cho 3, còn ác số hạng khác của $P(x)$ đều chia hết cho 3, do đó $P(x)$ không chia hết cho 3, nghĩa là $P(x) \neq 0$.

281. Nhân hai vế của S với 2:

$2S = \dfrac{2}{2^0} + \dfrac{4}{2^1} + \dfrac{3}{2^1} + \dfrac{4}{2^2} + ... + \dfrac{1991}{2^{1989}} + \dfrac{1992}{2^{1990}}$

$= 4 + \left(\dfrac{2}{2} + \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{3}{2^2} + \dfrac{1}{2^2}\right) + ... + \left(\dfrac{1991}{2^{1989}} + \dfrac{1}{2^{1990}}\right)$

$= 3\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2^0} + \dfrac{2}{2^1} + \dfrac{3}{2^2} + ... + \dfrac{1991}{2^{1990}} + \dfrac{1992}{2^{1991}}\right) - \dfrac{1992}{2^{1991}} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ... + \dfrac{1}{2^{1990}}$

$$= 3\frac{1}{2} + S - \frac{1992}{2^{1991}} + \frac{1}{2^2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1989}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 3\frac{1}{2} + S - \frac{1992}{2^{1991}} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1990}$$

$$\Rightarrow S = 4 - \frac{1992}{2^{1991}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1990} < 4.$$

282. Nhân hai vế của P với x, y, z được:

$$Px = \frac{x^2}{y+z} + \frac{xy}{z+x} + \frac{xz}{x+y}$$

$$Py = \frac{yx}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{yz}{y+x}$$

$$Pz = \frac{xz}{y+z} + \frac{zy}{z+x} + \frac{z^2}{y+x}.$$

Suy ra: $P(x+y+z) = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} + \frac{y(x+z)}{x+z} + \frac{z(x+y)}{x+y} + \frac{x(y+z)}{(y+z)} = Q + (x+y+z).$

Do đó: $(P-1)(x+y+z) = Q.$ (1)

a) Nếu $P = 1$ thì từ (1) ta có $Q = 0.$

b) Nếu $Q = 0$ thì có thể $P \neq 1$ mà $x + y + z = 0,$ chẳng hạn với $x = 1,\ y = 2, z = -3,$ ta có:

$$P = \frac{1}{-1} + \frac{2}{-2} + \frac{-3}{3} = -3 \neq 1.$$

Vậy nếu $Q = 0$ thì không nhất thiết $P = 1.$

283. Đặt $\underbrace{11...1}_{k\ c/s} = a$ thì $A = \underbrace{11...1}_{k\ /s}\ \underbrace{11...1}_{k\ /s} = a.10^k + a.$

$$B = 4.\underbrace{11...1}_{k\ /s} = 4a. \text{ Do } 10^k = \underbrace{99...9}_{k\ /s} + 1 = 9a + 1$$

nên $A - 2B + 1 = a(9a+1) + a - 2.4a + 1$

$= 9a^2 - 6a + 1 = (3a-1)^2$ là số chính phương.