Phần I

ĐẠI SỐ

LÊ TRIỆU BÁ VƯƠNG

VÕ TẤN ĐẠT

CAO TỚI

NGUYỄN THÀNH SƠN

TUẤN NGUYỄN

NGUYỄN QUANG HIỆP

TRỊNH VĂN LUÂN

BÙI QUỐC HOÀN

THÀNH LÊ

THẦY HÓA

HỒ NHƯ VƯƠNG

BÙI TIẾN MẠNH

HỨA ĐỨC SINH

ĐẶNG ĐỨC QUÝ

ĐÀM THANH PHƯƠNG

TRẦN TRỌNG TIẾN

THANH QUÂN

Chương 1 PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

Chủ đề 1: NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC. NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

A Trọng tâm kiến thức

Các quy tắc nhân đơn thức với đa thức và nhân đa thức với đa thức:

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

$$(A+B)(C-D)=A\cdot C-A\cdot D+B\cdot C-B\cdot D$$

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Làm tính nhân

Áp dụng quy tắc nhân đơn thức với đa thức và nhân đa thức với đa thức. Lưu ý quy tắc dấu của phép nhân và thu gọn các hạng tử đồng dạng

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Làm tính nhân

a) $\frac{1}{2}x^3\left(x^2-6x-10\right)$;

b) $-3x^2\left(5x^3-4x^2+3x-1\right)$.

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính

a) $(x+8)(x-4)$;

b) $(2x-1)\left(3x^2-7x+5\right)$.

Ví dụ 3. Tìm hệ số của x^3 trong kết quả phép nhân $\left(x^2-x\right)\cdot\left(x^2+x-1\right)$.

Dạng 2: Rút gọn biểu thức và tính giá trị của biểu thức

- Thực hiện các phép nhân đơn thức với đa thức, đa thức với đa thức, bỏ dấu ngoặc, thu gọn các hạng tử đồng dạng.
- Thay giá trị của các biến vào biểu thức đã rút gọn rồi thực hiện các phép tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $A = 8x(x-2) - 3\left(x^2 - 4x - 5\right) - 5x^2$.

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức $B = 2(x-5)(x+1) + (x-3)\left(x + x^2\right)$.

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức $A = (x+5)(2x-3) - 2x(x+3) - (x-15)$.

Ví dụ 4. Cho biểu thức $A = 5x^2(3x-2) - (4x+7)\left(6x^2 - x\right) - \left(7x - 9x^3\right)$.
Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức B với $x = -\dfrac{3}{4}$.

Ví dụ 5. Cho biểu thức $C = x\left(x + x^3\right) + (x-1)\left(x^2 + x^3\right) + 1$. Rút gọn biểu thức C rồi chứng tỏ rằng với hai giá trị đối nhau của x thì biểu thức C có cùng một giá trị.

Dạng 3: Chứng minh giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào giá trị các biến

Biến đổi biểu thức đã cho thanh một biểu thức không chứa biến.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của các biến:

$$A = (2x-3)(x+7) - 2x(x+5) - x.$$

Ví dụ 2. Cho biểu thức $B = 10 - 5x(x - 1,2) + 2x(2,5x - 3)$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức này luôn luôn không đổi.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $C = x(x-y) + y(x+y) - (x+y)(x-y) - 2y^2$. Với mọi giá trị của x và y thì giá trị của biểu thức C là một số âm hay số dương?

Dạng 4: Chứng minh đẳng thức

Biến đổi một vế thành về kia hoặc biến đổi cả hai vế cùng bằng một biểu thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh đẳng thức $(x-y)\left(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3\right) = x^4 - y^4$.

Ví dụ 2. Chứng minh đẳng thức $(x+y)(x+y+z) - 2(x+1)(y+1) + 2 = x^2 + y^2$.

Ví dụ 3. Cho $ab = 1$. Chứng minh đẳng thức $a(b+1) + b(a+1) = (a+1)(b+1)$.

Dạng 5: Tìm giá trị của x thỏa mãn đẳng thức cho trước

- Thực hiện các phép nhân đa thức rồi thu gọn về dạng $ax = b$.
- Suy ra $x = \dfrac{b}{a}$ (nếu $a \neq 0$).

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm x biết $(x+1)\left(x^2 + 2x - 1\right) - x^2(x+3) = 4$.

Ví dụ 2. Tìm x biết $(x+1)\left(3x^2 + x - 2\right) - x^2(3x+4) = 5$.

Ví dụ 3. Tìm x biết $3(x-2)(x+3)-x(3x+1)=2$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Làm tính nhân

a) $-4x^3\left(x^2-3x+2\right)$;

b) $-\dfrac{2}{5}x^2\left(5x^3+10x^2-15x\right)$.

Bài 2. Làm tính nhân

a) $(2x+7)(3x-1)$;

b) $\left(5x^2-4x\right)\left(2x^2+9x-3\right)$.

Bài 3. Tính giá trị của biết thức A với $x=999$.

$$A=x^6-x^5(x-1)-x^4(x-1)+x^3(x-1)+x^2(x+1)-x(x-1)+1.$$

Bài 4. Cho biểu thức $A=x(1+x)-x^2(1-x)+x^3\left(x^2-1\right)$. Chứng minh rằng với hai giá trị đối nhau của x thì biểu thức A có hai giá trị đối nhau.

Bài 5. Tìm x biết $(x-3)\left(x+x^2\right)+2(x-5)(x+1)-x^3=12$.

Bài 6. Cho $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$. Chứng minh rằng $\left(x^2+y^2\right)\left(a^2+b^2\right)=(ax+by)^2$.

Chủ đề 2: NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

A Trọng Tâm Kiến Thức

Bảy hằng đẳng thức đáng nhớ và những ứng dụng, đặc biệt là ba hằng đẳng thức đầu tiên.

1. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.
2. $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$.
3. $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$.
4. $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.
5. $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$.
6. $(A+B)\left(A^2-AB+B^2\right)=A^3+B^3$.
7. $(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)=A^3-B^3$.

B Các Dạng Bài Tập và Phương Pháp Giải

Dạng 1: Vận dụng các hằng đẳng thức để tính

Xem biểu thức đã cho thuộc dạng hằng đẳng thức nào thì vận dụng hằng đẳng thức ấy để khai triển và ngược lại.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính

a) $(4x+7)^2$;

b) $\left(6x-\frac{1}{3}y\right)^2$;

c) $\left(3x^2-5xy^3\right)\left(3x^2+5xy^3\right)$.

Ví dụ 2. Tính

a) $\left(2x^2+5y\right)^3$;

b) $\left(3x^3-4xy\right)^3$;

c) $\left(6x+\frac{1}{2}\right)\left(36x^2-3x+\frac{1}{4}\right)$;

d) $\left(x-5y^2\right)\left(x^2+5xy^2+25y^4\right)$.

Ví dụ 3. Viết các đa thức sau dưới dạng bình phương hay lập phương của một tổng hoặc hiệu.

a) $25x^2-5xy+\frac{1}{4}y^2$;

b) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$.

Ví dụ 4. Điền các đơn thức thích hợp vào ô trống

a) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-\square+\frac{1}{x^2}$;

b) $\left(\frac{1}{2}x+\square\right)\left(\frac{1}{4}x^2-\square+\frac{1}{9}y^2\right)=\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{27}y^3$.

Dạng 2: Rút gọn biểu thức và tính giá trị của biểu thức

- Vận dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để khai triển các lũy thừa, khai triển các tích rồi rút gọn.
- Thay các giá trị của biến x vào biểu thức đã rút gọn rồi thực hiện các phép tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức

a) $(7x+4)^2-(7x+4)(7x-4)$;

b) $(x+2y)^3-6xy(x+2y)$;

c) $(3x+y)\left(9x^2-3xy+y^2\right)-(3x-y)^3-27x^2y$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $A=5(x+3)(x-3)+(2x+3)^2+(x-6)^2$. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức A với $x=-\frac{1}{5}$.

Ví dụ 3. Cho biết $x+y=15$ và $xy=-100$. Tính giá trị của biểu thức $B=x^2+y^2$.

Ví dụ 4. Tính nhanh giá trị của biểu thức

a) $C=39^2+78\cdot61+61^2$;

b) $D=50^2-49\cdot51$.

Dạng 3: Chứng minh giá trị của biểu thức không phụ thuộc vào các biến

Vận dụng các hằng đẳng thức để biến đổi biểu thức đã cho thành một biểu thức không chứa biến.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

$$A = (3x+2)\left(9x^2-6x+4\right)-3\left(9x^3-2\right).$$

Ví dụ 2. Giá trị của biểu thức sau có phụ thuộc vào giá trị của biến không?

$$B = (x+1)^3-(x-1)\left(x^2+x+1\right)-3x(x+1).$$

Dạng 4: Chứng minh đẳng thức

Vận dụng các hằng đẳng thức để biến đổi một vế thành vế kia hoặc biến đổi cả hai vế cùng bằng một biểu thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh đẳng thức $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$.

Ví dụ 2. Chứng minh đẳng thức

$$3\left(x^2+y^2+z^2\right)-(x-y)^2-(y-z)^2-(z-x)^2=(x+y+z)^2.$$

Dạng 5: Tìm x thỏa mãn đẳng thức

- Vận dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để khai triển ra rồi thu gọn về dạng $ax=b$.
- Suy ra $x=\dfrac{b}{a}$ nếu $a\neq 0$; $\forall x\in\mathbb{R}$ nếu $a=b=0$; không có x nếu $a=0$, $b\neq 0$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm x biết rằng $(2x+1)(1-2x)+(2x-1)^2=22$.

Ví dụ 2. Tìm x biết rằng $(x-5)^2+(x-3)(x+3)-2(x+1)^2=0$.

Dạng 6: Chứng minh chia hết

Vận dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để biến đổi số đã cho về dạng $a=k\cdot b(k\neq 0)$. Lúc đó $a \vdots k$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hiệu các bình phương của hai số chẵn liên tiếp thì chia hết cho 4.

Dạng 7: Chứng minh giá trị của một biểu thức luôn luôn dương (hay âm) với mọi giá trị của biến

- Muốn chứng minh giá trị của một biểu thức luôn luôn dương với mọi giá trị của biến, ta vận dụng các hằng đẳng thức $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$, để biến đổi biểu thức về dạng $[f(x)]^2 + k$ với $k > 0$.

- Muốn chứng minh giá trị của một biểu thức luôn luôn âm với mọi giá trị của biến, ta biến đổi biểu thức về dạng $-[f(x)]^2 + k$ với $k < 0$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh giá trị của biểu thức $P = x^2 - 2x + 3$ luôn luôn dương với mọi x.

Ví dụ 2. Chứng minh giá trị của biểu thức $Q = 6x - x^2 - 10$ luôn luôn âm với mọi giá trị của x.

Dạng 8: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

- Muốn tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P(x)$, ta vận dụng các hằng đẳng thức $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$ để biến đổi $P(x)$ về dạng $[f(x)]^2 + k$ (k là hằng số). Vì $[f(x)]^2 \geq 0$ nên $P(x) \geq k$. Do đó giá trị nhỏ nhất của $P(x)$ là k (ta phải tìm x để $f(x) = 0$). Ta viết $\min P(x) = k$.

- Muốn tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P(x)$, ta vận dụng các hằng đẳng thức $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$ để biến đổi $P(x)$ về dạng $-[f(x)]^2 + k$ (k là hằng số). Vì $-[f(x)]^2 \leq 0$ nên $P(x) \leq k$. Do đó giá trị lớn nhất của $P(x)$ là k (ta phải tìm x để $f(x) = 0$). Ta viết $\max P(x) = k$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + 10x + 28$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = 5x^2 - 10x$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x - x^2 - 1$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tính:

a) $\left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2$;

b) $(7x - 5y)^2$;

c) $\left(6x^2 + y^2\right)\left(y^2 - 6x^2\right)$.

Bài 2. Tính

a) $(5x + 1)^3$;

b) $(x - 2y)^3$;

c) $(4x + 5)\left(16x^2 - 20x + 25\right)$;

d) $\left(6x - \frac{1}{3}\right)\left(36x^2 + 2x + \frac{1}{9}\right)$.

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

a) $(2x+3)^2+(2x-3)^2-2\left(4x^2-9\right)$;

b) $(x+2)^3+(x-2)^3+x^3-3x(x+2)(x-2)$.

Bài 4. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức sau với $x=-19$.

$$A=(3x+2)^2+(2x-7)^2-2(3x+2)(2x+5).$$

Bài 5. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức sau với $x=\dfrac{1}{5}$.

$$B=(3x-1)^2-(x+7)^2-2(2x-5)(2x+5).$$

Bài 6. Chứng minh đẳng thức $(x+y)^3-(x-y)^3=2y\left(3x^2+y^2\right)$.

Bài 7. Tìm x biết

a) $(x+1)^3+(x-2)^3-2x^2(x-1,5)=3$;

b) $(x+2)\left(x^2-2x+4\right)-(x-2)\left(x^2+2x+4\right)=-65$.

Bài 8. Chứng minh rằng $(2n+3)^2-(2n-1)^2$ chia hết cho 8 với $n\in\mathbb{Z}$.

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A=4x^2-12x+10$;

b) $B=2x-x^2-2$.

Bài 10. Cho $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$. Chứng minh rằng $a=b=c$.

Bài 11. Cho $x-y=1$, tính giá trị của biểu thức $M=2\left(x^3-y^3\right)-3\left(x^2+y^2\right)$.

Chủ đề 3: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT NHÂN TỬ CHUNG

A Trọng tâm kiến thức

a) Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.

b) Phương pháp đặt nhân tử chung
Nếu tất cả các hạng tử của một đa thức đều có một nhân tử chung thì đặt nhân tử chung đó ra ngoài dấu ngoặc theo công thức:

$$AB+AC-AD=A(B+C-D).$$

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung

- *Bước 1*: Chọn nhân tử chung gồm:
  - Hệ số là ƯCLN của các hệ số;
  - Phần biến gồm tất cả các biến chung, mỗi biến lấy với số mũ nhỏ nhất của nó trong các hạng tử.
- *Bước 2*: Viết các nhân tử còn lại của mỗi số hạng vào trong dấu ngoặc.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $9x - 15y$; b) $8x^2 + 12x - 4$; c) $-5x^2 - 25xy + 10y^2$.

Ví dụ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^3 - x^2y + xy^2$; b) $xy^2z - xy^3z + xy$;

c) $x^5y^2 - x^4y^3 - x^3y^4 + 2x^2y^5$.

Ví dụ 3. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $35x^2y^3 - 14x^2y^2 + 49x^2y$; b) $-18x^4y^2 - 27x^3y^3 - 45x^2y^4$.

Ví dụ 4. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $4x(a+b) + 3y(a+b)$; b) $5a(x-y) + 2b(y-x)$; c) $x(x-y) - 3x + 3y$.

Ví dụ 5. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $(x+1)(y-2) - (2-y)^2$;

b) $(x-5)^3 - 2y(5-x)^2$;

c) $(2x-6)(4x^2+1) - (2x-6)(7x+3) - (2x-6)(x+12)$.

Dạng 2: Tính giá trị của một biểu thức

Phương pháp giải:

- Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung.
- Thay các biểu thức bởi giá trị của chúng rồi thực hiện các phép tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính nhanh

a) $2{,}41 \cdot 37 + 2{,}41 \cdot 63$;

b) $13 \cdot \dfrac{2}{5} - 3 \cdot \dfrac{2}{5}$;

c) $19{,}22 \cdot 84 + 19{,}22 \cdot 39 - 223 \cdot 19{,}22$.

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức

a) $2x^2 + 6xy - 10x$ với $x = -4$; $y = 3$.

b) $x(x+y) + y(x+y)$ với $x = 19{,}6$; $y = 0{,}4$.

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức

a) $x(x-3) - y(3-x)$ với $x = \dfrac{1}{3}$; $y = \dfrac{8}{3}$.

b) $2x^2\left(x^2+y^2\right) + 2y^2\left(x^2+y^2\right) + 5\left(y^2+x^2\right)$ với $x^2 + y^2 = 1$.

Dạng 3: Tìm x thỏa mãn đẳng thức cho trước

Phương pháp giải:

- Chuyển tất cả các số hạng về vế trái, vế kia bằng 0.
- Phân tích vế trái thành nhân tử, đưa đẳng thức đã cho về dạng $A \cdot B = 0$.
- Suy ra hoặc $A = 0$ hoặc $B = 0$, từ đó tìm được tất cả các giá trị của x.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm x biết

a) $x^2 + 4x = 0$;

b) $x(3x-1) - 5(1-3x) = 0$.

Ví dụ 2. Tìm x biết

a) $4x(x+3) - x - 3 = 0$;

b) $x^2(x-2) - 3x(x-2) = 0$.

Ví dụ 3. Tìm x biết

a) $x^3 = x^2$;

b) $x\left(x^2+1\right) = 10\left(x^2+1\right)$.

Ví dụ 4. Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết

$$x^2 + xy = 2019, \quad (1)$$

$$y^2 - 3xy = 99. \quad (2)$$

Dạng 4: Chứng minh giá trị của biểu thức A chia hết cho số k

Phương pháp giải:

- Dùng phương pháp đặt nhân tử chung để phân tích biểu thức đã cho thành nhân tử: $A = k \cdot B$ (với $k \neq 0$).

- Từ đó suy ra $A \vdots k$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $29^2 + 29 \cdot 21$ chia hết cho 50.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì $101^{n+1} - 101^n$ có tận cùng bằng hai chữ số 0.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $8^5 - 2^{11}$ chia hết cho 30.

Ví dụ 4. Cho biểu thức $A = n^2(n-1) + 2n(1-n)$, trong đó $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $A \vdots 6$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho đa thức $M = y + 2x + 2y + y^2$. Kết quả nào dưới đây gọi là phân tích đa thức M thành nhân tử?

$$M = y(x+y+2) + 2x \tag{1}$$

$$M = x(y+2) + y(y+2) \tag{2}$$

$$M = x(y+x) + 2(x+y) \tag{3}$$

$$M = (x+y)(y+2). \tag{4}$$

Bài 2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $-6x^2 - 9xy + 15x$;

b) $2x(x-3) + y(x-3) + (3-x)$.

Bài 3. Tính nhanh

$$M = 1{,}9 \cdot 67{,}4 - 1{,}9 \cdot 17{,}4 + 3{,}1 \cdot (67{,}4 - 17{,}4).$$

Bài 4. Chứng minh rằng $6^4 + 324$ chia hết cho 20 và chia hết cho 81.

Bài 5. Tìm x biết

a) $(x+1)^2 = 3(x+1)$;

b) $(2x-7)^3 = 8(7-2x)^2$.

Chủ đề 4: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP DÙNG HẰNG ĐẲNG THỨC

A Trọng tâm kiến thức

Biết vận dụng bảy hằng đẳng thức đáng nhớ theo chiều ngược lại để phân tích đa thức thành nhân tử.

1. $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$.

2. $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$.

3. $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

4. $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3$.

5. $A^3-3A^2B+3AB^2-B^3=(A-B)^3$.

6. $A^3+B^3=(A+B)\left(A^2-AB+B^2\right)$.

7. $A^3-B^3=(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)$.

Dạng tổng quát của (3) và (7) là

$$A^n-B^n=(A-B)\left(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1}\right).$$

Dạng tổng quát của (6) với n lẻ là

$$A^n+B^n=(A+B)\left(A^{n-1}-A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\cdots-AB^{n-2}+B^{n-1}\right).$$

Suy ra $A^n-B^n \vdots (A-B)$ với điều kiện $A\neq B$.

$A^n+B^n \vdots (A+B)$ với điều kiện n lẻ và $A\neq -B$.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức

Phương pháp giải:

- Nếu đa thức có hai hạng tử thì vận dụng $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ hoặc
$$A^3\pm B^3=(A\pm B)\left(A^2\mp AB+B^2\right).$$
- Nếu đa thức có ba hạng tử thì vận dụng
$$A^2\pm 2AB+B^2=(A\pm B)^2.$$
- Nếu đa thức có bốn hạng tử thì vận dụng
$$A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3=(A\pm B)^3.$$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) x^2-25; b) $9x^2-\dfrac{1}{16}y^2$; c) x^6-y^4.

Ví dụ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $(2x-5)^2-64$; b) $81-(3x+2)^2$; c) $9(x-5y)^2-16(x+y)^2$.

Ví dụ 3. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) x^3-8; b) $27x^3+125y^3$; c) x^6+216.

Ví dụ 4. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2+8x+16$; b) $9x^2-12xy+4y^2$; c) $-25x^2y^2+10xy-1$.

Ví dụ 5. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^3-6x^2+12x-8$;

b) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$.

Ví dụ 6. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) x^7+1;

b) $x^{10}-1$.

Dạng 2: Tính giá trị của biểu thức

Phương pháp giải: Dùng hằng đẳng thức để phân tích đa thức thành nhân tử rồi thay các biến bằng các giá trị của chúng và thực hiện các pháp tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính nhanh

a) 69^2-31^2;

b) 1023^2-23^2;

c) $75^2-24^2+64^2-36^2$.

Ví dụ 2. Tính nhanh

a) $27^2+73^2+54\cdot 73$;

b) $63^2+13^2-26\cdot 63$;

c) $40^2-39^2+38^2-37^2+\cdots+32^2-31^2$.

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức

a) $M=(2x-1)^2+2(2x-1)(3x+1)+(3x+1)^2$ với $x=-\dfrac{1}{5}$;

b) $N=(3x-1)^2-2(9x^2-1)+(3x+1)^2$ với $x\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 4. Tính giá trị của biểu thức

a) $P=27-27x+9x^2-x^3$ với $x=-17$;

b) $Q=x^3+3x^2+3x$ với $x=99$.

Dạng 3: Tìm x thỏa mãn đẳng thức cho trước

Phương pháp giải:

- Chuyển tất cả các số hạng về vế trái, vế phải bằng 0.
- Dùng hằng đẳng thức phân tích vế trái thành nhân tử, đưa đẳng thức đã cho về dạng $A^2=0$; $A^3=0$; $A\cdot B=0$.
- Suy ra hoặc $A=0$ hoặc $B=0$, từ đó tìm được tất cả các giá trị của x.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm x biết

a) $x^2-\dfrac{1}{49}=0$;

b) $64-0{,}25x^2=0$.

Ví dụ 2. Tìm x biết

a) $9x^2+12x+4=0$; b) $x^2+\frac{1}{4}=x$; c) $4-\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}=0$.

Ví dụ 3. Tìm x biết $2x-x^2=2$.

Ví dụ 4. Tìm x biết

a) $x^3+15x^2+75x+125=0$; b) $x^3+48x=12x^2+64$.

Dạng 4: Chứng minh giá trị của biểu thức A chia hết cho số k

Phương pháp giải:

- Dùng phương pháp đặt nhân tử chung để phân tích biểu thức đã cho thành nhân tử: $A=k\cdot B$ (với $k\neq 0$).
- Từ đó suy ra $A \vdots k$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $2^{12}+1$ chia hết cho 17.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hiệu các bình phương của hai số lẻ liên tiếp thì chia hết cho 8.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng 173^n-73^n chia hết cho 100 với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Ví dụ 4. Tìm $n\in\mathbb{N}$ để biểu thức $A=(n^2+10)^2-36n^2$ có giá trị là một số nguyên tố.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^4y^4-z^4$; b) $(x+y+z)^2-4z^2$; c) $-\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{3}xy-\frac{1}{4}y^2$.

Bài 2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) x^3y^3+125; b) $8x^3-y^3-6xy(2x-y)$;

c) $(3x+2)^2-2(x-1)(3x+2)+(x-1)^2$.

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức

a) $\frac{57^2-18^2}{76{,}5^2-1{,}5^2}$; b) $\frac{93^3+79^3}{172}-93\cdot 79$; c) $\frac{328^3-172^3}{156}+328\cdot 172$.

Bài 4. Tìm x biết

a) $(5x-1)^2-196=0$; b) $4x^2+\frac{1}{4}=2x$; c) $\frac{1}{27}x^3-\frac{1}{3}x^2+x=1$.

Bài 5. Chứng minh rằng

a) 3^9-8 chia hết cho 25;

b) Bình phương của một số lẻ trừ đi 1 bao giờ cũng chia hết cho 8.

Bài 6. Tìm $n\in\mathbb{N}$ để biểu thức $B=(n+3)^2-(n-4)^2$ có giá trị là một số nguyên tố.

Chủ đề 5: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP NHÓM CÁC HẠNG TỬ

A Trọng tâm kiến thức

Nhóm các số hạng một cách thích hợp để có thể dùng phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức đối với mỗi nhóm. Sau đó tiếp tục đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm các hạng tử

Nhóm các số hạng của đa thức thành từng nhóm rồi phân tích từng nhóm thành nhân tử. Tiếp tục phân tích đến khi được một tích của các đa thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) x^3+x^2+x+1;

b) x^2y+xy^2-x-y.

Ví dụ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2-xy+5x-5y$;

b) $2x^2-x-6xy+3y$.

Ví dụ 3. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2+7x+7y-y^2$

b) $x^2-2x-9y^2+6y$

Ví dụ 4. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2+2xy+y^2-25$;

b) $x^2y^2-x^2+8x-16$

Ví dụ 5. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2-6xy+9y^2+4x-12y$

b) $x^2-xy+x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

Dạng 2: Tính giá trị của biểu thức

Dùng phương pháp nhóm các hạng tử để phân tích đa thức thành nhân tử rồi thay các biến bằng giá trị của chúng và thực hiện các phép tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính nhanh

a) $41\cdot 24-41\cdot 14+59\cdot 24-59\cdot 14$

b) $2{,}83\cdot 5{,}68-2{,}83\cdot 4{,}68+1{,}17\cdot 5{,}68-1{,}17\cdot 4{,}68$

Ví dụ 2. Tính nhanh

a) $45^2+33^2-22^2+90\cdot 33$

b) $111^2-137^2-48^2+96\cdot 137$

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức

a) $M=x^2-2xy+y^2-10x+10y$ với $x-y=9$

b) $N=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+x^2+2xy+y^2$ với $x=10-y$

Dạng 3: Tìm x thỏa mãn đẳng thức cho trước

- Dùng phương pháp nhóm các hạng tử, đưa đẳng thức đã cho về dạng $A\cdot B=0$.
- Suy ra hoặc $A=0$ hoặc $B=0$, từ đó tìm được tất cả các giá trị của x.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm x biết

a) $x^2+3x-(2x+6)=0$

b) $5x+20-x^2-4x=0$

Ví dụ 2. Tìm x biết

a) $3x^2-3x+2x^3-2x^2=0$

b) $x^3+27=-x^2+9$

Dạng 4: Chứng minh giá trị của biểu thức A chia hết cho số k

Dùng phương pháp nhóm các hạng tử, phân tích biểu thức đã cho thành dạng $A=k\cdot B$ $(k\neq 0)$. Khi đó $A \vdots k$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh rằng n^3+3n^2+2n chia hết cho 6 với mọi $n\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $A=2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+\ldots+2^{97}+2^{99}+2^{99}$ chia hết cho 31.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $49^n+77^n-29^n-1$ chia hết cho 48.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $3x^3-x^2-21x+7$;

b) x^3-4x^2+8x-8;

c) x^3-5x^2-5x+1.

Bài 2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2y-xz+z-y$

b) $x^4-x^3+x^2-1$

c) $x^4-x^2+10x-25$

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức

a) $A = xy + 7x - 3y - 21$ với $x = 103; y = -17$

b) $B = xyz + xz - yz - z + xy + x - y - 1$ với $x = -9; y = -21; z = -31$.

Bài 4. Tìm x biết:

a) $x^5 + x^4 + x + 1 = 0$

b) $x^4 + 3x^3 - x - 3 = 0$

Bài 5. Chứng minh rằng $A = 35x - 14y + 2^9 - 1$ chia hết cho 7 với $x, y \in \mathbb{Z}$.

Chủ đề 6: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG CÁCH PHỐI HỢP NHIỀU PHƯƠNG PHÁP

A Trọng tâm kiến thức

Khi phân tích đa thức thành nhân tử thì nếu cần, ta phải phối hợp nhiều phương pháp để phân tích được triệt để.

Cũng có khi phải sử dụng một số phương pháp khác như phương pháp tách các hạng tử, phương pháp thêm bớt một hạng tử $\cdots$

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp tách các hạng tử

- Nếu đa thức có dạng tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ thì có thể tách hạng tử bậc nhất $bx = b_1x + b_2x$ sao cho $\begin{cases} b_1 + b_2 = b \\ b_1 \cdot b_2 = ac. \end{cases}$
- Nếu đa thức có bậc lớn hơn bậc hai thì có thể tách một hoặc nhiều hạng tử một cách thích hợp nhằm làm xuất hiện nhân tử chung hoặc hằng đẳng thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 + 5x + 6$

b) $x^2 - 8x + 15$

Ví dụ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 + 3x - 4$

b) $x^2 - 6x - 21$

Ví dụ 3. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $6x^2 + 13x + 5$

b) $15x^2 + 11x - 12$

Ví dụ 4. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^3 - x^2 + 2$

b) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

Dạng 2: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử

Thêm và bớt cùng một hạng tử thích hợp vào đa thức để có thể dùng hằng đẳng thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $4x^4+y^4$ b) $81x^4+4$

Ví dụ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) x^5+x+1 b) $x^3+y^3+z^3-3xyz$

Dạng 3: Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp

Ta có thể phối hợp các phương pháp theo trình tự:

- Đặt nhân tử chung trước, các phương pháp kia sau, mỗi phương pháp có thể dùng nhiều lần.
- Cũng có khi dùng phương pháp nhóm các hạng tử trước, các phương pháp kia sau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $3x^3-75x$ b) $5x^2y-30xy^2+45y^3$

Ví dụ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $4x^3-500$ b) $x^4y^2-12x^3y^2+48x^2y^2-64xy^2$

Ví dụ 3. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) x^4-4x^2-4x-1 b) $x^4+6x^3-54x-81$

Ví dụ 4. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $5\left(x^2+y^2\right)^2-20x^2y^2$ b) $10x^4y^2-10x^3y^2-10x^2y^2+10xy^2$

Ví dụ 5. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $3x^3+3x^2-36x$ b) $2x^8-32$

Dạng 4: Tính giá trị của một biểu thức

Phối hợp các phương pháp để phân tích đa thức thành nhân tử rồi thay các biến bằng giá trị của chúng và thực hiện các phép tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính nhẩm giá trị của biểu thức sau với $x = 49$; $y = 98$.

$$A = 4x^2 - y^2 - 2y - 1$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức sau với $x = 6{,}75$; $y = 3{,}25$

$$B = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$$

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức sau với $x = -21$, $y = 9$

$$C = xy^2 - y^3 + 2xy - 2y^2 + x - y$$

Ví dụ 4. Cho biết $x - y = 1$, tính giá trị của biểu thức $D = 2x^3 - 2y^3 - 3x^2 - 3y^2$.

Dạng 5: Tìm x thỏa mãn đẳng thức cho trước

- Phối hợp nhiều phương pháp để biến đổi đẳng thức đã cho về dạng $A \cdot B = 0$.
- Suy ra hoặc $A = 0$ hoặc $B = 0$, từ đó tìm được tất cả các giá trị của x.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm x biết $2x^3 - 242x = 0$

Ví dụ 2. Tìm x biết $4x^2 + 15x = 25$

Ví dụ 3. Tính tổng các giá trị của x thỏa mãn đẳng thức $x^2 - 10x + 21 = 0$ (1)

Ví dụ 4. Tìm x biết $x^3 + x^2 = 36$.

Dạng 6: Chứng minh giá trị của biểu thức A chia hết cho số k

Phối hợp các phương pháp để phân tích biểu thức A thành nhân tử: $A = k \cdot B$ ($k \neq 0$). Khi đó $A \,\vdots\, k$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $A = n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$ trong đó $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $A \,\vdots\, 24$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $A = n^5 - n$ trong đó $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng:

a) $A \,\vdots\, 6$

b) $A \,\vdots\, 30$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $6xy^2 - 54xz^2$

b) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x$

Bài 2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $25x^3 - 25x^2y - x + y$

b) $2x^5y - 4x^3y + 2xy$

Bài 3. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) x^3-3x+2

b) x^8+x^4+1

Bài 4. Tìm x biết:

a) $x^3-3x^2-16x+48=0$

b) $10x^2-33x-7=0$

Bài 5. Cho $A=\dfrac{n^4-4n^3-4n^2+16n}{16}$, trong đó n là số chẵn.

a) Hãy biểu diễn A dưới dạng tích của 4 số nguyên liên tiếp.

b) Chứng minh $A\,\vdots\,24$

Chủ đề 7: CHIA ĐƠN THỨC CHO ĐƠN THỨC. CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

A Trọng tâm kiến thức

1. **Chia hai lũy thừa cùng cơ số**

   $x^m : x^n = x^{m-n}$, với $x \neq 0$ và $m \geq n$.

   Quy ước: $x^0=1$ với $x\neq 0$.

2. **Chia đơn thức A cho đơn thức B**

   - Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B.
   - Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến trong B.
   - Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

3. **Chia đa thức A cho đơn thức B**

   Ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Làm tính chia đơn thức hoặc đa thức cho đơn thức

Vận dụng các quy tắc nêu ở trên.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Làm tính chia

a) $\left(-x^4y^5\right):\left(-xy^3\right)$

b) $x^2yz^3:\left(-x^2z^3\right)$

c) $x^{n+2}y^{3n}:x^{n-2}y^n$ (với $n\in\mathbb{N}$; $n\geq 2$).

Ví dụ 2. Làm phép chia

a) $20x^5y^3:4x^2y^2$

b) $12x^3y^4:\dfrac{2}{5}xy^4$

c) $\dfrac{4}{9}x^5y^2z^3:\left(-1\dfrac{1}{3}xy^2\right)$

Ví dụ 3. Làm phép chia

a) $2(x+y)^3 : 5(x+y)$

b) $-(x-y)^5 : (y-x)^2$

c) $(x+2y-3z)^{n+1} : (x+2y-3z)^n$ (với $n \in \mathbb{N}$).

Ví dụ 4. Làm phép chia

a) $\left(8x^4 - 10x^3 + 12x^2\right) : 4x^2$

b) $\left(30x^3y^2 - 18x^2y^3 - 6xy^4\right) : \left(-6xy^2\right)$

c) $\left(1\frac{1}{5}x^5y^3 + 2\frac{2}{5}x^4y^4 - 1\frac{4}{5}x^3y^5\right) : \frac{3}{5}x^3y^3$

Ví dụ 5. Làm tính chia

a) $\left[7(y-x)^4 - 5(x-y)^3\right] : (x-y)^3$

b) $\left[\frac{1}{2}(x-y)^5 + \frac{2}{3}(x-y)^{n+2}\right] : \frac{1}{6}(x-y)^2$ với $n \in \mathbb{N}$.

Dạng 2: Tìm điều kiện để đơn thức hoặc đa thức chia hết cho một đơn thức

- Để đơn thức A chia hết cho đơn thức B thì mỗi biến của B đều là biến của A với số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong A.
- Để đa thức A chia hết cho đơn thức B thì mỗi hạng tử của đa thức A đều phải chia hết cho đơn thức B.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm số tự nhiên n để mỗi phép chia sau đều là phép chia hết:

a) $8x^n : 4x^5$

b) $2x^3 : x^{n+1}$

Ví dụ 2. Tìm số tự nhiên n để mỗi phép chia sau đều là phép chia hết:

a) $15x^{n+2}y^n : 3x^3y^4$

b) $\left(-\frac{1}{2}x^{2n}y^7\right) : \frac{3}{10}x^{n+3}y^n$

Ví dụ 3. Tìm số tự nhiên n để đa thức $8x^4y^5 + 4x^5y^3 - 5x^6y^4$ chia hết cho đơn thức $5x^ny^{n+1}$.

Ví dụ 4. Cho các đa thức

$$A = 9x^4y^2z^2 - 5x^3y^3z + 2x^2y^3$$
$$B = 6x^3y^3z^2 + 3x^2y^2z^2 - 7xy^4z^2$$

và đơn thức $C = 3x^2y^2z$. Xét xem các đa thức A, B có chia hết cho đa thức C không? Vì sao?

Dạng 3: Tính giá trị của biểu thức

- Thực hiện các phép chia rồi thu gọn kết quả.
- Thay giá trị của biến vào biểu thức đã thu gọn rồi thực hiện các phép tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức $A = 20x^3y^5z^3 : 5x^3y^3z$ với $x = 1{,}234$; $y = 18$; $z = -\frac{1}{12}$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $B = (6x^4y^2 - 8x^3y^3) : 2x^2y^2 + (-20x^4y^3 + 15x^3y^4) : (-5x^3y^2)$.

a) Rút gọn B.

b) Tính giá trị của B với $x = 85$, $y = 15$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Làm tính chia:

a) $20x^5y^2z : \left(-\frac{2}{5}x^2y^2\right)$

b) $(-7x^3y^4) : 9x^3y^2$

Bài 2. Làm tính chia:

a) $(6x^4 - 9x^3y - 15x^2y^2) : \frac{3}{4}x^2$

b) $(9x^4y^2 - 15x^3y^3 + 21x^2y) : 10x^2y$

c) $\left(24x^6y^4 - 8x^4y^6 + \frac{1}{2}x^2y^2\right) : \frac{1}{2}x^2y^2$.

Bài 3. Đa thức $A = 5x^4y - 6x^3y^2 - 8x^2y^3$ không chia hết cho đa thức nào dưới đây?

Bài 4. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để:

a) Đơn thức $18x^{n+2}$ chia hết cho đơn thức $-6x^5$

b) Đơn thức $2x^ny^3$ chia hết cho đơn thức $5x^2y^{n-1}$

Bài 5. Tìm x biết:

a) $(18x^3 - 15x^2) : (-3x^2) = 2$

b) $(12x^5 - 15x^4) : 3x^3 - (8x^3 + 6x) : 2x = 7$

Bài 6. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức A luôn luôn dương với mọi giá trị của x

$$A = (7x^4 - 21x^3) : 7x^2 + (10x + 5x^2) : 5x.$$

Chủ đề 8: CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN ĐÃ SẮP XẾP

A Trọng tâm kiến thức

1. **Nhận xét**

Đối với hai đa thức tùy ý A và B của cùng một biến ($B \neq 0$), tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho $A = B \cdot Q + R$, trong đó $R = 0$ hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B. Nếu $R = 0$ thì phép chia A cho B là phép chia hết.

2. **Các bước chia đa thức A cho đa thức B (đã sắp xếp)**

- Tìm hạng tử bậc cao nhất của thương bằng cách lấy hạng tử bậc cao nhất của A chia cho hạng tử bậc cao nhất của B.

- Tìm dư thứ nhất.
- TÌm hạng tử thứ hai của thương bằng cách chia hạng tử bậc cao nhất của dư thứ nhất cho hạng tử bậc cao nhất của B.
- Tìm dư thứ hai.
- Tìm hạng tử thứ ba của thương bằng cách chia hạng tử bậc cao nhất của dư thứ hai cho hạng tử bậc cao nhất của B.
- Cứ thế tiếp tục cho đến khi nào bậc của đa thức dư nhỏ hơn bậc của đa thức B.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Chia đa thức cho đa thức

- Sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm của biến.
- Thực hiện phép chia theo quy tắc trên.
- Có thể vận dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để rút gọn phép chia.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Làm tính chia

a) $\left(x^2+3x-10\right):(x-2)$ b) $\left(x^3+x^2-19x+21\right):(x-3)$.

Ví dụ 2. Làm tính chia

a) $\left(x^3+6x^2+2x-3\right):\left(x^2+5x-3\right)$ b) $\left(2x^3+x^2-5x+2\right):\left(x^2+x-2\right)$.

Ví dụ 3. Làm tính chia

a) $\left(x^3+2+x\right):(x+1)$ b) $\left(x^4+3x+1+3x^3\right):\left(x^2+1\right)$

Ví dụ 4. Vận dụng hằng đẳng thức đáng nhớ để làm phép chia

a) $\left(x^4-2x^2+1\right):\left(1-x^2\right)$ b) $\left(27x^3-8\right):(3x-2)$

Ví dụ 5. Tìm đa thức A biết $A\cdot\left(5x^2+3x-2\right)=15x^4+4x^3+11x^2+14x-8$.

Dạng 2: Tính giá trị của biểu thức

- Thực hiện các phép chia rồi rút gọn biểu thức.
- Thay giá trị của biến vào biểu thức đã được rút gọn rồi thực hiện các phép tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức A tại $x=-2$

$$A=\left(5x^5+5x^4\right):5x^2-\left(2x^4-8x^2-6x+12\right):(2x-4).$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức B tại $x=-5$.

$$B=\left(3x^4-x^2-2x\right):\left(3x^2+3x+2\right)+\left(x^4-x^2\right):\left(x^2-x\right).$$

Dạng 3: Tìm x thỏa mãn đẳng thức cho trước

Thực hiện các phép chia đa thức rồi thu gọn về dạng $ax = b$ $(a \neq 0)$ hoặc dạng $A \cdot B = 0$, từ đó tìm được x.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm x biết $\left(x^2+4x-12\right):(2-x)+\left(x^3-125\right):(x-5)=15$.

Ví dụ 2. Tìm x biết $\left(x^2-4\right):(x+2)-\left(4x^2-4x+1\right):(2x-1)=10$

Dạng 4: Xác định hệ số của một đa thức để đa thức này chia hết cho một đa thức khác

- Thực hiện phép chia A cho B để tìm dư R: $A = B \cdot Q + R$.
- Sau đó dùng điều kiện $A \vdots B \Leftrightarrow R = 0$ với mọi giá trị của biến để xác định hệ số cần tìm.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm giá trị của m để đa thức $A = x^3 - x^2 - 11x + m$ chia hết cho đa thức $B = x - 3$.

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của m và n để đa thức $A = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + mx + n$ chia hết cho đa thức $B = x^2 + 1$.

Dạng 5: Tìm số nguyên x để giá trị của đa thức $A(x)$ chia hết cho giá trị của đa thức $B(x)$.

- Thực hiện phép chia $A(x)$ cho $B(x)$ để tìm dư $R(x)$: $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$
- Xác định $x \in \mathbb{Z}$ để $\dfrac{R(x)}{B(x)}$ có giá trị nguyên.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A = 6x^3 + 15x^2 - 4x - 7$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = 2x + 5$.

Ví dụ 2. Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A = x^3 - 2x^2 + 3x + 50$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = x + 3$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Làm tính chia

a) $\left(x^3+6x^2+2x-3\right):\left(x^2+5x-3\right)$

b) $\left(125x^3+8\right):\left(25x^2-10x+4\right)$

Bài 2. Tìm dư trong phép chia:

a) $\left(10x^3-x^2-36x+24\right):\left(2x^2+x-7\right)$

b) $\left(-x^3+3x^2+2x-10\right):(x-3)$

Bài 3. Cho đa thức $A = -3x^3 + 20x^2 + 20x + 10$. Chia đa thức A cho đa thức B được thương là $3x + 1$ và dư $x + 6$. Tìm đa thức B.

Bài 4. Tìm x biết $\left(x^3-1\right):(x-1)-\left(9x^2-1\right):(3x-1)=0$.

Bài 5. Tìm các giá trị của m và n để

a) Đa thức $2x^3+9x^2-9x+m$ chia hết cho đa thức $2x-1$.

b) Đa thức $2x^4-8x^3+5x^2+mx+n$ chia hết cho đa thức $2x^2-1$.

Bài 6. Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A=10x^4-13x^3-9x^2+x+18$ chia hết cho giá trị của đa thức $B=2x-3$.

Chủ đề 9: ÔN TẬP CHƯƠNG I

A Trọng tâm kiến thức

1. **Nhân và chia đa thức**

- $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
- $(A+B):C=A:C+B:C$
- $(A+B)(C+D)=A\cdot C+A\cdot D+B\cdot C+B\cdot D$
- $(A+B):(C+D)$ chia theo quy tắc chia các đa thức đã sắp xếp.

2. **Những hằng đẳng thức đáng nhớ**

- $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$.
- $(A\pm B)^3=A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3$.
- $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$.
- $(A\pm B)\left(A^2\mp AB+B^2\right)=A^3\pm B^3$.

3. **Phân tích đa thức thành nhân tử**

- Phương pháp đặt nhân tử chung
$$A\cdot C+B\cdot C=C\cdot(A+B).$$
- Phương pháp nhóm các hạng tử
$$A\cdot C+A\cdot D+B\cdot C+B\cdot D=A\cdot(C+D)+B\cdot(C+D)=(C+D)(A+B).$$
- Phương pháp dùng hằng đẳng thức: dùng 7 hằng đẳng thức đáng nhớ theo chiều ngược lại.
- Phối hợp các phương pháp.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Nhân, chia các đa thức

Vận dụng các quy tắc nhân đã nêu trên. Chú ý thu gọn các hạng tử đồng dạng.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Làm tính nhân

a) $6x^3\left(7x^2+5x-3\right)$

b) $4x^2y\left(2x^3-x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2-6y^3\right)$

Ví dụ 2. Làm tính nhân

a) $\left(3x^2-7x\right)\left(2x^2-5x+1\right)$;

b) $(3x-y)\left(5x^2+2xy+4y^2\right)$.

Ví dụ 3. Làm tính chia

a) $\left(x^3+3x^2+5x+15\right):\left(x^2+5\right)$

b) $\left(21x^3-5x-158\right):\left(21x^2+42x+79\right)$

Ví dụ 4. Chia đa thức P cho đa thức x^2+2, ta được thương là x^2-5 và dư 7. Tìm đa thức P.

Dạng 2: Tìm điều kiện chia hết

Dựa vào các điều kiện sau:

- Đơn thức $A\,\vdots$ đơn thức B
  $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{–Mỗi biến của B đều là biến của A.} \\ \text{–Số mũ mỗi biến của A lớn hơn hoặc bằng số mũ của biến đó trong B.} \end{cases}$
- Khi mỗi hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B thì $A\,\vdots\,B$.
- Nếu $A=B.Q+R(B\neq 0)$ thì $A\,\vdots\,B$ nếu $R=0$.
- Nếu $A(x)=B(x)\cdot Q(x)+R(x)$ và $\dfrac{R(x)}{B(x)}$ có giá trị nguyên thì giá trị của đa thức $A\,\vdots$ giá trị của đa thức B.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm $n\in\mathbb{N}$ để

a) $\left(-x^{3n}y^3z\right)$ chia hết cho $4x^6y^{n+1}$

b) $21x^ny-35x^5y^{n-1}$ chia hết cho $7x^3y^3$

Ví dụ 2. Tìm giá trị của m để đa thức $27x^2+m$ chia hết cho đa thức $3x+2$.

Ví dụ 3. Tính tổng $m+n$ biết đa thức x^3+mx^2+nx+5 chia hết cho đa thức $x-1$.

Ví dụ 4. Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A=x^3-3x^2-20x+17$ chia hết cho giá trị của đa thức $B=x-6$.

Ví dụ 5. Cho đa thức $f(x)=x^3+mx+n$ với $m,\ n\in\mathbb{Z}$. Xác định m và n biết $f(x)$ chia cho $x-1$ thì dư 4; $f(x)$ chia cho $x+1$ thì dư 6.

Dạng 3: Khai triển tích hoặc khai triển lũy thừa của một biểu thức

Vận dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính

a) $(7x^2+2xy)^2$;

b) $(5x^3-4y)^2$.

Ví dụ 2. Tính

a) $\left(2x+\dfrac{1}{3}\right)^3$

b) $(3x^2-y)^3$

Ví dụ 3. Tính

a) $(y^2+4x)(4x-y^2)$;

b) $\left(4x+\dfrac{1}{2}y\right)\left(16y^2-2xy+\dfrac{1}{4}y^2\right)$;

c) $(3x^2-y^3)(9x^4+3x^2y+y^6)$.

Dạng 4: Phân tích đa thức thành nhân tử

Vận dụng các phương pháp đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm các hạng tử, tách các hạng tử, thêm bớt cùng một hạng tử và phối hợp các phương pháp trên.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $5ax^{n+2}-3bx^n$;

b) $7a(x-y)+2b(x-y)-5z(y-x)^2$;

Ví dụ 2. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) x^3-x^2+x-1;

b) $x^2+4x+4-y^2$.

Ví dụ 3. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $xy^2-y^2-6xy+6y+9x-9$

b) $2x^3+2x^2y-4xy^2$

Ví dụ 4. Phân tích đa thức thành nhân tử

$$A=\left(x^2-x\right)^2+5\left(x^2-x\right)-14.$$

Dạng 5: Rút gọn rồi tìm giá trị của biểu thức

Có thể thực hiện các phép tính nhân, lũy thừa đa thức rồi thu gọn biểu thức. Cũng có khi phải phân tích đa thức thành nhân tử. Sau đó thay các biến bằng giá trị của nó và thực hiện các phép tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm giá trị của biểu thức sau với $x=55$; $y=45$.

$$A=2x(x+y)+(x-y)^2-4y^2.$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức sau với $x=\dfrac{-1}{3}$; $y=\dfrac{1}{2}$.

$$B=(x-2y)\left(x^2+2xy+4y^2\right)-2y(x-2y)(x+2y).$$

Ví dụ 3. Cho $x=\dfrac{-3}{4}$, hãy tính giá trị của biểu thức sau

$$C=4(3x+4)^2+2x(2x-5)(2x+5)-(2x+3)^3$$

Dạng 6: Tìm x thỏa mãn đẳng thức cho trước

Thực hiện các phép tính, thu gọn đẳng thức về dạng $ax=b$ $(a\neq 0)$ hoặc phân tích đa thức thành nhân tử đưa đẳng thức về dạng $A\cdot B=0$, từ đó tìm được x.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm x biết $x(x+1)-(x-2)^2=6$.

Ví dụ 2. Tìm x biết $x^3-2x^2-x+2=0$.

Ví dụ 3. Tìm x và y để cho đa thức $2xy-3x-14y+21$ có giá trị bằng 0.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Làm phép chia $\left(x^3-4x^2+6x-4\right):\left(x^2-x+1\right)$ rồi biết đa thức bị chia dưới dạng $A=B\cdot Q+R$.

Bài 2. Tính $\left(2^{n+3}-5\cdot 2^{n+2}+2^{n+1}\right):2^n$.

Bài 3. Cho biết $x+y=-1$, tính giá trị của biểu thức $A=x^3+y^3-3xy$.

Bài 4. Cho bốn số liên tiếp không chia hết cho 5, khi chi cho 5 được những số dư khác nhau. Chứng minh rằng tổng các bình phương của chúng chia hết cho 10.

Bài 5. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) x^3-4x^2-4x+1;

b) $5x^2-25x-120$.

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (nếu có) của biểu thức

a) $A=2x^2+12x+11$

b) $B=-x^2+18x+19$

Bài 7. Cho $a=x^2-yz; b=y^2-zx; c=z^2-xy$.

a) Tính tổng $ax+by+cz$ và tổng $a+b+c$.

b) Chứng minh rằng $ax+by+cz=(x+y+z)(a+b+c)$.

LÊ TRIỆU BÁ VƯƠNG

VÕ TẤN ĐẠT

CAO TỚI

NGUYỄN THÀNH SƠN

TUẤN NGUYỄN

NGUYỄN QUANG HIỆP

TRỊNH VĂN LUÂN

BÙI QUỐC HOÀN

THÀNH LÊ

THẦY HÓA

HỒ NHƯ VƯƠNG

BÙI TIẾN MẠNH

HỨA ĐỨC SINH

ĐẶNG ĐỨC QUÝ

ĐÀM THANH PHƯƠNG

TRẦN TRỌNG TIẾN

THANH QUÂN

Chương

2 PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Chủ đề 1: PHÂN THỨC ĐẠI SỐ. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

A Trọng tâm kiến thức

I. Phân thức đại số

- Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức và B khác đa thức 0, A được gọi là tử thức (hay tử), B được gọi là mẫu thức (hay mẫu).
- Mỗi đa thức cũng được coi như một phân thức có mẫu thức bằng 1.
- Mỗi số thực a bất kỳ cũng là một phân thức.
- Hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ gọi là bằng nhau nếu $A \cdot D = B \cdot C$.
  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $A \cdot D = B \cdot C$.

II. Tính chất cơ bản của phân thức

- Tính chất cơ bản:
  - Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức mới bằng phân thức đã cho
  $$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} \ (M \text{ là đa thức khác đa thức } 0).$$
  - Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức mới bằng phân thức đã cho
  $$\frac{A}{B} = \frac{A : N}{B : N} \ (N \text{ là nhân tử chung}).$$
- Quy tắc đổi dấu: Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho
$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$$

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Chứng minh hai phân thức bằng nhau

Để chứng minh $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ ta có hai cách:

- Chứng minh $A \cdot D = B \cdot C$.
- Áp dụng tính chất cơ bản của phân thức
$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M}\ (M \neq 0) \text{ hoặc } \frac{A}{B} = \frac{A : N}{B : N}.$$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, chứng tỏ rằng:

a) $\dfrac{3y}{4} = \dfrac{6xy}{8x}$;

b) $\dfrac{x+y}{3x} = \dfrac{3x(x+y)^2}{9x^2(x+y)}$;

c) $\dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2+6x+9}$.

Ví dụ 2. Chứng minh đẳng thức
$$\frac{x-2}{-x} = \frac{8-x^3}{x\left(x^2+2x+4\right)}.$$

Dạng 2: Tìm đa thức trong đẳng thức

Áp dụng định nghĩa hoặc tính chất cơ bản của phân thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau, hãy tìm đa thức A trong đẳng thức
$$\frac{A}{x^2-4} = \frac{x}{x+2}$$

Ví dụ 2. Dùng tính chất cơ bản của phân thức, hãy điền một đa thức thích hợp vào chỗ trống trong đẳng thức
$$\frac{(x+1)^2}{x^2+x} = \frac{\ldots}{x}.$$

Dạng 3: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của phân thức

- Với $a > 0$ (a là hằng số)

  $P(x) = m + a[F(x)]^2 \geq m$; giá trị nhỏ nhất của $P(x)$ bằng m khi $F(x) = 0$.

  $P(x) = m - a[F(x)]^2 \leq m$; giá trị lớn nhất của $P(x)$ bằng m khi $F(x) = 0$.

- Với $a > 0$ (a là hằng số), $P(x) > 0$ thì $\dfrac{a}{P(x)}$ nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) khi $P(x)$ lớn nhất (hoặc nhỏ nhất).

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của phân thức $A = \dfrac{x^2+2x+3}{4}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của phân thức $B = \dfrac{4-4x^2+4x}{5}$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \dfrac{10}{x^2-2x+2}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Viết phân thức $\dfrac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}}{3x^2-\frac{1}{2}}$ dưới dạng phân thức có tử và mẫu là các đa thức có hệ số nguyên.

Bài 2. a) Tìm đa thức A, cho biết $\dfrac{A}{x-2} = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$.

b) Tìm đa thức M, cho biết $\dfrac{M}{x-1} = \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất của phân thức P, biết $P = \dfrac{15}{x^2-2x+4}$.

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của phân thức Q, biết $Q = \dfrac{18}{4x-x^2-7}$.

Bài 5. Tìm giá trị nguyên của x để phân thức $\dfrac{6}{2x+1}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 6. Hãy biến đổi hai phân thức $\dfrac{x-4}{5x}$ và $\dfrac{16-x^2}{x+3}$ để được hai phân thức có cùng tử thức.

Bài 7. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $\dfrac{n-2}{2n+1}$ khác 0 và không tối giản.

Chủ đề 2: RÚT GỌN PHÂN THỨC. QUY ĐỒNG MẪU THỨC NHIỀU PHÂN THỨC

A Trọng tâm kiến thức

1. Muốn rút gọn một phân thức, ta có thể:

   (a) Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung

   (b) Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung. *Chú ý:* Có khi cần đổi dấu ở tử hoặc mẫu để nhận ra nhân tử chung của tử và mẫu (lưu ý tới tính chất $A = -(-A)$).

2. Quy đồng mẫu nhiều phân thức

   - Tìm mẫu thức chung

     Muốn tìm mẫu thức chung, ta có thể làm như sau:

     – Phân tích mẫu thức của các phân thức đã cho thành nhân tử

     – Mẫu thức chung cần tìm là một tích mà các nhân tử được chọn như sau:

* Nhân tử bằng số của mẫu thức chung là tích các nhân tử bằng số ở các mẫu thức của các phân thức đã cho (nếu các nhân tử bằng số ở các mẫu thức là những số nguyên dương thì nhân tử bằng số của mẫu thức chung là BCNN của chúng)
* Với mỗi lũy thừa của cùng một biểu thức có mặt trong các mẫu thức, ta chọn lũy thừa với số mũ cao nhất.

- Quy đồng mẫu thức

  Muốn quy đồng mẫu thức nhiều phân thức, ta có thể làm như sau:

  - Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung
  - Tìm nhân tử phụ của mỗi phân thức
  - Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Rút gọn phân thức

Thực hiện các bước sau:

- Phân tích tử và mẫu thành nhân tử.
- Chia cả tử và mẫu của phân thức cho nhân tử chung.

$$\frac{A\cdot C}{B\cdot C}=\frac{A}{B}$$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Rút gọn phân thức

a) $\dfrac{2x^2y^5}{3x^4y^2}$; b) $\dfrac{3x(x-y)^3}{2x^2(x-y)^2}$.

Ví dụ 2. Rút gọn phân thức

a) $\dfrac{3x^2y+4xy^2}{6x+8y}$; b) $\dfrac{-3x^2-6x}{4-x^2}$.

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức

- Phân tích tử và mẫu của phân thức ở vế trái (vế phải) của đẳng thức đã cho rồi rút gọn phân thức.
- So sánh kết quả ở hai vế.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh đẳng thức

$$\frac{2x-2xy-3+3y}{1-3y+3y^2-y^3}=\frac{2x-3}{(1-y)^2}.$$

Dạng 3: Tính giá trị biểu thức

- Rút gọn biểu thức đã cho.
- Thay giá trị của biến vào biểu thức đã rút gọn, rồi thực hiện các phép tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho phân thức $P = \dfrac{x^3 - x}{(1+xy)^2 - (x+y)^2}$ với $x \neq \pm 1$ và $y \neq \pm 1$.

a) Rút gọn phân thức P.

b) Tìm giá trị của biểu thức P với $x = -12,\ y = 99$.

Ví dụ 2. Cho phân thức $Q = \dfrac{\left(x^2 - 4y^2\right)\cdot(x - 2y)}{x^2 - 4xy + 4y^2}$ với $x \neq 2y$.

a) Rút gọn phân thức Q.

b) Tính giá trị của phân thức tại $x = -9998$ và $y = -1$.

Ví dụ 3. Biết $x > y > 0$ và $3x^2 + 3y^2 = 10xy$. Tính $P = \dfrac{y - x}{y + x}$.

Ví dụ 4. Cho a, b thỏa mãn $3a - b = 5$. Tính giá trị

$$M = \frac{5a - b}{2a + 5} - \frac{3b - 3a}{2b - 5} \text{ với } a \neq -2{,}5;\ b \neq 2{,}5.$$

Dạng 4: Chứng minh giá trị biểu thức không phụ thuộc vào biến

Rút gọn các phân thức đại số để phân thức đã rút gọn không còn chứa biến.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh giá trị các biểu thức sau đây không phụ thuộc vào giá trị của x và y.

a) $\dfrac{x^2 - 4y^2}{(x+2y)(mx - 2my)}$

b) $\dfrac{9x^2 - 1}{1 - 3x} + \dfrac{3xy - 3x + 2y - 2}{y - 1}$ với $x \neq \dfrac{1}{3};\ y \neq 1$.

Dạng 5: Tìm x thỏa mãn đẳng thức cho trước

- Đưa đẳng thức về dạng $ax = b$.
- Tìm $x = \dfrac{b}{a}$ (với $a \neq 0$).
- Rút gọn biểu thức $\dfrac{b}{a}$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm x, biết $a^2x + 3ax + 9 = a^2$ với $a \neq 0;\ a \neq -3$.

Ví dụ 2. Cho a, b, c là các số thực khác 0 và $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$.
Đặt $x=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$. Tính giá trị của x.

Dạng 6: Quy đồng mẫu thức

Xem phần trọng tâm kiến thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Quy đồng mẫu thức của các phân thức sau:

a) $\frac{-7y}{12xz^2}, \frac{11z}{18x^2y}, \frac{5x}{6y^2z}$ b) $\frac{6}{7xy^2z}, \frac{11}{14x^2y^3z^3}$

Ví dụ 2. Quy đồng mẫu thức của các phân thức sau:

a) $\frac{5}{3x+15}; \frac{3}{x^2-25}$ b) $\frac{x^2-x}{x^2-1}; \frac{3x+3}{x^3+2x^2+x}; \frac{2x}{x^3}$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Rút gọn phân thức:

a) $\frac{8x^2y^2(x+y)}{4xy\left(x^2-y^2\right)}$ b) $\frac{9x^3-18x}{3\cdot\left(x^4-4\right)}$ c) $\frac{x(x+3)}{x^2(3+x)}$ d) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$

Bài 2. Rút gọn biểu thức sau:

a) $P=\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}-(x-2)$ b) $Q=\frac{48(x-5)^2}{120-24x}$ c) $R=\frac{12x^3y^4(x-y)^2}{18x^2y^5(y-x)}$

Bài 3. a) Cho biểu thức $A=\frac{x^3+2x^2+x}{x^3-x}$. Tính giá trị biểu thức A với $x=3$.

b) $A=\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+8}$. Tính giá trị biểu thức A với $x=0{,}2$.

Bài 4. Nếu $y=2x$ và $z=2y$ thì $\frac{x+y+z}{x+y-z}$ bằng bao nhiêu?

Bài 5. Cho $x\neq y$ và $a_1=x+m$, $a_2=a_1+m$, $y=a_2+m$; $b_1=x+n$; $b_2=b_1+n$, $b_3=b_2+n$; $y=b_3+n$ thì $\frac{a_1-a_2}{b_1-b_2}$ bằng bao nhiêu?

Bài 6. Tìm mẫu thức chung của hai phân thức

$$\frac{2x}{x^2+3x+2}; \frac{3x}{x^2+4x+3}$$

Bài 7. Quy đồng mẫu thức của các phân thức sau:

a) $\frac{2x+1}{6xy^3}$ và $\frac{3x}{9x^2y}$ b) $\frac{3x^2-4x+1}{x^2-25}; \frac{x-3}{5-x}; \frac{4x}{x+5}$

Chủ đề 3: PHÉP CỘNG CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A Trọng tâm kiến thức

I. Cộng hai phân thức cùng mẫu thức

Quy tắc: muốn cộng hai phân thức cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức $\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$.

II. Cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau

- **Quy tắc:** Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.
- **Chú ý:** Phép cộng các phân thức có các tính chất sau
  - Giao hoán: $\dfrac{A}{B}+\dfrac{C}{D}=\dfrac{C}{D}+\dfrac{A}{B}$.
  - Kết hợp: $\left(\dfrac{A}{B}+\dfrac{C}{D}\right)+\dfrac{E}{F}=\dfrac{A}{B}+\left(\dfrac{C}{D}+\dfrac{E}{F}\right)$.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Cộng trừ các phân thức cùng mẫu thức

- Cộng các tử thức với nhau;
- Giữ nguyên mẫu thức $\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}=\dfrac{A+B}{C}$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính sau:

a) $\dfrac{x+y}{3x}+\dfrac{x-2y}{3x}$;

b) $\dfrac{x^2+4}{x-2}+\dfrac{4x}{2-x}$.

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức sau

$$A=\frac{x^4-(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2-x^2}+\frac{x^2-\left(x^2-1\right)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$$

Ví dụ 3. Cho a, b, c thõa mãn $abc=1$. Tính

$$M=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}.$$

Dạng 2: Cộng các phân thức không cùng mẫu thức

Trước hết ta quy đồng mẫu thức để đưa về các phân thức có cùng mẫu. Sau đó cộng tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính sau

a) $\dfrac{3}{4xy}+\dfrac{5x}{2y^2z}+\dfrac{7}{6yz^2}$;

b) $\dfrac{x^2}{x^2+3x}+\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{3}{x}$.

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức

$$B=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}+\frac{8a^7}{a^8+b^8}.$$

Ví dụ 3. Cho $a+b+c=0$. Rút gọn biểu thức

a) $A = \dfrac{a^2}{a^2-b^2-c^2} + \dfrac{b^2}{b^2-a^2-c^2} + \dfrac{c^2}{c^2-a^2-b^2}$;

b) $B = \dfrac{1}{b^2+c^2-a^2} + \dfrac{1}{c^2+a^2-b^2} + \dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}$.

Dạng 3: Tìm x thõa mãn đẳng thức cho trước

Chuyển hạng tử không chứa x về một vế, ta được biểu thức của x.

Rút gọn biểu thức của x.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm x biết

$$x - \frac{1}{a+1} = \frac{2}{a^2-1} \quad (a \text{ là hằng số})$$

Dạng 4: Chứng minh đẳng thức

- Từ đẳng thức đã cho ta biến đổi một vế bằng vế còn lại.
- Hoặc biến đổi cả hai vế cùng bằng một biểu thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh đẳng thức

$$\frac{a^2+3ab}{a^2-9b^2} + \frac{2a^2-5ab-3b^2}{6ab-a^2-9b^2} = \frac{a^2+ab+ac+bc}{3bc-a^2-ac+3ab}.$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tính:

a) $\dfrac{5x-2}{15} + \dfrac{2x+2}{15}$;

b) $\dfrac{2-2x}{6x^3y} + \dfrac{3+2y}{6x^3y} + \dfrac{2x-5}{6x^3y}$;

c) $\dfrac{x^2}{x+y} + \dfrac{y^2}{y+z} + \dfrac{-y^2}{x+y} + \dfrac{-z^2}{y+z}$.

Bài 2. Tính

a) $\dfrac{4x-2}{7xy^2} + \dfrac{x+2}{7xy^2}$;

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3x}$;

c) $\dfrac{2x-1}{x} + \dfrac{x+3}{2}$.

Bài 3. Viết phân thức $P = \dfrac{4x^2-2x+3}{2x-1}$ dưới dạng tổng một đa thức và một phân thức có tử thức là hằng số.

Bài 4. Cho phân thức $P = \dfrac{4x^2-2x+7}{2x-1}$. Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của phân thức P là một số nguyên.

Bài 5. Cho biểu thức $P = \dfrac{25x^2-1}{1-5x} + \dfrac{5xy-15x+y-3}{y-3}$ với $x \neq \dfrac{1}{5}$; $y \neq 3$. Tính giá trị của P.

Ta có $P = \dfrac{(5x-1)(5x+1)}{-(5x-1)} + \dfrac{(y-3)\cdot(5x+1)}{y-3} = -5x-1+5x+1 = 0$.

Bài 6. Cho $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2$. Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab}.$$

Chủ đề 4: PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A Trọng tâm kiến thức

I. Phân thức đối

- Hai phân thức được gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0.
- Phân thức đối của phân thức $\dfrac{A}{B}$ được kí hiệu bởi $-\dfrac{A}{B}$.

  Như vậy $-\dfrac{A}{B} = \dfrac{-A}{B}$ và $-\dfrac{-A}{B} = \dfrac{A}{B}$.

II. Phép trừ

Quy tắc: Muốn trừ phân thức $\dfrac{A}{B}$ cho phân thức $\dfrac{C}{D}$, ta cộng $\dfrac{A}{B}$ với phân thức đối của $\dfrac{C}{D}$

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right).$$

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Trừ các phân thức cùng mẫu thức

Trừ các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}.$$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\dfrac{3x+1}{2xy} - \dfrac{x-2}{2xy}$; b) $\dfrac{xy}{2x-y} - \dfrac{2x^2}{y-2x}$.

Dạng 2: Trừ các phân thức không cùng mẫu thức

- Quy đồng mẫu thức để đưa về các phân thức có cùng mẫu.
- Trừ tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau

a) $\dfrac{3x}{5x+5y} - \dfrac{x}{10x-10y}$; b) $\dfrac{1}{3x-2} - \dfrac{4}{3x+2} - \dfrac{3x-6}{4-9x^2}$.

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{x+2}{x^2+x+1} - \frac{2}{x-1} - \frac{2x^2+4}{1-x^3}.$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức

$$A=\frac{20x^2+120x+180}{(3x+5)^2-4x^2}+\frac{5x^2-125}{9x^2-(2x+5)^2}-\frac{(2x+3)^2-x^2}{3\left(x^2+8x+15\right)}.$$

Dạng 3: Rút gọn và tính giá trị biểu thức

- Sử dụng phép cộng, trừ phân thức để rút gọn biểu thức.
- Thay giá trị của biến đã cho vào biểu thức đã rút gọn và thực hiện các phép tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{6x^2+8x+7}{x^3-1}+\frac{x}{x^2+x+1}-\frac{6}{x-1}\quad \text{với } x=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{10}{(x+2)(3-x)}-\frac{12}{(3-x)(3+x)}-\frac{1}{(x+3)(x+2)}\quad \text{tại } x=-0{,}75.$$

Dạng 4: Chứng minh giá trị biểu thức không phụ thuộc vào biến

Thực hiện phép cộng, trừ các phân thức để rút gọn biểu thức không còn chứa biến.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị biến x.

$$A=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}\quad \text{với } x\neq 1;\ x\neq -1.$$

Dạng 5: Tìm x thỏa mãn đẳng thức cho trước

Chuyển hạng tử không chứa x về một vế, ta được biểu thức của x.

Rút gọn biểu thức của x.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm x biết

$$x+\frac{1}{a^2-a}=\frac{a}{a-1};\ (a \text{ là hằng số}).$$

Ví dụ 2. Nếu cho $X+\dfrac{\left(a^2+2\right)\cdot a}{a^3-1}-1=\dfrac{2}{a^2+a+1}$ thì X là phân thức nào?

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tính

a) $\dfrac{7x+2}{5x-2}-\dfrac{2-2x}{5x-2}$;

b) $\dfrac{5x-2}{4x^2y}-\dfrac{x-2}{4x^2y}$.

Bài 2. Tính

a) $\dfrac{xy}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2}{y^2-x^2}$; b) $\dfrac{x+4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x^2+2x}$.

Bài 3. Tính $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^3+1}+\dfrac{1}{x^2-x+1}$.

Bài 4. Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

$$A=\frac{x+4}{2x+4}-\frac{x-2}{x^2-4}.$$

Bài 5. a) Thực hiện phép tính $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

b) Thu gọn biểu thức

$$A=\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x+3}.$$

Chủ đề 5: PHÉP NHÂN CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A Trọng tâm kiến thức

- **Quy tắc.** Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}.$$

- **Phép nhân các phân thức có các tính chất:**
  - Giao hoán: $\dfrac{A}{B}\cdot\dfrac{C}{D}=\dfrac{C}{D}\cdot\dfrac{A}{B}$;
  - Kết hợp: $\left(\dfrac{A}{B}\cdot\dfrac{C}{D}\right)\cdot\dfrac{E}{F}=\dfrac{A}{B}\cdot\left(\dfrac{C}{D}\cdot\dfrac{E}{F}\right)$;
  - Phân phối đối với phép cộng: $\dfrac{A}{B}\left(\dfrac{C}{D}+\dfrac{E}{F}\right)=\dfrac{A}{B}\cdot\dfrac{C}{D}+\dfrac{A}{B}\cdot\dfrac{E}{F}$.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Thực hiện phép nhân các phân thức

Để nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau.

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A.C}{B.D};\quad A\cdot\frac{C}{D}=\frac{A.C}{D}.$$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\dfrac{18x^2y^2}{15z}\cdot\dfrac{5z^3}{9x^3y^2}$; b) $\dfrac{5x+5y}{4x-4y}\cdot\dfrac{6x-6y}{25x+25y}$; c) $3x^3y^4\cdot\left(-\dfrac{7z}{9xy^5}\right)$.

Dạng 2: Rút gọn biểu thức

Thực hiện phép nhân các phân thức đại số để rút gọn biểu thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $K=\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x^2-4x-1}{x^2-1}\right)\cdot\dfrac{x+2003}{x}$

a) Rút gọn K.

b) Tìm số nguyên x để K nhận giá trị nguyên.

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính sau

a) $P=\dfrac{12x+5}{x+9}\cdot\dfrac{4x+3}{360x+150}+\dfrac{12x+5}{x+9}\cdot\dfrac{6-3x}{360x+150}$;

b) $P=\dfrac{x+3y}{3x+y}\cdot\dfrac{4x-2y}{x-y}-\dfrac{x+3y}{3x+y}\cdot\dfrac{x-3y}{x-y}$.

Dạng 3: Tìm x thỏa mãn đẳng thức cho trước

Áp dụng công thức $x:A=B\Rightarrow x=A\cdot B$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm biểu thức x, biết

$$x:\dfrac{a^2+a+1}{2a+2}=\dfrac{a+1}{a^3-1}.$$

Dạng 4: Chứng minh giá trị biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của biến

Thực hiện phép tính các phân thức để rút gọn biểu thức không còn chứa biến.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng tích sau không phụ thuộc vào biến số

$$A=\dfrac{(a+b)^2}{1+a^2}\cdot\dfrac{(b+c)^2}{1+b^2}\cdot\dfrac{(c+a)^2}{1+c^2}.$$

Ví dụ 2. Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng tích sau không phụ thuộc vào biến số

a) $M=\dfrac{4bc-a^2}{bc+2a^2}\cdot\dfrac{4ca-b^2}{ca+2b^2}\cdot\dfrac{4ab-c^2}{ab+2c^2}$;

b) $N=\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\cdot\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\cdot\left(1+\dfrac{c}{a}\right)$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tính

a) $\dfrac{3x+6}{4x-16}\cdot\dfrac{8-2x}{x+2}$;

b) $\dfrac{3x^2}{5y^3}\cdot\left(\dfrac{-10y^3}{9x^3}\right)$.

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau

a) $M=\dfrac{x^5+2x^2+3}{3x^3+3}\cdot\dfrac{4x}{x^2-4}\cdot\dfrac{5x^3+5}{x^5+2x^2+3}$;

b) $A=\dfrac{x^2+2x}{3x-6}\cdot\dfrac{2x-4}{x^2+4x+4}$.

Bài 3. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

$$P=\dfrac{x^2-1}{x+5}\cdot\dfrac{2x+10}{x^2-x}\quad\text{với } x=99.$$

Bài 4. Hãy điền phân thức thích hợp vào đẳng thức sau

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x+2}{x+3}\cdot\frac{x+3}{x+4}\cdot\frac{x+4}{x+5}\ldots=1.$$

Bài 5. Cho $x+y+z=1$. Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến số

$$P=\frac{(x+y)^2}{xy+z}\cdot\frac{(y+z)^2}{yz+x}\cdot\frac{(z+x)^2}{zx+y}.$$

Áp dụng: $xy+z=xy+z(x+y+z)=(z+x)\cdot(z+y)$ và tương tự.

Thay vào, rút gọn được kết quả $P=1$.

Bài 6. Thực hiện các phép tính

a) $A=\dfrac{1^4+4}{3^4+4}\cdot\dfrac{5^4+4}{7^4+4}\cdot\dfrac{9^4+4}{11^4+4}\ldots\dfrac{17^4+4}{19^4+4}$;

b) $B=\dfrac{1^4+\frac{1}{4}}{2^4+\frac{1}{4}}\cdot\dfrac{3^4+\frac{1}{4}}{4^4+\frac{1}{4}}\cdot\dfrac{5^4+\frac{1}{4}}{6^4+\frac{1}{4}}\ldots\dfrac{29^4+\frac{1}{4}}{30^4+\frac{1}{4}}$.

Chủ đề 6: PHÉP CHIA CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A Trọng tâm kiến thức

I. Phân thức nghịch đảo

Hai phân thức được gọi là nghịch đảo của nhau nếu tích của chúng bằng 1.

Tổng quát, nếu $\frac{A}{B}$ là phân thức khác 0 thì $\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{A}=1$, do đó $\frac{A}{B}$ là phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{B}{A}$.

II. Phép chia

Quy tắc: Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0, ta nhân phân thức $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của $\frac{C}{D}$.

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}\text{ với }\frac{C}{D}\neq 0.$$

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Thực hiện phép tính

Áp dụng các công thức sau:

$$\begin{aligned}&\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A.D}{B\cdot C}\\&\frac{A}{B}:C=\frac{A}{B}\cdot\frac{1}{C}=\frac{A}{B\cdot C}\text{ với }B,C,D\neq 0\\&A:\frac{C}{D}=A\cdot\frac{D}{C}=\frac{A.D}{C}\end{aligned}$$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính

a) $\dfrac{x^2-25}{x^2-3x}:\dfrac{x^2+5x}{x^2-9}$;

b) $-\dfrac{25x^2y^5}{3x}:15xy^2$;

c) $\left(x^2+y^2\right):\dfrac{x^3y+xy^3}{x^4y}$.

Ví dụ 2. Thực hiện phép tính $\dfrac{x+1}{x+2}:\dfrac{x+2}{x+3}:\dfrac{x+3}{x+1}$.

Dạng 2: Rút gọn biểu thức

Thực hiện phép chia các phân thức đại số để rút gọn biểu thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức

$$R=\frac{3a^2-2ab-b^2}{2a^2+ab-b^2}:\frac{3a^2-4ab+b^2}{3a^2+2ab-b^2}.$$

Ví dụ 2. Cho $x\neq 0$, $x\neq \pm 2$. Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

$$A=\left(\frac{4}{x-2}-\frac{3}{x+2}\right):\frac{x+14}{x^2}\ \text{với}\ x=-3.$$

Dạng 3: Tìm x thỏa mãn đẳng thức cho trước

Tìm x từ đẳng thức $A\cdot x=B\Rightarrow x=B:A$.

Rút gọn biểu thức $B:A$ dựa vào phép chia phân thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm x biết

$$\frac{a+1}{a+2}\cdot x=\frac{a^2-1}{a^2+2a},\ \text{với}\ a\ \text{là hằng số}, a\neq 1;\ a\neq -1;\ a\neq 0;\ a\neq -2.$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Thực hiện phép tính

a) $\dfrac{3x+9}{x^2-4}:\dfrac{x+3}{x-2}$;

b) $\dfrac{5x^2+10xy}{x^2+2xy+4y^2}:\dfrac{x+2y}{x^3-8y^3}$.

Bài 2. Thực hiện phép tính

a) $\dfrac{4x^2+1}{x}:(1-2x)$;

b) $(x+y):\dfrac{y^2+xy}{x-y}$.

Bài 3. Thực hiện phép chia

a) $A=\dfrac{x+y+z}{(x+y)^2-(x+y)z}:\dfrac{x^2+y^2-z^2+2xy}{2x+2y}$;

b) $B=\dfrac{6x-3}{x}:\dfrac{4x^2-1}{3x^2}$;

c) $C=\dfrac{x^2-12xy+36y^2}{x^2+12xy+36y^2}:\dfrac{3x-18y}{3x+18y}$.

Bài 4. Hãy điền phân thức thích hợp vào trong đẳng thức sau

$$\frac{x}{x+1}:\frac{x+1}{x+2}:\frac{x+2}{x+3}:\frac{x+3}{x+4}:\frac{x+4}{x+5}:\ldots=1.$$

Bài 5. Tìm x biết

a) $\dfrac{3a}{4}\cdot x=\dfrac{4a}{5}$ với $a\neq 0$.

b) $\dfrac{a+2}{a+1}\cdot x=\dfrac{a^2-4}{a^2+a}$ với $a\neq\{-1;0;-2\}$.

Bài 6. Tính $A=\dfrac{5^2-1}{3^2-1}:\dfrac{9^2-1}{7^2-1}:\dfrac{13^2-1}{11^2-1}:\dots:\dfrac{57^2-1}{55^2-1}$.

Chủ đề 7: BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ. GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC

A Trọng tâm kiến thức

- Mỗi biểu thức là một phân thức hoặc biểu thị một dãy phép toán cộng, trừ, nhân, chia trên những phân thức gọi là biểu thức hữu tỉ.
- Nhờ các quy tắc của phép toán cộng, trừ nhân chia các phân thức, ta có thể biến đổi các biểu thức hữu tỉ thành một phân thức.
- Điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0 là điều kiện để giá trị của phân thức được xác định.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Tìm điều kiện của biến để phân thức xác định

Ta tìm các giá trị của biến sao cho giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Với giá trị nào của x thì giá trị của phân thức sau được xác định?

a) $\dfrac{5x}{3x-6}$;

b) $\dfrac{x-2}{x^2+8x}$;

c) $\dfrac{x^2-1}{16x^2-25}$.

Dạng 2: Tìm giá trị của x để phân thức bằng 0

Giá trị của phân thức bằng 0 khi tử có giá trị bằng 0 và mẫu có giá trị khác 0.

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \text{ khi } A(x)=0 \text{ và } B(x)\neq 0.$$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm giá của x để giá trị phân thức sau bằng 0.

a) $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$;

b) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

Dạng 3: Rút gọn biểu thức

Thực hiện phép nhân và phép chia các phân thức đại số để rút gọn biểu thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $B=\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x+2}{x-1}\right)$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x+2}{x^2-x}+\dfrac{x-2}{x^2+x}\right)\cdot\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$.

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A với $x=100$.

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức

a) $A=\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\cdot\dfrac{1+\dfrac{a}{b+c}}{1-\dfrac{a}{b+c}}\cdot\dfrac{b^2+c^2-(b-c)^2}{a+b+c}$.

b) $B=\left(\dfrac{y^2-yz+z^2}{x}+\dfrac{x^2}{y+z}-\dfrac{3}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}\right)\cdot\dfrac{\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}}{\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}}+(x+y+z)^2$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giá trị của phân thức $\dfrac{2x-1}{x^2-4}$ được xác định khi nào?

Bài 2. Tìm giá trị của x để giá trị phân thức

a) $\dfrac{2x^2+10x+12}{x^3-4x}$ bằng 0.

b) $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-2x^2+x}$ bằng 0.

Bài 3. Cho $N=\dfrac{2x-10}{x^2-7x+10}-\dfrac{2x}{x^2-4}+\dfrac{1}{2-x}$.

a) Rút gọn N.

b) Tìm giá trị nguyên của x để N nhận giá trị nguyên.

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A=\left[\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{a+b}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right]\cdot\dfrac{ab}{(a+b)^2}$.

b) $B=\left[\dfrac{1}{(2x-y)^2}+\dfrac{2}{4x^2-y^2}+\dfrac{1}{(2x+y)^2}\right]\cdot\dfrac{4x^2+4xy+y^2}{16x}$.

Bài 5. Rút gọn biểu thức $\dfrac{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}}{\dfrac{y}{x-y}+\dfrac{x}{x+y}}$.

Chủ đề 8: ÔN TẬP CHƯƠNG II

A Trọng tâm kiến thức

- Phân thức đại số, tính chất cơ bản của phân thức đại số.
- Bốn phép tính: cộng, trừ, nhân, chia các phân thức đại số.
- Điều kiện để phân thức xác định, giá trị của phân thức đại số.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Rút gọn biểu thức

Thực hiện các bước sau

- Phân tích tử và mẫu thành nhân tử.
- Chia cả tử và mẫu của phân thức cho nhân tử chung: $\dfrac{A\cdot C}{B\cdot C}=\dfrac{A}{B}$.
- Các phép tính của phân thức đại số.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Rút gọn phân thức

a) $P=\dfrac{54x(x-3)^3}{63(3-x)^2}$;

b) $Q=\dfrac{x^2-3xy}{21y^2-7xy}$.

Ví dụ 2. Tính tổng $\dfrac{y}{2x^2-xy}+\dfrac{4x}{y^2-2xy}$.

Ví dụ 3. Cho biểu thức: $P=\dfrac{2x+y}{2x^2-xy}+\dfrac{2x-y}{2x^2+xy}-\dfrac{16x}{4x^2-y^2}$. Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào giá trị của biến y.

Dạng 2: Tính giá trị của biểu thức

- Rút gọn phân thức đại số.
- Xét giá trị thuộc tập xác định, thay giá trị vào biểu thức đã rút gọn và tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức $M=\dfrac{x-xy-y+y^2}{y^3-3y^2+3y-1}$ với $x=-\dfrac{3}{4}$; $y=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức $Q=\dfrac{x-y}{x+y}$ biết $x^2-2y^2=xy$ và $y\neq 0$; $x+y\neq 0$.

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức sau

$$P=\frac{\left(2003^2\cdot 2013+31\cdot 2004-1\right)\cdot(2003\cdot 2008+4)}{2004\cdot 2005\cdot 2006\cdot 2007\cdot 2008}.$$

Ví dụ 4. Cho $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2007}, a_{2008}$ là 2008 số thực thỏa mãn

$$a_k=\frac{2k+1}{\left(k^2+k\right)^2} \text{ với } k=1,\ 2,\ 3\ldots,\ 2008.$$

Tính tổng $S_{2008}=a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{2007}+a_{2008}$.

Dạng 3: Toán chứng minh

Sử dụng giả thiết, tạo ra vế trái và chứng minh bằng vế phải.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

Nhận xét. Quan sát mẫu thức: $b+c$; $c+a$; $a+b$ ta thấy chúng không thể cùng dấu được. Do đó ta có thể kết luận: Trong ba số a, b, c có ít nhất một số âm, ít nhất một số dương.

Dạng 4: Phương pháp tách trong biến đổi biểu thức

Kỹ thuật của bài là tách mỗi phân thức thành tổng hoặc hiệu hai phân thức bằng cách thêm, bớt vào tử thức một số thích hợp.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Biết $x \neq -y$, $y \neq -z$, $z \neq -x$, rút gọn biểu thức sau

$$A = \frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2 - xz}{(y+x)(y+z)} + \frac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)}.$$

Ví dụ 2. Biết x, y, z đôi một khác nhau, chứng minh rằng

$$\frac{y-z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z-x}{(y-z)(y-x)} + \frac{x-y}{(z-x)(z-y)} = \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x}.$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng

$$\frac{x-y}{1+xy} + \frac{y-z}{1+yz} + \frac{z-x}{1+zx} = \frac{x-y}{1+xy} \cdot \frac{y-z}{1+yz} \cdot \frac{z-x}{1+zx}.$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho biểu thức $A = \dfrac{x}{x-5} - \dfrac{10x}{x^2-25} - \dfrac{5}{x+5}$.

a) Tìm tập xác định và rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi $x = 9$.

Bài 2. Cho biểu thức $B = \left(\dfrac{4}{x^3-4x} + \dfrac{1}{x+2}\right) : \dfrac{2x-4-x^2}{2x^2+4x}$.

a) Tìm tập xác định và rút gọn biểu thức B.

b) Tính giá trị của B tại $x = 1$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức B nhận giá trị nguyên.

Bài 3. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{2x^2+1}{x^3-1} - \dfrac{1}{x-1}\right) : \left(1 - \dfrac{x^2+4}{x^2+x+1}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P với $x = -6$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài 4. Cho $Q = \dfrac{12x-45}{x^2-7x+12} - \dfrac{x+5}{x-4} + \dfrac{2x+3}{3-x}$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tính giá trị của Q tại $|x| = 3$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên.

Bài 5. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_9$ được xác định bởi công thức
$$a_k = \frac{3k^2+3k+1}{\left(k^2+k\right)^3} \text{ với mọi } k \geq 1.$$
Hãy tính giá trị của tổng: $1+a_1+a_2+\ldots+a_9$.

Bài 6. Tính $\dfrac{\left(1986^2-1992\right)\cdot\left(1986^2+3972-3\right)\cdot 1987}{1983\cdot 1985\cdot 1988\cdot 1989}$.

Bài 7. Đặt $a+b+c=2p$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}-\frac{1}{p}=\frac{abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Bài 8. Biết $a \neq -b$, $b \neq -c$, $c \neq -a$. Chứng minh rằng
$$\frac{b^2-c^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{c^2-a^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{a^2-b^2}{(c+a)(c+b)}=\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{a-b}{a+b}.$$

LÊ TRIỆU BÁ VƯƠNG

VÕ TẤN ĐẠT

CAO TỚI

NGUYỄN THÀNH SƠN

TUẤN NGUYỄN

NGUYỄN QUANG HIỆP

TRỊNH VĂN LUÂN

BÙI QUỐC HOÀN

THÀNH LÊ

THẦY HÓA

HỒ NHƯ VƯƠNG

BÙI TIẾN MẠNH

HỨA ĐỨC SINH

ĐẶNG ĐỨC QUÝ

ĐÀM THANH PHƯƠNG

TRẦN TRỌNG TIẾN

THANH QUÂN

Chương **3**

PHÉP NHÂN VÀ CHIA CÁC ĐA THỨC

Chủ đề 1: MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN SỐ

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

a) Phương trình một ẩn: Một phương trình với ẩn x có dạng $A(x) = B(x)$, trong đó vế trái $A(x)$ và vế phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng một biến x.
Giá trị của biến thoải mãi phương trình là một nghiệm của phương trình.
Tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình được gọi là tập nghiệm của phương trình đó, thường kí hiệu S.

b) Giải phương trình là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó.

c) Phương trình tương đương: Hai phương trình có cùng một tập nghiệm là hai phương trình tương đương, kí hiệu $\Leftrightarrow$.

d) Phương trình bậc nhất một ẩn: Phương trình dạng $ax + b = 0$, với a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

e) Hai quy tắc biến đổi trương đương phương trình

- Quy tắc chuyển vế: Trong một phương trình ta có thể chuyển một hảng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.
- Quy tắc nhân với một số: Trong một phương trình, ta có thể nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số khác 0.

f) Cách giải phương trình bậc nhất một ẩn

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}.$$

Phương trình $ax + b = 0$ luôn có một nghiệm duy nhất $x = \frac{-b}{a}$.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: XÉT XEM GIÁ TRỊ $x = a$ CÓ LÀ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG?

Thay $x = a$ vào hai vế của phương trình. Nếu hai vế có cùng một giá trị thì $x = a$ là một nghiệm của phương trình đó.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Với mỗi phương trình sau, xét xem $x = -2$ có phải là nghiệm của nó không?

a) $5x + 3 = 2x - 3$.

b) $\frac{1}{4}x - 1 = x + \frac{1}{2}$.

c) $-x + 5 = 2(1 - x)$.

Ví dụ 2. Phương trình nào dưới đây có nghiệm $x = 3$?

a) $2x + 7 = 10 + x$.

b) $-3x + 8 = 4 - x$.

c) $\frac{1}{9}x + \frac{2}{3} = x - 2$.

Ví dụ 3. Với giá trị nào của m thì phương trình $\frac{2}{5}mx = 4x + 2$ nhận $x = -5$ là nghiệm?

Ví dụ 4. Thử lại để thấy rằng phương trình $mx - 2 = -x + 3m + 1$ luôn nhận $x = 3$ là nghiệm dù m lấy bất kì giá trị nào.

Dạng 2: XÉT XEM HAI PHƯƠNG TRÌNH CÓ TƯƠNG ĐƯƠNG KHÔNG?

- Dựa vào định nghĩa: Nếu hai phương trình có cùng một tập nghiệm thì hai phương trình đó tương đương.
- Dùng quy tắc chuyển vế hai quy tắc nhân để biến đổi phương trình này thành phương trình kia.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hai phương trình $3x = 0$ và $x(x + 3) = 0$. Hai phương trình trên có tương đương không? Vì sao?

Ví dụ 2. Cho hai phương trình $5x = 10$ và $x - 1 = 1$. Hai phương trình trên có tương đương không? Vì sao?

Ví dụ 3. Cho hai phương trình $x^2 + 10 = 1$ và $\frac{5}{x} = 0$. Hai phương trình trên có tương đương không? Vì sao?

Ví dụ 4. Chứng minh rằng hai phương trình $5x - 1 = 2x + 20$ và $\frac{3x - 1}{4} = 5$ tương đương.

Dạng 3: NHẬN DẠNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN SỐ

Nếu phương trình có dạng $ax + b = 0$ với a, b là hai số đã cho $a \neq 0$ thì phương trình là phương trình là phương trình bậc nhất một ẩn.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất một ẩn?

a) $x+5=0$.

b) $\frac{1}{2}x-3=0$.

c) $2x^2+7=0$.

d) $-\frac{5}{8}x=0$.

e) $\frac{4}{x}+9=0$.

Ví dụ 2. Với giá trị nào của m thì mỗi phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn?

a) $\frac{1}{5}x+m-1=0$.

b) $(m+3)x-2=0$.

c) $(x-3)m+4=0$.

Dạng 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Áp dụng quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải phương trình

a) $8x-24=0$.

b) $15-3x=0$.

c) $\frac{1}{7}x+\frac{2}{21}=0$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình

a) $4x+5=1$.

b) $-5x+2=14$.

c) $6x-3=8x+9$.

Ví dụ 3. Cho phương trình $(m^2-9)x-3=m$. Giải phương trình trong các trường hợp sau

a) $m=2$.

b) $m=3$.

c) $m=-3$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong các phương trình dưới đây, phương trình nào có nghiệm $x=4$; phương trình nào có nghiệm $x=-4$?

a) $-\frac{1}{2}x+5=3(x-3)$.

b) $3x-2=x+4$.

c) $x^2-15=1$.

Bài 2. Tìm giá trị của m để phương trình $7x+4=x-2m$ nhận $x=-6$ là nghiệm?

Bài 3. Với giá trị nào của m thì phương trình $5x-mx=2m+1$ là phương trình bậc nhất một ẩn.

Bài 4. Với giá trị nào của m thì phương trình $4x+9-m=0$ có nghiệm khác 0.

Bài 5. Cho các phương trình

a) $\frac{1}{3}x+4=11$.

b) $-x+9=3$.

c) $3x-5=x+7$.

Hãy giải các phương trình trên rồi cho biết hai phương trình nào tương đương với nhau?

Bài 6. Tìm m để phương trình $-2x+1=0$ và $mx-1=3$ tương đương với nhau.

Bài 7. Cho phương trình $(m-1)(m-2)=-m+2$.

Hãy giải phương trình trong các trong các trường hợp sau

a) $m=1$.

b) $m=2$.

c) $m=0$.

Chủ đề 2: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ DẠNG $ax+b=0$

A Trọng tâm kiến thức

I. CÁC BƯỚC GIẢI

- Quy đồng mẫu ở hai vế.
- Khử mẫu (bằng cách nhân hai vế với mẫu chung).
- Bỏ dấu ngoặc.
- Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang một vế, các hằng số sang vế kia.
- Thu gọn và giải phương trình nhận được.

> Quá trình giải có thể dẫn đến trường hợp đặc biệt là hệ số của ẩn bằng 0;
> - Trường hợp $0x=m$ với $m\neq 0$, phương trình vô nghiệm.
> - Trường hợp $0x=m$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Theo các bước nêu ở trên.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $3(x-4)+5=2(x+1)-8$.

b) $5(x+1)^2+2x=5x^2-3$.

c) $(2x-1)^2+5=(2x+3)(2x-3)-x$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{7x-5}{8}=\dfrac{3x+1}{5}$.

b) $\dfrac{3x+1}{6}=\dfrac{5x-2}{9}$.

c) $\dfrac{4(x+2)}{8}=\dfrac{13x-9}{40}$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{5x-4}{2}-7=\dfrac{3x-1}{4}$.

b) $\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x-3}{5}=1$.

c) $\dfrac{5x-1}{6}+\dfrac{2(x+4)}{9}=\dfrac{7x-5}{15}+x-1$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình

a) $\dfrac{\dfrac{x-3}{5}+1}{4}=\dfrac{\dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{2}}{6}$.

b) $\dfrac{5x+\dfrac{x+2}{2}}{9}-x=\dfrac{\dfrac{x+3}{5}+15}{12}-2$.

Ví dụ 5. Giải các phương trình

a) $\dfrac{2x+3}{4}-\dfrac{5x+3}{6}=\dfrac{3-4x}{12}$.

b) $\dfrac{3(2x+1)}{4}-1=\dfrac{15x-2}{10}$.

Ví dụ 6. Giải các phương trình

a) $\dfrac{x+5}{65}+\dfrac{x+10}{60}=\dfrac{x+15}{55}+\dfrac{x+20}{50}$.

b) $\dfrac{x+91}{81}+\dfrac{x+92}{82}+\dfrac{x+93}{83}=3$.

Dạng 2: Tìm giá trị của biến để giá trị của hai biểu thức có mối liên quan nào đó

Từ mối liên quan giữa giá trị của hai biểu thức, ta lập một phương trình rồi giải phương trình này.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{11x+3}{12}$; $B=\dfrac{3(x+5)}{8}$, với giá trị nào của x thì hai biểu thức A và B có giá trị bằng nhau?

Ví dụ 2. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{7x-3}{4}$;$B=\dfrac{5x-1}{6}$ với giá trị nào của x thì tổng $A+B$ có giá trị bằng 12?

Ví dụ 3. Cho hai biểu thức $M=\dfrac{5x-3}{8}+6$; $N=\dfrac{x+5}{6}$, với giá trị nào của x thì giá trị của biểu thức M lớn hơn giá trị của biểu thức N là 8.

Dạng 3: Tìm giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm $x=x_0$

Thay $x=x_0$ vào phương trình đã cho rồi giải phương trình với ẩn số là m.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm giá trị của m để phương trình $(x+m)(3x-2)-m(x-4)=14$ có nghiệm $x=2$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải các phương trình

a) $(x+2)^2+(x+1)^2=2(x+3)(x+1)$.

b) $\dfrac{10x+1}{7}=\dfrac{7x-2}{4}$.

c) $\dfrac{x-4}{5}-2=\dfrac{1+9x}{6}$.

Bài 2. Giải các phương trình

a) $\dfrac{3x-5}{8}-\dfrac{5x-4}{6}-\dfrac{6x+1}{10}=1$.

b) $\dfrac{11x+2}{4}-\dfrac{4x-1}{9}=\dfrac{13x+2}{12}-2$.

Bài 3. Giải các phương trình

a) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{(2x-1)^2-\left(x^2-15\right)}{12}$.

b) $\dfrac{5x+3}{15}-2=\dfrac{4x-21}{12}$.

Bài 4. Chứng minh rằng các phương trình sau đều có nghiệm nguyên

a) $\dfrac{x-2}{102}+\dfrac{x-3}{103}=\dfrac{x-4}{104}+\dfrac{x-5}{105}$.

b) $\dfrac{59-x}{19}+\dfrac{58-x}{18}=\dfrac{57-x}{17}+\dfrac{56-x}{16}$.

Bài 5. Cho hai biểu thức $M = \dfrac{4x-5}{8} + 2; N = \dfrac{6-x}{2}$, với giá trị nào của x thì giá trị của M bằng $\dfrac{2}{3}$ giá trị của N?

Bài 6. Cho hai biểu thức $P = \dfrac{x-3}{4} + 5;\ Q = \dfrac{2x-9}{6}$, với giá trị nào của x thì giá trị của biểu thức P nhỏ hơn giá trị của biểu thức Q là 1?

Bài 7. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m+5)x - 2m(x-1) = 4$ vô nghiệm?

Chủ đề 3: PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Phương trình tích là phương trình có dạng $A(x) \cdot B(x) \cdots C(x) = 0$, trong đó $A(x), B(x), C(x)$ là những biểu thức của biến x.

> Các bước giải một phương đưa được về phương trình tích.
>
> - Bước 1. Chuyển tất cả các hạng tử sang vế trái rồi phân tích vế này thành nhân tử, đưa phương trình về dạng $A(x) \cdots B(x) \cdots C(x) = 0$.
> - Bước 2. Giải các phương trình $A(x) = 0, B(x) = 0, \ldots C(x) = 0$ rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

B Các dạng toán

Dạng 1: Giải các phương trình tích

Giải phương trình $A(x) = 0$ và $B(x) = 0$ rồi lấy tất cả các nghiệm.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $(x+5)(2x-4) = 0$;

b) $(x^2+1)(5x+3) = 0$;

c) $\left(\dfrac{3}{4}x - 1\right)\left(\dfrac{5}{3}x + 2\right) = 0$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $(4x-5)\left(\dfrac{6x-1}{3} + 1\right) = 0$;

b) $\left(\dfrac{2+x}{4} - \dfrac{x}{5}\right)\left(\dfrac{3x+5}{6} - \dfrac{13x-1}{9}\right) = 0$.

Dạng 2: Giải phương trình đưa về phương trình tích

Phương pháp giải:

- *Bước 1*: Biến đổi phương trình về dạng phương trình tích.
- *Bước 2*: Giải phương trình tích.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $(3x-1)(6x+1)-(x+7)(3x-1)=0$;

b) $(2x-7)^2-(4x+5)(7-2x)=0$;

c) $(x+2)(3x-24)-12(8-x)=0$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $26x^3-12x^2+13x=6$;

b) $(x^2-3)(x+2)=x^2-4x-7$;

c) $x^3+(x-5)(x+8)=2x^2-37$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $x^2+10x+25=(x-1)(x+5)$;

b) $9x^2-6x+1=4x^2$;

c) $x^3+8=x^2-4$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau

a) $3x^2-11x+6=0$;

b) $-2x^2+5x+3=0$;

c) $x^3+2x-3=0$.

Dạng 3: Biết phương trình có một trong các nghiệm là $x=x_0$. Tìm giá trị của tham số m.

Phương pháp giải:

- *Bước 1*: Thay $x=x_0$ vào phương trình đã cho.
- *Bước 2*: Giải phương trình với ẩn số là m.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho phương trình $(x+m)^2-(x-3m)^2=0$ trong đó m là một số cho trước.

a) Tìm các giá trị của m để phương trình có một trong các nghiệm là $x=2$.

b) Với các giá trị của m tìm được ở câu a), hãy giải phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^3-x^2-9x-9m=0$ trong đó m là một số cho trước. Biết $x=3$ là một nghiệm của phương trình. Tìm tất cả các nghiệm còn lại.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải các phương trình:

a) $9x(3x-7)(5x+6)=0$;

b) $\left(\dfrac{4x+1}{3}+1\right)\left(\dfrac{8x-3}{7}-3\right)=0$.

Bài 2. Giải các phương trình:

a) $x^2-(x+3)(2x-11)=9$;

b) $(x-2)(x^2-3x+1)+8=x^3$.

Bài 3. Giải các phương trình:

a) $3x^2-4x-4=0$;

b) $x^3-3x+2=0$.

Bài 4. Cho biểu thức $P=(8x+5y-4)(x-3y+6)$.

a) Tìm các giá trị của x sao cho với $y=4$ thì $P=0$;

b) Tìm các giá trị của y sao cho với $x=-1$ thì $P=0$.

Bài 5. Cho phương trình: $2x^3+5x^2-8x-4m=0 \quad (1)$

Biết $x=-2$ là một nghiệm của phương trình (1). Tìm các nghiệm còn lại của phương trình đó.

Chủ đề 4: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

A Trọng tâm kiến thức

1) **Điều kiện xác định của một phương trình** là điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu trong phương trình đều khác 0.

2) Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

- *Bước 1.* Tìm điều kiện xác định của phương trình.
- *Bước 2.* Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.
- *Bước 3.* Giải phương trình vừa nhận được.
- *Bước 4.* Kết luận.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Tìm điều kiện xác định của một phương trình

- Đặt điều kiện cho tất cả các mẫu trong phương trình có giá trị khác 0.
- Giải các điều kiện này và lấy tất cả các kết quả tìm được.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình:

a) $\dfrac{7x}{x+4}-\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{x-5}{8}$;

b) $\dfrac{x+6}{5(x-2)}-\dfrac{x-1}{3(x+2)}=\dfrac{4}{x^2-4}$.

Ví dụ 2. Tìm điều kiện xác định của các phương trình:

a) $\dfrac{5-x}{x^2+6x+9}=\dfrac{3x-2}{x^2+6x+8}$;

b) $\dfrac{x-7}{x^2+1}=\dfrac{x+6}{x^2-x+1}$.

Dạng 2: Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Gồm 4 bước: Xem phần trọng tâm kiến thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1.

a) $\dfrac{15x-10}{x^2+3}=0$;

b) $\dfrac{6}{x}-1=\dfrac{2x-3}{3}$;

c) $\dfrac{3x-1}{x+1}=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{x^2-4x-5}{x-5}=0$;

b) $\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=1$;

c) $\dfrac{x-2}{x+8}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{8}{x(x+8)}$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{x+5}{3(x-1)}+1=\dfrac{3x+7}{5(x-1)}$;

b) $\dfrac{3x-1}{3x+1}-\dfrac{3x+1}{3x-1}=\dfrac{4}{9x^2-1}$;

c) $\dfrac{3x-1}{x-1}-\dfrac{2x+5}{x+3}-\dfrac{8}{x^2+2x-3}=1$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{x+3}{x+1}+\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{2(x^2+x-1)}{x(x+1)}$;

b) $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{5x}{(x-2)(x+3)}-1$;

c) $\dfrac{1}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{x^2-x+1}=\dfrac{1-2x}{x^4+x^2+1}$.

Dạng 3: Tìm giá trị của biến để giá trị của hai biểu thức có mối liên quan nào đó

Từ mối liên quan giữa giá trị của hai biểu thức, ta lập một phương trình rồi giải phương trình này.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{3}{3x+1}+\dfrac{2}{1-3x}$, $B=\dfrac{x-5}{9x^2-1}$ với giá trị nào của x thì hai biểu thức A và B có cùng một giá trị?

Ví dụ 2. Cho ba biểu thức $A=\dfrac{2}{5x-2}$; $B=\dfrac{4}{1-5x}$; $C=\dfrac{2}{(5x-2)(5x-1)}$.
Tìm các giá trị của x để tổng $A+B$ có giá trị bằng giá trị của biểu thức C.

Ví dụ 3. Cho hai biểu thức $P=\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}$ và $Q=\dfrac{2-x^2}{1-x^2}$. Với giá trị nào của x thì giá trị của biểu thức P bằng 2 lần giá trị của biểu thức Q?

Dạng 4: Biết phương trình tham số m có một trong các nghiệm là $x=x_0$, tìm nghệm còn lại

- Thay $x=x_0$ vào phương trình đã cho rồi giải phương trình để tìm giá trị của tham số m.
- Thay giá trị vừa tìm được của m vào phương trình đã cho rồi giải phương trình để tìm tất cả các nghiệm.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho phương trình $\dfrac{x-2}{x-4}+\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{m}{3}$ trong đó m là một số cho trước. Biết $x=5$ là một trong các nghiệm của phương trình, tìm các nghiệm còn lại.

Ví dụ 2. Cho phương trình $\dfrac{2x+m}{x-1}=\dfrac{5(x-1)}{x+1}$.

Chứng minh rằng nếu $x=\dfrac{1}{3}$ là một nghiệm của phương trình thì phương trình còn có một nghiệm nguyên.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{2x-1}{x^2-1}=\dfrac{6}{3x+1}$;

b) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{10}{(x+3)(x-1)}$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{x^2-x+1}=\dfrac{2x^2+1}{x^3+1}$; (1)

b) $\dfrac{3x+1}{x+1}-\dfrac{2x-5}{x-3}=1-\dfrac{4}{(x+1)(x-3)}$. (2)

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{2x-7}=\dfrac{13}{(x+3)(2x-7)}$;

b) $\dfrac{2(x-5)}{x^2+4x+3}=\dfrac{x-5}{x^2+5x+6}$.

Bài 4. Cho phương trình $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x^2-m}{x^3+1}=\dfrac{4}{x^2-x+1}$. Biết $x=0$ là một nghiệm của phương trình. Tìm các nghiệm còn lại.

Bài 5. Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+1}{2x-3}$; $B=\dfrac{3x}{x^2-4}$, với giá trị nào của x thì hai biểu thức A và B có cùng một giá trị?

Chủ đề 5: GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Các bưới giải bài toán bằng cách lập phương trình.

a) **Bước 1.** Lập phương trình

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biêt.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

b) **Bước 2.** Giải phương trình.

c) **Bước 3.** Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: TOÁN VỀ QUAN HỆ GIỮA CÁC SỐ

Quan hệ	Phương trình
• Tổng của hai số a và b là m	$a+b=m$
• Số a hơn số b là m	$a-b=m$
• Số a bằng $\frac{2}{3}$ số b	$a=\frac{2}{3}b$
• Số $\overline{ab}$ hơn số $\overline{ba}$ là m	$(10a+b)-(10b+a)=m$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tổng của hai số nguyên là 88. Nếu chia số thứ nhất cho 12, chia số thứ hai cho 8 thì thương thứ nhất hơn thương thứ hai là 4. Tìm hai số nguyên đó.

Ví dụ 2. Hiện nay con 14 tuổi và cha 44 tuổi. Hỏi bao nhiêu năm nữa thì tuổi con bằng $\frac{4}{5}$ tuổi cha?

Ví dụ 3. Có hai kho thóc, ở kho I gấp đối số thóc ở kho II. Nếu chuyển 30 tấn từ kho I sang kho II thì số thóc còn lại ở kho I bằng $\frac{8}{7}$ số thóc ở kho II. Hỏi lúc đầu mỗi kho có bao nhiêu thóc?

Ví dụ 4. Vụ trước hai đám ruộng thu hoặc được 18 tấn thóc. Vụ này nhờ chăm bón tốt nên sản lượng của đám ruộng I tăng thêm 10%, sản lượng của đám ruộng II tăng 12% nên cả hai đám thu được tổng cộng 20 tấn thóc. Hỏi vụ trước, mỗi đám ruộng thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc?

Ví dụ 5. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng hai chữ số của nó là 11. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì được một số mới hơn số cũ là 45.

Dạng 2: TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

- Trong toán chuyển động có ba đại lượng s: quãng đường, v: vận tốc, t: thời gian, liên hệ với nhau theo công thức:
$$s=v\cdot t; v=\frac{s}{t}; t=\frac{s}{v}.$$
- Nếu vật chuyển động trong dòng chảy thì
  - Vận tốc xuôi = Vận tốc riêng + vận tốc dòng nước.
  - Vận tốc ngược = Vận tốc riêng - Vận tốc dòng nước.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Một ô tô chạy từ A đến B với vận tốc 50 km/h. Khi từ B về A xe chạy với vận tốc 60 km/h. Biết thời gian đi nhiều hơn thời gian về là 30 phút. Tính quãng đường AB.

Ví dụ 2. Từ A đến B, đường thuy dài hơn đường bộ là 10 km. Một tàu thủy chạy từ A đến B hết 4 giờ trong khi đó một ô tô chạy hết 2 giờ 30 phút. Tính vận tốc tàu thủy, biết vận tốc của nó nhỏ hơn vận tốc ô tô là 20 km/h.

Ví dụ 3. Từ A đến B gồm một đoạn đường nhựa rồi đến một đoạn đường đất. Đoạn đường nhựa dài hơn đoạn đường đất là 25 km. Một xe máy đi từ A đến B với vận tốc 45 km/h trên đoạn đường nhựa và vận tốc 30 km/h trên đoạn đường đất. Biết thời gian đi trên đoạn đường nhựa nhiều hơn đi trên đoạn đường đất là 20 phút. Hỏi xe máy đi từ A đến B hết bao lâu?

Ví dụ 4. Một ô tô dự định chạy từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 80 km/h thì đến sớm được 1 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 48 km/h thì đến muộn 1 giờ. Tính thời gian dự định và quãng đường AB.

Ví dụ 5. Một sà lan xuôi dòng từ bến A đến bến B và đỗ lại trong 2 giờ để bốc dỡ hàng sau đó quay về bến A. Thời gian đi và về (kể cà thời gian bốc dỡ) hết 5 giờ 30 phút. Biết sã lan chạy với vận tốc không đổi là 21 km/h, vận tốc dòng nước là 3 km/h. Tính khoách cách giữa hai bến A và B.

Dạng 3: TOÁN CÔNG VIỆC LIÊN QUAN ĐẾN NĂNG SUẤT VÀ THỜI GIAN

Phương pháp giải

Trong loại toán này có ba đại lượng, liên hệ với nhau theo các công thức:

- Khối lượng công việc = năng suất × thời gian.
- Năng suất = $\dfrac{\text{Khối lượng công việc}}{\text{Thời gian}}$.
- Thời gian = $\dfrac{\text{Khối lượng công việc}}{\text{Năng suất}}$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Một đội thủy lợi, theo kết hoạch phải đào đắp một con đường mương trong 24 ngày. Nhưng do mỗi ngày đã đào đắp vượt mức 6m^3 nên đã hoàn thành kế hoạch sớm được 3 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày đội đó phải đào đắp bao nhiêu mét khối đất?

Ví dụ 2. Một phân xưởng xay thóc, theo kế hoạch phải xay xát 1000 tấn thóc trong 40 ngày. Nhưng do mỗi ngày phân xưởng này đã xay xát vượt mức 5 tấn nên chẳng những hoàn thành kế hoạch trước thời hạn mà còn xay xát vượt mức 20 tấn nữa. Hỏi phân xưởng đã hoàn thành kế hoạch trước thời hạn bao nhiêu ngày?

Ví dụ 3. Một phân xưởng may xuất khẩu, theo kế hoạch mỗi ngày may được 150 chiếc áo. Nhưng nhờ cải tiến kĩ thuật, mỗi ngay đã may được 180 chiếc áo nên chẳng những hoàn thành kế hoạch sớm được 2 ngày mà còn vượt mức 40 chiếc áo nữa. Tính số áo phải may theo kế hoạch.

Dạng 4: TOÁN VỀ CÔNG VIỆC LÀM CHUNG, LÀM RIÊNG

Phương pháp giải

Loại toán này có ba đại lượng:

- Khối lượng công việc: thường coi là 1 đơn vị.

- Năng suất = $\dfrac{1}{\text{Thời gian}}$.
- Thời gian thường được chọn làm ẩn số.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Hai tốp thợ cùng làm một công việc thì sau 8 ngày sẽ xong. Họ làm chung với nhau được 2 ngày thì tốp thứ hai nghỉ, tốp thứ nhất tiếp tục làm nốt thì phải 15 ngày nữa mới xong. Hỏi nếu tốp thứ nhất làm một mình thì sau bao lâu mới xong công việc đó?

Ví dụ 2. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể sau 6 giờ thì đầy. Nếu mở vòi I trong 4 giờ và mở vòi II trong 7 giờ thì đầy được $\dfrac{5}{6}$ bể. Hỏi mỗi vòi nếu chảy một mình thì mất bao lâu mới đầy bể?

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Một tổ học sinh nhận phần thưởng là một số quyển vở. Nếu chia một người 4 quyển thì còn thừa 5 quyển. Nếu chia mỗi người 5 quyển thì lại thiếu 4 quyển. Hỏi tổ đó có bao nhiêu học sinh?

Bài 2. Có hai kho hàng, kho A chứa 150 tấn, kho B chứa 100 tấn. Sau khi chuyển thêm vào kho B một số hang gấp hai lần số hàng chuyển vào kho A thì số hàng ở kho A bằng $\dfrac{6}{7}$ số hàng ở kho B. Tính số hàng đã chuyển thêm vào một kho.

Bài 3. Năm ngoái tổng số công nhân của hai phân xưởng là 270 người. Năm nay số công nhân của phân xưởng I tăng 5%, số công nhân của phân xưởng II tăng 6% nên tổng số công nhân của hai phân xưởng là 285 người. Hỏi năm nay mỗi phân xưởng có bao nhiêu công nhân?

Bài 4. Tìm một số tự nhiên biết rằng nếu thêm chữ số 7 vào bên phải số đó thì được một số lớn hơn số đó là 124 đơn vị.

Bài 5. Quãng đường AB dài 185 km. Lúc 6 giờ, một ô tô chạy từ A về B với vận tốc 45 km/h. Đến 6 h 20 phút một ô tô thứ hai chạy từ B về A với vận tốc 40 km/h. Hỏi hai xe gặp nhau lúc mấy giờ?

Bài 6. Một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B mất 4 giờ và ngược dòng từ B về A mất 5 giờ. Biết vận tốc riêng của ca nô luôn không đổi là 18 km/h. Tính vận tốc dòng nước.

Bài 7. Một đội công nhân sửa đường theo kế hoạch phải sửa xong một đoạn đường trong một thời gian nhất định với năng suất 120 m/ngày. Sau khi sửa được một nửa đoạn đường đó, đội được bổ sung thêm người nên mỗi ngày sửa thêm được 80 m đường, do đó đội đã được hoàn thành kế hoạch sớm 3 ngày. Hỏi theo kế hoạch đội phải sửa dài bao nhiêu?

Chủ đề 6: ÔN TẬP CHƯƠNG III

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình dạng $ax+b=0$ với a và B là hai số đã cho, $a \neq 0$.

2. Hai quy tắc biến đối tương đương phương trình: Quy rắc chuyển vế và quy tắc nhân với một số khác 0.

3. Phương trình bậc nhất một ẩn $ax+b=0$ luôn có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{b}{a}$.

4. Phương trình đưa được về dạng $ax+b$ gồm các bước:

   - Quy đồng mẫu ở hai vế và khử mẫu.
   - Bỏ dấu ngoặc.
   - Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang một vế, các hằng số sang vế kia.
   - Thu gọn và giải phương trình nhận được.

5. Phương trình tích

$$A(x)\cdot B(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x)=0 \\ B(x)=0. \end{array}\right.$$

6. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

   - Tìm ĐKXĐ của phương trình.
   - Quy đồng mẫu ở hai vế rồi khử mẫu.
   - Giải phương trình vừa nhận được.
   - Kết luận.

7. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

   - Lập phương trình.
   - Giải phương trình.
   - Trả lời.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

• Nếu phương trình có dạng $ax+b=0$ thì nghiệm là $x=-\dfrac{b}{a}$ $(a \neq 0)$.

• Nếu phương trình chưa có dạng $ax+b=0$ thì đưa về dạng $ax+b=0$ bằng cách:

- Tìm ĐKXĐ của phương trình (nếu phương trình có chứa ẩn ở mẫu).
- Quy đồng mẫu ở hai vế rồi khử mẫu.
- Giải phương trình vừa nhận được (nếu cần thì giải phương trình tích).
- Kết luận.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a) $x^2 - 9 = 2(x+3)$.

b) $(x-1)(3x+10) = x^3 - x^2$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình

a) $\dfrac{5x-8}{7} - \dfrac{3(2x+1)}{14} = \dfrac{4x-5}{21} - \dfrac{3}{2}$.

b) $\dfrac{(2x+1)^2}{6} - \dfrac{(x-3)^2}{10} = \dfrac{29x^2-22}{30} - \dfrac{x(6x-19)}{15}$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình

a) $\dfrac{x-2}{x-5} + \dfrac{x+13}{x^2-25} = 1$.

b) $\dfrac{3x+2}{x+4} + \dfrac{2x+1}{x-2} = 5 - \dfrac{x-32}{x^2+2x-8}$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình

a) $\dfrac{10-x}{51} + \dfrac{9-x}{52} + \dfrac{8-x}{53} + 3 = 0$.

b) $\dfrac{2x+5}{195} + \dfrac{2x+7}{197} = \dfrac{2x}{95}$.

Ví dụ 5. Cho phương trình: $\dfrac{x+2m}{x+3} + \dfrac{x-m}{x-3} = \dfrac{mx(x+1)}{x^2-9}$ (1). Giải phương trình trong các trường hợp sau:

a) $m = 1$. b) $m = 2$. c) $m = \dfrac{8}{5}$.

Dạng 2: TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN ĐỂ GIÁ TRỊ CỦA HAI BIỂU THỨC CÓ MỐI LIÊN QUAN NÀO ĐÓ

Phương pháp giải

Từ mối liên quan giữa giá trị của hai biểu thức, ta lập một phương trình rồi giải phương trình này.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho biểu thức $A = x - \dfrac{x-3}{8}$ và $B = 3 + \dfrac{x-3}{12}$, với giá trị nào của x thì hai biểu thức A và B có giá trị bằng nhau?

Ví dụ 2. Cho ba biểu thức $A = \dfrac{x-1}{x+1}$; $B = \dfrac{x+1}{x-1}$; $C = \dfrac{1}{x^2-1}$ với giá trị nào của x thì $A - B = 4C$? ĐKXĐ : $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow (x-1)^2 - (x+1)^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = 4 \\
&\Leftrightarrow -4x = 4 \\
&\Leftrightarrow x = -1 (\text{không thỏa mãn ĐKXĐ}).
\end{aligned}$$

Vậy không có giá trị nào của x để $A - B = 4C$.

Dạng 3: BIẾT PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ m CÓ MỘT NGHIỆM LÀ $x = x_0$. TÌM CÁC NGHIỆM CÒN LẠI

Phương pháp giải

• Thay $x = x_0$ vào phương trình đã cho rồi giải phương trình để tìm giá trị của tham số m.

• Thay giá trị vừa tìm được của m vào phương trình đã cho rồi giải phương trình để tìm tất cả các nghiệm.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho phương trình $\dfrac{x+m}{x+1}+\dfrac{x-2}{2x}=2$. Biết phương trình có một nghiệm $x=1$, tìm các nghiệm còn lại.

Dạng 4: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải

Gồm ba bước :

- Lập phương trình.
- Giải phương trình.
- Trả lời.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hơn con 30 tuổi. Trước đây 3 năm thì tuổi con bằng $\dfrac{2}{7}$ tuổi cha. Tính tuổi con, tuổi cha hiện nay.

Ví dụ 2. Hai cây dừa có tất cả 100 trái. Sau khi hái 25 trái ở cây thứ nhất thì số trái còn lại ở cây này bằng $\dfrac{2}{3}$ số trái ở cây thứ hai. Hỏi lúc đầu mỗi cây có bao nhiêu trái?

Ví dụ 3. Lúc 9 giờ sáng một người đi xe máy từ A đến B và trước đó 15 phút một người đi xe đạp xuất phát từ điểm chính giữa quãng đường AB đến B. Biết vận tốc xe máy là 50 km/h, vận tốc xe đạp là 20 km/h và cả hai người đến B cùng một lúc. Hỏi họ đến B lúc mấy giờ?

Ví dụ 4. Theo kế hoặc một máy bơm loại nhỏ phải bơm nước ruộng trong 12 giờ. Nhưng do thay máy bơm nhỏ bằng máy bơm lớn, mỗi giờ bơm được nhiều hơn 5m^3 nên chẳng những chỉ 9 giờ đã bơm xong mà còn vượt mức 3m^3 nữa. Hỏi theo kế hoạch phải bơm vào ruộng bao nhiêu mét khối nước?

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Cho các phương trình

$$2x-4=0 \tag{3.1}$$

$$3x^2-7x+2=0 \tag{3.2}$$

Hai phương trình này có tương đương với nhau không nếu:

a) Xét trên tập hợp $\mathbb{N}$.

b) Xét trên tập hợp $\mathbb{Q}$.

Bài 9. Cho hai biểu thức $A = 3 - \dfrac{2x-1}{3}$ và $B = \dfrac{x}{2} - \dfrac{13x-8}{6}$ với giá trị nào của x thì hai biểu thức này có cùng một giá trị?

Bài 10. Giải phương trình: $\dfrac{2x+1}{2x-2} - \dfrac{2x-1}{2x+2} = 1 - \dfrac{3}{x^2-1}$. (1)

Bài 11. Giải phương trình: $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x+4}$. (2)

Bài 12. Cho phương trình: $\dfrac{2a}{x-a} - \dfrac{x}{x+a} = \dfrac{2a^2+8}{x^2-a^2}$. (3)
Giải phương trình này trong các trường hợp:

a) $a = 2$.

b) $a = 3$.

Bài 13. Một người đi từ nhà đến cơ quan bằng xe đạp thì mất 40 phút, nếu đi bằng xe máy thì chỉ mất 15 phút. Biết vận tốc xe đạp nhỏ hơn vận tốc xe máy là 30 km/h. Tính quãng đường từ nhà tới cơ quan.

Bài 14. Hai công nhân làm việc, người thứ nhất mỗi giờ được 40 sản phẩm, người thứ hai mỗi giờ được 50 sản phẩm. Biết người thứ nhất làm nhiều hơn người thứ hai là 2 giờ và số sản phẩm hai người làm được bằng nhau. Tính tổng số sản phẩm cả hai người đã làm.

LÊ TRIỆU BÁ VƯƠNG

VÕ TẤN ĐẠT

CAO TỚI

NGUYỄN THÀNH SƠN

TUẤN NGUYỄN

NGUYỄN QUANG HIỆP

TRỊNH VĂN LUÂN

BÙI QUỐC HOÀN

THÀNH LÊ

THẦY HÓA

HỒ NHƯ VƯƠNG

BÙI TIẾN MẠNH

HỨA ĐỨC SINH

ĐẶNG ĐỨC QUÝ

ĐÀM THANH PHƯƠNG

TRẦN TRỌNG TIẾN

THANH QUÂN

Chương 4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chủ đề 1: LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. BẤT ĐẲNG THỨC

Ta gọi hệ thức dạng $a < b$ (hay $a > b$; $a \le b$; $a \ge b$) là bất đẳng thức.

II. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG

Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức ta được bất đẳng thức mới cùng chiều bất đẳng thức đã cho.

$$a \le b \quad \Leftrightarrow \quad a + c \le b + c$$

$$a \ge b \quad \Leftrightarrow \quad a + c \le b + c$$

III. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN

- Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

- Khi nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

$$a \le b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot c \le b \cdot c \text{ nếu } c > 0$$

$$a \ge b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot c \le b \cdot c \text{ nếu } c < 0$$

IV. TÍNH CHẤT BẮC CẦU CỦA THỨ TỰ

Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: XÁC ĐỊNH TÍNH ĐÚNG SAI CỦA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

- Vận dụng thứ tự tập hợp số.
- Vận dụng liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, phép nhân.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Mỗi bất đẳng thức sau đúng hay sai?

a) $5+(-8)<1$; b) $(-2)\cdot(-7)>(-5)\cdot(-3)$.

Ví dụ 2. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) $(-7)^2-9\le(-10)\cdot(-4)$; b) Thương của 15 và -6 nhỏ hơn thương của (-12) và 4.

Ví dụ 3. Mỗi bất đẳng thức sau đúng hay sai? Giải thích.

a) $x^2+3\ge3$; b) $-x^2+1\le1$; c) $-(x+2)^2-5\le-5$.

Dạng 2: SO SÁNH HAI SỐ

Vận dụng liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, phép nhân.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $a<b$, hãy so sánh:

a) $a-3$ và $b-3$; b) $-5a+1$ và $-5b+1$.

Ví dụ 2. Cho số a bất kì, hãy so sánh:

a) a và $a-4$; b) $a-7$ và $a+5$.

Ví dụ 3. Cho số m bất kì, hãy so sánh m^2 và m.

Dạng 3: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

- **Cách 1.** Để chứng minh $A>B$ ta chứng minh $A-B>0$. Để chứng minh $A<B$ ta chứng minh $A-B<0$.
- **Cách 2.** Dùng phương pháp biến đổi tương đương
$$A>B\Leftrightarrow C>D\Leftrightarrow\cdots M>N.$$
Nếu $M>N$ đúng thì $A>B$ đúng.
- **Cách 3.** Dùng các tính chất của bất đẳng thức.
Từ bất đẳng thức đã biết, ta dùng các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức phải chứng minh.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Ví dụ 2. Cho $a > 0$; $b > 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

Ví dụ 3. Cho $a > b$ và $m > n$. Chứng minh rằng $a + m > b + n$.

Ví dụ 4. Cho a, b, $c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6.$$

Dạng 4: ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

- Nếu $f(x) \geq k$ (k là hằng số) và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = a$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là k khi và chỉ khi $x = a$.
  Ta viết $\min f(x) = k$ khi và chỉ khi $x = a$.
- Nếu $f(x) \leq k$ (k là hằng số) và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = a$ thì giá trị lớn nhất của $f(x)$ là k khi và chỉ khi $x = a$.
  Ta viết $\max f(x) = k$ khi và chỉ khi $x = a$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 - 6x + 10$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = 5x^2 - 10x + 3$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = -x^2 + 5x - 4$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $D = 5 - x - \dfrac{1}{x}$ với $x > 0$.

Ví dụ 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = 2x^2 + 8x + y^2 - 10y + 43$.

Ví dụ 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \dfrac{2x-1}{x^2+2}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. So sánh $2m$ và m.

Bài 2. Cho $a + 3 > b + 3$. Chứng minh rằng $-2a + 1 < -2b + 1$.

Bài 3. Cho $x > 0$ và $y < 0$. Chứng minh rằng $x^2y - xy^2 < 0$.

Bài 4. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $a < \dfrac{a+b+c}{2}$.

Bài 5. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $ab < \dfrac{(a+b)^2}{4}$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$.

Bài 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = 2x^2 + 28x + 101$;

b) $B = \dfrac{(x+1)^2}{x}$ với $x > 0$.

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

a) $C = -x^2 + 5x$;

b) $D = 2(1-x)(2x-1)$.

Chủ đề 2: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH ẨN x

Bất phương trình ẩn x có dạng $f(x)<g(x)$ hay $f(x)>g(x)$, $f(x)\le g(x)$, $f(x)\ge g(x)$ trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các biểu thức của cùng biến x.

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng $\acute{c}+b<0$ (hay $ax+b>0$; $ax+b\le 0$; $ax+b\ge b$) trong đó a và b là hai số đã cho $a\ne 0$.

III. TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Tập nghiệm của bất phương trình là tập hợp tất cả các giá trị của ẩn để khi thay vào phương trình ta được bất đẳng thức đúng.

Hai bất phương trình có cùng một tập nghiệm gọi là hai bất phương trình tương đương.

IV. HAI QUY TẮC BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯỜNG BẤT PHƯƠNG TRÌNH

a) *Quy tắc chuyển vế*: Khi chuyển một hạng tử của một bất phương trình từ vế này sang vế kia ta phải đổi dấu hạng tử đó.

b) *Quy tắc nhân với một số*: Khi nhân hai vế của một bất phương trình với cùng một số khác 0 ta phải

- Giữ nguyên chiều của bất phương trình nếu số đó dương.
- Đổi chiều của bất phương trình nếu số đó âm.

c) Giải bất phương trình dạng $ax+b<0$

$$ax+b<0 \Leftrightarrow ax<-b.$$

- Nếu $a>0$ thì $x<\dfrac{-b}{a}$;
- Nếu $a<0$ thì $x>\dfrac{-b}{a}$.

d) *Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình*

Trên trục số, khoảng nào không phải là nghiệm thì gạch bỏ, khoảng nào là nghiệm thì giữ lại.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Kiểm tra giá trị $x = a$ có phải là nghiệm của bất phương trình không?

Thay $a = x$ vào hai vế của bất phương trình rồi tính giá trị của hai vế.

- Nếu được một bất đẳng thức đúng thì $x = a$ là một nghiệm.
- Nếu được một bất đẳng thức sai thì $x = a$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Kiểm tra xem $x = -5$ có phải là nghiệm của các bất phương trình sau không?

a) $2x + 7 < 1 - 3x$; b) $x^2 > 5 - 4x$.

Ví dụ 2. Cho tập hợp $M = \{-5; -4; \ldots; -1; 0; 1; \ldots; 5\}$. Hãy cho biết những phần tử nào của tập M là nghiệm của bất phương trình

a) $|x| < 2$; b) $|x| > 3$; c) $|x - 4| \le 5$.

Ví dụ 3. Cho tập $A = \{0; \pm1; \pm2; \pm3\}$. Hãy cho biết những phần tử nào của tập hợp A vừa là nghiệm của bất phương trình (1), vừa là nghiệm của bất phương trình (2) dưới đây:

$$x^2 < 9 \quad (1) \quad 2x + 3 > 1 \quad (2)$$

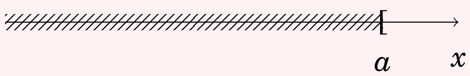
Dạng 2: Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình trên trục số

- $\{x \mid x < a\}$

- $\{x \mid x > a\}$

- $\{x \mid x \le a\}$

- $\{x \mid x \ge a\}$



VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Biểu diễn tập nghiệm của các bất phương trình sau trên trục số

a) $a < 2$; b) $x \ge 3$.

Ví dụ 2. Cho hình vẽ sau

Hình vẽ biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây:

$$x + 1 < 3 \qquad (1)$$

$$-3x \leq 15 \tag{2}$$

Ví dụ 3. Quan sát hình vẽ sau

- Bạn An khẳng định: Hình vẽ này biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình $x > -1$.
- Bạn Bích khẳng định: Hình vẽ này biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình $x \leq 2$.
- Bạn Chi khẳng định: Hình vẽ này biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình $-1 \leq x \leq 2$.

Theo em, bạn nào đúng?

Dạng 3: Lập bất phương trình của bài toán

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
- Lập bất phương trình biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Lập bất phương trình của bài toán sau: Quãng đường AB dài 150 km. Một ô tô phải chạy từ A đến B trong thời gian không quá 3 giờ. Hỏi ô tô phải chạy với vận tốc nào?

Ví dụ 2. Năm nay ông 69 tuổi, cháu 9 tuổi. Hỏi sau bao nhiêu năm nữa thì tỉ số giữa tuổi ông và tuổi cháu nhỏ hơn 5.

Dạng 4: Giải thích sự tương đương của hai bất phương trình

- *Cách 1*: Kiểm tra xem hai bất phương trình có cùng một tập nghiệm hay không?
- *Cách 2*: Vận dụng quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân với số khác 0 để biến đổi bất phương trình này thành bất phương trình kia.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1. Cho hai bất phương trình

$$2x + 5 > 11 \text{ và } 3x > 9.$$

Chứng tỏ rằng hai bất phương trình này tương đương.

Dạng 5: Giải bất phương trình

Vận dụng quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân đưa bất phương trình về dạng $ax < m$ (hay $ax > m$).

Từ bất phương trình $ax < m$, suy ra:

- Nếu $a = 0$ thì bất phương trình $0x < m$;
  – Có nghiệm là mọi x nếu $m > 0$;
  – Vô nghiệm với $m \leq 0$;
- Nếu $a > 0$ thì bất phương trình có nghiệm $x < \dfrac{m}{a}$;
- Nếu $a < 0$ thì bất phương trình có nghiệm $x > \dfrac{m}{a}$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{4x-1}{9} < \dfrac{5-3x}{6}$;

b) $\dfrac{2x-5}{18} < \dfrac{4x+3}{10}$.

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau

a) $\dfrac{5x+2}{5} < \dfrac{4x-3}{4}$;

b) $\dfrac{3(2x+1)}{20} + 1 < \dfrac{3x+13}{10}$.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm chung của hai bất phương trình:

$$\frac{3x+17}{10} > \frac{5x+22}{15} \text{ (1) và } \frac{x-4}{30} - 1 > \frac{2x-7}{24} \text{ (2)}$$

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên âm của bất phương trình

$$\frac{2x+4}{3} - \frac{4x-7}{18} > \frac{2x-5}{9} - \frac{2x-1}{15}.$$

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $\dfrac{3x-1}{x+3} > 2$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Bất phương trình $(x-4)^2 > x(x-12)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên âm?

Bài 2. Tìm số nguyên lớn nhất thỏa mãn mỗi bất phương trình sau

a) $9 - 5x > 1{,}5$;

b) $\dfrac{3x-17}{20} > \dfrac{5x+1}{15}$.

Bài 3. Tìm nghiệm nguyên chung của hai bất phương trình

a) $15x - 4 > 8$ và $7 - 6x > -20$;

b) $\dfrac{2}{3}x + 5 > 9$ và $\dfrac{x-18}{7} > 1$.

Bài 4. Tìm tập hợp các giá trị của x để biểu thức $\dfrac{3-2x}{5}$ lớn hơn giá trị của biểu thức $\dfrac{x-14}{10}$.

Bài 5. Cho phương trình $5x - 4 = 3m + 2$ (1) trong đó x là ẩn số, m là một số cho trước. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm dương.

Bài 6. Giải các bất phương trình sau

a) $\dfrac{3(2x+1)}{20} + 1 > \dfrac{3x+52}{10}$;

b) $\dfrac{4x-1}{2} + \dfrac{6x-19}{6} \leq \dfrac{9x-11}{3}$.

Bài 7. Giải bất phương trình $\dfrac{13x-1}{5x+4} > 3$.

Chủ đề 3: Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

A Trọng tâm kiến thức

I. Nhắc lại về giá trị tuyệt đối

$$|a| = a \quad \text{khi } a \geq 0$$
$$|a| = -a \quad \text{khi } a < 0.$$

II. Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Thực hiện các bước:

- Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối để bỏ dấu giá trị tuyệt đối theo định nghĩa.
- Giải phương trình thu được sau khi bỏ dấu giá trị tuyệt đối.
- Nhận xét nghiệm có thỏa mãn điều kiện đang xét hay không.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Giải phương trình $|A(x)| = k$ với k là hằng số $(k > 0)$

$$|A(x)| = k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} A(x) = k & (1) \\ A(x) = -k & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1) và (2) rồi lấy tất cả các nghiệm vừa tìm được.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải phương trình $|5x - 1| = 9$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $13 - |x + 10| = 4$.

Dạng 2: Giải phương trình $|A(x)| = |B(x)| \quad (*)$

$$|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} A(x) = B(x) & (1) \\ A(x) = -B(x) & (2) \end{array}\right.$$

Tập nghiệm của (*) là hợp tất cả các nghiệm của (1) và (2).

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải phương trình $\left|x^2 - 8x\right| = \left|x^2 + 8\right|$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $|4 - x| = |2x + 3|$.

Dạng 3: Giải phương trình $|A(x)| = B(x) \quad (*)$

- Xét trường hợp $A(x) \geq 0$, khi đó (*) trở thành $A(x) = B(x)$ (1).
  Giải (1) rồi đối chiếu với khoảng đang xét để chọn nghiệm thích hợp.
- Xét trường hợp $A(x) < 0$, khi đó (*) trở thành $-A(x) = B(x)$ (2).

Giải (2) rồi đối chiếu với khoảng đang xét để chọn nghiệm thích hợp.

- Kết luận: Nghiệm của (*) là tất cả các nghiệm thích hợp tìm được trong hai trường hợp trên.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải phương trình $|2x+5| = x+6 \quad (*)$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $|x-4| = 3x-2 \quad (*)$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $|5x-2| = 2x-3 \quad (*)$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $|4x-1| = 4x-1$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $|x^2-3x| = 3x-x^2$.

Dạng 4: Giải phương trình $|A(x)|+|B(x)| = C(x) \quad (*)$

- Xét từng khoảng thích hợp của x để bỏ cả hai dấu giá trị tuyệt đối.
- Giải phương trình ứng với mỗi khoảng của x để chọn nghiệm thích hợp.
- Kết luận: Tập nghiệm của phương trìn đã cho là tất cả các nghiệm thích hợp tìm được ở trên.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải phương trình $5|x+1|-|x-3| = x+12$ biết $-1 \le x \le 3$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $3|x-1|+2|x-4| = x+17$.

C Bài tập tự luyện

Bài 8. Giải các phương trình.

a) $|5x-7|+8 = 11$.

b) $\frac{1}{2}|x-9|-5 = -6$.

Bài 9. Giải các phương trình.

a) $|2x+1| = |x+11|$.

b) $|3x-1| = |x-3|$.

Bài 10. Giải các phương trình.

a) $|7x+3| = -x+5$.

b) $|3x-1|+2 = x$.

Bài 11. Giải các phương trình.

a) $|x-2|+|x-3| = 0$.

b) $|x-2|+|x-3| = 15$.

Bài 12. Chứng minh rằng phương trình
$$\left|x^2+mx+\frac{m^2}{4}\right| = x^2+mx+\frac{m^2}{4}$$
có nghiệm bất kì và không phụ thuộc vào giá trị của m.

Chủ đề 4: Ôn tập chương IV

A Trọng tâm kiến thức

- Bất đẳng thức và liên hệ giữa thứ tự và phép tính.
- Bất phương trình và hai quy tắc biến đổi tương đương bất phương trình.
- Giải bất phương trình.
- Giải phương trình chưa dấu giá trị tuyệt đối.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Chứng minh bất đẳng thức

Có thể xét hiệu hai vế, có thể biến đổi tương đương hoặc dùng các tính chất của bất đẳng thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y}$ với $x,\ y>0$.

Ví dụ 2. Chứng minh bất đẳng thức $3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$.

Ví dụ 3. Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\geq\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng $(ax+by)^2\leq(a^2+b^2)(x^2+y^2)$. Áp dụng: Cho $3x+4y=5$, chứng minh rằng $x^2+y^2\geq1$.

Dạng 2: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x)$

Ta chứng minh rằng $f(x)\geq k$ (hoặc $f(x)\leq k$) và chỉ rõ dấu đẳng thức xảy ra khi nào.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

a) $A=x^2-3x+2$.

b) $B=(x+y)^4-8(x+y)^2+17$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.

a) $C=-x^2+14x-70$.

b) $D=-x^4+2x^2+9$.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $F=3(5-x)(3x-7)$. Tìm giá trị lớn nhất của F.

Dạng 3: Giải bất phương trình

Vận dụng quy tắc chuyển vế và quy tắc nhân.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải bất phương trình rồi biểu diễn tập nghiệm của chúng lên trên trục số.

a) $\dfrac{x-5}{14}\leq\dfrac{3(1,5-2x)}{35}$.

b) $\dfrac{2x-5}{4}>\dfrac{x+1}{2}$.

Ví dụ 2. Cho bất phương trình $a^2x - ax > 3 - x$ (1).

a) Giải bất phương trình (1) khi $a = 2$.

b) Chứng minh rằng bất phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của a.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm chung của hai bất phương trình.

$$(x-5)^2 < x^2 + x + 3 \quad (1)$$

$$(x+1)(x-3) > x(x-4) \quad (2)$$

Ví dụ 4. Tìm nghiệm nguyên dương của bất phương trình $\dfrac{5x+1}{4} \le \dfrac{5x+9}{6}$.

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $\dfrac{x^2 - x + 5}{x^2 + x + 3} > 1$.

Dạng 4: Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối để bỏ dấu giá trị tuyệt đối đưa phương trình về dạng không còn dấu giá trị tuyệt đối.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải các phương trình.

a) $|93x + 13| = 80$.

b) $|-4x - 5| = 17$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình.

a) $|1000 - x| = x$.

b) $\left|\dfrac{1}{2}x - 3\right| + x - 12 = 0$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình.

a) $|3x - 7| = 3x - 7$.

b) $|9x - 45| = 45 - 9x$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $|x-2| - |x+2| = 2$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho biết trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào **sai**?

a) ☐ $x > 3$ và $x > 5$ viết gộp lại thành $x > 5$.

b) ☐ $x < 2$ và $x < 7$ viết gộp lại thành $x < 2$.

c) ☐ $x > 2$ và $x < 11$ viết gộp lại thành $2 < x < 11$.

d) ☐ $x > 2$ hoặc $x < -1$ viết gộp lại thành $2 < x < -1$.

Bài 2. Hai bất phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên chung.

$$\frac{1}{3}x - 2 \le 1 \quad \text{và} \quad 3(5-x) < -4{,}5.$$

Bài 3. Tìm giá trị của m để phương trình sau có nghiệm $x > -1$
$$\frac{x+m}{3} + \frac{x+1}{2} = 2.$$

Bài 4. Giải bất phương trình $\dfrac{3x+5}{x^2+1} \geq 1$.

Bài 5. Giải phương trình $|x-2| + 8 = 4x$.

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = \dfrac{4x-1}{x^2+3}$.

Phần II

HÌNH HỌC

LÊ TRIỆU BÁ VƯƠNG

VÕ TẤN ĐẠT

CAO TỚI

NGUYỄN THÀNH SƠN

TUẤN NGUYỄN

NGUYỄN QUANG HIỆP

TRỊNH VĂN LUÂN

BÙI QUỐC HOÀN

THÀNH LÊ

THẦY HÓA

HỒ NHƯ VƯƠNG

BÙI TIẾN MẠNH

HỨA ĐỨC SINH

ĐẶNG ĐỨC QUÝ

ĐÀM THANH PHƯƠNG

TRẦN TRỌNG TIẾN

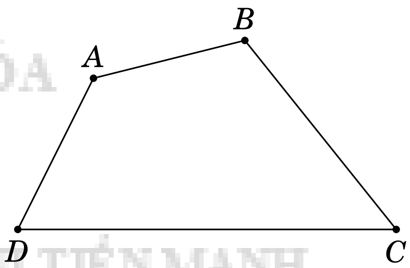
THANH QUÂN

Chương 1 TỨ GIÁC

Chủ đề 1: TỨ GIÁC

A Trọng tâm kiến thức

- Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác.
- Tứ giác lồi $ABCD$ có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ$.



B Các dạng bài tập và phương pháp giải

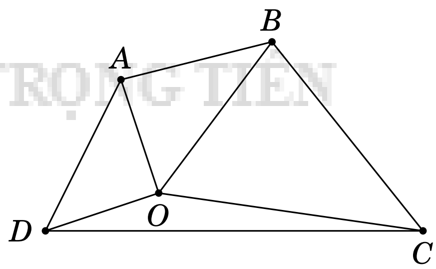
Dạng 1: Nhận dạng tứ giác

Dựa vào định nghĩa của tứ giác lồi.

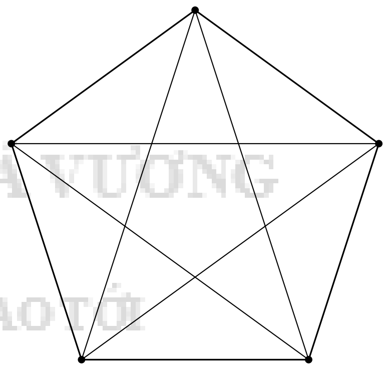
VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình bên,

hãy kể tên các tứ giác lồi và không lồi có trong hình vẽ.



Ví dụ 2. Trong hình bên dưới có bao nhiêu tứ giác lồi, là những tứ giác nào?

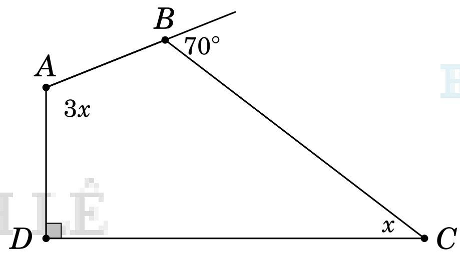


Dạng 2: Tính số đo góc

Vận dụng tính chất tổng các góc của tứ giác, của tam giác.

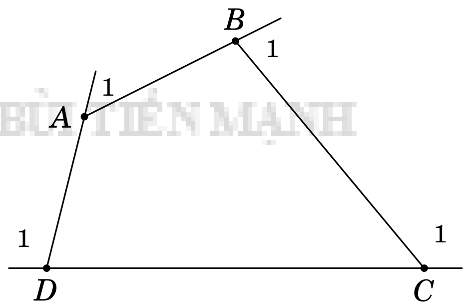
VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm số đo x trong hình bên dưới.



Ví dụ 2.

Chứng minh rằng tổng các góc ngoài của một tứ giác bằng 360° (mỗi đỉnh chỉ tính một góc ngoài).



Ví dụ 3. Ba góc ngoài tại ba đỉnh A, B, C của tứ giác $ABCD$ lần lượt là 40°, 70°, 120°. Tính số đo của góc trong tại đỉnh D.

Ví dụ 4. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A}+\widehat{B}=220^\circ$. Các tia phân giác của góc C và góc D cắt nhau tại O. Tính số đo của góc COD.

Dạng 3: Vẽ tứ giác biết 5 yếu tố

Vẽ tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của tứ giác. Sau đó vẽ đỉnh thứ tư thỏa mãn điều kiện hai yếu tố còn lại.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Vẽ tứ giác $ABCD$ biết $AB = 1{,}5$ cm, $AC = 3{,}5$ cm, $AD = 2$ cm, $CD = 4$ cm và $BD = 3$ cm.

Dạng 4: Chứng minh hệ thức giữa các độ dài, tính độ dài.

Vận dụng các định lí liên quan đến độ dài như bất đẳng thức tam giác, định lý Py-ta-go.

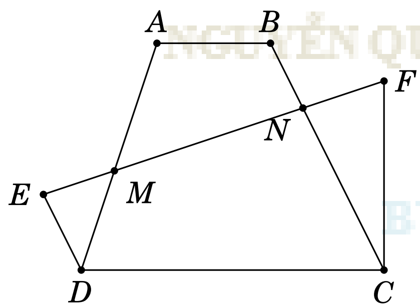
VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi của tứ giác đó.

Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$, hai đường chéo vuông góc tại O. Biết $BC = 15$ cm, $CD = 24$ cm và $AD = 20$ cm. Tính độ dài AB.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Trong hình bên dưới có bao nhiêu tứ giác, là những tứ giác nào?



Bài 2. Tổng số đo ba góc của một tứ giác hơn số đo của góc thứ tư là 220°. Tính số đo của góc thứ tư.

Bài 3. Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng hai góc ngoài tại hai đỉnh bằng tổng hai góc trong tại các đỉnh còn lại.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$. Các tia phân giác của góc A và góc B cắt nhau tại M. Các tia phân giác góc C và D cắt nhau tại N. Chứng minh rằng $\widehat{AMB} + \widehat{CND} = 180^\circ$.

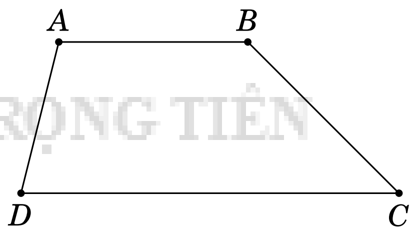
Bài 5. Tứ giác $ABCD$ có $AC = a$, $BD = b$. Gọi M là một điểm nằm trong tứ giác. Hỏi tổng các khoảng cách từ M đến bốn đỉnh A, B, C, D có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

Chủ đề 2: HÌNH THANG. HÌNH THANG CÂN

A Trọng tâm kiến thức

1.

Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song. Hai cạnh song song gọi là hai cạnh đáy, hai cạnh còn lại gọi là hai cạnh bên.

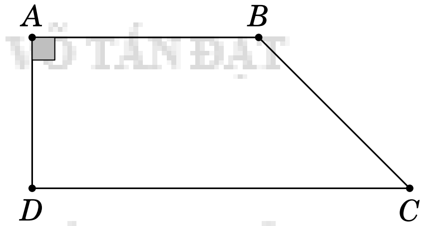


2. Nhận xét.

- Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.

- Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

3. Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.

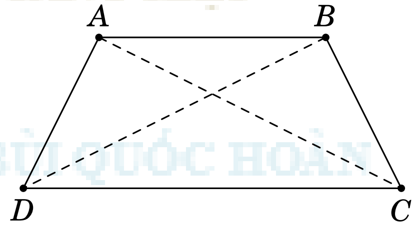


4. Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

5. Tính chất của hình thang cân

Trong hình thang cân

- Hai cạnh bên bằng nhau $AD = BC$.
- Hai đường chéo bằng nhau $AC = BD$.
- Hai góc đối bù nhau $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$.



6. Dấu hiệu nhận biết hình thang cân

- Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

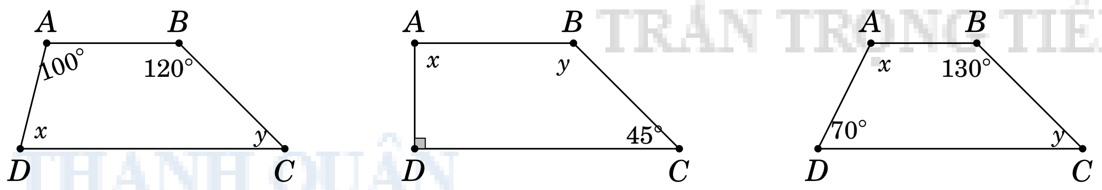
B Các dạng bài tập và phương pháp giải toán

Dạng 1: Tính số đo góc

- Vận dụng các tính chất về góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song.
- Vận dụng tính chất trong hình thang cân: hai góc kề một đáy bằng nhau, hai góc đối bù nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Tìm số đo x và y trong các hình vẽ sau



Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Biết $\widehat{B} - \widehat{C} = 40^\circ$, $\widehat{C} - \widehat{D} = 20^\circ$. Tính các góc của hình thang.

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ vuông góc tại A và D. Biết $AD = 2$ cm, $BC = 4$ cm. Tính số đo góc B và C.

Ví dụ 4. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $\widehat{A} = 120^\circ$. Tính số đo các góc còn lại.

Dạng 2: Chứng minh hai góc bằng nhau, hai đoạn thẳng bằng nhau

- Có thể vận dụng các tính chất của hình thang cân: các góc kề một đáy bằng nhau, các cạnh bên bằng nhau, các đường chéo bằng nhau.
- Có thể vận dụng tam giác cân: hai cạnh bên bằng nhau, hai góc ở đáy bằng nhau.
- Có thể chứng minh hai tam giác bằng nhau để suy ra, các góc tương ứng bằng nhau, các cạnh tương ứng bằng nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = \widehat{DBC}$.

Ví dụ 2. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Hai đường chéo cắt nhau tại O. Biết $\widehat{COD} = 60^\circ$. Chứng minh rằng hình thang này có mỗi đường chéo bằng tổng hai đáy.

Ví dụ 3. Cho hình thang cân $ABCD$, đáy nhỏ AB. Vẽ $AH \perp CD$. Chứng minh rằng $DH = \dfrac{CD - AB}{2}$.

Dạng 3: Nhận biết hình thang, hình thanng cân

- Dựa vào định nghĩa của hình thang, hình thang cân.
- Dựa vào dấu hiệu
  - Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.
  - Hình thang có hai góc đối bù nhau là hình thang cân.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C}$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thang.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M, trên tia đối của tia AC lấy điểm N sao cho $AM = AN$. Chứng minh rằng tứ giác $MNBC$ là hình thang cân.

Ví dụ 3. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B}$, $\widehat{C} = \widehat{D}$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

Dạng 4: Tính độ dài đoạn thẳng

Có thể vẽ thêm đường cao, rồi dùng phương pháp tứ giác bằng nhau hoặc định lí Py-ta-go.

VÍ DỤ MINH HỌA

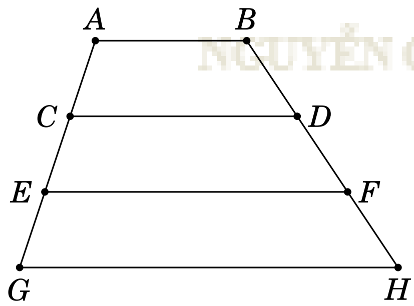
Ví dụ 1. Hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = 10$ cm, đáy lớn $CD = 20$ cm và đường cao $AH = 12$ cm. Tính độ dài cạnh bên.

Ví dụ 2. Cho hình thang cân $ABCD$, đáy nhỏ AB, đường cao $AH = 2$. Biết $HC = 3{,}5$ và $HD = 1{,}5$. Tính chu vi của hình thang cân này.

Ví dụ 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Biết $AB = 2$, $CD = 5$. Tính độ dài AD.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Hình bên dưới có $AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH$. Hỏi trong hình đó có tất cả bao nhiêu hình thang?



Bài 2. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{C}$, $\widehat{A} = 3\widehat{D}$, $\widehat{D} = 45^\circ$. Hãy cho biết dạng của tứ giác $ABCD$.

Bài 3. Cho hình thang cân $ABCD$, đáy nhỏ AB. Các đường thẳng chứa hai cạnh bên cắt nhau tại O. Chứng minh rằng $OA = OB$.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A. Điểm O nằm trong tam giác đó. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $OD \parallel BC$, $OE \parallel AC$. Chứng minh rằng tứ giác $DOEB$ là hình thang cân.

Bài 5. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = BC$ và $BC \perp BD$.

a) Chứng minh rằng $AC \perp AD$.

b) Tính số đo các góc của hình thang.

c) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng điểm O cách đều hai cạnh bên và đáy lớn.

Chủ đề 3: ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG

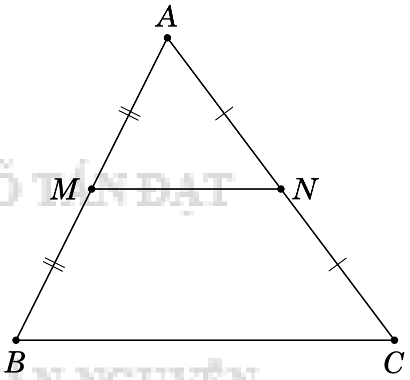
A Trọng tâm kiến thức

1. **Đường trung bình của tam giác** là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

2. **Định lí 1.** *Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.*

3.

Định lí 2. *Đường trung bình của tam giác song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy. MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ suy ra* $\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN = \dfrac{1}{2}BC \end{cases}$.



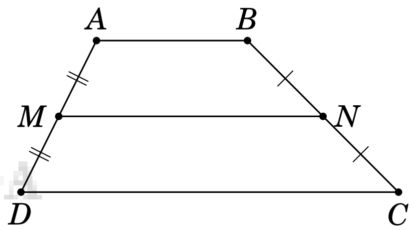
4. Đường trung bình của hình thang là đoạn nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.

5. Định lí 3. *Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai.*

6.

Định lí 4. *Đường trung bình của hình thang song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy. MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ ta có*

$$\begin{cases} MN \parallel AB \parallel CD \\ MN = \dfrac{AB+CD}{2} \end{cases}.$$



B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng và chứng minh các quan hệ về độ dài

Vận dụng các định lí 1, 2, 3, 4 về đường trung bình của tam giác, của hình thang.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 5$, $BC = 13$. Qua trung điểm M của AB, vẽ một đường thẳng song song với AC cắt BC tại N. Tính độ dài MN.

Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = a$, $CD = b$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng $EF \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Nhận xét. Để có thể vận dụng được định lí về đường trung bình của tam giác, nhiều khi phải vẽ thêm trung điểm một cạnh của tam giác.

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = 2$, $CD = 5$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Đoạn thẳng MN cắt BD tại E, cắt AC tại F. Tính độ dài EF.

Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết rằng $DE + EF + FC = a$. Tính chu vi của hình thang $ABCD$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AD. Gọi M là một điểm trên cạnh AC sao cho $AM = \frac{1}{2}MC$. Gọi O là giao điểm của BM và AD. Chứng minh rằng

a) O là trung điểm của AD.

b) $OM = \frac{1}{4}BM$.

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng song song. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

- Có thể dùng tính chất đường trung bình của tam giác, của hình thang để chứng minh hai đường thẳng song song.
- Có thể dùng tiên đề Ơ-clit để chứng minh ba điểm thẳng hàng.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của BM và CN. Chứng minh rằng $MN \parallel PQ$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Gọi D và E lần lượt là trung điểm của GB và GC. Chứng minh rằng

a) $MN \parallel DE$.

b) $ND \parallel ME$.

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD và AC. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). có $CD > AD + BC$. Các đường phân giác của góc A và góc D cắt nhau tại E. Các đường phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại F. Chứng minh rằng $EF \parallel AB$.

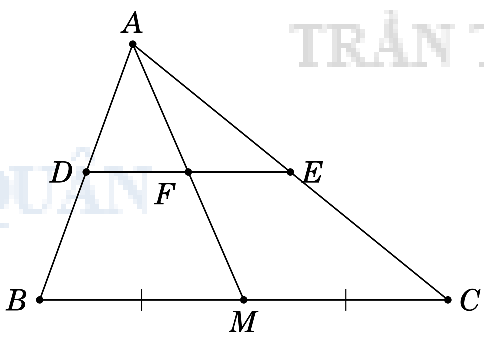
BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC và AM. Chứng minh rằng

a) Ba điểm D, E, F thẳng hàng.

b) F là trung điểm của DE.

Bài 2. Trong hình bên dưới có $DE \parallel FH \parallel BC$. Hãy tìm các độ dài x và y.



Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = \frac{1}{2}CD$. Gọi M, N lần lượy là trung điểm của AD và BC. Đoạn thẳng MN cắt BD tại P, cắt AC tại Q. Chứng minh rằng $MP = PQ = QN$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của HA và HC. Chứng minh rằng $BM \perp AN$.

Bài 5. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Qua trung điểm O của AM, vẽ đường thẳng xy sao cho B và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ xy. Gọi A', B' và C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên xy. Chứng minh rằng

$$AA' = \frac{BB' + CC'}{2}.$$

Chủ đề 4: DỰNG HÌNH BẰNG THƯỚC VÀ COMPA. DỰNG HÌNH THANG

A Trọng tâm kiến thức

1. Bài toán vẽ hình mà chỉ sử dụng hai dụng cụ là thước và compa là bài toán dựng hình.

2. Các bài toán dựng hình đã biết là

(a) Dựng đoạn thẳng bằng đoạn thẳng cho trước.

(b) Dựng một góc bằng một góc cho trước.

(c) Dựng trung trực của đoạn thẳng cho trước, dựng trung điểm của một đoạn thẳng cho trước.

(d) Dựng tia phân giác của một góc cho trước.

(e) Qua một điểm cho trước, dựng đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

(f) Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước, dựng đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

(g) Dựng tam giác trong các trường hợp (c.c.c), (c.g.c) và (g.c.g).

3. Bài toán dựng hình gồm có bốn bước

- Phân tích.
- Cách dựng.
- Chứng minh.
- Biện luận.

4. Số yếu tố cần thiết để dựng một hình

(a) Dựng tứ giác cần biết trước 5 yếu tố (cạnh, góc, đường chéo) trong đó số góc cho trước không quá ba.

(b) Dựng hình thang cần biết trước 4 yếu tố, trong đó số góc cho trước không quá hai.

(c) Dựng hình thang cân cần biết trước 3 yếu tố, trong đó số góc cho trước không quá một.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Dựng tứ giác

- Dựng tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của tứ giác.
- Dựng đỉnh thứ tư thỏa mãn hai yếu tố còn lại.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Dựng tứ giác $ABCD$ biết $AB = 2{,}5$, $BC = 3$, $AD = 2$ và $BD = 4$.

Ví dụ 2. Dựng tứ giác $ABCD$ biết $BC = 3{,}5$, $CD = 5$, $AD = 2{,}5$, $AC = 5$, $BD = 4$.

Ví dụ 3. Dựng tứ giác $ABCD$ biết $BC = 2$, $CD = 4{,}5$, $AD = 2{,}5$, $\widehat{D} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 50^\circ$.

Dạng 2: Dựng hình thang

- Dựng tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của hình thang.
- Dựng đỉnh thứ tư thỏa mãn hai điều kiện trong đó có một điều kiện song song.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Dựng hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) biết $CD = 5$, $AD = 2{,}5$, $AC = 4$, $AB = 3$.

Ví dụ 2. Dựng hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) vuông tại D biết $DC = 5$, $AD = 2$ và $BD = 4$.

Ví dụ 3. Dựng hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) biết $BC = 2{,}5$, $CD = 4{,}5$ và $AD = 3$, $\widehat{D} = 50^\circ$.

Ví dụ 4. Dựng hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) biết $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 5$ và $AD = 2$.

Ví dụ 5. Dựng hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) biết $CD = 5$, $\widehat{D} = 50^\circ$ và đường cao $AH = 2$.

Dạng 3: Dựng tam giác (trừ những trường hợp cơ bản đã biết cách dựng)

- Dựng một tam giác phụ, có hai đỉnh của tam giác cần dựng.
- Dựng đỉnh còn lại thỏa mãn hai điều kiện nào đó.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Dựng tam giác ABC biết $BC = 4$, $AB + AC = 5$ và $\widehat{B} = 70^\circ$.

Ví dụ 2. Dựng tam giác ABC vuông tại A biết $BC = 5$, $AC - AB = 2$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Dựng hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ biết $AD = 2; CD = 4; \widehat{D} = 70°; \widehat{C} = 45°$.

Bài 2. Dựng hình thang cân $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ biết $CD = 5; AD = 2{,}5; AC = 4$.

Bài 3. (*)Dựng hình thang cân $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ biết $AB = 3; CD = 6$; đường cao $AH = 2$.

Bài 4. (*) Cho góc nhọn xOy và một điểm M nằm trong góc đó. Hãy dựng đường thẳng d đi qua M cắt hai cạnh Ox và Oy lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của AB.

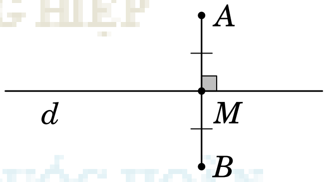
Chủ đề 5: ĐỐI XỨNG TRỤC

A Trọng tâm kiến thức

I. Hai điểm đối xứng qua một đường thẳng

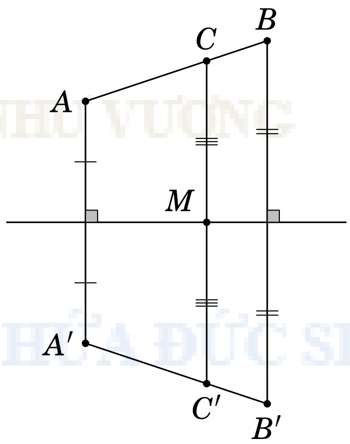
Hai điểm gọi là đối xứng nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

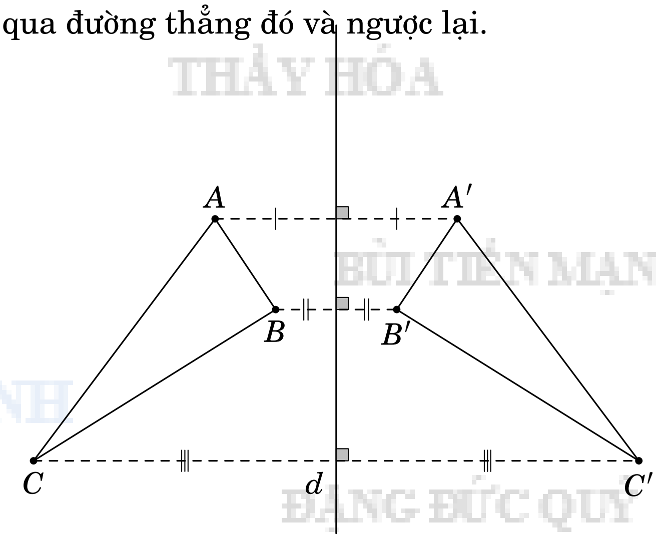
Quy ước: Nếu điểm $M \in d$ thì điểm đối xứng với M qua đường thẳng d cũng là M.



II. Hai hình đối xứng nhau qua một đường thẳng

Hai hình được gọi là đối xứng nhau qua một đường thẳng nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng đó và ngược lại.





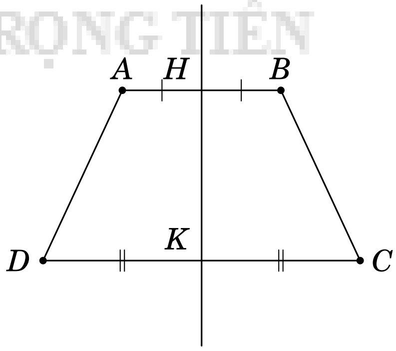
Tính chất 1. Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.

III. Hình có trục đối xứng

Định nghĩa 1. Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình $\mathscr{H}$ nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình $\mathscr{H}$ qua đường thẳng d cũng thuộc hình $\mathscr{H}$.

• Trục đối xứng của hình thang cân

Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân.



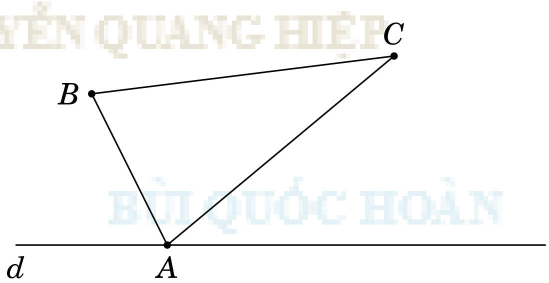
B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Vẽ hình đối xứng của một hình cho trước

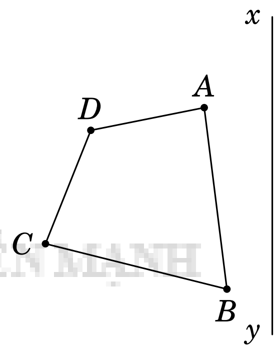
- Dựa vào định nghĩa của hai hình đối xứng nhau qua một đường thẳng.
- Đặc biệt, để vẽ đoạn $A'B'$ đối xứng với AB qua đường thẳng d, ta vẽ A' đối xứng với A, B' đối xứng với B rồi nối A',B'. Để vẽ $\triangle A'B'C'$ đối xứng với $\triangle ABC$ qua đường thẳng d, ta vẽ các điểm A',B',C' lần lượt đối xứng với A,B,C qua đường thẳng d rồi nối A',B',C' với nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1.
Cho tam giác ABC và đường thẳng d đi qua A (xem hình bên). Hãy vẽ tam giác đối xứng với tam giác ABC qua đường thẳng d.



Ví dụ 2.
Cho tứ giác $A'B'C'D'$ đối xứng với tứ giác $ABCD$ qua đường thẳng xy trong hình bên.



Ví dụ 3. Vẽ hình đối xứng với hình bên qua trục d.

Dạng 2: Tìm hình có trục đối xứng. tìm trục đối xứng của một hình

Vận dụng định nghĩa hình có trục đối xứng, định lí về trục đối xứng của hình thang cân.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Trong các chữ cái in hoa L,M,N,O,P chữ nào có trục đối xứng? Xác định trục đối xứng của chữ cái đó.

Dạng 3: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau

- Vận dụng định nghĩa của hai điểm đối xứng qua một đường thẳng.
- Vận dụng tính chất: Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D. Vẽ các điểm E và F lần lượt đối xứng với B và C qua AD. Chứng minh rằng

a) $EF = BC$;

b) Tứ giác $EBCF$ là hình thang cân.

Ví dụ 2. Cho tam giác $ABC, \widehat{A} = 75°$. Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi K là điểm đối xứng của H qua BC. Tính số đo góc BKC.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 120°$. Gọi d là đường trung trực của AB. Vẽ điểm D đối xứng với điểm C qua d.

a) Chứng minh rằng tia CB là tia phân giác của góc ACD.

b) Tính số đo của góc BDC.

Dạng 4: Chứng minh hai điểm đối xứng qua một đường thẳng

Vận dụng định nghĩa của hai điểm đối xứng qua một đường thẳng.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến AM. Một đường thẳng song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng

a) B và C đối xứng qua AM;

b) D và E đối xứng qua AM.

Ví dụ 2. Cho góc nhọn xOy, tia phân giác Ot, điểm M thuộc tia Ot. Vẽ điểm A đối xứng với M qua Ox. Vẽ điểm B đối xứng với M qua Oy. Chứng minh rằng hai điểm A và B đối xứng nhau qua Ot.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác AD. Trên tia đối của tia AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = AN$. Chứng minh rằng hai đoạn thẳng BN và CM đối xứng qua AD.

Dạng 5: Tìm vị trí của một điểm để tổng hai đoạn thẳng ngắn nhất

Vận dụng tính chất hai đoạn thẳng đối xứng qua một trục thì bằng nhau và vận dụng bất đẳng thức tam giác.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hai điểm A và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d. Xác định vị trí của M trên d sao cho $MA + MB$ ngắn nhất.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho biết mỗi câu sau đúng hay sai?

a) Hình thang cân có trục đối xứng đi qua giao điểm của hai đường chéo.

b) Mỗi đường thẳng có vô số trục đối xứng.

c) Mỗi góc có một trục đối xứng là đường phân giác của góc ấy.

d) Tam giác đều có một và chỉ một trục đối xứng.

Bài 2. Cho đường thẳng d, đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa A và B. Vẽ các điểm A', B' và M' lần lượt đối xứng với A, B và M qua đường thẳng d. Chứng minh M' nằm giữa A' và B'.

Bài 3. Cho góc xOy và một điểm M trong góc đó. Vẽ điểm A đối xứng với M qua Ox, vẽ điểm B đối xứng với M qua Oy. Chứng minh rằng đường trung trực của AB đi qua O.

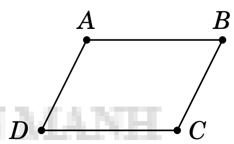
Bài 4. Cho góc nhọn xOy và điểm A nằm trong góc đó. Nêu cách dựng tam giác ABC với $B \in Ox$; $C \in Oy$ sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

Chủ đề 6: HÌNH BÌNH HÀNH

A Trọng tâm kiến thức

I. Định nghĩa

Hình bình hành là một tứ giác có các cạnh đối song song.



II. Tính chất của hình bình hành

- Các cạnh đối bằng nhau
- Các góc đối bằng nhau
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

III. Dấu hiệu nhận biết hình bình hành

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Chứng minh hai góc bằng nhau. tính số đo góc

Vận dụng tính chất: Trong hình bình hành, các góc đối bằng nhau,các góc kề mỗi cạnh bù nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính các góc của hình bình hành $ABCD$ biết $\widehat{A}-\widehat{B}=30°$.

Ví dụ 2. Hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A}=3\widehat{B}$. Tính các góc của hình bình hành đó.

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh AD lấy điểm N sao cho $CM \parallel AN$. Chứng minh rằng $\widehat{AMC}=\widehat{CNA}$.

Dạng 2: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, các quan hệ về độ dài. tính độ dài đoạn thẳng

Sử dụng các tính chất về cạnh đối, về đường chéo của hình bình hành.

VÍ DỤ MINH HỌA

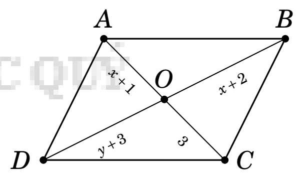
Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ AE và CF cùng vuông góc với BD. Chứng minh rằng $AE=CF$.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O. Qua O vẽ một đường thẳng cắt AB và CD lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng O là trung điểm của MN.

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O. Qua D vẽ đường thẳng xy sao cho A và C nằm cùng phía với xy. Gọi H,I,K lần lượt là hình chiếu của A,B,C trên xy. Chứng minh rằng $AH+CK=BI$.

Ví dụ 4.

Tứ giác $ABCD$ trong hình bên là một hình bình hành. Tìm các giá trị của x và y.



Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân tại $A, AB=4$. Từ một điểm D trên cạnh BC, vẽ $DE \parallel AB$ $(E \in AC)$ và $DF \parallel AC$ $(F \in AB)$. Tính chu vi của tứ giác $AEDF$.

Dạng 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng quy

Vận dụng tính chất đường chéo của một hình bình hành, ta suy ra:

- Trung điểm của một đường chéo và hai đầu của đường chéo kia là ba điểm thẳng hàng.
- Hai hình bình hành có chung một đường chéo thì ba đường chéo của chúng đồng quy 9tại trung điểm của đường chéo chung).

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB và CD, lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = CN$. Gọi O là giao điểm của MN và AC. Chứng minh ba điểm B, O, D thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Qua A vẽ đường thẳng $xy \parallel BC$. Trên cạnh BC lấy một điểm D. Vẽ $DE \parallel AB$; $DF \parallel AC$ $(E, F \in xy)$. Gọi M là giao điểm của AB và DF. Gọi N là giao điểm của AC và DE. Gọi O là giao điểm của AD và CF. Chứng minh rằng

a) Ba điểm B, O, E thẳng hàng;

b) Ba điểm M, O, N thẳng hàng.

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ hình bình hành $AECF$ $(E \in AB; F \in CD)$. Chứng minh rằng ba đường thẳng EF, AC, BD đồng quy.

Dạng 4: Chứng minh tứ giác là hình bình hành

Vận dụng 5 dấu hiệu nhận biết hình bình hành.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA. Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OB và OD. Chứng minh tứ giác $AMCN$ là hình bình hành.

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy hai điểm M và N sao cho $BM = DN$.

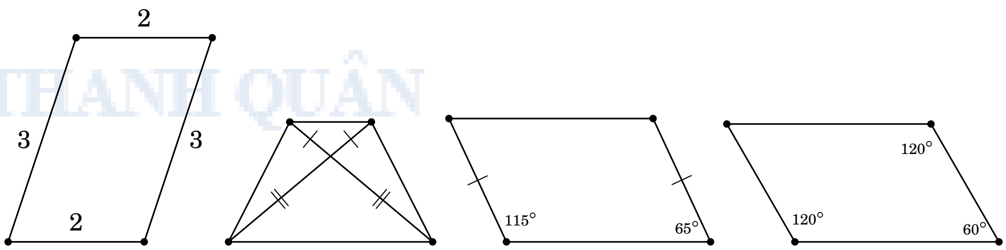
a) Chứng minh tứ giác $AMCN$ là hình bình hành.

b) Xác định vị trí điểm M để tia AM cắt BC tại trung điểm của BC

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC, $\widehat{A} \neq 60^\circ$. Vẽ ra phía ngoài của tam giác này các tam giác đều ABD và ACE. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A, vẽ tam giác đều FBC. Chứng minh rằng tứ giác $ADFE$ là hình bình hành.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Quan sát các hình dưới đây rồi cho biết tứ giác ở hình nào là hình bình hành. Vì sao?



Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ $(AB > CD)$. Tia phân giác của góc C cắt AB tại M. Trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $CN = AM$. Chứng minh rằng tia AN là tia phân giác của góc A.

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên tia đối của tia AD và CB, lấy các điểm M và P sao cho $AM = CP$. Trên tia đối của tia BA và DC lấy các điểm N và Q sao cho $BN = DQ$. Chứng minh rằng ba đường thẳng MP, NQ và BD đồng quy.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H, M và N thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA, BD và AC. Chứng minh rằng ba đường thẳng EG, HF và MN đồng quy.

Bài 5. (*) Cho tam giác ABC, đường cao AH. Ở phía ngoài của tam giác, ta vẽ các tam giác vuông cân ACE và ABD đỉnh A. Trên tia đối của tia AH lấy điểm K sao cho $AK = BC$. Chứng minh rằng tứ giác $ADKE$ là hình bình hành.

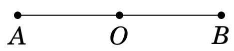
Chủ đề 7: ĐỐI XỨNG TÂM

A Trọng tâm kiến thức

I. Hai điểm đối xứng qua một điểm

Hai điểm gọi là đối xứng nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

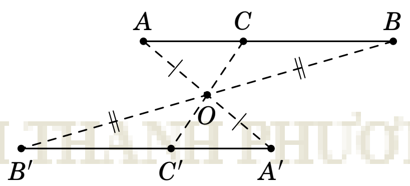
A đối xứng với B qua $O \Leftrightarrow \begin{cases} A, O, B \text{ thẳng hàng} \\ OA = OB \end{cases}$.

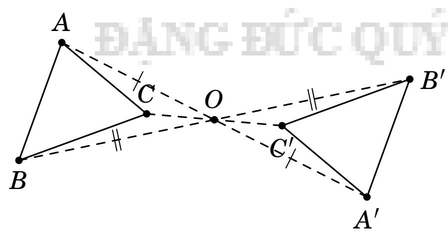


Quy ước: Điểm đối xứng với điểm O qua O cũng là O.

II. Hai hình đối xứng qua một điểm

Hai hình gọi là đối xứng nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua điểm O và ngược lại.





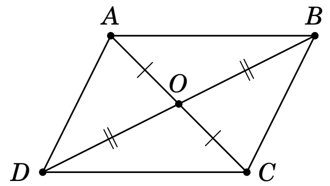
Tính chất 2. Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một điểm thì chúng bằng nhau.

III. Hình có tâm đối xứng

Định nghĩa 2. Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình $\mathscr{H}$ nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình $\mathscr{H}$ qua điểm O cũng thuộc hình $\mathscr{H}$.

• *Tâm đối xứng của hình bình hành*

Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.



B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Vẽ hình đối xứng của một hình cho trước

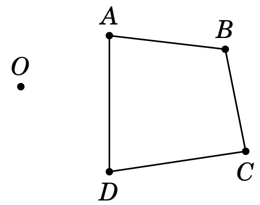
- Dựa vào định nghĩa của hai hình đối xứng nhau qua một điểm.
- Đặc biệt, để vẽ đoạn $A'B'$ đối xứng với AB qua điểm O, ta vẽ A' đối xứng với A và vẽ B' đối xứng với B qua điểm O rồi nối A' với B'. Để vẽ $\triangle A'B'C'$ đối xứng với $\triangle ABC$ qua điểm O, ta vẽ các điểm A', B', C' lần lượt đối xứng với A, B, C qua O rồi nối A', B', C' với nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Vẽ tam giác $A'B'C'$ đối xứng với tam giác ABC qua trọng tâm G. Có nhận xét gì về điểm G đối với tam giác $A'B'C'$?

Ví dụ 2.

Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm O. Hãy vẽ tứ giác $A'B'C'D'$ đối xứng với tứ giác $ABCD$ qua O.



Dạng 2: Tìm hình có tâm đối xứng. tìm tâm đối xứng của một hình

Vận dụng định nghĩa hình có tâm đối xứng, định lí về tâm đối xứng của hình bình hành.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Trong các tứ giác dưới đây, hình nào có tâm đối xứng? Tìm tâm đối xứng của hình đó.

Ví dụ 2. Trong các chữ cái in hoa M,N,O,S,T, chữ cái nào có tâm đối xứng? Xác định tâm đối xứng của chữ cái đó.

Dạng 3: Chứng minh hai đoạn thẳng hoặc hai góc bằng nhau

- Vận dụng định nghĩa hai điểm đối xứng qua một điểm.
- Vận dụng tính chất: Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một điểm thì chúng bằng nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Vẽ các điểm B' và C' lần lượt đối xứng với B và C qua A. Chứng minh rằng $B'C' \parallel BC$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC và O là một điểm bất kì trong tam giác. Vẽ điểm E đối xứng với O qua trung điểm M của AB. Vẽ điểm F đối xứng với O qua trung điểm N của AC. Chứng minh rằng $BE = CF$.

Dạng 4: Chứng minh hai điểm đối xứng qua một điểm

Vận dụng định nghĩa của hai điểm đối xứng qua một điểm.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Vẽ các điểm D,E và O đối xứng với A lần lượt qua B,C và M. Chứng minh rằng hai điểm D và E đối xứng nhau qua O.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BC lấy một điểm D. Đường thẳng qua D và song song với AB cắt tia đối của tia AC tại M. Đường thẳng qua D và song song với AC cắt tia AB tại N. Gọi O là giao điểm của AD và MN. Gọi O là giao điểm của AD và MN. Tìm cặp điểm đối xứng với nhau qua O.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến AM và BN cắt nhau tại G. Đường thẳng qua C và song song với AM cắt tia BN tại D. Chứng minh rằng hai điểm B và D đối xứng nhau qua G.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC, $\hat{A} \le 90°$. Trên cạnh BC lấy một điểm D. Vẽ điểm M đối xứng với D qua AB, điểm N đối xứng với D qua AC. Muốn cho điểm M và N đối xứng qua A thì tam giác ABC phải có điều kiện gì?

Ví dụ 5. Cho góc xOy và một điểm A ở trong góc đó. Dựng điểm $P \in Ox$ và điểm $Q \in Oy$ sao cho P và Q đối xứng với nhau qua trung điểm M của OA.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC và một điểm O. Vẽ tam giác $A'B'C'$ đối xứng với tam giác ABC qua điểm O. Biết $AB = 2$; $BC = 3$; $AC = 4$. Tính chu vi tam giác $A'B'C'$.

Bài 2. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$. Gọi M là trung điểm BC. Vẽ điểm D đối xứng với A qua M. Vẽ điểm E đối xứng với A qua đường thẳng BC. Chứng minh tứ giác $BCDE$ là hình thang cân.

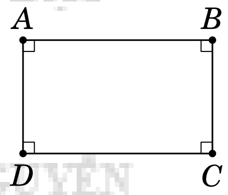
Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E,F,G lần lượt là trung điểm của AD,DC và CB. Vẽ điểm M đối xứng với B qua E, vẽ điểm N đối xứng với A qua G. Chứng minh hai điểm M và N đối xứng nhau qua điểm F.

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm O trong hình đó. Vẽ các điểm A',B',C',D' đối xứng với O qua các đỉnh A,B,C,D. Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ có một tâm đối xứng.

Chủ đề 8: HÌNH CHỮ NHẬT

A Trọng tâm kiến thức

I. Định nghĩa



Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

Như vậy, hình chữ nhật cũng là một hình bình hành, cũng là một hình thang cân.

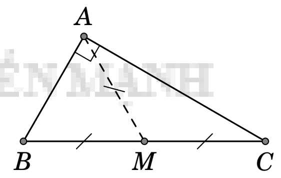
II. Tính chất

Trong hình chữ nhật hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

III. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

IV. Áp dụng vào tam giác



- Trong một tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.
- Đảo lại, nếu một tam giác có một đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

$$\triangle ABC : MB = MC$$
$$\widehat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}BC.$$

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật

Dựa vào dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Từ một điểm D trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt các đường thẳng AC, AB lần lượt tại M và N. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của BC và MN. Chứng minh rằng tứ giác $AKDH$ là hình chữ nhật.

Ví dụ 2. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A}+\widehat{B} = 270^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, DC và CA. Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Hai đường trung tuyến BD,CE cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia DB lấy điểm F sao cho $DF=\frac{1}{3}BD$. Trên tia đối của tia EC lấy điểm H sao cho $EH=\frac{1}{3}CE$. Chứng minh rằng tứ giác $BCFH$ là hình chữ nhật.

Dạng 2: Tìm điều kiện của hình $\mathscr{A}$ để hình $\mathscr{B}$ trở thành hình chữ nhật

Hình bình hành $\mathscr{B}$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow$ hình $\mathscr{B}$ có thêm điều kiện **M**.
$\Leftrightarrow$ hình $\mathscr{A}$ có thêm điều kiện **N**.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. từ A vẽ một đường thẳng song song với BC, từ M vẽ một đường thẳng song song với AB, chúng cắt nhau tại N. Chứng minh rằng

a) Các tứ giác $ANMB$, $ANCM$ là hình bình hành.

b) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì để hình bình hành $ANCM$ là hình chữ nhật?

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$, $\widehat{ACD}=\frac{1}{2}\widehat{D}$. Gọi M là trung điểm của AB. Hai tia CM và DA cắt nhau tại E.

a) Chứng minh tứ giác $AEBC$ là hình bình hành.

b) Hình bình hành $ABCD$ phải có thêm điều kiện gì để hình bình hành $AEBC$ là hình chữ nhật?

Dạng 3: Chứng minh quan hệ bằng nhau giữa các đoạn thẳng, giữa các góc. tính độ dài đoạn thẳng, tính số đo góc

Vận dụng các tính chất:

- Về cạnh, về đường chéo, về góc của hình chữ nhật.
- Về đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông. F

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O. Biết $AD=2\sqrt{3}$; $BD=4\sqrt{3}$. Tính

a) Chu vi tam giác AOB.

b) Số đo góc của tam giác AOB.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Vẽ $BH\perp AM$. Cho biết $AB=15$; $BH=12$. Tính BC.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Vẽ $BH \perp AM$. Cho biết $AB = 15$; $BH = 12$. Tính BC.

Ví dụ 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy điểm M. Trên tia AM lấy điểm N sao cho M là trung điểm của AN. Vẽ $NE \perp BC; NF \perp CD$.
Chứng minh rằng

a) $CN \parallel BD; EF \parallel AC$

b) Ba điểm M, N, E thẳng hàng.

Ví dụ 5. Cho tam giác đều ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D và trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AE, AB và CD. Chứng minh rằng $\triangle MNP$ là tam giác đều.

Dạng 4: Chứng minh quan hệ vuông góc

Vận dụng tính chất: nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O. Trên cạnh AB lấy một điểm M. Kẻ $AH \perp CM$. Chứng minh rằng

a) $OH = \frac{1}{2}AC$;

b) $HB \perp HD$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên AD lấy điểm E, trên CD lấy điểm F sao cho $EF \parallel AC$. Vẽ hình chữ nhật $DEMF$. Chứng minh rằng M nằm trên đường chéo BD.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Gọi H và K theo thứ tự là hình chiếu của A trên các đường phân giác trong và ngoài của góc B. Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của A trên các đường phân giác trong và ngoài của góc C. Chứng minh bốn điểm H, K, E, F thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Một đường thẳng song song với BC cắt hai cạnh AB và AC lần lượt tại D và E. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của DE và BC. Chứng minh rằng

a) Ba điểm A, M, N thẳng hàng;

b) $MN = \dfrac{BC - DE}{2}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ $HE \perp AB$; $HF \perp AC$. Từ A vẽ một đường thẳng vuông góc với EF cắt BC tại M. Chứng minh rằng M là trung điểm của BC.

Chủ đề 9: ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

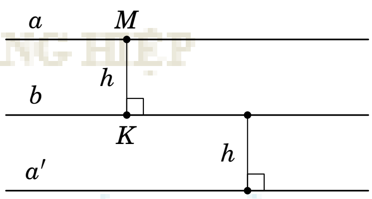
A Trọng tâm kiến thức

I. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.

II. Tính chất của các điểm cách đều một đường thẳng cho trước

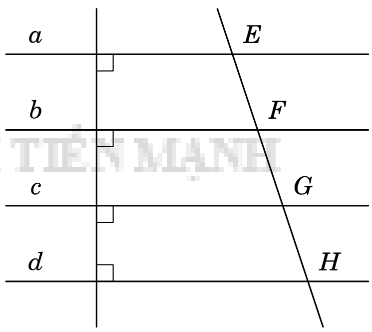
- Các điểm cách đường thẳng b một khoảng bằng h, nằm trên hai đường thẳng song song với b và cách b một khoảng bằng h.



- Nhận xét: Tập hợp các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó một khoảng bằng h.

III. Đường thẳng song song cách đều

- Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.



- Đảo lại: Nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Chứng tỏ một điểm di động trên một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước

- Xác định đường thẳng cố định trong bài.
- Xác định khoảng cách không đổi h từ điểm M đến đường thẳng cố định.
- Kết luận: Điểm M nằm trên hai (hoặc một) đường thẳng song song với đường thẳng cố định và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng d và có khoảng cách đến d bằng 2 cm.

Nối A với một điểm D trên d. Gọi O là trung điểm của AD. Khi điểm D di động trên đường thẳng d thì điểm O di động trên đường thẳng nào?

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $AM = CN$. Gọi O là trung điểm của MN. Hỏi điểm O di động trên đường thẳng nào khi M và N di động trên hai cạnh AB và AC?

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng $AB = 4$ cm. Trên một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ tia $Ax \perp AB$. Lấy điểm C trên Ax. Gọi M là trung điểm của BC. Khi điểm C di động trên tia Ax thì điểm M di động trên đường thẳng nào?

Dạng 2: Chứng minh các đường thẳng song song cách đều

- Trước hết ta chứng minh các đường thẳng đó song song.
- Chứng minh tiếp các đường thẳng này chắn trên một cát tuyến các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Qua B, M, A, N, C vẽ những đường thẳng vuông góc với BC. Chứng minh rằng các đường thẳng này song song cách đều.

Dạng 3: Chia đoạn thẳng AB cho trước làm nhiều phần bằng nhau

- Vẽ tia Ax và trên đó đặt liên tiếp các đoạn thẳng bằng nhau: $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{n-1}A_n$.
- Qua các điểm A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1} vẽ các đường thẳng song song với A_nB. Các đường thẳng này chia AB thành n phần bằng nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chia đoạn thẳng AB cho trước thành 5 phần bằng nhau.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC, D là một điểm thuộc cạnh BC. Vẽ $DE \parallel AB$ ($E \in AC$) và $DF \parallel AC$ ($F \in AB$). Gọi O là trung điểm của EF. Khi D di động trên cạnh BC thì điểm O di động trên đường thẳng nào?

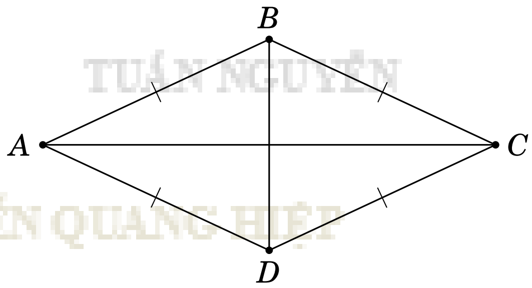
Bài 2. Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng d và có khoảng cách đến d là 1 cm. Một điểm B thuộc đường thẳng d. Vẽ điểm C đối xứng với B qua A. Khi điểm B di động trên d thì điểm C di động trên đường thẳng nào?

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$, cạnh AB cố định, đường cao $AH = 2$ cm. Gọi O là trung điểm của CD. Hai đường thẳng AO và BC cắt nhau tại M. Khi C và D di động thì điểm M di động trên đường thẳng nào?

Bài 4. Cho hình thang $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AM, BN, MD, NC. Chứng minh rằng 5 đường thẳng AB, EF, MN, GH, CD song song cách đều.

Chủ đề 10: HÌNH THOI

A Trọng tâm kiến thức



I. Định nghĩa

Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau. Như vậy hình thoi cũng là một hình bình hành.

II. Tính chất

Trong hình thoi:

- Hai đường chéo vuông góc với nhau.
- Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.

III. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Chứng minh một tứ giác là hình thoi

Dựa vào các dấu hiệu nhận biết hình thoi.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Chứng minh tứ giác $AMNP$ là hình thoi.

Ví dụ 2. Cho hình thoi $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O. Trên OC lấy một điểm K. Đường thẳng qua K và song song với AB cắt BC và AD tại G và H. Đường thẳng qua K và song song với BC cắt AB và CD lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng các tứ giác $AEKH$, $KGCF$ là hình thoi.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Hai đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G. Vẽ điểm F đối xứng với A qua G. Chứng minh tứ giác $BGCF$ là hình thoi.

Dạng 2: Tìm điều kiện của hình A để hình B trở thành hình thoi

Hình bình hành B là hình thoi

⇔ Hình B có thêm điều kiện M

⇔ Hình A có thêm điều kiện N.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ACB, D là một điểm trên cạnh BC. Vẽ $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$ ($E \in AC; F \in AB$). Xác định vị trí của điểm D để tứ giác $AEDF$ là hình thoi.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Vẽ điểm D đối xứng với M qua điểm N.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BMCD$ là hình bình hành.

b) Muốn cho hình bình hành $BMCD$ là hình thoi thì tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì?

Dạng 3: Chứng minh quan hệ bằng nhau giữa các đoạn thẳng, giữa các góc. Tính độ dài đoạn thẳng, tính số đo góc

Vận dụng các tính chất về cạnh, góc, về đường chéo của hình thoi.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chu vi của hình thoi $ABCD$ là 24 cm, $BD = 6$ cm.

a) Tính các góc của hình thoi đó.

b) Tính độ dài đường chéo AC.

Ví dụ 2. Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 30^\circ$, đường cao $BH = 1{,}5$ cm. Tính chu vi của hình thoi.

Ví dụ 3. Cho hình thoi $ABCD$, đường cao AH. Lấy điểm M ở trong hình thoi. Vẽ $ME \perp AB$, $MF \perp BC$. Biết $ME + MF = AH$. Chứng minh rằng điểm M nằm trên đường chéo AC.

Ví dụ 4. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh dài 4 cm, $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và CD.

a) Chứng minh rằng $\triangle BMN$ là tam giác đều.

b) Tính chu vi của $\triangle BMN$.

Dạng 4: Chứng minh quan hệ vuông góc

Vận dụng tính chất: trong hình thoi, hai đường chéo vuông góc.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$, $AD = BC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đường thẳng quan M và song song với BC cắt AC tại F. Chứng minh rằng $MN \perp EF$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$, $AC \perp AD$. Gọi E và F là trung điểm của AB và CD. Cho biết dạng của tứ giác $AECF$.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ các đường cao BD và CE. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và DE. Vẽ $MH \perp AB$, $MK \perp AC$. Chứng minh rằng tứ giác $NHKM$ là hình thoi.

Bài 3. Cho hình thoi $ABCD$, góc A có số đo bằng 50°. Vẽ $BH \perp AD$, $BK \perp CD$, $DE \perp AB$, $DF \perp BC$. Gọi M là giao điểm của BH với DE, gọi N là giao điểm của BK với DF.

a) Chứng minh rằng M và N nằm trên đường chéo AC?

b) Tứ giác $MNBD$ là hình gì?

c) Tính các góc của tứ giác $MBND$?

Bài 4. Cho tam giác ABC, $AB < BC$. Từ một điểm D trên cạnh BC vẽ một đường thẳng song song với AB. Từ A vẽ một đường thẳng song song với BC. Hai đường thẳng vừa vẽ cắt nhau tại E. Xác định vị trí của điểm D để $AD \perp BE$.

Bài 5. Cho tam giác ABC, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Đường thẳng qua B và vuông góc với AB cắt đường thẳng qua C và vuông góc với AC tại F.

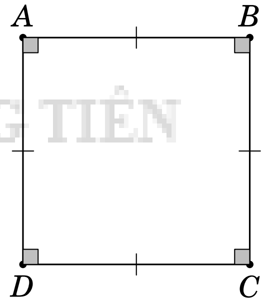
a) Tứ giác $BHCF$ là hình gì?

b) Tam giác ABC phải có điều kiện gì thì tứ giác $BHCF$ là hình thoi?

Chủ đề 11: HÌNH VUÔNG

A Trọng tâm kiến thức

I. Định nghĩa



- Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.
- Như vậy hình vuông vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi.

II. Tính chất

Hình vuông có các tính chất của hình thoi và hình chữ nhật.

III. Dấu hiệu nhận biết

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc là hình vuông.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Chứng minh một tứ giác là hình vuông

Dựa và 5 dấu hiệu nhận biết hình vuông.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường trung tuyến AM. Gọi N là trung điểm của AC. Vẽ điểm D đối xứng với điểm M qua N. Chứng minh rằng tứ giác $ADCM$ là hình vuông.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm E. Vẽ hình vuông $CEFG$ ra phía ngoài hình vuông $ABCD$. Vẽ $EK \perp AC$. Gọi O là giao điểm của CF và EG. Chứng minh rằng tứ giác $KEOC$ là hình vuông.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G. Gọi M và N là trung điểm của GB, GC. Cho biết $BC = \frac{2}{3}AH$. Chứng minh rằng tứ giác $MNDE$ là hình vuông.

Dạng 2: Tìm điều kiện của hình A để hình B trở thành hình vuông

Hình chữ nhật (hoặc hình thoi) B là hình vuông

⇔ Hình B có thêm điều kiện M

⇔ Hình A có thêm điều kiện N.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $BC = a$. Trên đáy BC lấy hai điểm M và N sao cho $BM = CN < \frac{a}{2}$. Vẽ $MQ \perp BC$; $NP \perp BC$ ($Q \in AB$; $P \in AC$).

a) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

b) Xác định vị trí của điểm M và N để $MNPQ$ là hình vuông.

Dạng 3: Chứng minh quan hệ bằng nhau giữa các đoạn thẳng, giữa các góc. Tính độ dài đoạn thẳng, tính số đo góc

Vận dụng các tính chất về cạnh, về góc, về đường chéo của hình vuông.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, hai đường chéo cắt nhau tại O. Qua O vẽ đường thẳng d bất kì, Gọi A', B', C', D' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D trên đường thẳng d. Tính tổng $A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 + D'D^2$.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Trên cạnh BC lấy điểm M, trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $BM = DN$.

a) Tính số đo các góc AMN, ANM.

b) Gọi E là trung điểm của MN. Tia AE cắt CD tại F. Tính chu vi tam giác CMF.

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$. Vẽ vào trong hình vuông này tam giác đều MCD.

a) Tính số đo các góc MAB và MBA.

b) Trên tia phân giác của góc ADM lấy điểm N sao cho $NA = ND$. Chứng minh rằng $\triangle AMN$ là tam giác đều.

Dạng 4: Chứng minh quan hệ vuông góc

Vận dụng tính chất: Trong hình vuông, hai đường chéo vuông góc hoặc hai cạnh liên tiếp của hình vuông thì vuông góc với nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O. Trên cạnh BC và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $BM = CN$. Chứng minh rằng $OM \perp ON$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên tia đối của tia BA lấy điểm F, trên tia đối của tia CB lấy điểm G sao cho $AE = BF = CG$. Vẽ hình vuông $BFMN$ ($N \in BC$). Chứng minh rằng $EG = DM$ và $EG \perp DM$.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD.

a) Chứng minh rằng $AN = DM$ và $AN \perp DM$

b) Vẽ $CE \perp DM$. Chứng minh $\triangle ABE$ cân.

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là giao điểm các đường phân giác của góc A, góc B. Gọi N là giao điểm các đường phân giác của góc A, góc D. Gọi P là giao điểm các đường phân giác của góc C, góc D. Gọi Q là giao điểm các đường phân giác của góc B, góc C.

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

b) Hình bình hành $ABCD$ cho trước phải có điều kiện gì để tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh CD lấy điểm F sao cho $AE = CF$. Gọi O là trung điểm của EF. Qua O vẽ một đường thẳng vuông góc với EF cắt AD và BC lần lượt tại G và H. Chứng minh rằng

a) $GH = EF$.

b) Tứ giác $EHFG$ là hình gì?

Chủ đề 12: ÔN TẬP CHƯƠNG I

A Trọng tâm kiến thức

I. Tứ giác và các tứ giác đặc biệt

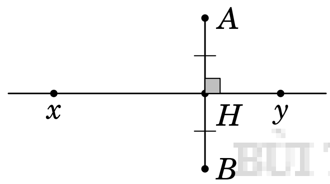
- Hình thang, hình thang cân, hình thang vuông.
- Hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

II. Bổ sung một số kiến thức về tam giác

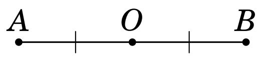
- Đường trung bình của tam giác, của hình thang.
- Đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông.

III. Đối xứng trục, đối xứng tâm

- A và B đối xứng nhau qua xy
  $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp xy \\ HA = HB \end{cases}$



- A và B đối xứng nhau qua O
  $\Leftrightarrow \begin{cases} A, O, B \text{ thẳng hàng} \\ OA = OB \end{cases}$



B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Nhận biết tứ giác đặc biệt và tìm điều kiện để một tứ giác trở thành một tứ giác đặc biệt hơn

Dựa vào các dấu hiệu nhận biết hình thang cân, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Vẽ điểm M đối xứng với D qua F. Chứng minh rằng

a) Tứ giác $DFCB$ là hình thang cân;

b) Tứ giác $DFCE$ là hình thoi;

c) Tứ giác $AMCD$ là hình chữ nhật.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng với M qua AC.

a) Tứ giác $AMCD$ là hình gì?

b) Tam giác ABC có phải thêm điều kiện gì để tứ giác $ABMD$ là hình thoi?

Ví dụ 3. Cho hình thoi $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và vuông góc với AB cắt AB tại H, cắt CD tại K. Đường thẳng qua O và vuông góc với BC cắt BC tại E, cắt AD tại F.

a) Chứng minh tứ giác $HEKF$ là hình chữ nhật.

b) Hình thoi $ABCD$ phải có điều kiện gì để hình chữ nhật $HEKF$ trở thành hình vuông?

Dạng 2: Chứng minh hai các đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau. Tính độ dài đoạn thẳng, tính số đo góc

Vận dụng các tính chất về cạnh, về góc, về đường chéo của hình thang cân, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông hoặc định lý về đường trung bình của tam giác, của hình thang.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và CD. Đường chéo BD cắt AE và AF lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng

a) M là trọng tâm của tam giác ABC và N là trọng tâm của tam giác ACD.

b) $BM = MN = ND$.

Ví dụ 2. Cho hình thoi $ABCD$, $\widehat{A} = 50^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CB và AD. Vẽ $BH \perp CN$.

a) Chứng minh rằng $AM = CN$.

b) Chứng minh rằng $AH = AD$.

c) Tính số đo của góc BHD.

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M trên cạnh CD. Tia phân giác của góc BAM cắt BC tại N. Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho $DE = BN$. Chứng minh rằng

a) $AE = AN$;

b) $\widehat{MAE} = \widehat{MEA}$;

c) $BN + DM = AM$.

Dạng 3: Chứng minh hai đường thẳng song song hoặc vuông góc

Vận dụng các cạnh đối của hình bình hành thì song song. Đường trung bình của tam giác, của hình thang thì song song với đáy. Các đường chéo của hình thoi, hình vuông thì vuông góc với nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$. Lấy điểm D trên AC sao cho $CD = AB$. Gọi M ,N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, DB, BC, CA.

a) Chứng minh $MP \perp NQ$.

b) Vẽ tia phân giác của góc A cắt BC tại E. Chứng minh rằng $AE \parallel MP$.

Dạng 4: Tìm xem một điểm di động trên đường thẳng nào

Nếu điểm M cách đường thẳng xy cho trước một khoảng không đổi h thì điểm M di động trên hai đường thẳng song song với xy và cách xy một khoảng h.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho đoạn thẳng $AB = 6$ cm. Điểm C nằm giữa A và B. Vẽ trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB các hình vuông $ACDE$ và $BCFH$. Gọi K là giao điểm của AD và BF, O là giao điểm của AD và CE,O' là giao điểm của CH và BE.

a) Tứ giác $OKO'C$ là hình gì?

b) Khi điểm C di động thì giao điểm M của OO' và CK di động trên đường nào?

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho đoạn thẳng AB, trên đó lấy các điểmM và N sao cho $AM = BN$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tia Ax, By vuông góc với AB. Lấy điểm $D \in Ax$; $E \in By$ sao cho $MD \perp ME$. Chứng minh rằng $ND \perp NE$.

Bài 2. Cho hình thang cân $ABCD$ $(AB \parallel CD)$; $AB = a$; $CD = 3a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD và AC. Chứng minh rằng

a) Bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

b) Tứ giác $ABQP$ là hình chữ nhật.

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên đường chéo AC lấy một điểm M. Vẽ $ME \perp CD$; $MF \perp AD$.

a) Chứng minh rằng các tam giác MEC, MFA vuông cân.

b) Tứ giác $FMED$ là hình gì? Tính chu vi của nó.

c) Điểm M ở vị trí nào thì tứ giác $FMED$ là hình vuông?

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Vẽ hình bình hành $ACEF$ trong đó CE bằng cạnh của hình thoi. Vẽ điểm G đối xứng với F qua A.
Chứng minh rằng

a) Ba điểm E, O, G thẳng hàng;

b) $GD \parallel BE$;

c) D là trực tâm của tam giác BFE.

LÊ TRIỆU BÁ VƯƠNG

VÕ TẤN ĐẠT

CAO TỚI

NGUYỄN THÀNH SƠN

TUẤN NGUYỄN

NGUYỄN QUANG HIỆP

TRỊNH VĂN LUÂN

BÙI QUỐC HOÀN

THÀNH LÊ

THẦY HÓA

HỒ NHƯ VƯƠNG

BÙI TIẾN MẠNH

HỨA ĐỨC SINH

ĐẶNG ĐỨC QUÝ

ĐÀM THANH PHƯƠNG

TRẦN TRỌNG TIẾN

THANH QUÂN

Chương 2 ĐA GIÁC. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

Chủ đề 1: ĐA GIÁC. ĐA GIÁC ĐỀU

A Trọng tâm kiến thức

I. Định nghĩa

- Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

> ! Khi nói đến đa giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là đa giác lồi.

- Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

II. Tính chất

- Tổng các góc trong của đa giác n cạnh là $(n-2)\cdot 180^\circ$.
- Mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Tính góc của đa giác

- Tổng các góc trong của đa giác n cạnh là $(n-2)\cdot 180^\circ$.
- Để tìm số cạnh của đa giác khi biết tổng các góc, ta dùng công thức trên.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. a) Tính tổng các góc của đa giác 16 cạnh.

b) Tổng các góc của một đa giác bằng 1620°. Hỏi đa giác này có bao nhiêu cạnh?

Ví dụ 2. Cho đa giác n cạnh. Hãy tính tổng các góc ngoài của nó.

Dạng 2: Tính đường chéo của đa giác

- Số đường chéo của đa giác n đỉnh là $\dfrac{n\cdot(n-2)}{3}$.
- Để tìm số cạnh của đa giác khi biết số đường chéo, ta dùng công thức trên.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Một đa giác có 27 đường chéo. Hỏi đa giác có bao nhiêu cạnh?

Ví dụ 2. Tồn tại hay không một đa giác mà số đường chéo của nó

a) Bằng số cạnh?

b) Lớn gấp đôi số cạnh?

c) Bằng nửa số cạnh?

d) Bằng một phần ba số cạnh?

Ví dụ 3. Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh của một ngũ giác lồi bé hơn tổng độ dài các đường chéo của nó.

Dạng 3: Tính góc của đa giác đều

- Sử dụng định nghĩa đa giác đều.
- Mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính số đo mỗi góc trong của

a) Hình ngũ giác đều;

b) Hình lục giác đều;

c) Hình bát giác đều.

Ví dụ 2. Cho ngũ giác đều $ABCDE$. Chứng minh rằng AC, AD chia góc A làm ba góc bằng nhau.

Ví dụ 3. Muốn phủ kín mặt phẳng bởi những đa giác đều bằng nhau sao cho hai đa giác kề nhau thì có chung một cạnh. Hỏi các đa giác đều này có thể có nhiều nhất bao nhiêu cạnh?

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tìm số cạnh của đa giác có tổng các góc trong bằng tổng các góc ngoài.

Bài 2. Tìm số cạnh của đa giác lồi n cạnh có tổng các góc trong gấp đôi tổng các góc ngoài.

Bài 3. a) Tính số cạnh của đa giác nếu tổng các góc trong của đa giác bằng 1260°.

b) Đa giác có thể có nhiều hơn ba góc nhọn không? Vì sao?

Bài 4. Một đa giác n cạnh có tổng số đo các góc là 1080°. Hỏi đa giác có bao nhiêu cạnh?

Bài 5. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, EF. Chứng minh $\triangle MNP$ đều.

Chủ đề 2: DIỆN TÍCH HÌNH CHỮ NHẬT. DIỆN TÍCH TAM GIÁC

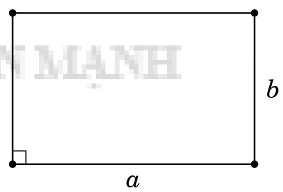
A Trọng tâm kiến thức

I. Khái niệm diện tích đa giác

- Số đo của phần mặt phẳng giới hạn bởi một đa giác được gọi là diện tích đa giác đó.
- Mỗi đa giác có một diện tích xác định. Diện tích đa giác là một số dương.
- Diện tích đa giác có các tính chất sau:
  - Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
  - Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.
  - Nếu chọn hình vuông có cạnh bằng 1 cm, 1 dm, 1 m, ... làm đơn vị đo diện tích thì đơn vị diện tích tương ứng là 1 cm^2, 1 dm^2, 1 m^2, ...

II. Công thức tính diện tích hình chữ nhật

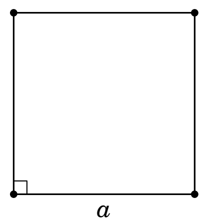
Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó.
Trong hình bên thì $S = a \cdot b$.



III. Công thức tính diện tích hình vuông, tam giác vuông

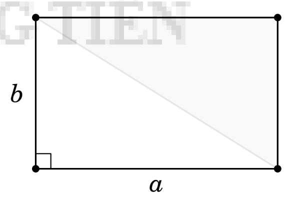
Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó.

$$S = a^2.$$



Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích hai cạnh góc vuông.

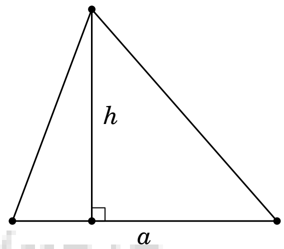
$$S = \frac{1}{2} a \cdot b.$$



IV. Diện tích tam giác

Diện tích tam giác bằng nửa tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó.

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h.$$



B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Cắt ghép hình

Sử dụng tính chất:

- Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
- Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hai hình vuông bất kì. Hãy cắt và ghép lại để được 1 hình vuông.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, có $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2$.

Ví dụ 3. Cho một tam giác. Hãy cắt tam giác thành ba mảnh rồi ghép lại thành một hình chữ nhật.

Dạng 2: Tính diện tích hình chữ nhật, tam giác

Sử dụng công thức tính diện tích hình chữ nhật, hình tam giác.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Một hình chữ nhật có kích thước 12 cm, 15 cm.

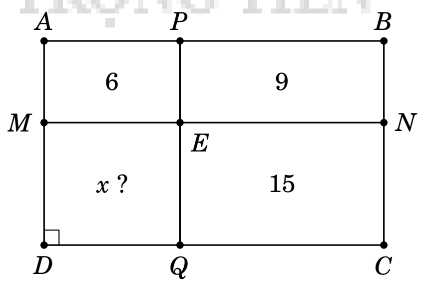
a) Tính diện tích hình chữ nhật đó;

b) Nếu giảm một cạnh đi 3 cm thì phải tăng cạnh kia bao nhiêu cm để diện tích hình chữ nhật không đổi?

Ví dụ 2. Tính diện tích một tam giác vuông có cạnh huyền là 10 cm, tỉ số hai cạnh góc vuông là $1:3$.

Ví dụ 3.

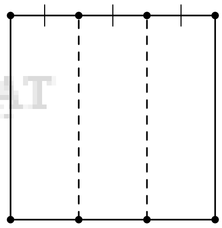
Một hình chữ nhật được chia thành bốn hình chữ nhật nhỏ hơn bằng hai đoạn thẳng song song với cạnh đối (hình bên). Diện tích của ba trong bốn hình chữ nhật được ghi trong hình. Tính diện tích của hình chữ nhật còn lại.



Ví dụ 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích là $60\ \text{m}^2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và CD. Vẽ hình chữ nhật $MDNP$. Tính diện tích hình chữ nhật $MPND$.

Ví dụ 5.

Cắt hình vuông ra ba miếng hình chữ nhật bằng hai đường thẳng song song với một cạnh (như hình vẽ bên). Nếu tổng chu vi ba hình chữ nhật là 48 cm, hãy tính diện tích ban đầu của hình vuông.



Ví dụ 6. Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\widehat{B} = 45°$; đường cao $AH = 6$ cm, $HC = 4$ cm. Tính diện tích $\triangle ABC$.

Dạng 3: Chứng minh về diện tích

- Sử dụng tính chất: hai tam giác bằng nhau thì diện tích bằng nhau.
- Sử dụng công thức tính diện tích các hình.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Kẻ AI, CH vuông góc với đường chéo BD. Chứng minh $\triangle ADI$ và $\triangle BCH$ có diện tích bằng nhau.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên AB, CD lấy $AM = \frac{1}{3}AB$, $DN = \frac{2}{3}DC$.

a) Chứng minh $ADCM$, $ABCN$ có diện tích bằng nhau;

b) Tính diện tích $AMCN$ theo a.

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$, trên tia đối của các tia BA, CB, AC lấy M, N, P sao cho $BM = BA$, $CN = CB$, $AP = AC$. Chứng minh $S_{\triangle MNP} = 7S_{\triangle ABC}$.

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$. Lấy điểm M, N, P lần lượt thuộc cạnh AC, AB, BC sao cho $\frac{CM}{AC} = \frac{BP}{BC} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{3}$. Gọi I là giao điểm của BM, CN. Gọi E là giao điểm của CN, AP. Gọi F là giao điểm của AP, BM. Chứng minh $S_{\triangle EIF} = S_{\triangle IMC} + S_{\triangle FBP} + S_{\triangle NEA}$.

C Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng bằng công thức diện tích

- Vận dụng định lý Py-ta-go
- Vận dụng công thức tính diện tích các hình để tính các đại lượng

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Một hình chữ nhật có tỉ số các cạnh là $\frac{2}{3}$ và diện tích của nó là 54cm^2. Tính chu vi của hình chữ nhật.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $BC = 6\text{cm}$, đường cao $AH = 4\text{cm}$. Tính đường cao ứng với cạnh bên.

Dạng 2: Sử dụng diện tích để chứng minh

- Phát hiện quan hệ giữa các yếu tố trong hình với diện tích rồi sử dụng công thức diện tích.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$ có tia Oz là phân giác. Lấy điểm P cố định thuộc Oz ($P \neq O$). Qua P kẻ đường thẳng d bất kỳ cắt Ox, Oy lần lượt tại M, N. Chứng minh khi d thay đổi thì $\dfrac{1}{OM} + \dfrac{1}{ON}$ không đổi.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có độ dài ba đường cao ứng với các cạnh BC, CA, AB là h_a, h_b, h_c. Từ điểm O bất kỳ trong tam giác, vẽ các đoạn thẳng có độ dài x, y, z vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh $\dfrac{x}{h_a} + \dfrac{y}{h_b} + \dfrac{z}{h_c} = 1$.

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF} = 1$

Nhận xét. Ví dụ 3 thực chất là trường hợp đặt biệt của ví dụ 2 khi O là trực tâm tam giác.

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ và điểm M nằm trong tam giác, các đường thẳng AM, BM, CM cắt cạnh đối diện của $\triangle ABC$ tại D, E, F. Chứng minh $\dfrac{AM}{AD} + \dfrac{BM}{BE} + \dfrac{CM}{CF} = 2$.

Ví dụ 5. Cho $\triangle ABC$ và điểm M nằm trong tam giác. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt cạnh đối diện của $\triangle ABC$ tại D, E, F. Chứng minh rằng $\dfrac{AF}{FB} \cdot \dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{CE}{EA} = 1$.

Ví dụ 6. Cho $\triangle ABC$ có h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao ứng với cạnh BC, CA, AB. Gọi r là khoảng cách từ giao điểm O của ba đường phân giác đến ba cạnh. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$.

Dạng 3: Tìm vị trí của điểm để thỏa mãn một đẳng thức về diện tích

- Dùng công thức diện tích để tính và dẫn đến điều kiện về vị trí của điểm thường liên quan đến khoảng cách.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $ABCD$ là hình vuông cạnh $12\,\text{cm}$. Xác định vị trí điểm M trên AB sao cho diện tích $\triangle ADM$ bằng $\dfrac{1}{3}$ diện tích hình vuông.

Dạng 4: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của diện tích một hình

- Nếu diện tích của một hình luôn lớn hơn hoặc bằng một hằng số m, và tồn tại một vị trí của hình để diện tích bằng m thì m là số đo diện tích nhỏ nhất của hình đó.
- Nếu diện tích của một hình luôn nhỏ hơn hoặc bằng một hằng số M, và tồn tại một vị trí của hình để diện tích bằng M thì M là số đo diện tích lớn nhất của hình đó.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Trong các hình chữ nhật có chu vi là $20\,\text{cm}$, hình nào có diện tích lớn nhất?

Nhận xét. Ta sẽ chứng minh được rằng: Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Ví dụ 2. Cho đoạn thẳng $AB = 6\,\text{cm}$. Lấy điểm M bất kỳ thuộc đoạn thẳng AB. Vẽ hình vuông $AMND$ và $BMPQ$ về cùng một phía đối với đường thẳng AB. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai hình vuông đó?

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = 36\,\text{cm}$. Vẽ hình vuông $MNPQ$ sao cho $M \in AB$, $Q \in AC$, $P, N \in BC$. Xác định vị trí của N và P để diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất.

Ví dụ 4. Cho M, N, P lần lượt thuộc cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{CP}{CA} = m$. Xác định vị trí của M, N, P để diện tích tam giác MNP nhỏ nhất.

Ví dụ 5. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A và cạnh $BC = a$. Gọi M là trung điểm của BC. Các điểm D, E thay đổi theo thứ tự nằm trên cạnh AB, AC sao cho $BD = AE$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích $\triangle MDE$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $AB = 10\,\text{cm}$, $BC = 12\,\text{cm}$. Tính chiều cao BD.

Bài 2. Cho $ABCD$ là hình bình hành. Phân giác các góc BAD và BCD cắt các đường chéo BD tại M và N. Chứng minh $\triangle ABM$ và $\triangle CDN$ có diện tích bằng nhau.

Bài 3. Tính các cạnh của một hình chữ nhật, biết bình phương của cạnh nhỏ là $25\,\text{cm}^2$ và diện tích của hình chữ nhật là $100\,\text{cm}^2$.

Bài 4. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD của hình bình hành $ABCD$. DM và BN cắt AC tại I và K. So sánh diện tích tứ giác $BMIK$ và tứ giác giác $DNKI$.

Bài 5. Trong trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích là $100\,\text{cm}^2$, hình nào có chu vi nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó?

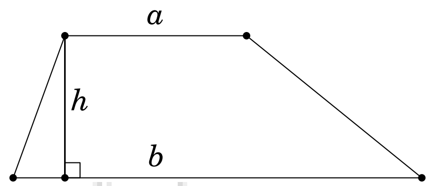
Chủ đề 3: DIỆN TÍCH HÌNH THANG. DIỆN TÍCH HÌNH THOI

A Trọng tâm kiến thức

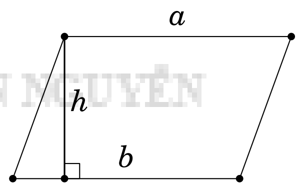
a) Diện tích hình thang

-

Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao $S = \dfrac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h$.

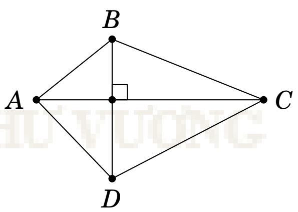


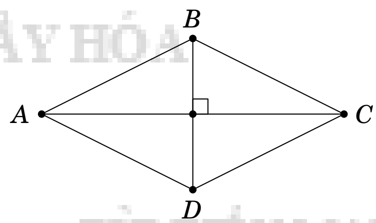
- Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó $S = a \cdot h$.



b) Diện tích hình thoi

- Diện tích tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích hai đường chéo $S = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$.
- Diện tích hình thoi $ABCD$ bằng nửa tích hai đường chéo $S = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$.





B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Tính diện tích hình thang, hình bình hành, hình thoi

- Sử dụng công thức tính diện tích.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính diện tích hình thang $ABCD$ biết $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$, $AB = 2\,\text{cm}$ và $CD = 4\,\text{cm}$.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích bằng $24\,\text{cm}^2$, AC cắt BD tại O. Gọi H, I lần lượt là hình chiếu của O trên BC, CD. Biết $OH = 2\,\text{cm}$, $OI = 3\,\text{cm}$. Tính chu vi hình bình hành $ABCD$.

Nhận xét. Đường chéo của hình bình hành chia hình đó thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Ví dụ 3. Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 30^\circ$, $AB = 4\,\text{cm}$. Tính diện tích hình thoi.

Ví dụ 4. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = 5\,\text{cm}$, $CD = 9\,\text{cm}$. Đường cao bằng đường trung bình của hình thang. Tính diện tích hình thang.

Ví dụ 5. Cho $\triangle ABC$ có $BC = 10\,\text{cm}$, đường cao $AH = 8\,\text{cm}$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Tính diện tích $BMNC$.

Ví dụ 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích bằng $60\,\text{cm}^2$. gọi M, N là trung điểm của BC, CD. Tính diện tích $\triangle AMN$.

Ví dụ 7. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Biết diện tích $\triangle AOB$ và $\triangle COD$ lần lượt là $4\,\text{cm}^2$ và $9\,\text{cm}^2$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Nhận xét. Qua bài toán, bạn nên nhớ thêm tính chất của diện tích của hình thang là: $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O thì $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC}$.

Ví dụ 8. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = 5\,\text{cm}$, $CD = 15\,\text{cm}$, $AC = 16\,\text{cm}$, $BD = 12\,\text{cm}$.Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức diện tích

- Sử dụng các công thức diện tích
- Vận dụng tính chất diện tích của đa giác.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy M thuộc AB, N thuộc cạnh CD. Gọi P là giao điểm của AN và DM, Q là giao điểm của BN và CM.

a) Chứng minh $S_{\triangle APM} + S_{\triangle MBQ} = S_{\triangle DNP} + S_{\triangle CQN}$.

b) Chứng minh $S_{MPNQ} = S_{\triangle ADP} + S_{\triangle BCQ}$.

Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ (BC là đáy nhỏ). Gọi I là trung điểm của CD. Qua I kẻ đường thẳng d song song với AB. Kẻ AH và BE vuông góc với d. Chứng minh $S_{ABCD} = S_{ABEH}$.

Ví dụ 3. Trên đường chéo AC của hình vuông $ABCD$, lấy điểm E (E khác A và C). Qua E kẻ đường thẳng song song với các cạnh và cắt AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q. So sánh diện tích $MNPQ$ và diện tích $ABCD$.

Ví dụ 4. Cho điểm O bất kì nằm trong hình bình hành $ABCD$. Chứng minh $S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OCD} = S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBC}$.

Dạng 3: Tính toán và chứng minh đẳng thức diện tích

- Vận dụng công thức diện tích các hình.
- So sánh các yếu tố diện tích, cạnh, đường cao.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 6\,\text{cm}$, $AD = 5\,\text{cm}$. Kẻ AH vuông góc với CD, kẻ AK vuông góc với BC. Biết $AH = 4\,\text{cm}$. Tính AK.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có các điểm E, F, G, H lần lượt thuộc AB, BC, DA soa cho EG không song song với AD. Biết rằng diện tích $EFGH$ bằng $\frac{1}{2}$ diện tích $ABCD$. Chứng minh $HF \parallel CD$.

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$, Trên BC lấy diểm I và trên AB lấy điểm K sao cho $AI = CK$. Gọi O là giao điểm của AI và CK. Chứng minh OD là phân giác của góc AOC.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = BD = 6\,\text{cm}$.

a) Tính diện tích hình thoi $ABCD$.

b) Lấy E đối xứng với A qua D. Tính diện tích tứ giác $ABCE$.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh $6\,\text{cm}$. Trên AB, CD lần lượt lấy M, N sao cho $AM = CN$. Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $AMCN$ bằng $\frac{1}{9}$ diện tích tứ giác $ABCD$.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ vuông cân, có cạnh huyền $BC = a$. Gọi D là trung điểm của AB. Điểm E di chuyển trên cạnh AC. Gọi H, K thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ D, E đến BC. Tính diện tích lớn nhất của hình thang $DEKH$. Khi đó hình thang trở thành hình gì?

Chủ đề 4: DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

A Trọng tâm kiến thức

- Việc tính diện tích của một đa giác thường được quy về tính diện tích các tam giác và các tứ giác đặc biệt.
- Ta thường chia đa giác thành các tam giác, các tứ giác tính được diện tích rồi tính tổng các diện tích đó; hoặc tạo ra một tam giác nào đó chứa đa giác.
- Trong một số trường hợp, để việc tính toán thuận lợi, ta có thể chia đa giác thành nhiều tam giác vuông và hình thang vuông.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Tính diện tích đa giác

- Xem phần kiến thức trọng tâm.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình vẽ bên. Dựa vào ký hiệu và biết $AM = 3\,\text{cm}$, tính diện tích ngũ giác $MNPCQ$.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ nhọn có diện tích $20\,\text{cm}^2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, AC, AB. Gọi D, E, F lần lượt là trực tâm của $\triangle ANP$, $\triangle BMP$, $\triangle CMN$. Tính diện tích lục giác $MEPDNF$.

Ví dụ 3. Cho hình chữ thập như hình vẽ bên, có 12 cạnh. Dựa vào số liệu hình vẽ, hãy tính diện tích hình chữ thập này.

Ví dụ 4. Tính diện tích mảnh đất đa giác $ABCDE$ như hình vẽ bên, biết $AI = 20\,\text{m}$, $KD = 40\,\text{m}$, $BI = 45\,\text{m}$, $CK = 65\,\text{m}$ và $EH = 50\,\text{m}$.

Ví dụ 5. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có diện tích $120\,\text{cm}^2$. Trên các cạnh AB, BC, CD, AD lấy các điểm tương ứng K, L, M, N sao cho $\dfrac{AK}{KB} = 2$; $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{CM}{MD} = 1$ và $\dfrac{DN}{NA} = \dfrac{1}{5}$. Tính diện tích đa giác $AKLCMN$.

Dạng 2: Cắt ghép hình có diện tích bằng diện tích hình đã cho

- Tìm kích thước của hình tạo thành.
- Dùng định lý Py-ta-go để tạo thành kích thước hình mới.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Một tấm bìa hình chữ nhật kích thước $4\,\text{m} \times 9\,\text{m}$. Có thể cắt tấm bìa thành hai mảnh để ghép lại một hình vuông được không?

Ví dụ 2. Cho một tấm bìa hình chữ thập như hình vẽ bên. Hãy chia hình chữ thập đó thành các mảnh ghép để ghép lại thành một hình vuông.

Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức diện tích

- Sử dụng tính chất diện tích đa giác.
- Số đo diện tích của một hình luôn là một số dương.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho một ngũ giác. Có ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 cắt nhau tạo ba điểm A, B, C thuộc miền trong ngũ giác sao cho mỗi đường thẳng chia ngũ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh diện tích tam giác ABC nhỏ hơn $\dfrac{1}{4}$ diện tích ngũ giác đã cho.

Ví dụ 2. Cho lục giác lồi $ABCDEF$ có các cặp cạnh đối song song và có diện tích bằng S. Chứng minh $S_{\triangle ACE} \geq \dfrac{1}{2} \cdot S$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tính diện tích phần gạch sọc như hình vẽ bên, biết diện tích mỗi ô vuông là một đơn vị diện tích.

Bài 2. Cho tam giác ABC có diện tích là S và điểm O nằm trong tam giác. Gọi I, H, K lần lượt là điểm đối xứng với O qua trung điểm của AB, AC, BC. Tính diện tích hình lục giác $AIBKCH$.

Bài 3. Chứng minh rằng hai hình chữ nhật bằng nhau kích thước $a \times b$ được xếp sao cho chúng cắt nhau tại 8 điểm thì diện tích phần chung lớn hơn nửa diện tích một hình chữ nhật.

Chủ đề 5: ÔN TẬP CHƯƠNG II

A Trọng tâm kiến thức

a) Đa giác, đa giác đều

- Tổng số đo các góc trong của đa giác n cạnh là $(n-2)\cdot 180^\circ$.
- Tổng số đo các góc ngoài của đa giác luôn bằng 360°.
- Số đo mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.
- Số đường chéo của đa giác n đỉnh là $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$.

b) Các công thức tính diện tích đa giác

- Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của hình chữ nhật $S = a\cdot b$, a, b là kích thước hình chữ nhật.
- Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của hình vuông $S = a^2$, a là độ dài cạnh của hình vuông.
- Diện tích tam giác vuông bằng tích nửa hai cạnh góc vuông $S = \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot b$, a, b là độ dài hai cạnh góc vuông.
- Diện tích tam giác bằng nửa của tích nửa một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó $S = \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot h$, a, h là độ dài cạnh và đường cao tương ứng.
- Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao $S = \dfrac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h$, a, b là độ dài hai đáy, h là độ dài đường cao tương ứng.
- Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó $S = a\cdot h$, a, h là độ dài cạnh và đường cao tương ứng.
- Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích hai đường chéo $S = \dfrac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2$, d_1, d_2 là độ dài hai đường chéo vuông góc.
- Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo $S = \dfrac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2$, d_1, d_2 là độ dài hai đường chéo.

c) Bổ sung

- Hai tam giác có chung một cạnh (hoặc có một cặp cạnh bằng nhau) thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đường cao ứng với hai cạnh đó.

- Hai tam giác có chung một đường cao (hoặc có một cặp đường cao bằng nhau) thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai cạnh tương ứng với đường cao đó.
- Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O thì $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC}$.

B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Tính số cạnh và số đo của đa giác

- Sử dụng tính chất về góc và đường chéo của đa giác, đa giác đều.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Một đa giác có tổng số đo các góc trong bằng 5 lần tổng số đo các góc ngoài. Hỏi đa giác có bao nhiêu cạnh?

Ví dụ 2. Đa giác đều có tổng số đo tất cả các góc ngoài và một góc trong của đa giác bằng 468°. Hỏi đa giác có bao nhiêu cạnh?

Ví dụ 3. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ và một điểm P sao cho $\triangle DPE$ đều. Tính $\widehat{APC}$.

Nhận xét. Lời giải sẽ là thiếu sót nếu ta xét thiếu trường hợp.

Dạng 2: Tính diện tích đa giác

- Sử dụng tính chất diện tích của tam giác, hình thang và công thức tính diện tích của các hình.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có diện tích $12\,\text{cm}^2$. LấyM bất kỳ thuộc BC. Kẻ BD, CN song song với AM như hình vẽ bên. Tính diện tích $\triangle MDN$.

Ví dụ 2. Cho ba viên gạch lát nền hình vuông $ABCD$, $CBEF$, $FEGH$ kích thước $40\,\text{cm} \times 40\,\text{cm}$ như hình vẽ bên dưới. Gọi O là giao điểm của BH và ED. Tính diện tích $\triangle BOE$.

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có diện tích $30\,\text{cm}^2$. Lấy M, N trên AD sao cho $AM = MN = ND$. Qua M, N kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại Q, P. Tính diện tích của hình thang $MNPQ$.

Dạng 3: Chứng minh về diện tích đa giác

- Sử dụng công thức diện tích tam giác, hình thang, hình bình hành.
- Hai tam giác có chung một cạnh và đường cao ứng với cạnh đó bằng nhau thì diện tích hai tam giác đó bằng nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi M là trung điểm AD. Chứng minh $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle MBC}$.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lấy M, N sao cho $AM = CN$. Trên AD lấy P bất kỳ. Gọi giao điểm của MN với BP và CP lần lượt là Q, R.
Chứng minh $S_{QBCR} = S_{AMQP} + S_{PRND}$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Gọi M, N là lần lượt hình chiếu của H trên AB, AC. Gọi I là giao điểm của BN và CM. Chứng minh $S_{\triangle BIC} = S_{AMIN}$.

Nhận xét. Để so sánh $S_{\triangle BIC}$ với S_{AMIN}, ta so sánh $S_{\triangle BNC}$ với $S_{\triangle MAC}$. Mà $AM = HN$, nên ta có $S_{\triangle AMC} = S_{\triangle AHC}$, do đó ta so sánh $S_{\triangle BNC}$ với $S_{\triangle AHC}$ từ đó dẫn đến so sánh $S_{\triangle BHN}$ với $S_{\triangle AHN}$.

Dạng 4: Sử dụng diện tích đa giác để giải toán

- Vận dụng công thức tính diện tích và tính chất của diện tích. Tìm mối liên hệ giữa các yếu tố để tìm ra lời giải.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC thỏa mãn $2\cdot AB = 3\cdot AC$. Vẽ BD, CE là hai đường cao. Tính tỉ số $\dfrac{BD}{CE}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Hãy tìm điểm O nằm trong tam giác $S_{\triangle OAB} : S_{\triangle OBC} : S_{\triangle OCA} = 2 : 3 : 4$.

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB < CD$. Lấy điểm M trên CD sao cho BM chia $ABCD$ thành hai phần có diện tích bằng nhau. Gọi N là trung điểm của AD. Chứng minh $MN \parallel BC$.

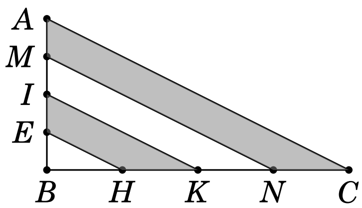
BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Số đo các góc trong một ngũ giác là tỉ lệ với 2; 3; 3; 5; 5. Tìm số đo của mỗi góc.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$. Gọi d là đường thẳng qua A. Xác định vị trí của đường thẳng d để tổng khoảng cách từ B và C đến d là nhỏ nhất.

Bài 3.

Cho $\triangle ABC$ vuông tại B. Trên cạnh AB lấy $AM = MI = IE = EB$. Kẻ MN, IK, EH song song với AC như hình vẽ bên. Tính tỉ số diện tích tứ giác $EHKI$ và $AMNC$.



Bài 4. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $3\cdot CD = 7\cdot AB$. Gọi M, N là trung điểm của AD và BC. Tính tỉ số diện tích tứ giác $ABNM$ và $MNCD$.

Bài 5. Qua đỉnh A của tứ giác $ABCD$, hãy dựng đường thẳng chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 6. Cho $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $24\,\text{cm}^2$. Gọi M là trung điểm của BC. Gọi N là giao điểm của AM và BD. Tính diện tích tứ giác $CDNM$.

Chương 3 TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Chủ đề 1: ĐỊNH LÍ TA-LÉT TRONG TAM GIÁC

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

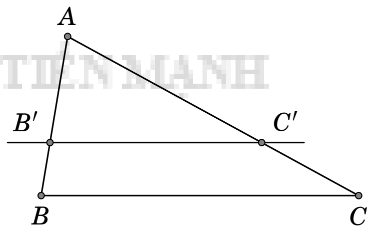
Định nghĩa 1: Tỉ số của hai đoạn thẳng Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

Định nghĩa 2: Đoạn thẳng tỉ lệ Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A'C'$ và $C'D'$ nếu có hệ thức

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'} \text{ hay } \frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}.$$

Định lí 5. *Định lí Ta-lét trong tam giác*

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Trong hình bên

$$\begin{cases}\triangle ABC \\ B'C' \parallel BC\end{cases} \Rightarrow \frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC};\ \frac{AB'}{B'B}=\frac{AC'}{C'C};\ \frac{B'B}{AB}=\frac{C'C}{AC}$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm tỉ số của các đoạn thẳng

- Sử dụng định nghĩa tỉ số hai đoạn thẳng.
- Sử dụng định lí Ta-lét.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Trên một đường thẳng, đặt ba đoạn thẳng liên tiếp $AB=BC=CD$. Tìm tỉ số $\frac{AB}{BD}, \frac{AB}{AD}, \frac{AC}{AD}$.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có AM là đường trung tuyến. Điểm E thuộc AM sao cho $AE=3EM$. Tia BE cắt tia AC tại N. Tính tỉ số $\frac{AN}{NC}$.

Dạng 2: Tính độ dài đoạn thẳng

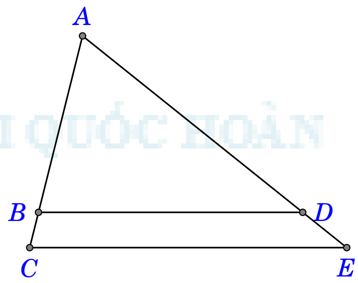
- Sử dụng định nghĩa tỉ số hai đoạn thẳng.
- Sử dụng định lí Ta-lét.
- Sử dụng tính chất của tỉ lệ thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

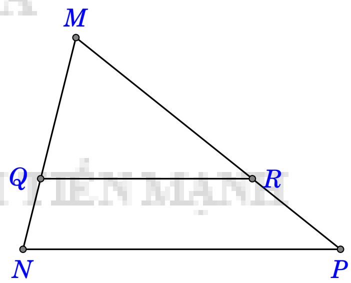
Ví dụ 1. Cho đoạn thẳng $AB = 10$ cm. Lấy điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{3}{2}$. Lấy D thuộc tia đối của tia BA sao cho $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{3}{2}$.

a) Tính độ dài CB. b) Tính độ dài DB. c) Tính độ dài CD.

Ví dụ 2.
Tìm độ dài DE trong hình vẽ bên. Biết $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm, $AD = 7{,}5$ cm và $BD \parallel CE$.



Ví dụ 3.
Cho hình bên, biết $QR \parallel NP$ và $MQ = 10$ cm, $QN = 5$ cm, $RP = 6$ cm. Tính độ dài MR.



Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5$ cm; $AC = 9$ cm. Kẻ đường thẳng d song song với BC cắt AB, AC thứ tự tại E, F. Xác định vị trí điểm E sao cho $AE = CF$.

Dạng 3: Chứng minh các hệ thức

- Vận dụng định lí Ta-lét.
- Sử dụng tính chất của tỉ lệ thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$ có điểm E thuộc AC. Kẻ $EF \parallel AB$ $(F \in BC)$, $EI \parallel CD$ $(I \in AD)$. Chứng minh $\dfrac{EF}{AB} + \dfrac{EI}{CD} = 1$.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$. Lấy điểm D thuộc đoạn AB, điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD = CE$, DE cắt BC tại M. Chứng minh $\dfrac{DM}{ME} = \dfrac{AC}{AB}$.

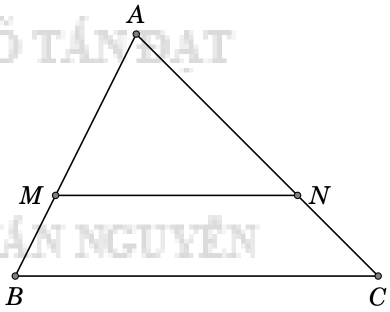
Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có AD là đường trung tuyến, G là trọng tâm. Qua G kẻ đường thẳng d cắt AB, AC thứ tự tại M, N. Chứng minh

a) $\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AN}=3$. b) $\dfrac{BM}{AM}+\dfrac{CN}{AN}=1$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

Cho hình vẽ bên, biết $MN \parallel BC$ và $AM = 6$ cm, $MB = 2$ cm, $AN = 7$ cm. Tính NC.



Bài 2. Cho tam giác ABC. Từ điểm M trên cạnh BC, kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và AC, chúng cắt các cạnh AC và AB thứ tự tại D và E. Tính tổng $\dfrac{AE}{AB}+\dfrac{AD}{AC}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy D sao cho $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{1}{2}$. Gọi M là trung điểm của BD. Tia AM cắt BC tại E. Tính tỉ số $\dfrac{EC}{EB}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $2MA = MB$. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại N. Qua N kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại P. Biết rằng $PC = 6$ cm. Tính BC.

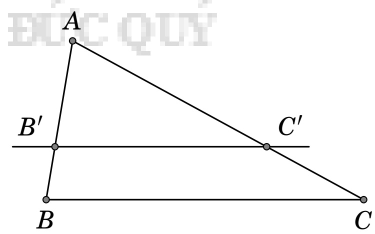
Bài 5. Cho tam giác ABC. Đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Cho biết $AM = 5$ cm, $MB = 3$ cm, $BC - MN = 3{,}6$ cm. Tính MN, BC.

Chủ đề 2: ĐỊNH LÍ ĐẢO VÀ HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÍ TA-LÉT

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Định lí 6. *Định lí Ta-lét đảo*

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.



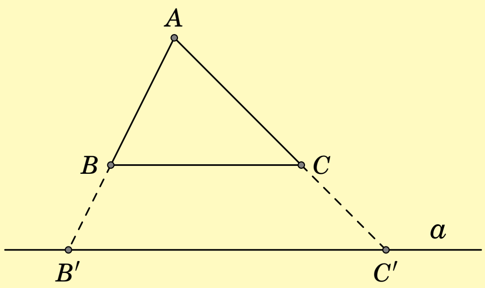
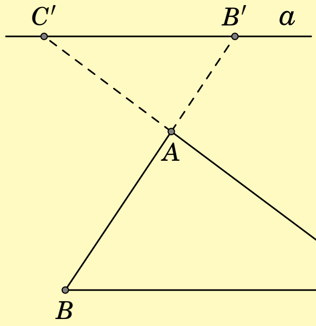
Trong hình bên

$$\begin{cases}\triangle ABC\\ \dfrac{AB'}{B'B}=\dfrac{AC'}{C'C}\end{cases} \Rightarrow B'C' \parallel BC.$$

Hệ quả 1 (Hệ quả định lí Ta-lét). Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Trong hình trên

$$\begin{cases}\triangle ABC\\ B'C' \parallel BC\end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB'}{AB}=\dfrac{AC'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}.$$

> **!** Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng a song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.
>
> 
>
>
> 
>

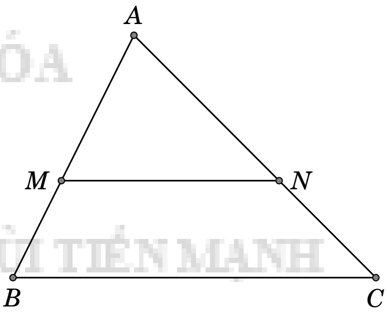
B Các dạng toán

Dạng 1: Sử dụng hệ quả của định lí Ta-lét để tính độ dài đoạn thẳng

- Vận dụng hệ quả của định nghlí Ta-lét để lập các tỉ số.
- Áp dụng tính chất của tỉ lệ thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1.
Cho hình sau, biết $MN \parallel BC$ và $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{3}{2}$; $BC = 6$ cm. Tính MN.



Ví dụ 2. Cho hình vẽ bên, có $AB \parallel CD$. Biết rằng $EA = 4$ cm, $EB = 5$ cm, $ED + EC = 18$ cm, $AB + CD = 22{,}5$ cm. Tính EC, ED, AB, DC.

Ví dụ 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), AC cắt BD tại O. Kẻ $OM \parallel CD$, biết $CD = 9$ cm, $MO = 3$ cm. Tính AB.

Dạng 2: Sử dụng hệ quả của định lí Ta-lét để chứng minh các hệ thức

Xét đường thẳng song song với một cạnh của tam giác, lập các đoạn thẳng tỉ lệ.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Từ điểm D bất kì trên cạnh BC kẻ đường thẳng song song với AM, cắt đường thẳng AB ở E, cắt đường thẳng AC tại F. Chứng minh rằng: $DE + DF = 2AM$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$, AD là đường phân giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}.$$

Dạng 3: Chứng minh hai đường thẳng song song

- Xét các đoạn thẳng tỉ lệ.
- Sử dụng định lí Ta-lét đảo.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Lấy điểm E thuộc đường chéo AC. Kẻ $EM \parallel BC$ ($M \in AB$), $EN \parallel CD$ ($N \in AD$). Chứng minh $MN \parallel BD$.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$, lấy D tùy ý thuộc cạnh BC, M tùy ý thuộc cạnh AD, gọi I, K thứ tự là trung điểm BM, CM. Các tia DI, DK cắt AB, AC thứ tự tại E, F. Chứng minh $IK \parallel EF$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $\triangle ABC$. Trên AB, AC lấy M, N sao cho $BM = \dfrac{2}{3}AB$, $CN = \dfrac{2}{3}AC$. Gọi O là giao điểm BN và CM. Tính tỉ số $\dfrac{ON}{OB}$.

Bài 2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB < CD$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo, S là giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên. Đường thẳng SO cắt AB, CD thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{MA}{ND} = \dfrac{MB}{NC}$; $\dfrac{MA}{NC} = \dfrac{MB}{ND}$.

b) $MA = MB$; $NC = ND$.

Bài 3. Cho tam giác ABC cố định. Các điểm D, E di động trên các cạnh tương ứng AB, AC sao cho $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{CE}{EA}$. Chứng minh trung điểm M của đoạn thẳng DE nằm trên đoạn thẳng cố định.

Bài 4. Cho tam giác ABC, hãy dựng hình vuông $MNPQ$ nội tiếp tam giác ABC (M trên AB, N trên AC, P và Q trên cạnh AC).

Bài 5. Cho tam giác ABC, M là điểm thuộc BC. Chứng minh rằng

$$MA \cdot BC < MC \cdot AB + MB \cdot AC.$$

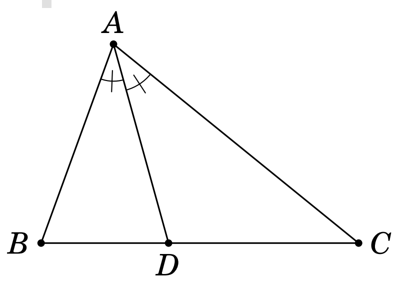
Chủ đề 3: TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Định lí 7.

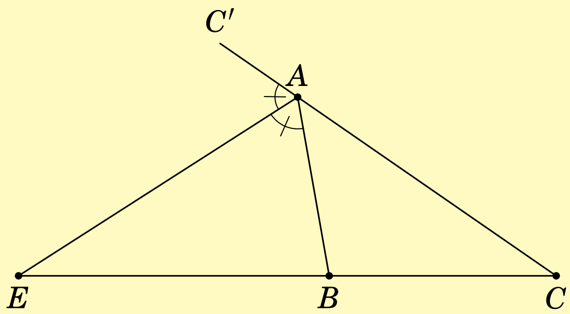
Trong tam giác, đường phân giác của một góc trong chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \\ \widehat{BAD} = \widehat{CAD} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}.$$



Định lý vẫn đúng với đường phân giác góc ngoài của tam giác.

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC\ (AB \neq AC)\\ \widehat{BAE} = \widehat{C'AE}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$



Các định lý trên có định lý đảo

$\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AD$ là đường phân giác trong của tam giác.

$\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AE$ là đường phân giác ngoài của tam giác.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng

Vận dụng tính chất đường phân giác của một tam giác và các tính chất của tỉ lệ thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 30$ cm, $AC = 45$ cm, $BC = 50$ cm, AD là đường phân giác trong. Tính độ dài đoạn thẳng BD, CD.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có AD là đường phân giác. Biết $AB = 15$ cm, $DC = 21$ cm, $BD = 9$ cm. Tính độ dài AC.

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 8$ cm. Các đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{A}$ cắt đường thẳng BC tại D và E. Tính độ dài đoạn DE.

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có AD là đường phân giác. Trên AB lấy điểm M, trên AC lấy điểm N sao cho $BM = BD$, $CN = CD$. Biết $AB = 7$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 12$ cm. Tính chu vi $\triangle AMN$.

Ví dụ 5. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có chu vi bằng 80 cm. Tia phân giác của $\widehat{B}$ cắt đường cao AH tại I. Biết $AI = \dfrac{3}{4}AH$. Tính độ dài các cạnh của $\triangle ABC$.

Ví dụ 6. Cho $\triangle ABC$ có đường phân giác AD. Biết rằng $BC = 10$ cm và $2AB = 3AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BD và CD.

Ví dụ 7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường phân giác AD. Biết $AB = 10$ cm, $AC = 15$ cm. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại E. Tính độ dài đoạn thẳng AE, EC.

Dạng 2: Chứng minh hệ thức hình học

Lập các đoạn thẳng tỉ lệ từ tính chất đường phân giác của tam giác rồi biến đổi.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có AD, BE, CF là các đường phân giác . Chứng minh rằng

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1.$$

Ví dụ 2. Đường trung tuyến BK và đường phân giác CD của $\triangle ABC$ cắt nhau tại P. Chứng minh rằng $\dfrac{PC}{PD} - \dfrac{AC}{BC} = 1$.

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có BM, CN là các đường phân giác. Chứng minh rằng

a) $MN \parallel BC$.

b) $\dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{AB} = \dfrac{1}{MN}$.

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 36°$. Chứng minh $AB^2 = BC^2 + AC \cdot BC$.

Dạng 3: Liên quan đến tỉ số diện tích tam giác

Phương pháp giải: Vận dụng công thức tính diện tích tam giác và tính chất đường phân giác của tam giác.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm và AD là đường phân giác. Tính tỉ số diện tích của $\triangle ABD$ và $\triangle ACD$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có AD là đường phân giác, $AB = 4$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 7$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng CD (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất). 5,1 cm.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Đường phân giác AD. Tính độ dài cạnh BD. $BC = 5$ cm, $BD = \dfrac{15}{7} = 2\dfrac{1}{7}$.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có AD là phân giác. Kẻ $DE \parallel AB$ ($E \in AC$). Biết $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm. Tìm tỉ số $\dfrac{AE}{AC}$. $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{2}{5}$.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có AM là trung tuyến. Tia phân giác các góc $\widehat{AMB}$, $\widehat{AMC}$ cắt AB, AC lần lượt tại D, E. Chứng minh rằng $DE \parallel BC$.

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có AD là đường phân giác. Biết $AB = 18$ cm, $DC = 12$ cm, $BD = 8$ cm. Tính chu vi $\triangle ABC$. 65 cm.

Chủ đề 4: Khái niệm hai tam giác đồng dạng. Trường hợp đồng dạng thứ nhất

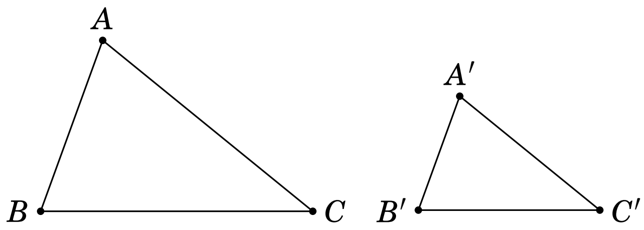
A Trọng tâm kiến thức

I. Khái niệm hai tam giác đồng dạng

$\triangle A'B'C'$ gọi là đồng dạng với $\triangle ABC$ nếu

$$\begin{cases} \widehat{A'} = \widehat{A};\ \widehat{B'} = \widehat{B};\ \widehat{C'} = \widehat{C} \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}. \end{cases}$$

Kí hiệu: $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.



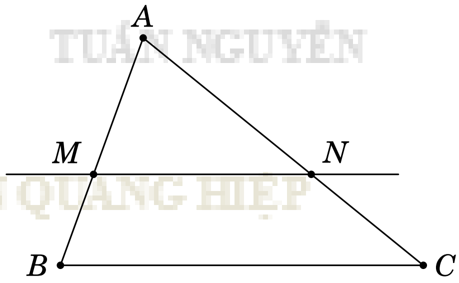
Tính chất 3.

- Mỗi tam giác đồng dạng với chính nó.
- Nếu $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$ thì $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.
- Nếu $\triangle A'B'C' \backsim \triangle A''B''C''$ và $\triangle A''B''C'' \backsim ABC$ thì $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.

Định lí 8. *No*

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC\\ MN \parallel BC\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AMN \backsim \triangle ABC.$$



! Định lý cũng đúng cho trường hợp đường thẳng cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.

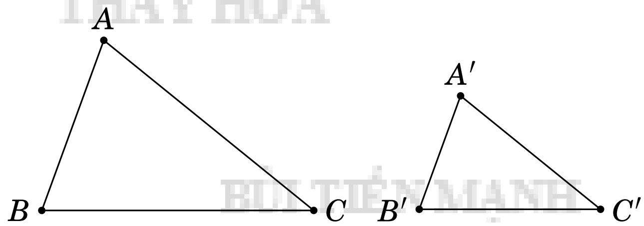
II. Trường hợp đồng dạng thứ nhất

Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

thì $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.



B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Tìm tỉ số đồng dạng của hai tam giác

Sử dụng định nghĩa hoặc định lý hai tam giác đồng dạng.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$, lấy điểm M thuộc AB sao cho $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{2}{3}$. Kẻ hai đường thẳng qua M lần lượt song song với AC và BC cắt BC và AC lần lượt tại D và F.

a) Nêu tất cả các cặp tam giác đồng dạng.

b) Với mỗi cặp tam giác đồng dạng, hãy viết tỉ số đồng dạng tương ứng.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$, tỉ số đồng dạng bằng $\dfrac{2}{3}$. Biết chu vi $\triangle ABC$ là 24 cm. Tính chu vi $\triangle DEF$.

Dạng 2: Tính độ dài đoạn thẳng

- Viết hai tam giác đồng dạng.
- Lập tỉ số các cặp cạnh tương ứng rồi sử dụng tỉ lệ thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, biết $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Cạnh lớn nhất của $\triangle A'B'C'$ là 25 cm. Tính cạnh nhỏ nhất của $\triangle A'B'C'$.

Dạng 3: Chứng minh hai tam giác đồng dạng

- Xếp các cạnh của hai tam giác theo cùng một thứ tự (chẳng hạn từ nhỏ tới lớn).
- Lập ba tỉ số, nếu chúng bằng nhau thì hai tam giác đồng dạng.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 7$ cm và $\triangle A'B'C'$ có $A'B' = 4{,}5$ cm, $B'C' = 7{,}5$ cm, $C'A' = 10{,}5$ cm. Hỏi $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có đồng dạng với nhau không? Tại sao?

Ví dụ 2. Cho điểm M nằm trong $\triangle ABC$. Gọi G_1, G_1, G_3 lần lượt là trong tâm các tam giác MBC, MCA, MAB. Chứng minh rằng $\triangle G_1G_2G_3 \backsim \triangle ABC$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, BC. Chứng minh $\triangle PMN \backsim \triangle ACB$.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm, $BC = 12$ cm và $\triangle DEF$ có $DE = 24$ cm, $EF = 18$ cm, $DF = 12$ cm. $\triangle ABC$ có đồng dạng với $\triangle DEF$ hay không? Vì sao?

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = 2$ cm, $BC = 10$ cm, $CD = 12{,}5$ cm, $AD = 4$ cm, $BD = 5$ cm. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thang.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm và $\triangle DEF$ vuông tại D có $DE = 15$ cm, $EF = 25$ cm.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng BC, DF.

b) $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$ có đồng dạng với nhau không? Vì sao?

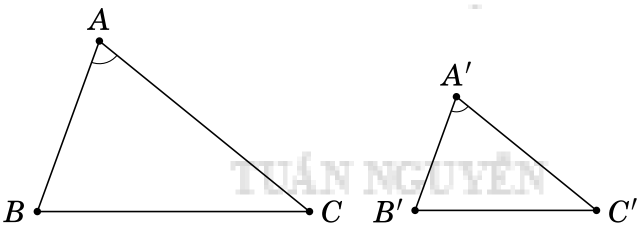
Bài 5. Cho $\triangle ABC$. Trên cạnh AB lấy các điểm I, K sao cho $AI = IK = KB$. Trên cạnh BC lấy các điểm E và D sao cho $BD = DE = EC$. Trên cạnh AC lấy điểm F và G sao cho $AF = FG = GC$. Gọi M là giao điểm của AD và BF, N là giao điểm của BG và CK, P là giao điểm của AE và CI. Chứng minh $\triangle ABC \backsim \triangle NPM$.

Chủ đề 5: TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ HAI

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng.

Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có $\begin{cases} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \end{cases}$ thì $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.



B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Chứng minh hai tam giác đồng dạng

Xét hai tam giác, chọn ra hai góc bằng nhau, xét tỉ số hai cạnh tạo nên mỗi góc đó. Nếu hai tỉ số bằng nhau thì hai tam giác đồng dạng.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm. Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy điểm D và E sao cho $AD = 8$ cm, $AE = 6$ cm. Chứng minh rằng $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

Dạng 2: Tính độ dài đoạn thẳng

- Chứng minh hai tam giác (chứa cạnh cần tính độ dài) đồng dạng.
- Lập tỉ số cặp cạnh tương ứng và dùng tính chất của tỉ lệ thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 9$ cm. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $CD = 4$ cm. Tính độ dài cạnh AD.

Dạng 3: Nhận biết hai tam giác đồng dạng để tính góc

Xét hai tam giác, chọn ra hai góc bằng nhau, xét tỉ số hai cạnh tạo nên mỗi góc đó. Nếu hai tỉ số bằng nhau thì hai tam giác đồng dạng.
Từ hai tam giác đồng dạng, suy ra các cặp góc tương ứng bằng nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 10$ cm, $CD = 30$ cm, $AD = 35$ cm. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $AM = 15$ cm. Tính số đo góc $\widehat{BMC}$.

Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $AB = 4$ cm, $BD = 6$ cm, $CD = 9$ cm và góc $\widehat{ADB} = 35^\circ$. Tính góc $\widehat{BCD}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = \dfrac{BC}{2}$. Gọi M là trung điểm của BC, D là trung điểm của BM. Chứng minh rằng $AD = \dfrac{AC}{2}$.

Bài 2. Giả sử D là một điểm nằm trong tam giác nhọn ABC sao cho $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^\circ$ và $AC \cdot BC = AD \cdot BC$. Chứng minh rằng $\dfrac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \sqrt{2}$.

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ $(AB \parallel CD)$ và $AB \perp BD$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại G. Trên đường thẳng vuông góc với AC tại C lấy điểm E sao cho $CE = AG$ và đoạn GE không cắt đường thẳng CD. Trên đoạn CD lấy điểm F sao cho $DF = GB$. Chứng minh rằng

a) $\triangle FDG \backsim \triangle ECG$.

b) $GF \perp EF$.

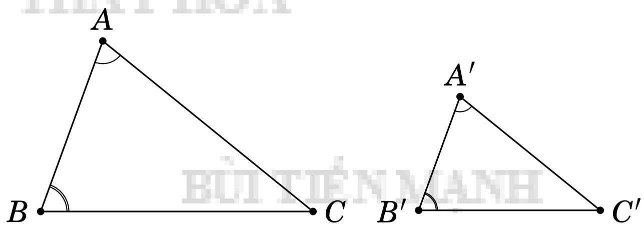
Bài 4. Cho hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ có $AB = 4$ cm, $BD = 8$ cm, $CD = 16$ cm. Chứng minh rằng $BC = 2AD$.

Chủ đề 6: Trường hợp đồng dạng thứ ba

A Trọng tâm kiến thức

Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases}$ thì $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.



B Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 1: Chứng minh hai tam giác đồng dạng

Chứng minh hai tam giác có hai cặp góc bằng nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} > \widehat{C}$. Trên AC lấy điểm D sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{C}$. Chứng minh rằng $\triangle ABC \backsim \triangle ADB$.

Dạng 2: Chứng minh hệ thức hình học

- Chứng minh hai tam giác đồng dạng;
- Vận dụng tính chất của hai tam giác đồng dạng và tỉ lệ thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$. Lấy D thuộc AB, E thuộc AC sao cho $\widehat{ACD} = \widehat{ABE}$. Chứng minh rằng $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD}$.

Ví dụ 2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{A} = \widehat{CBD}$. Chứng minh rằng $BD^2 = AB \cdot CD$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại B với $AB = 2BC$. Lấy điểm D thuộc cạnh AC sao cho $BC = CD$, điểm E thuộc cạnh AB sao cho $AD = AE$. Chứng minh rằng $AD^2 = AB \cdot AE$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có AD là đường cao. Đường phân giác góc $\widehat{B}$ lần lượt cắt AD, AC tại F, E. Chứng minh rằng $\dfrac{DF}{FA} = \dfrac{AE}{EC}$.

Ví dụ 5. Cho tam giác MNP thỏa mãn $3\widehat{M} + 2\widehat{N} = 180^\circ$. Chứng minh rằng $PN^2 + MP \cdot MN - MN^2 = 0$.

> **!** Vận dụng kỹ thuật trên, ta có thể làm được bài toán đảo sau đây
> "Cho tam giác MNP thỏa mãn $PN^2 + MP \cdot MN - MN^2 = 0$. Chứng minh $3\widehat{M} + 2\widehat{N} = 180^\circ$".

Dạng 3: Tính độ dài đoạn thẳng

- Chứng minh hai tam giác đồng dạng;
- Lập tỉ số cặp cạnh tương ứng rồi sử dụng tỉ lệ thức.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ có $\widehat{A} = \widehat{M}$, $\widehat{B} = \widehat{N}$, $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm, $MN = 10$ cm, $MP = 8$ cm. Tính độ dài các cạnh còn lại của hai tam giác.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} > \widehat{C}$. Trên BC lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{C}$. Biết $AB = 5$ cm, $BC = 10$ cm. Tính độ dài các cạnh BD, CD.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ đều có O là trung điểm cạnh BC. Vẽ góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$ sao cho các tia Ox, Oy cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng

a) $BC^2 = 4BE \cdot FC$.

b) EO là phân giác $\widehat{BEF}$.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BH, AH. Chứng minh rằng

a) $\triangle ABM \backsim \triangle CAN$.

b) $AM \perp CN$.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{C} = 2\widehat{A}$ và $AC = 2BC$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ và $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm. Tính độ dài cạnh BC.

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là điểm trong hình bình hành sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$. Chứng minh rằng $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$.

Chương 4 HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG HÌNH CHÓP ĐỀU

Chủ đề 1: CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

I. HAI TAM GIÁC VUÔNG ĐỒNG DẠNG NẾU

- Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia.
- Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác kia.
- Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và một cạnh của tam giác vuông kia.

II. TỈ SỐ HAI ĐƯỜNG CAO, TỈ SỐ DIỆN TÍCH CỦA HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

- Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.
- Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

III. ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Sử dụng tam giác đồng dạng, ta có thể xác định được chiều cao, xác định khoảng cách bằng cách đo đạc gián tiếp.

B CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC VUÔNG ĐỒNG DẠNG

Dựa vào dấu hiệu đồng dạng của hai tam giác vuông.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh $\triangle HBA \backsim \triangle HAC$.

Dạng 2: TÍNH ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG

Chứng minh hai tam giác vuông đồng dạng để tìm cặp đoạn thẳng tỉ lệ. Từ đó tính độ dài đoạn thẳng cần tim.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, AH là đường cao. Biết $AB = 15$ cm, $BC = 25$ cm. Tính độ dài cạnh AH.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ nhọn có AD là đường cao, H là trực tâm. Biết $BD = 4$ cm, $DC = 10$ cm, $AD = 8$ cm. Tính HD.

Ví dụ 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Biết $AB = 16$ cm, $AD = 20$ cm. Tính độ dài CD.

Dạng 3: CHỨNG MINH HỆ THỨC HÌNH HỌC

Chứng minh các cặp tam giác đồng dạng, lập ra các tỉ số cần tìm, biến đổi các tỉ số đó.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ nhọn có các đường cao AI, BD, CE cắt nhau tại H. Chứng minh:

a) $BH \cdot BD = BI \cdot BC$;

b) $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC^2$

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$, $\widehat{C} = 90^\circ, CH$ là đường cao. Lấy E thuộc CH. Kẻ BD vuông góc với AE (D thuộc đường thẳng AE). Chứng minh

a) $AE \cdot AD + BA \cdot BH = AB^2$;

b) $AE \cdot AD - HA \cdot HB = AH^2$

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, AH là đường cao. Kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với $AB, AC, E \in AB, F \in AC$. Chứng minh $AB \cdot AE + AC \cdot AF = 2EF^2$.

Dạng 4: Tính diện tích đa giác

- Lập tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng.
- Thay số rồi tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, AH là đường cao. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Tính diện tích tứ giác $AIHK$ biết $BC = 5$ cm, $AH = 2$ cm.

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có điểm M trên cạnh AC. Kẻ MN song song với BC ($N \in AB$). Kẻ MP song song với AB ($P \in BC$). Biết diện tích $\triangle AMN$ và $\triangle CMP$ lần lượt là 4 cm^2 và 9 cm^2. Tính diện tích $\triangle ABC$.

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao. Biết $BH = 4$ cm, $HC = 9$ cm. Tính diện tích $\triangle ABC$.

Ví dụ 4. Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích là 30 cm^2. Lấy M là trung điểm AB, lấy N thuộc CD sao cho $DN = \frac{1}{3}CD$. AN cắt DM tại O. Tính diện tích $\triangle AOM$.

Dạng 5: Ứng dụng thực tế của tam giác đồng dạng

- Để đo gián tiếp chiều cao, chúng ta cần tìm hai tam giác đồng dạng rồi lập tỉ số giữa các cạnh tương ứng.
- Để đo gián tiếp khoảng cách, chúng ta sử dụng tam giác đồng dạng hoặc định lí Ta-lét để lập tỉ số.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Bạn An đặt một cái gương nhỏ trên mặt đất sao cho bạn ấy nhìn thấy ngọn cây A hiện trong gương. Biết khoảng cách từ mắt tới đất là $DC = 1{,}6$ cm và đo được $DE = 2$ m, $EB = 20$ m. Tính chiều cao của cây BA.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°; BC \perp BD; AB = 1$ cm; $CD = 4$ cm. Tính số đo góc C.

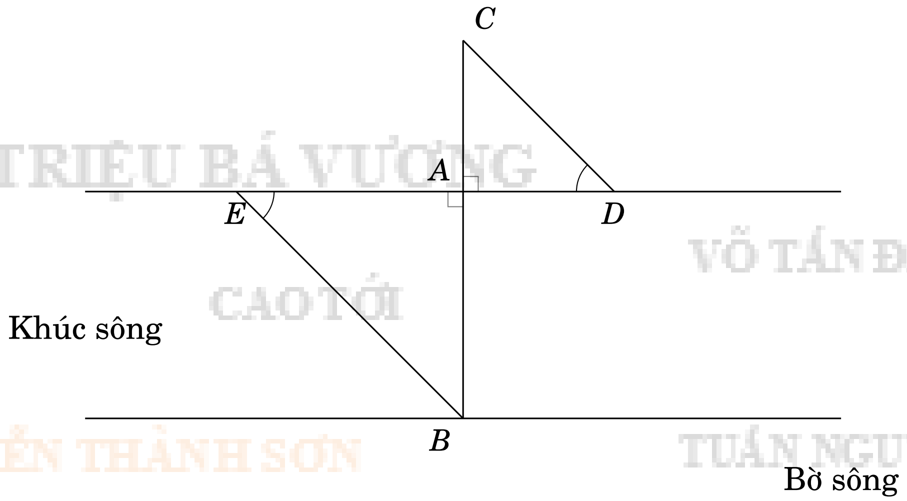
Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A, có $AB = 13$ cm, $BC = 10$ cm. Đường cao BE. Tính độ dài đoạn EC.

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và AC cắt BD tại O. Biết $AB = 2$ cm, $CD = 8$ cm, diện tích hình thang là 25 cm^2. Tính diện tích $\triangle COD$.

Bài 4. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$ biết hai đường cao của nó bằng 12 cm, 15 cm và chu vi là 72 cm.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi CM là trung tuyến. Từ A vẽ đường thẳng vuông góc với MC cắt BC ở H. Tính tỉ số $\dfrac{BH}{HC}$.

Bài 6. Để đo chiều rộng AB của một con sông. Người ta đóng đường thẳng xy vuông góc với AB tại A rồi xác định về hai phía hai điểm D và E. Dùng dụng cụ đo, ta đo được $\widehat{DEB} = \widehat{EDC}, AD = 10$ m. $AC = 20$ m, $AE = 30$ m. Tính chiều rộng AB của khúc sông.



Chủ đề 2: Ôn tập chương

A Trọng tâm kiến thức

a) Đoạn thẳng tỉ lệ, định lí Ta-lét, định lí đảo và hệ quả của định lí Ta-lét.

b) Tính chất đường phân giác trong tam giác.

c) Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác.

- Cạnh - cạnh - cạnh.
- Cạnh - góc - cạnh.
- Góc - góc.

d) Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông.

e) Ứng dụng thực tế của hai tam giác đồng dạng.

B Các dạng toán

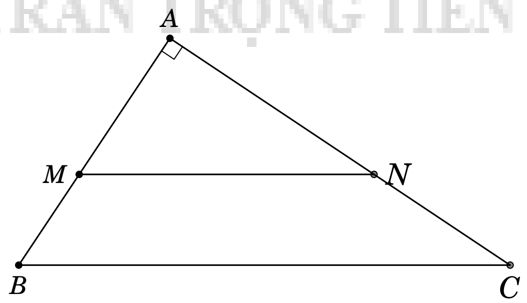
Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng

Vận dụng định lí, hệ quả định lí Ta-lét, tính chất đường phân giác trong tam giác và tam giác đồng dạng để thiết lập tỉ số từ đó tính được độ dài đoạn thẳng.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1.

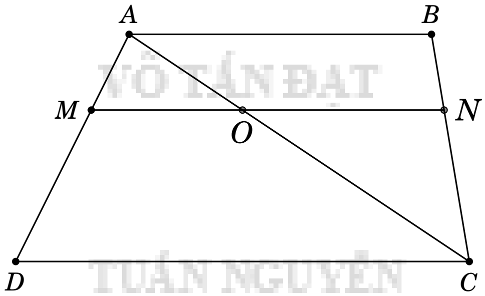
Cho hình vẽ bên. Biết $\widehat{A} = 90^\circ$, $MN \parallel BC$ và $AM = 3$ cm, $AN = 4$ cm, $NC = 2$ cm. Tính BC?



Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 8$ cm, $BC = 16$ cm, $AC = 12$ cm. Một đường thẳng d song song với BC cắt AB và AC tại M và N sao cho $BM = AN$. Tìm độ dài đoạn MN?

Ví dụ 3.

Cho hình vẽ sau, biết $AB \parallel MN \parallel CD$; $AB = 6$ cm, $CD = 9$ cm và $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{1}{2}$. Tính độ dài đoạn MN.



Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ vuông góc A, có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm và đường phân giác AD. Kẻ $DE \parallel AB$ (E thuộc AC) thì độ dài DE là bao nhiêu?

Ví dụ 5. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC = 10$ cm. Tia phân giác góc B cắt đường cao AH tại I. Biết $\dfrac{AI}{IH} = \dfrac{5}{3}$. Tính chu vi $\triangle ABC$.

Dạng 2: Tính tỉ số, diện tích và tỉ số diện tích

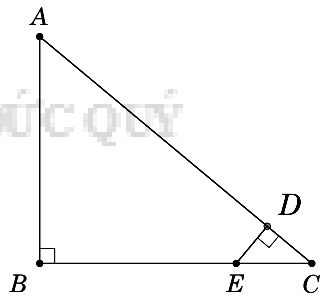
- Vận dụng định lí Ta-lét và hệ quả thiết lập tỉ số đoạn thẳng.
- Vận dụng tính chất hai tam giác đồng dạng thiết lập tỉ số diện tích.
- Ứng dụng tính chất diện tích của tam giác.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có điểm D trên AB sao cho $BD = \dfrac{1}{3}AB$. Kẻ DE song song với BC ($E \in AC$). Gọi O là giao điểm của BE và CD. Tìm tỉ số $\dfrac{OE}{OB}$.

Ví dụ 2.

Cho hình vẽ sau, biết $AB = 7$ cm, $CD = 6$ cm, $DE = 5$ cm. Tính diện tích $ABED$.



Dạng 3: Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

- Sử dụng định lí, hệ quả định lí Ta-lét và tam giác đồng dạng để thiết lập tỉ số.
- Chú ý rằng: $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{m}$ thì $a = b$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M là trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD; K là giao điểm của BM và AC.

a) Chứng minh $IK \parallel AB$.

b) Gọi giao điểm của đường thẳng IK với AD và BC là F và E. Chứng minh rằng $FI = IK = KE$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có BM, CN là các đường trung tuyến ($BM < CN$), G là trọng tâm. Từ điểm D bất kỳ thuộc cạnh BC, kẻ $DE \parallel CN$, $DF \parallel BM$ ($E \in AB$; $F \in AC$). Gọi I, K là giao điểm của EF với BM, CN. Chứng minh $EI = IK = KF$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Từ điểm M thuộc cạnh BC kẻ $MP \perp AB$; $MQ \perp AC$ ($P \in AB$; $Q \in AC$). Kẻ $PE \perp PQ$; $QE \perp PQ$ ($E, F \in BC$). Chứng minh rằng $BE = CF$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với BC cắt cạnh AB, AC tại M, N. Qua A vẽ đường thẳng song song với BC và cắt các đường thẳng BN, CM tại I, K. Chứng minh rằng $AI = AK$.

Dạng 4: Tính tỉ số của hai đường thẳng

Vẽ thêm đường phụ song song để tạo thêm các cặp đoạn thẳng tỉ lệ.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, lấy điểm M trên BC sao cho $BM = \frac{1}{2}MC$. Trên AM lấy điểm N sao cho $MN = \frac{1}{2}AN$. Gọi P là giao điểm của đường thẳng BN và AC. Tính tỉ số $\frac{AP}{PC}$?

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC, lấy D trên cạnh AB và điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD = CE$. Gọi K là giao điểm của DE và BC. Chứng minh rằng $\frac{KE}{KD}$ không đổi khi D; E thay đổi.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng không đi qua các đỉnh của tam giác ABC và cắt đường thẳng BC, CA, AB tại M, N, P thì $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$ (Định lý Mê-nê-la-uýt).

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu trên các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C của tam giác ABC, lấy các điểm M, N, P sao cho AM, BN, CP đồng quy tại O thì $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$ (định lý Xê-va).

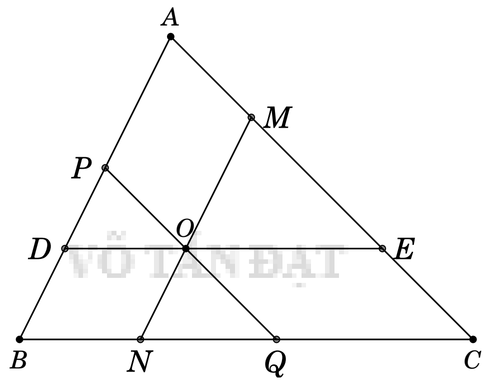
C Bài tập tự luyện

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ nhọn có đường cao BD; CE. Kẻ $DF \perp AB$, $EG \perp AC$. Chứng minh rằng $FG \parallel BC$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên AB lấy điểm D và trên BC lấy điểm E sao cho hình chiếu của DE trên BC bằng $\frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng đường vuông góc với DE tại E luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 9.

Cho hình vẽ bên. Biết $DE \parallel BC$, $MN \parallel AB$, $PQ \parallel AC$. Tính tổng $\dfrac{DE}{BC} + \dfrac{PQ}{AC} + \dfrac{MN}{AB}$.



Bài 10. Cho tam giác ABC với điểm M thuộc miền trong tam giác. Gọi I, J, K thứ tự là giao điểm của các tia AM, BM, CM với các cạnh BC, CA, AB. Đường thẳng qua M và song song với BC cắt IK, IJ tại E; F. Chứng minh $ME = MF$.

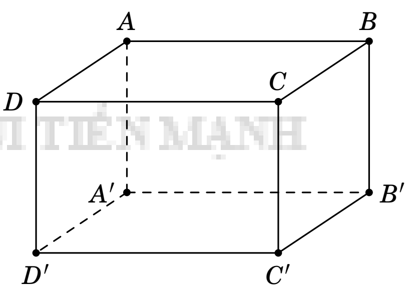
Bài 11. Chứng minh rằng nếu trên các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C của tam giác ABC, lấy các điểm M, N, P sao cho AM, BN, CP đồng quy tại O thì $\dfrac{AO}{OM} = \dfrac{AP}{PB} + \dfrac{AN}{NC}$ (định lý Van-Oben).

Chủ đề 3: HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

I. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

- Có 6 mặt là hình chữ nhật.
- Có 8 đỉnh và 12 cạnh.
- Hai mặt $ABCD$ và $A'B'C'D'$ coi là hai mặt đáy. Bốn mặt còn lại là các mặt bên.
  Đặc biệt: Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt là những hình vuông.



II. MẶT PHẲNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG

- Mỗi mặt của hình hộp chữ nhật, chẳng hạn mặt $ABCD$ là một phần của mặt phẳng $(ABCD)$.
- Nếu hai điểm A, B thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ thì đường thẳng AB nằm trong mặt phẳng đó.

III. HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Với hai đường thẳng phân biệt. chúng có thể:

- Cắt nhau: Nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng và chỉ có một điểm chúng.

- Song song: Nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
  Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Chéo nhau: Nếu chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng. Ví dụ: đường thẳng AB và đường thẳng CC'.

IV. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

- Khi đường thẳng AB không nằm trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ mà $AB \parallel A'B'$ thì $AB \parallel (A'B'C'D')$.
- Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau AB và AD; mặt phẳng $(A'B'C'D')$ chứa hai đường thẳng cắt nhau $A'B'$ và $A'D'$. Nếu $AB \parallel A'B'$ và $AD \parallel A'D'$ thì $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$.

!

- Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì chúng không có điểm chung.
- Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.
- Hai mặt phẳng phân biệt mà có một điểm chung thì chúng có chung một đường thẳng đi qua điểm chung đó (gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng). Ta nói hai mặt phẳng này cắt nhau.

B CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

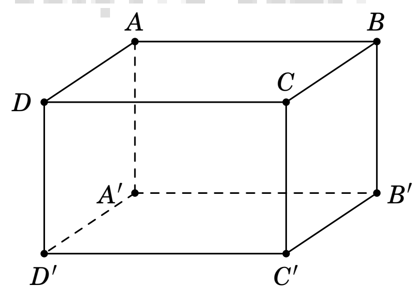
Dạng 1: Xác định vị trí của hai đường thẳng trong không gian

- Để chứng tỏ hai đường thẳng cắt nhau, ta có thể chỉ ra điểm chung duy nhất của chúng.
- Để chứng tỏ hai đường thẳng song song, ta có thể chứng tỏ chúng là hai cạnh đối của một hình bình hành, hình chữ nhật, hoặc chứng tỏ chúng cùng song song với một đường thẳng thứ ba.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.



a) Cạnh AB và cạnh nào cắt nhau?

b) Cạnh AB song song với cạnh nào?

c) Cạnh AB chéo nhau với cạnh nào?

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DD' và CC'. Chứng minh rằng:

a) $MN \parallel AB$.

b) $AM \parallel BN$.

Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là giao điểm của AC và BD; O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

a) Điểm O có thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ không? Vì sao?

b) Điểm O có thuộc đường thẳng DD' không? Vì sao?

c) OO' song song với những đường thẳng nào?

Dạng 2: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng. Chứng minh hai mặt phẳng song song.

- Nếu $a \notin \text{mp}(P)$, $b \in \text{mp}(P)$ mà $a \parallel b$ thì $a \parallel \text{mp}(P)$.
- Để chứng minh $\text{mp}(P) \parallel \text{mp}(Q)$ ta cần chỉ ra hai đường thẳng cắt nhau của $\text{mp}(P)$ cùng song song với $\text{mp}(Q)$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) CD song song với những mặt phẳng nào?

b) AC song song với mặt phẳng nào?

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC', DD'. Chứng minh rằng:

a) $NP \parallel \text{mp}(A'B'C'D')$.

b) $\text{mp}(MNPQ) \parallel \text{mp}(A'B'C'D')$.

Dạng 3: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng ta có thể chỉ ra hai điểm chung của hai mặt phẳng đó. Giao tuyến chính là đường thẳng đi qua hai điểm chung đó.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy:

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(DCC'D')$.

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(DBB'D')$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Hai mặt phẳng (BCD') và $(B'CD)$ cắt nhau theo giao tuyến nào?

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy kể tên các cặp mặt phẳng song song.

Bài 2. Trong một hình hộp chữ nhật hãy kể tên:

a) Các cạnh song song?

b) 4 cặp cạnh chéo nhau?

Bài 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F, M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD, $A'B'$ và $C'D'$. Chứng minh rằng $(AMND) \parallel (EB'C'F)$.

Bài 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng bốn đường chéo AC', BD', CA' và DB' đồng quy.

Bài 5. Một hình lập phương cạnh dài 5 đơn vị được tạo thành bởi 125 hình lập phương nhỏ cạnh dài 1 đơn vị. Người ta sơn cả 6 mặt của hình lập phương lớn. Hỏi có bao nhiêu hình lập phương nhỏ:

a) được sơn cả 3 mặt.

b) được sơn đúng 2 mặt.

c) được sơn đúng 1 mặt.

d) không được sơn mặt nào.

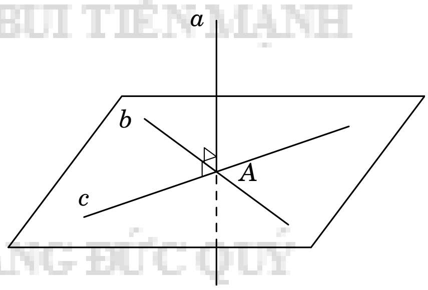
Chủ đề 4: THỂ TÍCH CỦA HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

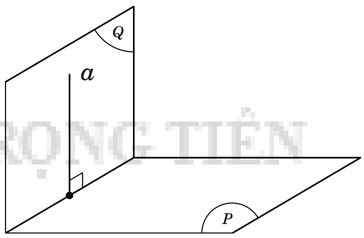
a) Khi đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau b và c của (P) thì ta nói $a \perp (P)$.

b) Lưu ý: Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng tại điểm A thì nó vuông góc với mọi đường thẳng đi qua A và nằm trong mặt phẳng đó.



II. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Khi một trong hai mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau. Nếu $a \in (Q)$ và $a \perp (P)$ thì $(Q) \perp (P)$.



III. THỂ TÍCH CỦA HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

$$V = abc \quad (a,\ b,\ c \text{ là ba kích thước}).$$

Đặc biệt: Thể tích hình lập phương cạnh a là $V = a^3$.

B CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng $a \perp (P)$ ta chứng minh a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P).

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $CC' \perp (A'B'C'D')$.

b) $CD \perp (ADD'A')$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng các tứ giác $DBB'D'$ và $ACC'A'$ là những hình chữ nhật.

Dạng 2: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc ta chứng minh có một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với mặt phẳng kia.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Giải thích tại sao các mặt phẳng $(BB'C'C)$ và $(AA'D'D)$ cùng vuông góc với $(A'B'C'D')$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(DBB'D')$ vuông góc với nhau.

Dạng 3: Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích và một số yếu tố khác của hình hộp chữ nhật.

- Diện tích xung quanh = Tổng diện tích của bốn mặt bên = Chu vi đáy × chiều cao.
- Diện tích toàn phần = Diện tích xung quanh + Diện tích hai đáy.
- Thể tích = Tích của ba kích thước.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c. Gọi d là độ dài một đường chéo. Chứng minh rằng $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Ví dụ 2. Đường chéo của một hình lập phương bằng $\sqrt{12}$. Tính thể tích của hình lập phương đó.

Ví dụ 3. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 4, 5, 3. Tính

a) Thể tích của hình hộp chữ nhật.

b) Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật đó.

Ví dụ 4. Một hình hộp chữ nhật có diện tích xung quanh là 180 cm^2, chiều cao là 6 m. Biết một cạnh đáy dài 8 m. Tính thể tích của hình hộp chữ nhật này.

Ví dụ 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $AB=5$, $AD=2$ và $AC'=15$. Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) $DD' \perp D'B'$.   b) $BB' \perp (ABCD)$.   c) $(BCC'B') \perp (ABCD)$.

Bài 2. Một hình lập phương có diện tích toàn phần là 24 cm^2. Tính thể tích của nó.

Bài 3. Thùng chở hàng của một xe tải có kích thước bên trong là $1{,}8 \times 3{,}0 \times 1{,}3$ m. Người ta xếp đầy vào thùng xe các thùng gỗ nhỏ hình lập phương cạnh 6 dm. Tính số thùng gỗ nhỏ mà xe có thể chở tối đa.

Bài 4. Tình thể tích một hình lập phương biết rằng nếu mỗi cạnh giảm đi 5 cm thì diện tích toàn phần giảm đi 1050 cm^2.

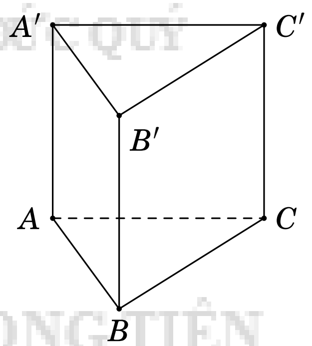
Bài 5. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có chu vi đáy là 40 cm. $AA'=9$ cm và đường chéo $AC=17$ cm.

a) Tính thể tích của hình hộp chữ nhật.   b) Tính diện tích toàn phần.

Chủ đề 5: HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

I. MÔ TẢ HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG



- Hai mặt phẳng chứa hai đáy là hai mặt phẳng song song $mp(ABC) \parallel mp(A'B'C')$.
- Hai đáy là hai đa giác có cùng số cạnh.
- Các cạnh bên vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài của một cạnh bên được gọi là chiều cao: $AA' \perp mp(A'B'C')$.
- Các mặt bên vuông góc với hai mặt phẳng đáy.

> **!** Đặc biệt:
> - Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.
> - Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật là hình hợp chữ nhật.

II. DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

- $S_{\text{xq}} = 2 \cdot p \cdot h$ (p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao).
- $S_{\text{tp}} = S_{xq} + 2 \cdot S$ (S là diện tích đáy).

III. THỂ TÍCH CỦA HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

$$V = S \cdot h \quad (S \text{ là diện tích đáy}, h \text{ là chiều cao})$$

B CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

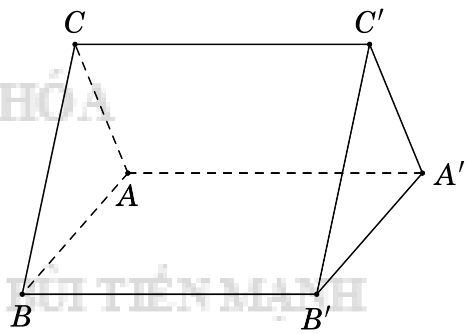
Dạng 1: TÌM SỐ MẶT, SỐ ĐỈNH, SỐ CẠNH CỦA HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

Xác định xem đâu là đáy, rồi đếm số cạnh của đáy này. Suy ra số mặt, số đỉnh, số cạnh của lăng trụ đứng theo công thức dưới đây:

Số cạnh của một đáy	Số mặt	Số đỉnh	Số cạnh
n	$n+2$	$2n$	$3n$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1.
Hình bên là một hình lăng trụ đứng. Hãy cho biết số mặt, số đỉnh, số cạnh của nó.



Ví dụ 2. Một hình lăng trụ đứng có 10 đỉnh. Tính số mặt và số cạnh của nó.

Ví dụ 3. Một hình lăng trụ đứng có tổng số mặt, số đỉnh và số cạnh là 32. Hỏi hình lăng trụ này có mấy mặt bên?

Dạng 2: TÌM CÁC YẾU TỐ SONG SONG. VUÔNG GÓC TRONG HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG.

Phương pháp giải: Dựa vào những tính chất sau:

- Các cạnh bên song song với nhau và vuông góc với đáy.
- Các mặt đáy song song với nhau.
- Các mặt bên vuông góc với đáy.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.ABC$ đáy là tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng:

a) $BB \perp mp(A'B'C')$.

b) $AB \perp mp(ACC'A')$.

c) $mp(ABB'A') \perp mp(ACC'A')$.

Ví dụ 2. Cho lăng trụ đứng $ABCD.ABCD'$ có đáy là hình thang vuông $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$. Hãy cho biết:

a) Các cạnh song song với AB.

b) Các cạnh vuông góc với AB tại A.

c) Các cạnh song song với $mp(DCC'D')$.

d) Các cạnh vuông góc với $mp(DCC'D')$.

e) Mặt phẳng song song với $mp(DCC'D')$.

Dạng 3: TÍNH DIỆN TÍCH XUNG QUANH, DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN, THỂ TÍCH VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ CỦA HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

Phương pháp giải

Áp dụng các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ đứng.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Một hình hộp đứng có chiều cao 9cm. Đáy là một hình thoi có đường chéo là 6cm và 8cm. Tính:

a) Diện tích toàn phần của hình hộp đó.

b) Thể tích hình hộp đó.

Ví dụ 2. Một lều trại có dạng hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ trong đó $AB = AC$. Thể tích phần không gian bên trong lều là 3m^2. Biết chiều dài CC' của lều là 2,5m, chiều rộng BC của lều là 1,6m. Tính:

a) Chiều cao AH của lều.

b) Diện tích tấm vải bạt dùng để căng hai mái lều.

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích xung quanh là 288m^2và chiều cao là 12cm. Độ dài các cạnh đáy (tính bằng centimet) là ba số chẵn liên tiếp. Tính thể tích của hình lăng trụ đứng.

Ví dụ 4. Một hình lăng trụ đứng có tất cả 9 cạnh, độ dài mỗi cạnh là 10cm. Tính:

a) Diện tích xung quanh.

b) Thể tích.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC vuông tại $A, AB =$ 3cm, $AC = 4$cm. Biết diện tích toàn phần bằng 4 lần tổng diện tích hai đáy. Tính chiều cao của hình lăng trụ đứng.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

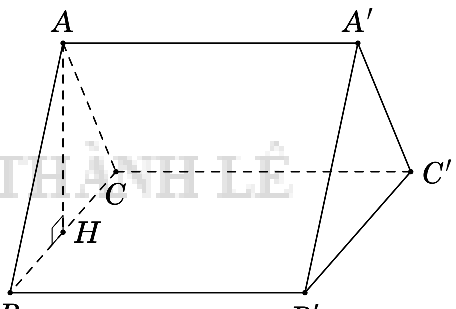
Bài 1. Xét một hình trụ đứng, trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) Số mặt bên đúng bằng số cạnh ở một đáy.

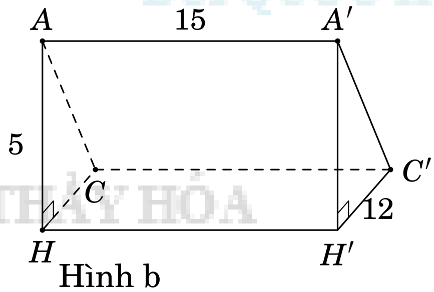
b) Số đỉnh bằng số cạnh.

c) Hai mặt bên liên tiếp vuông góc với nhau.

Bài 2. Một lều trại có dạng hình lăng trụ đứng, đáy là một tam giác cân (xem ở hình a). Hai mái lều do một tấm vải bạt hình vuông cạnh 5m tạo ra. Chiều cao của lều là 1,5m. Tính diện tích mặt đất được mái lều che phủ.



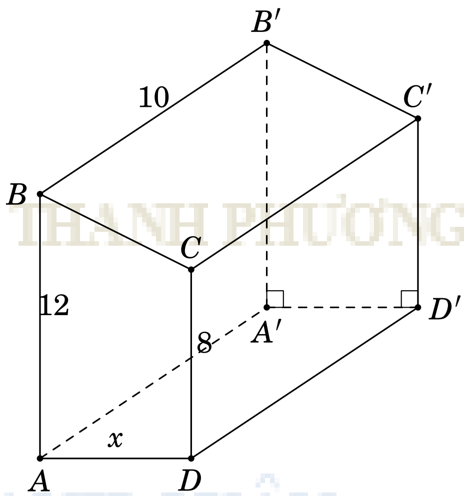
Hình a



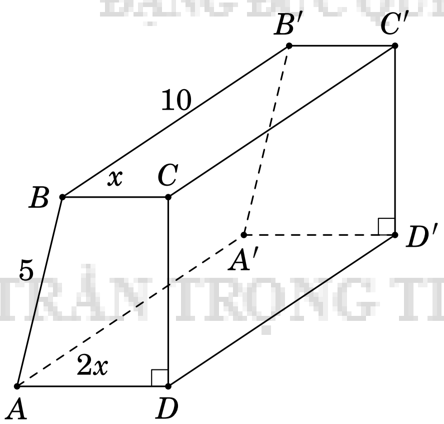
Hình b

Bài 3. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ đứng được biểu diễn trong hình b trên đây (đơn vị cm)

Bài 4. Hình c dưới đây biểu diễn một hình lăng trụ đứng có thể tích bằng 300cm^3. Hãy tìm độ dài x.



Hình c



Hình d

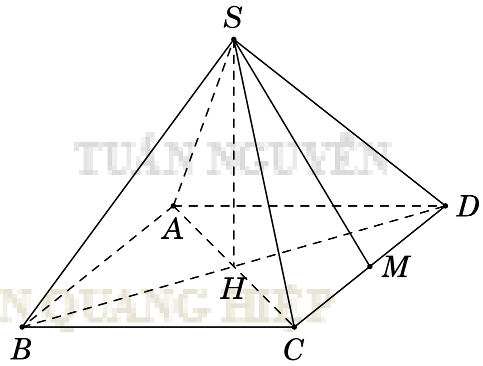
Bài 5. Tính thể tích của hình lăng trụ đứng được biểu diễn trên hình d (đơn vị tính cm).

Chủ đề 6: HÌNH CHÓP ĐỀU

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

I. MÔ TẢ HÌNH CHÓP ĐỀU

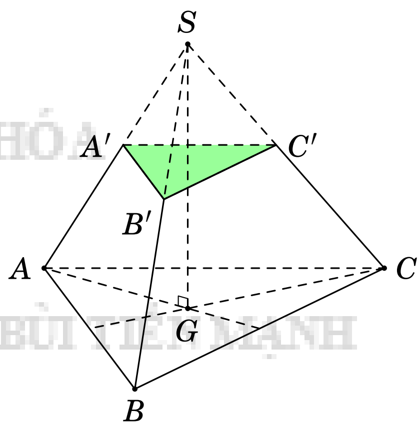
- Đáy là một đa giác đều.
- Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau, có chung đỉnh (gọi là đỉnh của hình chóp).



Trong hình bên, SH là đường cao (H là tâm đường tròn đi qua các đỉnh của mặt đáy).
SM là trung đoạn của hình chóp (M là trung điểm của cạnh đáy).

II. HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Cắt hình chóp đều bằng một mặt phẳng song song với đáy của hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy của hình chóp gọi là hình chóp cụt đều.



III. DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH CHÓP ĐỀU

$$S_{xq} = p \cdot d$$

(p là nửa chu vi đáy; d là trung đoạn).

IV. Thể tích của hình chóp đều

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$$

(S là diện tích đáy; h là chiều cao).

B CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: TÍNH SỐ MẶT, SỐ ĐỈNH, SỐ CẠNH, CỦA MỘT HÌNH CHÓP ĐỀU

Phương pháp giải: Trước hết số cạnh của mặt đáy rồi suy ra số mặt, số đỉnh, số cạnh của hình chóp đều theo công thức dưới đây:

Số cạnh của một đáy	Số mặt	Số đỉnh	Số cạnh
n	$n+1$	$n+1$	$2n$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho một hình chóp lục giác đều. Hỏi nó có bao nhiêu mặt, bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu cạnh?

Ví dụ 2. Một hình chóp đều có tổng số mặt và số đỉnh là 12. Tính số cạnh của đa giác đáy.

Ví dụ 3. Gọi M là số mặt, D là số đỉnh và C là số cạnh của hình chóp đều. Chứng minh rằng $M+D-C=2$.

Dạng 2: CHỨNG MINH CÁC QUAN HỆ SONG SONG, VUÔNG GÓC BẰNG NHAU TRONG HÌNH CHÓP ĐỀU.

Phương pháp giải

* Vận dụng các dấu hiệu nhận biết các quan hệ song song, vuông góc.
* Chú ý rằng trong hình chóp đều thì
  - Các cạnh đáy bằng nhau.
  - Các cạnh bên bằng nhau.
  - Các trung đoạn bằng nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình chóp đều tam giác $S.ABC$. Gọi M, N, Dvà E lần lượt là trung điểm của AB, AC, SB và SC. Gọi O là giao điểm của BNvà CM.

a) Chứng minh rằng tứ giác $EDMN$ là hình bình hành;

b) $SO \perp mp(ABC)$;

c) $\triangle SOB = \triangle SOC = \triangle SOA$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đường cao SO. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng:

a) $AD \parallel mp(SBC)$;

b) $mp(SOM) \perp mp(SBC)$;

c) $mp(SAC) \perp mp(ABCD)$;

d) $mp(SAC) \perp mp(SBD)$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi E, F, M lần lượt là trung điểm của SA, SD và BC. Chứng minh rằng:

a) $CF \parallel EM$;

b) Tứ giác $FEBC$ là hình thang cân.

Dạng 3: TÍNH DIỆN TÍCH XUNG QUANH, DIỆN TÍCH TOÀN PHẦN, THỂ TÍCH VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ CỦA HÌNH CHÓP ĐỀU

Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình chóp.

Bạn nên nhớ một số kết quả sau

- Đường chéo d của hình vuông cạnh a là $d = a\sqrt{2}$.

- Đường cao h của tam giác đều cạnh a là $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

- Diện tích của tam giác đều cạnh a là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Một hình chóp tứ giác đều có các cạnh bên bằng cạnh đáy và bằng 10cm. Hãy tính

a) Diện tích xung quanh của hình chóp đều.

b) Thể tích của hình chóp đều đó.

Ví dụ 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có thể tích bằng $6\sqrt{3}\text{cm}^3$., đường cao $SH = 2\text{cm}$. Hãy tính độ dài:

a) Mỗi cạnh đáy.

b) Mỗi cạnh bên.

Ví dụ 3. Một hình chóp tứ giác đều có diện tích đáy là 100cm^2, cạnh bên dài $13cm$. Tính diện tích toàn phần của hình chóp đó.

Ví dụ 4. Một hình chóp tam giác đều, cạnh đáy bằng 6cm và cạnh bên bằng 4cm. Hãy tính

a) Chiều cao của hình chóp đều.

b) Thể tích của hình chóp đều.

Ví dụ 5. Một hình chóp tam giác đều và một hình chóp tứ giác đều có cùng chiều cao và độ dài cạnh đáy như nhau. Tính tỉ số diện tích của hai hình chóp đó.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi G và H thứ tự là trọng tâm của các tam giác ABC, SBC.

a) Chứng minh rằng $GH \parallel SA$.

b) GH song song với những mặt phẳng nào?

c) Tính độ dài GH biết $BC = 6\text{cm}$ và diện tích xung quanh của hình chóp đó là 36cm^2.

Bài 2. Một hình chóp tam giác đều có các cạnh đều bằng a. Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

Bài 3. Một hình chóp tứ giác đều có chiều cao 8cm và độ dài cạnh đáy là 12cm. Hãy tính:

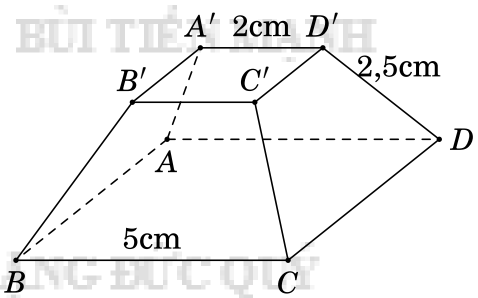
a) Thể tích hình chóp đều.

b) Diện tích xung quanh của hình chóp đó?

Bài 4. Một hình chóp tứ giác đều cạnh đáy 6cm, diện tích xung quanh $60cm^2$. Tính thể tích của hình chóp đều.

Bài 5.

Tính diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều được biểu diễn ở hình bên.



Chủ đề 7: ÔN TẬP CHƯƠNG

A TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

I. Một số khái niệm cơ bản của hình học không gian:

- Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian.
- Ba vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt trong không gian.
- Đường thẳng song song với mặt phẳng, hai mặt phẳng song song nhau.
- Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc.

II. Một số vật thể trong không gian như hình hộp chữ nhật, hình lăng trụ đứng, hình chóp đều

- Các khái niệm về đỉnh, mặt bên, cạnh bên, cạnh đáy.
- Các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của các hình đó.

B CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Xác định vị trí của đường thẳng với mặt phẳng, của hai mặt phẳng

Dựa vào các dấu hiệu nhận biết đường thẳng song song với mặt phẳng, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, hai mặt phẳng song song, hai mặt phẳng vuông góc.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là một hình thang vuông ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$).

a) Tìm các cạnh song song với CD.

b) CD song song với mặt phẳng nào?

c) CD vuông góc với mặt phẳng nào?

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Chứng minh rằng:

a) $mp(BB'C'C) \parallel mp(AA'D'D)$.

b) $mp(BB'C'C) \perp mp(CDD'C')$.

c) $OO' \perp mp(A'B'C'D')$.

d) $mp(BB'D'D) \perp mp(ACC'A')$.

Dạng 2: Tính số mặt, số đỉnh, số cạnh của hình lăng trụ đứng, hình chóp đều

Dựa vào nhận xét trong bảng sau:

Hình	Số mặt	Số đỉnh	Số cạnh
Lăng trụ có đáy là đa giác n cạnh	$n+2$	$2n$	$3n$
Hình chóp có đáy là đa giác n cạnh	$n+1$	$n+1$	$2n$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Một hình lăng trụ đứng và một hình chóp đều có số cạnh đáy và mặt đáy như nhau. Biết tổng số cạnh của hai hình đó là 25. Tính số mặt và đỉnh của mỗi hình.

Ví dụ 2. Số cạnh của một đáy hình lăng trụ đứng ít hơn số cạnh đáy của một hình chóp đều là 3 nhưng số đỉnh của hình lăng trụ đứng nhiều hơn số đỉnh của hình chóp đều là 5. Hỏi mặt đáy của mỗi hình có bao nhiêu cạnh?

Dạng 3: Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích và một số yếu tố của hình hộp chữ nhật, hình lăng trụ đứng, hình chóp đều

Áp dụng các công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của các hình nói trên.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác đều cạnh 4 cm. biết diện tích xung quanh là 60 cm^2. Tính thể tích của hình lăng trụ đó.

Ví dụ 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, $AB = a$, đường cao $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Chứng minh rằng diện tích đáy của hình chóp đều bằng $\dfrac{1}{2}$ diện tích xung quanh.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $AB = a$. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

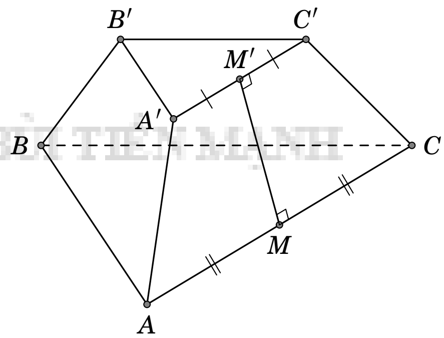
a) Chứng minh rằng hình chóp $O.A'B'C'D'$ là hình chóp đều.

b) Tính thể tích của hình chóp đều $O.A'B'C'D'$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng cạnh đáy. Chứng minh rằng diện tích đáy $ABCD$ bằng tổng diện tích hai mặt chéo (SAC) và (SBD).

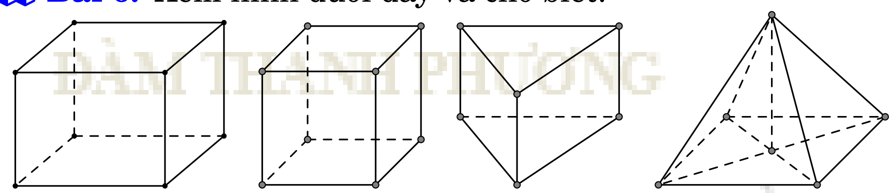
Ví dụ 5.

Hình bên biểu diễn một hình chóp cụt tam giác đều. Biết cạnh đáy lớn dài gấp hai lần cạnh đáy nhỏ và $MM' = 5$ cm. diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều là $90 cm^2$. Tính độ dài mỗi cạnh đáy nhỏ.



I. Bài tập tự luyện

Bài 6. Xem hình dưới đay và cho biết.



$a)$ $b)$ $c)$ $d)$

a) Hình nào là hình hộp chữ nhật;

b) Hình nào là lăng trụ đứng.

Bài 7. Một hình chóp tứ giác đều, độ dài mỗi cạnh đáy là 6m, độ dài mỗi cạnh bên là 5m. Tính diện tích toàn phần của khối chóp đó.

Bài 8. Một hình chóp tứ giác đều có thể tích là 304cm^3 và có chiều cao là 8cm. tính độ dài mỗi cạnh đáy.

Bài 9. Một hình chóp tam giác đều có chu vi là 36m và cạnh bên dài $4\sqrt{7}$m. Tính thể tích của hình chóp.

Bài 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, độ dài mỗi cạnh là a.

a) Chứng minh rằng hình chóp $C.DBC'$ là một hình chóp đều.

b) Tính diện tích toàn phần của hình chóp đều $C.DBC'$.

c) Tính chiều cao của hình chóp đều $C.DBC'$.