

BỒI DƯỠNG VÀ PHÁT TRIỂN TƯ DUY
ĐỘT PHÁ TRONG GIẢI
TOÁN HỌC 8
TẬP 2
HÌNH HỌC

THEO CHUẨN KIẾN THỨC KĨ NĂNG

- ☞ Tóm tắt lí thuyết căn bản
- ☞ Giải chi tiết, phân tích, bình luận, hướng dẫn làm bài dành cho học sinh lớp 8 và chuyên Toán.
- ☞ Tham khảo cho phụ huynh và giáo viên.

LỜI NÓI ĐẦU

Sách giáo khoa Toán 8 hiện hành được biên soạn theo tinh thần đổi mới của chương trình và phương pháp dạy – học, nhằm nâng cao tính chủ động, tích cực của học sinh trong quá trình học tập.

Tác giả xin trân trọng giới thiệu cuốn sách **“BỒI DƯỠNG VÀ PHÁT TRIỂN TƯ DUY ĐỘT PHÁ TRONG GIẢI TOÁN HỌC 8”**, được viết với mong muốn gửi tới các thầy cô, phụ huynh và các em học sinh một tài liệu tham khảo hữu ích trong dạy và học môn Toán ở cấp THCS theo định hướng đổi mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Cuốn sách được cấu trúc gồm các phần:

- **Kiến thức căn bản cần nắm:** Nhắc lại những kiến thức cơ bản cần nắm, những công thức quan trọng trong bài học, có ví dụ cụ thể...

- **Bài tập sách giáo khoa, bài tập tham khảo:** Lời giải chi tiết cho các bài tập, bài tập được tuyển chọn từ nhiều nguồn của môn Toán được chia bài tập thành các dạng có phương pháp làm bài, các ví dụ minh họa có lời giải chi tiết...Có nhiều cách giải khác nhau cho một bài toán...

Cuốn sách này còn là tài liệu tham khảo bổ ích cho quý thầy cô giáo và các bậc phụ huynh học sinh để hướng dẫn, giúp đỡ các em học tập tốt bộ môn Toán.

Các tác giả

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	Trang
CHƯƠNG 1.	Trang
Bài 1. Tứ giác.....	Trang
A. Chuẩn kiến thức.....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập.....	Trang
Bài 2. Hình thang.....	Trang
A. Chuẩn kiến thức.....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập.....	Trang
Bài 3. Hình thang cân.....	Trang
A. Chuẩn kiến thức.....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập.....	Trang
Bài 4. Đường trung bình.....	Trang
A. Chuẩn kiến thức.....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập.....	Trang
Bài 6. Trục đối xứng	Trang
A. Chuẩn kiến thức.....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập.....	Trang
Bài 7. Hình bình hành	Trang
A. Chuẩn kiến thức.....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập.....	Trang
Bài 8. Đối xứng tâm	Trang
A. Chuẩn kiến thức.....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập.....	Trang
Bài 9, 10. Hình chữ nhật – Đường thẳng song song với đường thẳng cho trước	
A. Chuẩn kiến thức.....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập.....	Trang

Bài 11. Hình thoi	Trang
A. Chuẩn kiến thức	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập	Trang
Bài 12. Hình vuông	Trang
A. Chuẩn kiến thức	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập	Trang
CHƯƠNG 2. Đa giác, diện tích đa giác.....	Trang
A. Chuẩn kiến thức	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập	Trang
CHƯƠNG 3. ĐỊNH LÝ TALET TRONG TAM GIÁC. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG	
.....	Trang
Bài 1,2. Định lí Talet trong tam giác. Định lí Talet đảo, Hệ quả định lí Talet	Trang
A. Chuẩn kiến thức	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập	Trang
Bài 3. Tính chất của đường phân giác trong tam giác	Trang
A. Chuẩn kiến thức	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập	Trang
Bài 4,5,6. Tam giác đồng dạng. Các trường hợp đồng dạng	
của hai tam giác.....	Trang
A. Chuẩn kiến thức	Trang
Bài 7. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông.....	Trang
A. Chuẩn kiến thức	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập	Trang
CHƯƠNG 4. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU	Trang
Bài 1. Hình hộp chữ nhật	Trang
A. Chuẩn kiến thức	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập	Trang

Bài 2. Hình lăng trụ đứng	Trang
A. Chuẩn kiến thức	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập	Trang
Bài 3. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều	Trang
A. Chuẩn kiến thức	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập	Trang

CHƯƠNG I. TỨ GIÁC

BÀI 1. TỨ GIÁC

A. LÝ THUYẾT:

1) Định nghĩa:

Tứ giác ABCD là hình gồm 4 đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, trong đó bất kỳ hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kỳ cạnh nào của tứ giác.

Hai đỉnh kề nhau: A và B; B và C; C và D; D và A

Hai đỉnh đối nhau: A và C; B và D

Đường chéo AC; BD

Hai cạnh kề nhau: AB và BC; BC và CD; CD và DA

Hai cạnh đối nhau: AB và CD; AD và BC

Hai góc kề nhau: \hat{A} và \hat{B} ; \hat{B} và \hat{C} ; \hat{C} và \hat{D} ; \hat{D} và \hat{A}

Hai góc đối nhau: \hat{A} và \hat{C} ; \hat{B} và \hat{D}

Điểm nằm trong tứ giác: M

Điểm nằm trên tứ giác: N

Điểm nằm ngoài tứ giác: P

2) Định lý: Tổng các góc của một tứ giác bằng 180°

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 1. Cho tứ giác ABCD biết $\hat{B} + \hat{C} = 200^\circ$, $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$; $\hat{C} + \hat{D} = 120^\circ$.

a) Tính số đo các góc của tứ giác.

b) Gọi I là giao điểm của các tia phân giác của \hat{A} và \hat{B} của tứ giác. Chứng minh:

$$\widehat{AIB} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{2}$$

Bài giải:

a) Từ giả thiết ta có: $2\hat{B} + 2\hat{C} + 2\hat{D} = 200^\circ + 180^\circ + 120^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 250^\circ$.

Vì $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} = 110^\circ$.

$\hat{B} = 250^\circ - (\hat{C} + \hat{D}) = 250^\circ - 120^\circ = 130^\circ$.

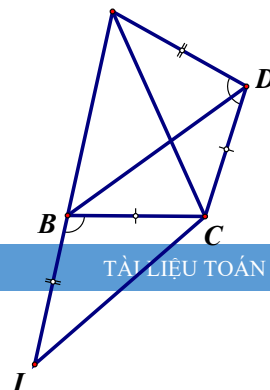
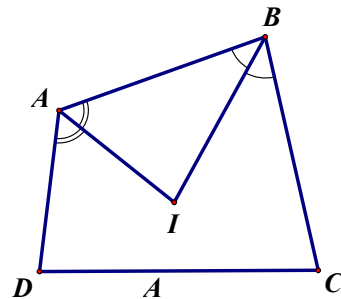
$\hat{C} = 200^\circ - \hat{B} = 200^\circ - 130^\circ = 70^\circ$.

$\hat{D} = 120^\circ - \hat{C} = 120^\circ - 70^\circ = 50^\circ$.

b) Trong tam giác ABI:

$$\widehat{AIB} = 180^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \frac{360^\circ - (\hat{A} + \hat{B})}{2} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{2}.$$

Bài 2. Cho tứ giác lồi ABCD có $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$, CB = CD. Chứng minh AC là tia phân giác của \widehat{BAD} .



Bài giải:

Trên tia đối tia BA lấy điểm I sao cho $BI = AD$.

Ta có $\widehat{ADC} = \widehat{IBC}$ (cùng bù với góc \widehat{ABC}).

$AD = IB$, $DC = BC$. Từ đó ta có $\triangle ADC = \triangle IBC$.

Suy ra: $\widehat{DAC} = \widehat{BIC}$ và $AC = IC$.

Tam giác ACI cân tại C nên $\widehat{BAC} = \widehat{BIC} = \widehat{DAC}$.

Vậy AC là phân giác trong góc \widehat{BAD} .

Bài 3. Cho tứ giác lồi ABCD, hai cạnh AD và BC cắt nhau tại E, hai cạnh DC và AB cắt nhau tại F. Kẻ tia phân giác của hai góc CED và BFC cắt nhau tại I. Tính góc EIF theo các góc trong tứ giác ABCD.

Bài giải:

FI cắt BC tại K, suy ra K thuộc đoạn BC

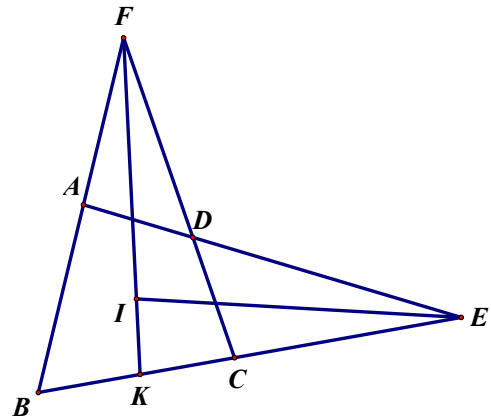
$\Rightarrow \widehat{EIF} = \widehat{EKI} + \widehat{IEK}$ (\widehat{EIF} là góc ngoài của $\triangle IKE$)

$= \widehat{B} + \widehat{BFK} + \widehat{IEK}$ (\widehat{CKF} là góc ngoài của $\triangle FBK$)

$$\widehat{BFC} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) \Rightarrow \widehat{BFK} = 90^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}.$$

$$\widehat{AEB} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) \Rightarrow \widehat{IEK} = 90^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \widehat{EIF} &= \widehat{B} + 90^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} + 90^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} \\ &= 180^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = \frac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2} \end{aligned}$$



Bài 4. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh: $\frac{1}{2}p < AC + BD < p$ (p : chu vi của tứ giác)

Bài giải:

Gọi I là giao điểm của AC và BD. Theo bất đẳng thức tam giác, ta có:

$IA + IB > AB$, $IA + ID > AD$, $IB + IC > BC$, $IC + ID > CD$

Cộng theo vế, ta được: $2(IA + IB + IC + ID) > p$, từ đó:

$$AC + BD > \frac{1}{2}p.$$

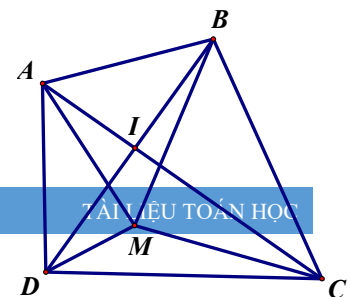
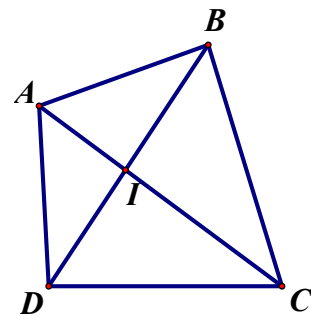
Lại có: $AC < AB + BC$, $AC < AD + DC$, $BD < BA + AD$, $BD < BC + CD$.

Suy ra $2(AC + BD) < 2(AB + BC + CD + DA) = 2p \Rightarrow AC + BD < p$.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD, M là một điểm trong tứ giác đó. Xác định vị trí của M để $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất.

Bài giải:

Gọi I là giao điểm của AC và BD. Ta có các bất đẳng thức:



$MA + MC \geq AC, MB + MD \geq BD.$

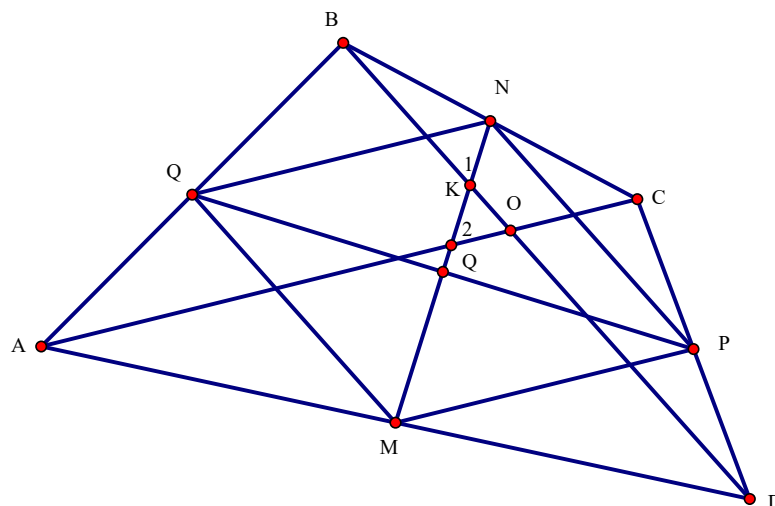
Từ đó suy ra $MA + MB + MC + MD \geq AC + BD$

$MA + MB + MC + MD = AC + BD$ khi M trùng với I .

Vậy khi M là giao điểm hai đường chéo thì $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất.

Bài 6. Một đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh đối diện của một tứ giác lồi tạo với các đường chéo của hai góc bằng nhau. Chứng minh rằng tứ giác ấy có hai đường chéo bằng nhau.

Giải.



Gọi Q, P lần lượt là trung điểm của AB, CD tương ứng

Khi đó ta có :

$QN \parallel MP ; NP \parallel QM. \Rightarrow$ Tứ giác $QNPM$ là hình bình hành.

Vì MN tạo với AC và BD hai góc bằng nhau nên suy ra MN cũng tạo với QN và QM hai góc bằng nhau

Tức là : $\widehat{QNM} = \widehat{QMN}$

Suy ra Tam giác QMN cân tại Q

Suy ra $QN = QM$

Ta có $QN = \frac{1}{2} AC$ và $QM = \frac{1}{2} BD$ (Đường trung bình của tam giác)

Mà $QN = QM$ (Chứng minh trên)

Suy ra $AC = BD$

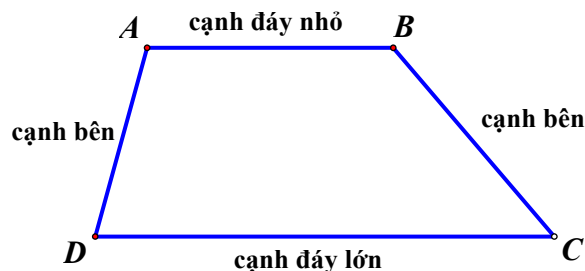
Vậy Tứ giác trên có hai đường chéo bằng nhau

BÀI 2. HÌNH THANG

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Tứ giác $ABCD$ là hình thang

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ BC \parallel AD \end{cases}$$

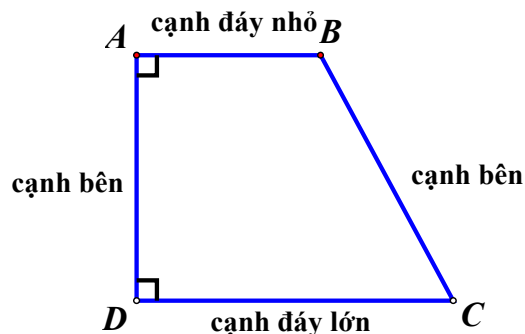


2. Tính chất:

- * Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì nó là hình chữ nhật.
- * Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì nó là hình bình hành.

3. Hình thang vuông:

Hình thang vuông là hình thang có hai góc vuông.

**B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP**

Bài 7. Cho tứ giác ABCD có $AD = DC$, đường chéo AC là phân giác góc A. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.

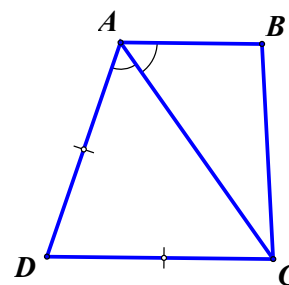
Bài giải:

Ta có $AD = DC$ nên tam giác ADC cân tại D.

Suy ra $\widehat{DCA} = \widehat{DAC} = \widehat{BAC}$

Suy ra $AB \parallel CD$ (hai góc so le trong bằng nhau)

Vậy ABCD là hình thang.



Bài 8. Cho hình thang ABCD, đáy $AB = 40\text{cm}$, $CD = 80\text{cm}$, $BC = 50\text{cm}$, $AD = 30\text{cm}$. Chứng minh rằng ABCD là hình thang vuông.

Bài giải:

Gọi H là trung điểm của CD. Ta có $DH = CH = 40\text{cm}$

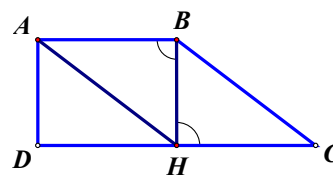
Xét hai tam giác ABH và CHB có:

$AB = CH = 40\text{cm}$, $\widehat{ABH} = \widehat{CHB}$ (so le trong), $BH = HB$

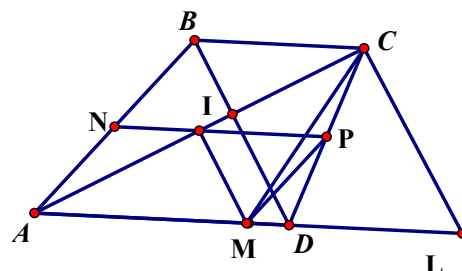
Suy ra $\triangle ABH = \triangle CHB$ (c-g-c) $\Rightarrow AH = CB = 50\text{cm}$.

Tam giác ADH có: $AD^2 + DH^2 = 40^2 + 30^2 = 50^2 = AH^2$

Suy ra tam giác ADH vuông tại D. Vậy hình thang ABCD là hình thang vuông.



Bài 9. Cho hình thang ABCD ($AD \parallel BC$; $AD > BC$) có đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại I. Trên đáy AD lấy M sao cho AM bằng độ dài đường trung bình của hình thang. Chứng minh: tam giác ACM cân tại M



Giải:

Gọi L là điểm đối xứng với đối xứng với A qua M Gọi NM là đường trung bình của hình thang ABCD như hình vẽ

Gọi I là giao điểm của AC và NP

Vì NP//BC \Rightarrow NI//BC mà N là trung điểm AB
 \Rightarrow I cũng là trung điểm AC 1)

Suy ra IM//CL (2)

Xét hình thang ABCD ta có:

$$P = \frac{EF + DG}{5} = AM \Leftrightarrow EF + DG = 5DP$$

$$\Rightarrow EF + DG - DP = DP \Rightarrow EF + PG = DP = PO$$

$$\Rightarrow EF = PO - PG = GO$$

Suy ra BC=DL mà BC//DL

Suy ra tứ giác BCLD là hình bình hành

Suy ra BD//CL

Mà BD \perp AC (gt) \Rightarrow FO \perp DF (3)

Từ (1), (2) và (3) IM \perp AC và MI là đường trung trực của đoạn thẳng AC

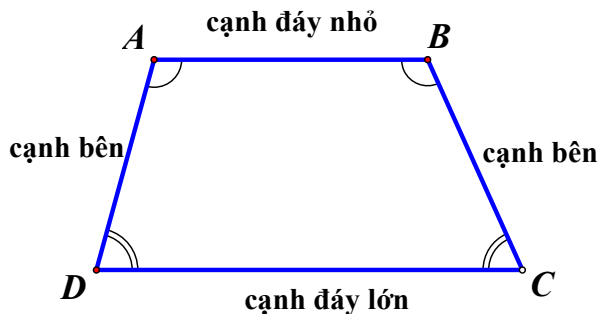
Suy ra MA=MC

Vậy tam giác MAC cân tại M.

BÀI 3. HÌNH THANG CÂN

A. LÝ THUYẾT

1. **Định nghĩa:** Tứ giác ABCD là hình thang cân $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ \hat{C} = \hat{D} \\ \hat{A} = \hat{B} \end{cases}$



2. **Tính chất:** Trong hình thang cân:

- * Hai cạnh bên bằng nhau
- * Hai đường chéo bằng nhau

3. **Dấu hiệu nhận biết:**

- * Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.
- * Hình thang có hai góc chung một cạnh đáy bằng nhau là hình thang cân.

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 10. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$). AD cắt BC tại I, AC cắt BD tại J. Chứng minh rằng IJ là trung trực của AB và là trung trực của CD.

Bài giải:

ABCD là hình thang cân nên $\hat{C} = \hat{D}$

Suy ra tam giác ICD cân tại I

\Rightarrow I nằm trên đường trung trực của CD. (1)

Ta lại có $\hat{IAB} = \hat{D} = \hat{C} = \hat{IBA}$ nên tam giác IAB cân tại I.

\Rightarrow I nằm trên đường trung trực của AB. (2)

Xét tam giác ACD và tam giác BDC có:

$AD = BC$ (vì ABCD là hình thang cân)

CD : cạnh chung

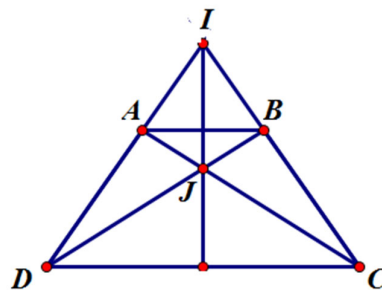
$AC = BD$ (2 đường chéo của hình thang cân)

Do đó $\triangle ACD = \triangle BDC$, suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$

\Rightarrow tam giác JCD cân tại J \Rightarrow J nằm trên đường trung trực của CD (3)

Tương tự ta có tam giác JAB cân tại J \Rightarrow J nằm trên đường trung trực của AB (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra IJ là đường trung trực của AB và CD.



Bài 11. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). AC cắt BD tại O. Biết $OA = OB$. Chứng minh rằng: ABCD là hình thang cân.

Bài giải:

Vì $OA = OB$ nên tam giác OAB cân tại O

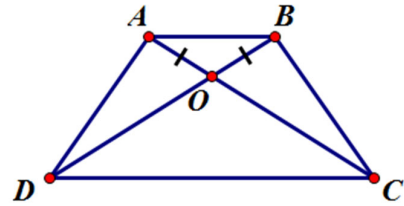
$$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$$

$$\text{Ta có } \widehat{OCD} = \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{ODC}$$

$$\Rightarrow \text{tam giác OCD cân tại O} \Rightarrow OC = OD$$

$$\text{Suy ra } AC = OA + OC = OB + OD = BD.$$

Hình thang ABCD có hai đường chéo AC và BD bằng nhau nên ABCD là hình thang cân.



Bài 12. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). AD cắt BC tại O.

a) Chứng minh rằng $\triangle OAB$ cân

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng ba điểm I, J, O thẳng hàng

c) Qua điểm M thuộc cạnh AC, vẽ đường thẳng song song với CD, cắt BD tại N. Chứng minh rằng MNAB, MNDC là các hình thang cân.

Bài giải:

a) Vì ABCD là hình thang cân nên $\widehat{C} = \widehat{D}$ suy ra OCD là tam giác cân.

$$\text{Ta có } \widehat{OAB} = \widehat{D} = \widehat{C} = \widehat{OBA} \text{ (hai góc đồng vị)}$$

$$\Rightarrow \text{Tam giác OAB cân tại O.}$$

b) OI là trung tuyến của tam giác cân OAB

nên OI cũng là đường cao tam giác OAB

$$\Rightarrow OI \perp AB$$

Mà $AB \parallel CD$ nên $OI \perp CD$

Tam giác OCD cân tại O có $OI \perp CD$ nên OI cắt CD tại trung điểm J của CD.

Vậy ba điểm O, I, J thẳng hàng.

c) Xét $\triangle ACD$ và $\triangle BDC$ có:

$$AC = BD \text{ (2 đường chéo của hình thang cân)}$$

$$AD = BC \text{ (2 cạnh bên của hình thang cân)}$$

$$CD = DC$$

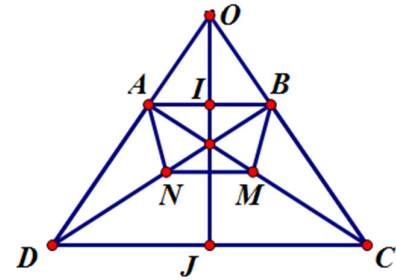
$$\text{Do đó } \triangle ACD = \triangle BDC \text{ (c-c-c)}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ACD} = \widehat{BDC} \text{ hay } \widehat{MCD} = \widehat{NDC}$$

Hình thang MNDC có $\widehat{MCD} = \widehat{NDC}$ nên MNDC là hình thang cân.

$$\Rightarrow MC = ND \Rightarrow AC - MC = BD - ND \Rightarrow AM = BN$$

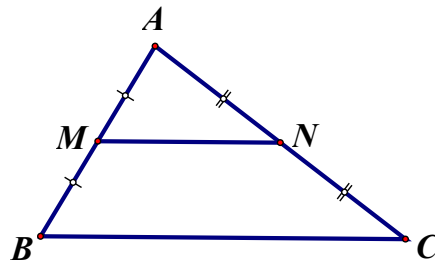
Hình thang MNAB có hai đường chéo AM và BN bằng nhau nên MNAB là hình thang cân.



BÀI 4. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH

A. LÝ THUYẾT

1. Đường trung bình của tam giác:



a) Định lý mở đầu:

Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.

b) Định nghĩa:

Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối hai trung điểm hai cạnh của tam giác đó.

c) Định lý đường trung bình của tam giác:

Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và có độ dài bằng một nửa cạnh ấy.

2. Đường trung bình của hình thang:

a) Định lý mở đầu:

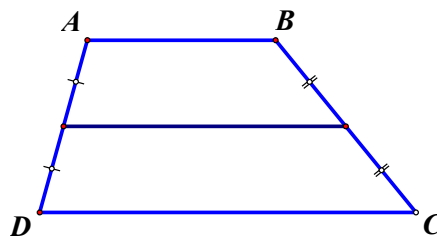
Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên còn lại.

b) Định nghĩa:

Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang ấy.

c) Định lý đường trung bình của hình thang:

Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và có độ dài bằng nửa tổng độ dài hai đáy.



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 13. Cho hình thang ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và $AB = 2AD = 2CD$. Kẻ CH vuông góc với AB tại H.

- Tính số đo các góc của hình thang ABCD.
- CMR tam giác ABC vuông cân.
- Tính chu vi hình thang nếu $AB = 6\text{cm}$.

d) Gọi O là giao điểm AC và DH, O' là giao điểm của DB và CH. Chứng minh rằng $AB = 4OO'$

Bài giải:

a) Ta có tứ giác ADCH $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = \widehat{C} = 90^\circ$ và $AH \parallel CD$, $AD \parallel CH$

AHCD là hình thang cân hai đáy AH, CD

$\Rightarrow AD = CH$.

AHCD cũng là hình thang cân với hai đáy AD, HC

$\Rightarrow AH = CD$.

$BH = AB - AH = 2CD - CD = CD$ và $CH = AD = BH$

Do đó $\triangle BCH$ vuông cân tại H, suy ra $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{BCH} = 45^\circ$

$\widehat{C} = \widehat{BCH} + \widehat{DCH} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$

Vậy $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 135^\circ$

b) $\triangle ABC$ có H là trung điểm AB và $CH \perp AB$ nên $\triangle ABC$ là tam giác cân tại C

Ta lại có $\widehat{B} = 45^\circ$, suy ra $\triangle ABC$ vuông cân tại C.

c) Ta có $AB = 6\text{cm}$

$AD = CD = \frac{1}{2}AB = 3\text{cm}$.

$\triangle ABC$ vuông cân tại C nên $BC = \frac{1}{\sqrt{2}}AB = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}\text{cm}$

Chu vi hình thang ABCD là: $AB + BC + CD + DA = 6 + 3\sqrt{2} + 3 + 3 = 12 + 3\sqrt{2}(\text{cm})$

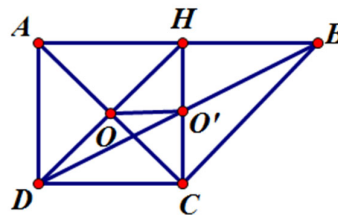
d) Dễ thấy $\widehat{ACD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{HDC} = 45^\circ \Rightarrow DH \parallel BC \Rightarrow DH \perp AC$.

Vì $\triangle ACD$ vuông cân tại D nên O là trung điểm của AC.

Ta có $\triangle DO'C = \triangle BO'H$ (g-c-g) $\Rightarrow O'C = O'H$, hay O' là trung điểm của CH.

Xét $\triangle AHC$ có OO' là đường trung bình nên $AH = 2OO'$

Mà $AB = 2AH$ nên $AB = 4OO'$.



Bài 14. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có E là trung điểm của BC, $\widehat{AED} = 90^\circ$. Gọi K là giao điểm của AE và DC. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ABE = \triangle KCE$

b) DE là tia phân giác của góc D.

Bài giải:

a) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle KCE$ có:

$\widehat{ABE} = \widehat{KCE}$ (2 góc sole trong)

$\widehat{AEB} = \widehat{KEC}$ (2 góc đối đỉnh)

$BE = CE$ (E là trung điểm BC)

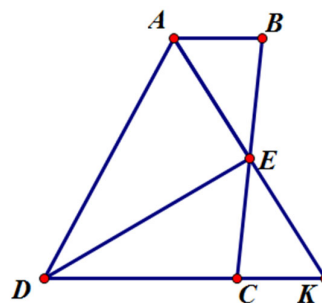
Do đó $\triangle ABE = \triangle KCE$ (g - c - g)

b) Vì $\triangle ABE = \triangle KCE$ nên $AE = KE \Rightarrow E$ là trung điểm AK \Rightarrow

DE là trung tuyến của tam giác ADK

Ta lại có $DE \perp AK$ suy ra DE là đường cao của $\triangle ADK$.

Do đó tam giác ADK cân tại D và DE là phân giác góc D.



Bài 15. Cho tứ giác ABCD trong đó $CD > AB$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BD và AC. Chứng minh rằng nếu ABCD là hình thang thì $EF = \frac{CD - AB}{2}$.

Bài giải:

Gọi I là trung điểm AD.

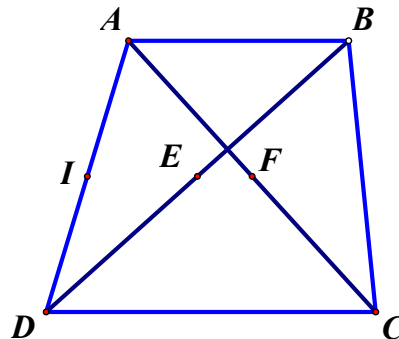
Ta có $EI \parallel AB$ và $EI = \frac{1}{2} AB$

$FI \parallel CD$ và $FI = \frac{1}{2} CD$.

Qua điểm I ta có $EI \parallel AB$ và $FI \parallel CD \parallel AB$ nên I, E, F thẳng hàng.

Suy ra $EF = FI - EI = \frac{1}{2} CD - \frac{1}{2} AB$ hay

$$EF = \frac{CD - AB}{2}$$



Bài 16. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), tia phân giác của góc C đi qua trung điểm M của cạnh bên AD. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{BMC} = 90^\circ$

b) $BC = AB + CD$

Bài giải:

a) Gọi N là trung điểm BC.

Ta có $MN \parallel CD \Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{CMN}$

Mà $\widehat{MCD} = \widehat{MCN}$ (vì CM là phân giác \widehat{D})

Suy ra $\widehat{CMN} = \widehat{MCN} = \frac{1}{2} \widehat{DCB}$

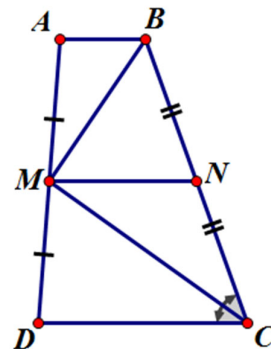
Tam giác MCN cân tại N $\Rightarrow MN = NC = NB$, do đó $\triangle MNB$ cân

tại N $\Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{NBM}$. Mặt khác $\widehat{NMB} = \widehat{MBA}$, suy ra $\widehat{NMB} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$

$$\widehat{BMC} = \widehat{CMN} + \widehat{NMB} = \frac{1}{2} (\widehat{BCD} + \widehat{ABC}) = 90^\circ.$$

b) Vì MN là đường trung bình của hình thang ABCD nên $MN = \frac{1}{2} (AB + CD)$

Ta lại có $MN = \frac{1}{2} BC$. Do đó $BC = AB + CD$



Bài 17. Cho tam giác ABC có các trung tuyến BD và CE. Trên cạnh BC lấy các điểm M, N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của AN và CE. Chứng minh rằng:

a) BCDE là hình thang

b) K là trung điểm của EC

c) $BC = 4IK$

Bài giải:

a) Ta có DE là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow BCDE$ là hình thang.

b) Gọi G là giao điểm AN và DE.

Ta có E là trung điểm AB và $ED \parallel BN$

$\Rightarrow G$ là trung điểm AN

$\Rightarrow EG$ là đường trung bình của $\triangle ABN$

$$\Rightarrow EG = \frac{1}{2} BN = \frac{1}{3} BC$$

Ta lại có $ED = \frac{1}{2} BC \Rightarrow EG = \frac{2}{3} ED \Rightarrow G$ là trọng tâm $\triangle ACE$

$\Rightarrow AK$ là trung tuyến của $\triangle ACE \Rightarrow K$ là trung điểm EC

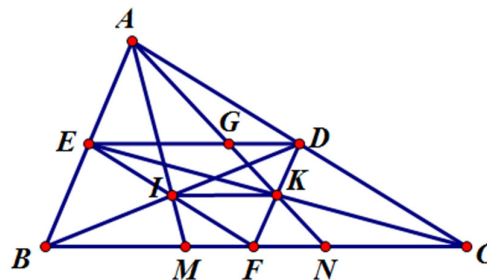
c) Chứng minh tương tự ta có I là trung điểm EF.

Gọi F là trung điểm BC, ta có $DF \parallel AB$ và $DK \parallel AB \Rightarrow D, K, F$ thẳng hàng.

$$DK = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{4} AB = \frac{1}{2} DF, \text{ suy ra } K \text{ là trung điểm của } DF.$$

Suy ra IK là đường trung bình của $\triangle DEF \Rightarrow IK = \frac{1}{2} DE$.

$$\text{Mà } DE = \frac{1}{2} BC \Rightarrow IK = \frac{1}{4} BC \text{ hay } BC = 4IK.$$



Bài 18. Cho hình thang cân ABCD có $\widehat{D} = 60^\circ$, DB là phân giác của \widehat{D} . Biết chu vi hình thang bằng 20cm. Tính độ dài các cạnh hình thang.

Bài giải:

Vì ABCD là hình thang cân nên $\widehat{C} = \widehat{D} = 60^\circ$ và

$$\widehat{A} = \widehat{B} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{CDB}$ (vì DB là phân giác \widehat{D})

Mà $\widehat{CDB} = \widehat{ABD}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ADB} = \widehat{CDB} = 30^\circ$

\Rightarrow Tam giác ABD cân tại A $\Rightarrow AB = AD = BC$

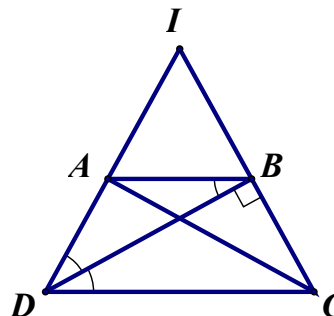
Gọi I là giao điểm của AD và BC, dễ dàng chứng minh $\triangle ICD$ đều (có hai góc bằng 60°) và B là trung điểm IC (vì DB là đường phân giác góc D, cũng là đường trung tuyến trong $\triangle IDC$). Do đó $CD = IC = 2BC$.

Đặt $AB = a \Rightarrow BC = AD = AB = a$ và $CD = 2a$.

Chu vi hình thang ABCD: $AB + BC + CD + AD = 5a = 20\text{cm}$

$$\Rightarrow a = 4\text{cm}$$

$$\Rightarrow AB = BC = AD = 4\text{cm và } CD = 8\text{cm}.$$



Bài 19. Cho $\triangle ABC$, đường thẳng d đi qua A không cắt các cạnh của tam giác ABC. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng d. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng $MD = ME$.

Bài giải:

Ta có $BD \parallel CE$ (cùng vuông góc DE)

$\Rightarrow BCED$ là hình thang vuông.

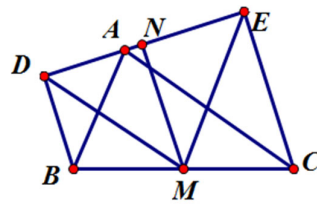
Gọi N là trung điểm DE

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của hình thang vuông $BCED$

$\Rightarrow MN \perp DE$.

Tam giác MDE có MN là trung tuyến và $MN \perp DE$

$\Rightarrow MDE$ là tam giác cân tại $M \Rightarrow MD = ME$



Bài 20. Cho tam giác ABC , AM là trung tuyến. Vẽ đường thẳng d qua trung điểm I của AM cắt các cạnh AB , AC . Gọi A' , B' , C' thứ tự là hình chiếu của A , B , C lên đường thẳng d . Chứng minh rằng $BB' + CC' = 2AA'$.

Bài giải:

Gọi N là hình chiếu của M trên d .

Xét tứ giác $BB'C'C$ có $BB' \parallel CC'$ (cùng vuông góc d)

$\Rightarrow BB'C'C$ là hình thang.

M là trung điểm BC và $MN \parallel BB' \parallel CC'$ (cùng vuông góc d)

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của hình thang $BB'C'C$

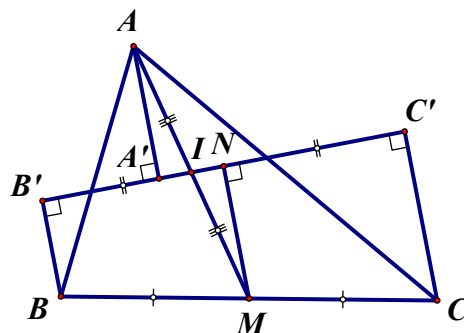
$BB' + CC' = 2MN$ (1)

$\Rightarrow BB' + CC' = 2MN$ (1)

Hai tam giác $AA'I$ và MNI vuông tại A' và N có $AI = MI$ và $\widehat{AIA'} = \widehat{MIN}$ (hai góc đối đỉnh).

Suy ra $\triangle AA'I = \triangle MNI$ (g-c-g) $\Rightarrow AA' = MN$ (2).

(1), (2) suy ra $BB' + CC' = 2AA'$.



Bài 21.* Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E , F , K lần lượt là trung điểm của BD , AC , DC . Gọi H là giao điểm của đường thẳng qua E vuông góc với AD và đường thẳng qua F vuông góc với BC . Chứng minh rằng:

a) H là trực tâm của tam giác EFK

b) Tam giác HCD cân.

Bài giải:

a) Ta có E , K lần lượt là trung điểm BD ,

$CD \Rightarrow EK \parallel BC$.

Mà $FH \perp BC \Rightarrow FH \perp EK$.

Tương tự ta có $EH \perp FK$

Suy ra H là trực tâm tam giác EFK .

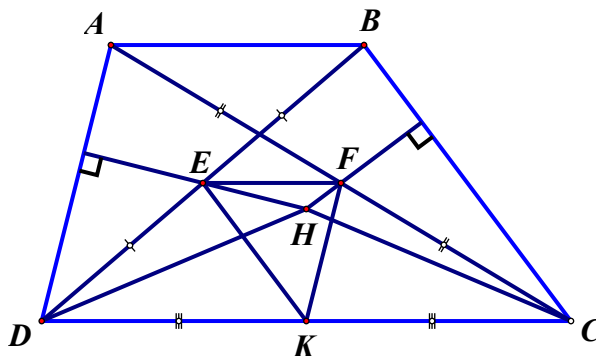
b) Ta có H là trực tâm tam giác EFK nên

$KH \perp EF$

Gọi I là trung điểm của AD , dễ dàng chứng minh được $IE \parallel AB \parallel CD$ và $IF \parallel CD$. Từ đó suy ra $EF \parallel AB \parallel CD$.

Do đó, $KH \perp CD$.

Tam giác HCD có K là trung điểm CD và $KH \perp CD$ nên HCD là tam giác cân tại H .



Bài 22. Cho tam giác đều ABC. Trên tia đối tia AB ta lấy điểm D và trên tia đối tia AC ta lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BE, AD, AC, AB.

- Chứng minh rằng tứ giác BCDE là hình thang cân.
- Chứng minh rằng tứ giác CNEQ là hình thang.
- Trên tia đối của tia MN lấy N' sao cho $N'M = MN$. Chứng minh rằng BN' vuông góc với BD; $EB = 2MN$.
- ΔMNP là tam giác đều.

Bài giải:

a) Ta có tam giác ADE cân và có $\widehat{A} = 60^\circ$ nên ΔADE là tam giác đều.

$\widehat{ADE} = \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow DE \parallel BC$ (hai góc so le trong bằng nhau)

Ta lại có: $DB = AD + AB = AE + AC = EC$

Do đó BCDE là hình thang cân.

b) Tam giác đều ADE có EN là trung tuyến

$\Rightarrow EN \perp AD$ hay $EN \perp BD$.

CQ là trung tuyến tam giác đều ABC $\Rightarrow CQ \perp AB$ hay $EQ \perp BD$.

Suy ra $EN \parallel CQ$ (cùng vuông góc BD)

$\Rightarrow CNEQ$ là hình thang.

c) Hai tam giác MEN và MBN' có:

$MN = MN'$, $\widehat{NME} = \widehat{N'MB}$ (đối đỉnh), $NE = MB$, suy ra $\Delta MEN = \Delta MBN'$.

$\Rightarrow \widehat{ENM} = \widehat{MN'B} \Rightarrow N'B \parallel EN$ (hai góc so le trong bằng nhau).

Mà $EN \perp BD$ nên $BN' \perp BD$.

Dễ dàng chứng minh được $\widehat{ENB} = \widehat{N'BN}$ (c-g-c) $\Rightarrow BE = NN' = 2MN$.

d) Xét tam giác ACD có NP là đường trung bình $\Rightarrow NP = \frac{1}{2}DC$

Mà $DC = EB$ (vì BCDE là hình thang cân) nên $NP = \frac{1}{2}EB = MN$ (1).

Theo trên, $MN = MB = MN' = ME$ nên các tam giác MBN và MEN' cân tại M.

Ta được $\widehat{BNN'} = \widehat{BEN'} = \widehat{NBE} \Rightarrow EN' \parallel AB$.

Ta có: $\widehat{ANP} = \widehat{ADC} = \widehat{AEB}$ và $\widehat{ANM} = \widehat{BEN'}$

Do đó: $\widehat{PNM} = \widehat{ANP} + \widehat{ANM} = \widehat{AEB} + \widehat{BEN'} = \widehat{AEN'}$.

Vì $EN' \parallel AB$ nên $\widehat{AEN'} = \widehat{CAB} = 60^\circ$ (đồng vị).

Từ đó ta có $\widehat{PNM} = 60^\circ$ (2).

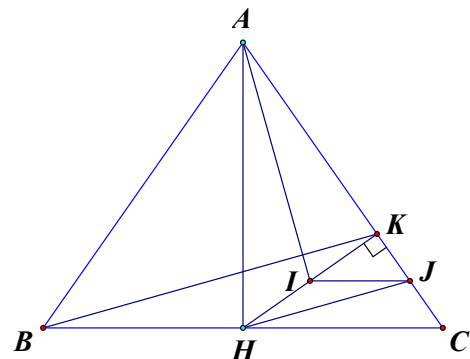
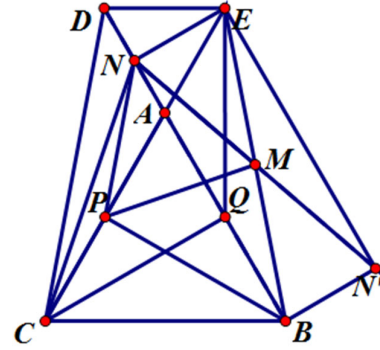
Từ (1), (2) suy ra MNP là tam giác đều.

Bài 23. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên AC. Gọi I là trung điểm HK. Chứng minh rằng: $BK \perp AI$.

Lời giải:

Gọi J là trung điểm của KC, ta có IJ là đường trung bình trong tam giác KHC.



Do đó $IJ \parallel HC \Rightarrow IJ \perp AH$.

Trong tam giác AHJ có $IJ \perp AH$, $HI \perp AJ$. Từ đó, I là trực tâm tam giác AHJ .

$\Rightarrow AI \perp HJ$ (1).

Trong tam giác BKC , HJ là đường trung bình, suy ra $HJ \parallel BK$ (2).

(1) và (2) suy ra $AI \perp BK$.

Bài 24. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$; $AD = BC$), có đáy nhỏ AB . Độ dài đường cao BH bằng độ dài đường trung bình MN (M thuộc AD , N thuộc BC) của hình thang $ABCD$. Vẽ $BE \parallel AC$ (E thuộc DC). Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng

- a) $MN = \frac{DE}{2}$ b) Tam giác OAB cân c) Tam giác DBE vuông cân

Bài giải:

a) $\widehat{ABC} = \widehat{ECB}$ (so le trong), $BC = CB$, $\widehat{BCA} = \widehat{CBE}$ (so le trong)

Suy ra $\triangle ABC = \triangle ECB$ (g-c-g) $\Rightarrow AB = EC$.

MN là đường trung bình của hình thang cân $ABCD$

$$\Rightarrow MN = \frac{DC + AB}{2} = \frac{DC + CE}{2} = \frac{DE}{2}$$

b) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle BAD$ có:

$AB = BA$

$AC = BD$ (2 đường chéo hình thang cân)

$BC = AD$ (2 cạnh bên hình thang cân)

Do đó $\triangle ABC = \triangle BAD$ (c - c - c)

Suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{ABD}$ hay $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$

\Rightarrow Tam giác OAB cân tại O .

c) Tam giác DBE có $BE = AC = BD \Rightarrow$ Tam giác DBE cân tại B .

BH là đường cao tam giác cân DBE nên BH cũng là trung tuyến của tam giác này.

Mà $BH = MN = \frac{DE}{2} \Rightarrow$ Tam giác BDE vuông tại B

Vậy DBE là tam giác vuông cân.

Bài 25. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên các cạnh góc vuông AB , AC lấy điểm D và E sao cho $AD = AE$. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BE , cắt BC ở K . Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với BE , cắt BC ở H . Gọi M là giao điểm DK với AC . Chứng minh rằng:

a) $\triangle BAE = \triangle CAD$

b) MDC là tam giác cân

c) $KH = HC$

Bài giải:

a) Xét $\triangle BAE$ và $\triangle CAD$ có:

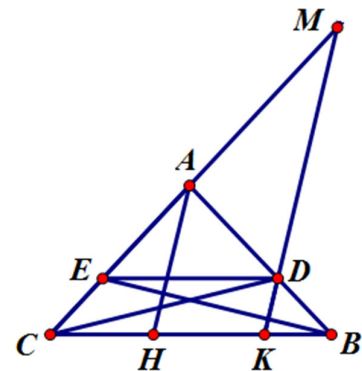
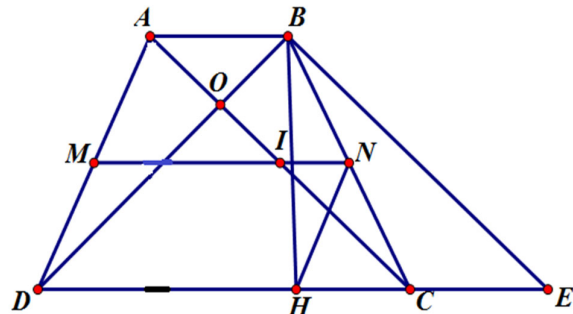
$\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ (góc chung)

$AE = AD$ (giả thiết)

$BA = CA$ (vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A)

Do đó: $\triangle BAE = \triangle CAD$ (c - g - c)

b) Vì $\triangle BAE = \triangle CAD$ nên $\widehat{AEB} = \widehat{ADC}$



Ta có $DK \perp BE \Rightarrow \widehat{BDK} + \widehat{DBE} = 90^\circ$

hay $\widehat{BDK} + \widehat{ABE} = 90^\circ$

Ta lại có $\widehat{AEB} + \widehat{ABE} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{BDK} = \widehat{AEB} = \widehat{ADC}$

Mặt khác $\widehat{BDK} = \widehat{ADM}$ (2 góc đối đỉnh). Do đó $\widehat{ADM} = \widehat{ADC} \Rightarrow DA$ là phân giác \widehat{CDM}

Tam giác MDC có DA vừa là phân giác vừa là đường cao \Rightarrow Tam giác MDC cân tại D.

c) Tam giác MDC cân tại D có DA là phân giác nên DA cũng là trung tuyến tam giác này $\Rightarrow A$ là trung điểm MC

Tam giác MCK có A là trung điểm MC và $AH \parallel MK$ (cùng vuông góc BE) $\Rightarrow AH$ là đường trung bình của tam giác MCK $\Rightarrow H$ là trung điểm CK

Vậy $KH = HC$.

Bài 26. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$). Bên ngoài $\triangle ABC$ vẽ $\triangle BAD$ vuông cân ở A, $\triangle ACE$ vuông cân ở A; BE cắt CD tại I. gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, BD. Chứng minh tứ giác AINM là hình thang cân.

Lời giải:

* Chứng minh $BE \perp CD$:

Xét hai tam giác: ABE và ADC, có:

$AB = AD$ (vì $\triangle ABD$ vuông cân tại A).

$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ (cùng bằng $90^\circ + \widehat{BAC}$)

$AE = AC$ (vì $\triangle ACE$ vuông cân tại A)

Do vậy $\triangle ABE = \triangle ADC \Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{ADI}$.

AB cắt DI tại H, ta có: $\widehat{AHD} + \widehat{ADH} = 90^\circ$; $\widehat{AHD} = \widehat{BHI}$; $\widehat{ADH} = \widehat{HBI}$

Suy ra $\widehat{BHI} + \widehat{HBI} = 90^\circ$. Vậy $BE \perp CD$ tại I.

* Chứng minh $AM = IN$ và $AN = IM$:

Gọi K là điểm đối xứng của D qua A. Xét hai tam giác: $\triangle ABC$ và $\triangle AKE$.

$AB = AK$ (cùng bằng AD); $\widehat{BAC} = \widehat{KAE}$

(cùng phụ với \widehat{CAK}); $AC = AE$.

Do đó $\triangle ABC = \triangle AKE$. Suy ra $EK = BC$.

Trong tam giác DKE, AM là đường trung

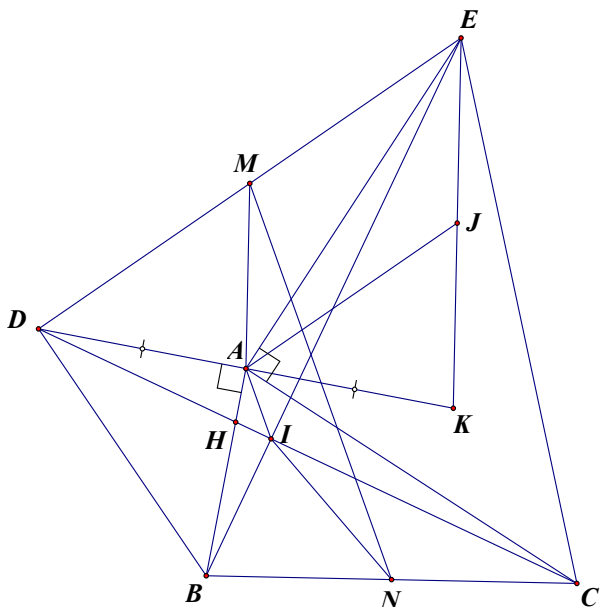
binh nên $AM = \frac{1}{2} KE$.

Trong tam giác IBC vuông tại I, IN là trung

tuyến nên $IN = \frac{1}{2} BC$.

Từ đó cho ta $AM = IN$.

Gọi J là trung điểm của KE, vì hai tam giác ABC và AKE bằng nhau nên hai trung tuyến tương ứng bằng nhau. Ta có $AN =$



AJ.

AI là đường trung bình trong tam giác DEK, ta có $AJ = \frac{1}{2} DE$.

IM là trung tuyến trong tam giác IDE vuông tại I nên $IM = \frac{1}{2} DE$.

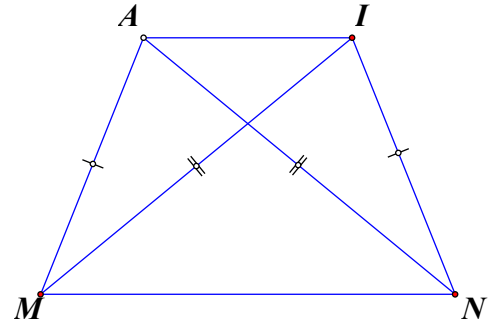
Do đó: $AJ = IM$.

* Xét tứ giác AMNI có $AM = IN$ và $AN = IM$, ta chứng minh AMNI là hình thang cân.

$$\Delta AMI = \Delta INA \text{ (c-c-c)} \Rightarrow \widehat{IAM} = \widehat{AIN} \text{ (1)}.$$

$$\Delta AMN = \Delta INM \text{ (c-c-c)} \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{INM} \text{ (2)}.$$

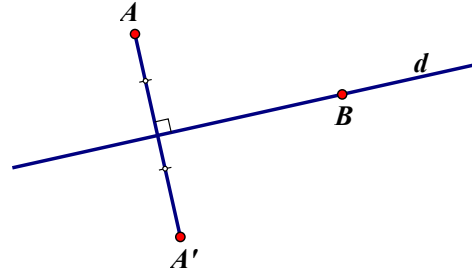
Từ (1) và (2) dễ dàng suy ra AMNI là hình thang cân với hai đáy AI, MN.



BÀI 6.**TRỤC ĐỐI XỨNG****A. LÝ THUYẾT****1. Hai điểm đối xứng qua một đường thẳng:**

Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Quy ước: Nếu điểm B nằm trên đường thẳng d thì điểm đối xứng với B qua đường thẳng d là chính B .

**2. Hai hình đối xứng qua một đường thẳng:**

Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua đường thẳng d và ngược lại.

Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.

3. Hình có trục đối xứng:

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua đường thẳng d cũng thuộc hình H .

Khi đó ta nói hình H có trục đối xứng d .

4. Định lý:

Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó.

B. RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 27. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi D và E lần lượt là điểm đối xứng của điểm H qua AB và AC . Chứng minh rằng:

- A là trung điểm của đoạn DE
- Tứ giác $BDEC$ là hình thang vuông.
- Cho $BH = 2\text{cm}$, $CH = 8\text{cm}$. Tính AH và chu vi hình thang $BDEC$.

Bài giải:

- Vì D đối xứng với H qua đường thẳng AB nên

$$\widehat{DAH} = 2\widehat{BAH}. \text{ Tương tự ta có } \widehat{EAH} = 2\widehat{CAH}.$$

Do đó:

$$\widehat{DAE} = \widehat{DAH} + \widehat{EAH} = 2(\widehat{BAH} + \widehat{CAH}) = 180^\circ$$

suy ra D, A, E thẳng hàng

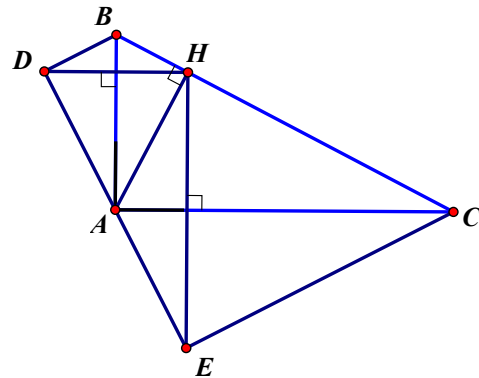
Mặt khác: $AD = AE = AH$. Vậy A là trung điểm của DE .

- Góc \widehat{ADB} và \widehat{AHB} đối xứng nhau qua đường thẳng AB nên $\widehat{ADB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$.

Tương tự ta có $\widehat{AEC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$. Tứ giác $BDEC$ có hai góc kề $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$, do vậy $BDEC$ là hình thang vuông tại D và E .

- $BH = 2\text{cm}$, $CH = 8\text{cm}$.

Trong tam giác ABH vuông tại H , theo định lý Pytago: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = AB^2 - 4$



Trong tam giác ACH vuông tại H, theo định lý Pitago $AH^2 = AC^2 - CH^2 = AC^2 - 64$

Suy ra: $2AH^2 = AB^2 + AC^2 - 68$.

Lại có $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 100$, suy ra $2AH^2 = 100 - 68 = 32 \Rightarrow AH^2 = 16$.

Vậy $AH = 4$.

Đặt V là chu vi hình thang BDEC.

Ta có $BD = BH$, $DE = 2DA = 2HA$, $EC = HC$. Do đó:

$V = BD + DE + EC + CB = BH + 2AH + CH + CB = 2 + 8 + 8 + 10 = 28(\text{cm})$.

Bài 28. Trên các cạnh bên CA, CB của tam giác CAB cân tại C lấy các điểm M, N sao cho $CM + CN = AC$.

a) Trên cạnh CB lấy điểm M' sao cho $CM' = BN$.

Chứng minh M, M' đối xứng nhau qua đường cao CH của tam giác CAB.

b) Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, MN. Chứng minh: D, E, F thẳng hàng.

Bài giải:

a) Ta có $CA = CB$.

Theo giả thiết: $CM + CN = AC = BC$ nên

$BN = BC - CN = CM$. Vì $CM' = BN$ suy ra

$CM = CM'$. Vậy tam giác CMM' cân tại C.

CH là đường phân giác góc ACB, nên CH là đường trung trực của cạnh MM' . Vậy M và M' đối xứng nhau qua đường thẳng CH.

b) $MM' \perp CH$, $AB \perp CH \Rightarrow MM' \parallel AB$.

DE là đường trung bình trong tam giác ABC nên $DE \parallel AB$, suy ra $DE \parallel MM'$.

Vì $\begin{cases} EC = EB \\ M'C = NB \end{cases} \Rightarrow EM' = EN$, suy ra E là trung điểm của $M'N$.

Trong tam giác $MM'N$, đường thẳng DE song song với MM' và đi qua trung điểm của $M'N$ nên DE là đường trung bình, do đó DE đi qua trung điểm F của MN. Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Bài 29. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn trong đó góc A có số đo bằng 60° . Lấy D là điểm bất kì trên cạnh BC. Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của D qua cạnh AB và AC. EF cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tại M và N.

a) Chứng minh rằng $AE = AF$

b) Tính góc EAF

c) Chứng minh rằng DA là phân giác của góc MDN

Bài giải:

a) E đối xứng của D qua đường thẳng

AB nên $AE = AD$, F đối xứng của D

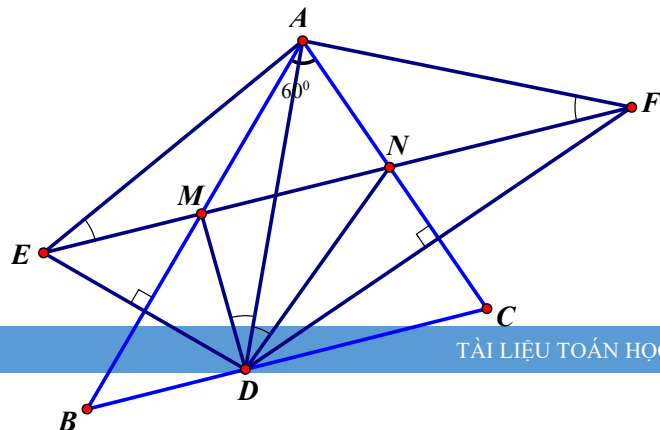
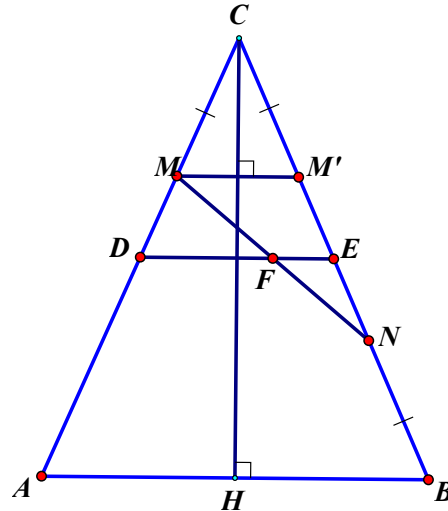
qua đường thẳng AC nên $AF = AD$.

Từ đó ta có $AE = AF$.

b) Góc \widehat{EAB} và \widehat{DAB} đối xứng nhau

qua đường thẳng AB nên $\widehat{EAB} =$

\widehat{DAB} , suy ra



$\widehat{EAD} = \widehat{EAB} + \widehat{DAB} = 2\widehat{DAB}$. Chứng minh tương tự ta có $\widehat{FAD} = 2\widehat{DAC}$.

Do vậy: $\widehat{EAF} = \widehat{EAD} + \widehat{FAD} = 2(\widehat{DAB} + \widehat{DAC}) = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$.

c) Hai góc MDA và MEA đối xứng nhau qua đường thẳng AB nên $\widehat{MDA} = \widehat{MEA}$ (1).

Tương tự ta có $\widehat{NDA} = \widehat{NFA}$ (2).

Mặt khác theo câu a), tam giác AEF cân tại A nên $\widehat{MEA} = \widehat{NFA}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{MDA} = \widehat{NDA}$. Vậy DA là đường phân giác góc MDN.

Bài 30. Cho hai điểm A và B cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d. Tìm trên d một điểm C sao cho tổng độ dài CA + CB là ngắn nhất.

Bài giải:

Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d. Với mỗi điểm C trên đường thẳng d, ta có $CA = CA'$. Do đó: $CA + CB = CA' + CB \geq A'B$.

CA + CB nhỏ nhất khi $CA' + CB = A'B$, hay C thuộc đoạn A'B. Vậy điểm C thỏa đề bài là giao điểm của đoạn BA' với đường thẳng d.

Bài 31. Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc xOy. Tìm trên hai cạnh Ox và Oy hai điểm B và C sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất.

Bài giải:

Gọi H, K lần lượt là điểm đối xứng của A qua Ox và Oy. Với hai điểm B và C lần lượt nằm trên tia Ox, Oy, ta có:

$AB = HB$ và $CA = CK$.

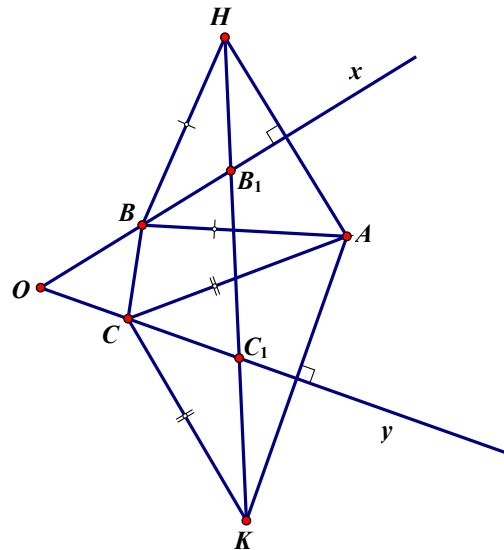
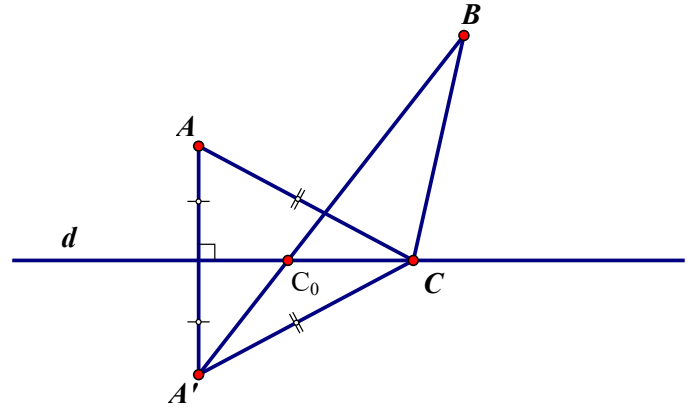
Do đó chu vi tam giác ABC bằng:

$AB + BC + CA = HB + BC + CK \leq HK$.

Chu vi tam giác ABC nhỏ nhất khi:

$HB + BC + CK = HK$, hay H, B, C, K thẳng hàng theo thứ tự đó.

Vậy điểm B và C trên tia Ox, Oy để tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất lần lượt là giao điểm của HK với các tia Ox, Oy.



Bài 32. Cho tứ giác ABCD có góc ngoài của tứ giác tại đỉnh C bằng góc ACB. Chứng minh rằng $AB + DB > AC + DC$.

Bài giải:

Gọi E là một điểm trên tia đối của tia CB. Theo giả thiết ta có: $\widehat{DCE} = \widehat{ACB}$.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng BC . Ta có $\widehat{A'CB} = \widehat{ACB} = \widehat{DCE}$, suy ra:

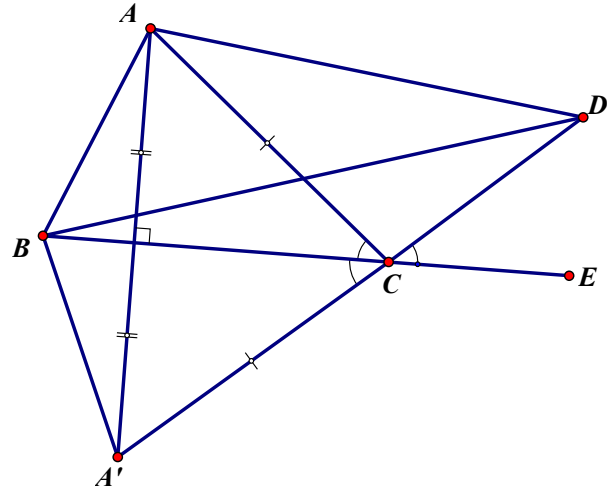
$$\widehat{DCE} + \widehat{A'CE} = \widehat{A'CB} + \widehat{A'CE} = 180^\circ.$$

Vậy ba điểm D, C, A' thẳng hàng. Vì A và D nằm cùng phía so với đường thẳng BC nên C nằm giữa D và A' .

$$\text{Ta có: } AB + DB = A'B + BD,$$

$$AC + CD = A'C + CD = A'D.$$

Trong tam giác BDA' , $A'B + BD > A'D$. Do vậy ta được $AB + DB > AC + CD$.



Bài 33. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 20^\circ$, $\widehat{B} = 80^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM = BC$. Tính \widehat{BMC} .

Bài giải:

Bên trong tam giác ABC , dựng tam giác đều BCD . Ta có:

$$\widehat{ACD} = \widehat{ACB} - \widehat{DCB} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ.$$

Xét hai tam giác ACD và BAM có:

$$AC = BA \text{ (vì tam giác } ABC \text{ cân tại } A)$$

$$\widehat{ACD} = \widehat{BAM} = 20^\circ.$$

$$CD = AM \text{ (cùng bằng } BC)$$

Do vậy, hai tam giác ACD và BAM bằng nhau. Ta có:

$$\widehat{ABM} = \widehat{CAD} \text{ (1).}$$

Gọi H là trung điểm của BC , ta có $AH \perp BC$ và $DH \perp BC$ suy ra hai đường thẳng AD và AH trùng nhau, AD là trục đối xứng của tam giác cân ABC . Từ đó ta có $\widehat{CAD} = \widehat{BAD} = 10^\circ$ (2).

$$(1) \text{ và } (2) \text{ suy ra } \widehat{ABM} = 10^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{BMC} = \widehat{BAM} + \widehat{ABM} = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ.$$

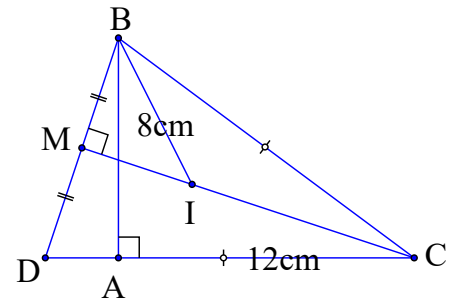
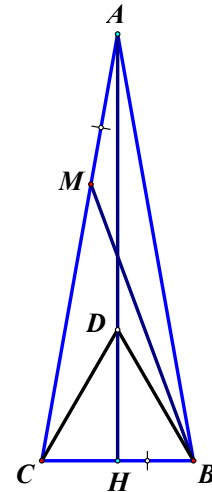
Bài 34.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Gọi I là giao điểm của các đường phân giác của $\triangle ABC$. Biết $AC = 12\text{cm}$; $IB = 8\text{cm}$. Tính độ dài BC .

Giải:

Gọi D là điểm đối xứng của B qua đường thẳng CI . Vì CI là phân giác góc \widehat{BAC} nên D thuộc đường thẳng AC và $BC = DC$.

Gọi M là trung điểm BD , thì $CM \perp BD$.

Ta có: $\widehat{BIM} = \widehat{ICB} + \widehat{IBC} = 45^\circ$, do đó tam giác BMI vuông cân tại M , suy ra $BM = 4\sqrt{2}$ (cm).



$$\Rightarrow BD = 8\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$

$$AD = CD - AC = BC - 12 \text{ (cm)}$$

$$\text{Tam giác ABC vuông tại A, có: } AB^2 = BC^2 - AC^2 = BC^2 - 144$$

$$\text{Tam giác ABD vuông tại A, có: } AB^2 = BD^2 - AD^2 = 128 - (BC - 12)^2$$

$$\text{Như vậy ta có: } 128 - (BC - 12)^2 = BC^2 - 144$$

$$\Rightarrow 128 - (BC^2 - 24BC + 144) = BC^2 - 144$$

$$\Rightarrow 2BC^2 - 24BC - 128 = 0$$

$$\Rightarrow 2BC^2 - 32BC + 8BC - 128 = 0$$

$$\Rightarrow 2BC(BC - 16) + 8(BC - 16) = 0$$

$$\Rightarrow (2BC + 8)(BC - 16) = 0.$$

$$\Rightarrow BC = 16 \text{ (cm)}.$$

BÀI 7.

HÌNH BÌNH HÀNH

A. LÝ THUYẾT:

1. **Định nghĩa:** Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song với nhau.

2. **Tính chất – Định lý:** Trong hình bình hành:

- Các cạnh đối song song và bằng nhau.
- Các góc đối bằng nhau
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết hình bình hành:

- Tứ giác có các cạnh đối song song nhau
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau
- Tứ giác có một cặp cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

B. VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $CB = CE$. Chứng minh AECD là hình bình hành.

Giải:

Để thấy tam giác BCE cân tại C suy ra $\widehat{CBE} = \widehat{CEB}$

Ta lại có $\widehat{CBA} = \widehat{DAB}$

Mà $\widehat{CBE} + \widehat{CBA} = 180^\circ$

Nên $\widehat{CEB} + \widehat{DAB} = 180^\circ$

Suy ra $AC \parallel ED$ (2 góc trong cùng phía bù nhau)

Suy ra AECD là hình bình hành

Ví dụ 2: Cho tứ giác ABCD, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

- Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành
- Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng các đoạn thẳng MP, QN, IJ đồng quy tại một điểm.

Giải:

a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $MN \parallel AC$ và $MN = \frac{1}{2} AC$; PQ là đường trung bình của tam

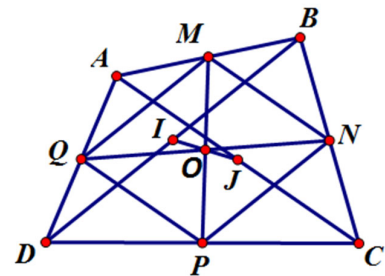
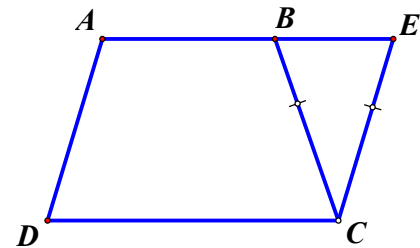
giác ADC suy ra $PQ \parallel AC$ và $PQ = \frac{1}{2} AC$.

Do đó $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$, suy ra MNPQ là hình bình hành.

b) Gọi O là trung điểm MP thì O cũng là trung điểm QN.

Tam giác ABD có MI là đường trung bình nên $MI \parallel AD$ và $MI = \frac{1}{2} AD$.

Tam giác ACD có PJ là đường trung bình nên $PJ \parallel AD$ và $PJ = \frac{1}{2} AD$.



Suy ra MI/PJ và $MI = PJ \Rightarrow MIP$ là hình bình hành. Mà O là trung điểm MP nên O cũng là trung điểm IJ .

Vậy các đoạn thẳng MP, QN, IJ đồng quy tại O .

Ví dụ 3: Cho tứ giác $ABCD$, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

a) Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Gọi I là giao điểm của MP và QN . Gọi E là điểm trên tia IA sao cho $EA = 2AI$ và J là giao điểm của tia MA và EP . Chứng minh rằng J là trung điểm của EP .

Giải:

a) Tương tự ví dụ 2.

b) Xét tam giác EMP có EI là trung tuyến.

Điểm A nằm trên đoạn EI và $EA = 2AI$

$$\Leftrightarrow EA = \frac{2}{3} EI \Leftrightarrow A \text{ là trọng tâm tam giác } EMP.$$

Suy ra MA là trung tuyến của tam giác EMP

Mà MA cắt EP tại J nên J là trung điểm EP .

C. RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI BÀI TẬP:

Bài 35. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$, phân giác góc \widehat{D} đi qua trung điểm của cạnh AB . Gọi E là trung điểm của CD . Chứng minh:

a) $AB = 2AD$

b) $\triangle ADE$ đều, $\triangle AEC$ cân

c) $AC \perp AD$

Bài giải:

a) Gọi M là trung điểm của cạnh AB , ta có

$$\widehat{AMD} = \widehat{CDM} \quad (1) \text{ (so le trong).}$$

Mặt khác, DM là phân giác góc D nên $\widehat{ADM} = \widehat{CDM}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ADM}$, do đó tam giác ADM cân tại A .

$$\text{Vậy } AD = AM = \frac{1}{2} AB.$$

b) Trong hình bình hành $ABCD$, $\widehat{A} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 60^\circ$

và $AD = DE = \frac{1}{2} CD$. Tam giác ADE cân và có một góc

bằng 60° , nên tam giác ADE đều.

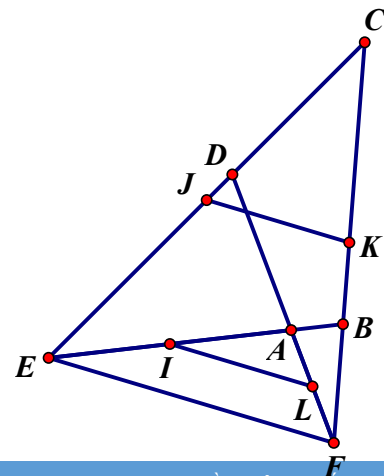
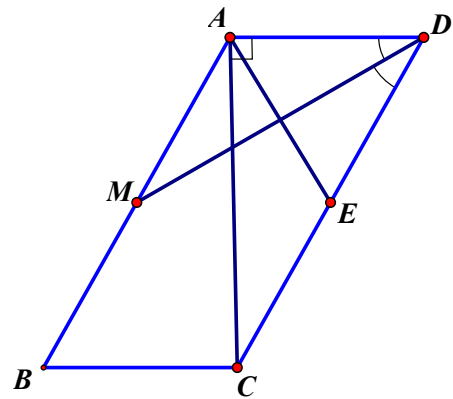
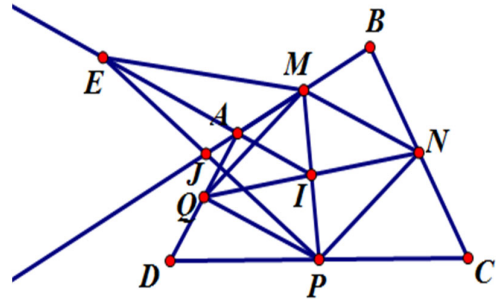
Theo trên, tam giác ADE đều nên $AE = ED = EC$, suy ra tam giác AEC cân tại E .

c) Vì $\triangle ADE$ đều và $\triangle ACE$ cân tại E nên

$$\widehat{EAC} = \frac{1}{2} \widehat{AED} = 30^\circ \text{ (góc ngoài của } \triangle AEC)$$

Mặt khác $\widehat{EAD} = 60^\circ$, suy ra $\widehat{CAD} = 90^\circ$.

Vậy $AC \perp AD$.



Bài 36. Cho tứ giác ABCD. Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại E, đường thẳng BC cắt đường thẳng AD tại F. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AE, CE, CF, AF. Chứng minh rằng $IL \parallel JK$.

Bài giải:

Xét $\triangle AEF$, I là trung điểm của AE, L là trung điểm của AF nên IL là đường trung bình. Ta có $IL \parallel EF$ (1).

Tương tự, xét $\triangle CEF$, JK là đường trung bình nên $JK \parallel EF$ (2).

Mặt khác, I, J, K lần lượt nằm trên ba cạnh của tam giác EBC nên I, J, K không thẳng hàng. Vậy từ (1) và (2) suy ra $IL \parallel JK$.

Bài 37. Cho hình bình hành ABCD. Hai điểm E, F lần lượt lấy trên BC, AD sao cho $BE = \frac{1}{3}BC$,

$DF = \frac{1}{3}DA$ và EF lần lượt cắt AB, CD tại G, H. Chứng minh rằng:

a) $GE = EF = FH$

b) Tứ giác AECF là hình bình hành.

Bài giải:

a) Trong $\triangle AGF$, B trên cạnh AG, E trên cạnh

FG. Ta có $BE = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{2}AF$ và $BE \parallel AF$

suy ra BE là đường trung bình trong $\triangle AGF$.

Do đó E là trung điểm của GF (1).

Chứng minh tương tự, DF là đường trung bình trong tam giác CHE, nên F là trung điểm của HE (2).

Từ (1) và (2) suy ra $GE = EF = FH$.

b) Ta có $AF = \frac{2}{3}AD$ và $EC = \frac{2}{3}BC$, suy ra

$AF = CE$. Mặt khác $AF \parallel CE$, do vậy tứ giác AECF là hình bình hành.

Bài 38. Cho hình bình hành ABCD có 2 đường chéo cắt nhau tại O, đường thẳng d nằm ngoài hình bình hành. Gọi A', B', C', D', O' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, O trên đường thẳng d. Chứng minh rằng: $AA' + CC' = BB' + DD' = 2OO'$

Bài giải:

Ta có

$AA' \perp d, CC' \perp d \Rightarrow AA' \parallel CC'$

suy ra tứ giác $AA'C'C$ là hình thang.

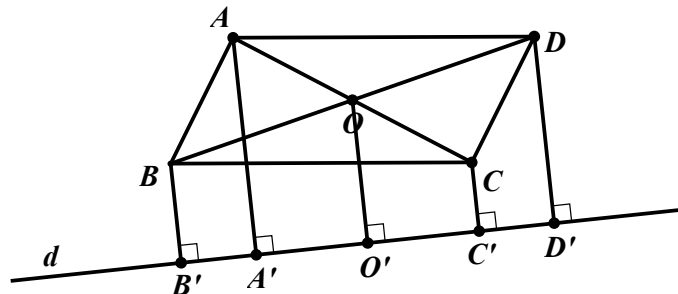
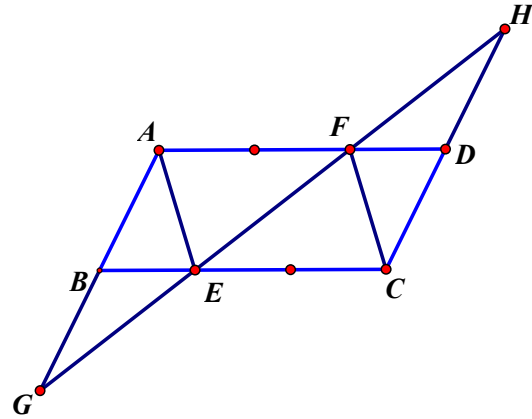
O là trung điểm AC và OO' song song với AA' nên OO' là đường trung bình của hình thang $AA'C'C$.

Từ đó ta có: $AA' + CC' = 2OO'$.

Lập luận tương tự, ta có $BB' + DD' = 2OO'$.

Vậy $AA' + CC' = BB' + DD' = 2OO'$.

Bài 39. Cho tam giác ABC có 3 đường trung tuyến AM, BN, CP. Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng qua B song song với AM tại F; NP cắt BF tại I, FN cắt AB tại



K, FP cắt BN tại H, NJ//AM (J thuộc BC). Chứng minh rằng các tứ giác AFPN, CNFP, NIBJ là các hình bình hành.

Bài giải:

AF // BM và AM // BF, do đó AMBF là hình bình hành.

Suy ra AF = MB và AF // MB (1).

Lại có PN là đường trung bình trong ΔABC nên PN = MB và PN // MB (2).

Từ (1) và (2) suy ra PN = AF và PN // AF.

Vậy AFPN là hình bình hành.

Theo trên, AFPN là hình bình hành nên FP = AN = NC và FP // NC, từ đó suy ra CNFP là hình bình hành.

Trong ΔACM , NJ là đường trung bình, suy ra NJ // AM // IB. Lại có NI // BJ, do vậy tứ giác NIBJ là hình bình hành.

Bài 40. Cho tam giác ABC, các đường cao AK và BD cắt nhau tại G. Vẽ các đường trung trực HE, HF của các cạnh AC, BC. Đường thẳng qua A song song với BG cắt đường thẳng qua B song song với AK tại I. Chứng minh rằng:

- $BG = AI$
- $BG = 2HE$
- $AG = 2HF$

Bài giải:

a) Ta có AG // BI và BG // AI nên tứ giác AIBG là hình bình hành, suy ra BG = AI.

b) IB // AG \Rightarrow IB \perp BC, mà HF \perp BC, do đó IB // HF.

Lại có F là trung điểm của BC nên HF đi qua trung điểm của IC.

Chứng minh tương tự, HE cũng đi qua trung điểm của IC.

Từ đó ta được H là trung điểm của IC.

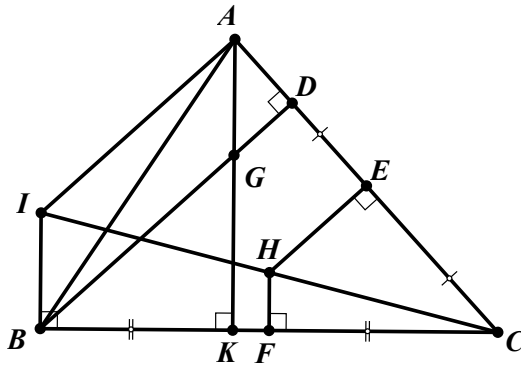
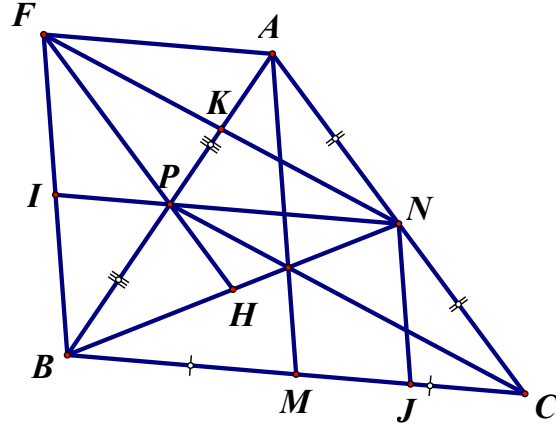
Trong ΔAIC , HE là đường trung bình, do

đó $HE = \frac{1}{2} AI = \frac{1}{2} BG$. Vậy $BG = 2HE$.

c) Theo chứng minh trên, HF là đường trung bình trong ΔCBI .

Suy ra $HF = \frac{1}{2} BI = \frac{1}{2} AG$ (Vì AIBG là hình bình hành). Vậy $AG = 2HF$.

Bài 41. Cho tam giác ABC, các đường cao BH và CK cắt nhau tại E. Đường thẳng qua B vuông góc với AB và đường thẳng qua C vuông góc với AC cắt nhau tại D. Gọi M là trung điểm của BC.



- a) Tứ giác BDCE là hình gì? Vì sao?
 b) Chứng minh rằng M là trung điểm của DE. Tam giác ABC thỏa mãn điều kiện gì thì DE đi qua A?
 c) Chứng minh rằng $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$.

Bài giải:

- a) Ta có:

$$\begin{cases} BE \perp AC \\ DC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BE \parallel DC \quad (1),$$

$$\begin{cases} CE \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow CE \parallel BD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra BDCE là hình bình hành.

- b) Vì BDCE là hình bình hành và M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của DE.

DE đi qua A khi và chỉ khi A, E, M thẳng hàng. Vì E là giao điểm hai đường cao BH và CK nên AE là đường cao trong tam giác ABC. Vậy AE qua M khi và chỉ khi đường cao và đường trung tuyến kẻ từ A trùng nhau, hay tam giác ABC cân tại A.

- c) Trong tứ giác ABDC: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$, mà $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$ nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$.
 Vậy $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$.

Bài 42. Cho ΔABC nhọn ($AB < AC$), hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Vẽ đường thẳng vuông góc với AB tại B, vẽ đường thẳng vuông góc với AC tại C, hai đường thẳng này cắt nhau tại D.

- a) Chứng minh $AH \perp BC$ và tứ giác BHCD là hình bình hành.
 b) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh ba điểm H, M, D thẳng hàng và ΔEMF cân.
 c) Gọi K là điểm đối xứng của H qua BC. Chứng minh $BD = CK$.
 d) Đường thẳng vuông góc BC tại M cắt AD tại L. Chứng minh $AH = 2ML$.

Giải:

a)

- * Chứng minh $AH \perp BC$: H là giao điểm hai đường cao BE và CF nên H là trực tâm tam giác ABC, do đó $AH \perp BC$.

* Chứng minh tứ giác BHCD là hình bình hành.

$$BH \perp AC, DC \perp AC \Rightarrow BH \parallel DC \quad (1)$$

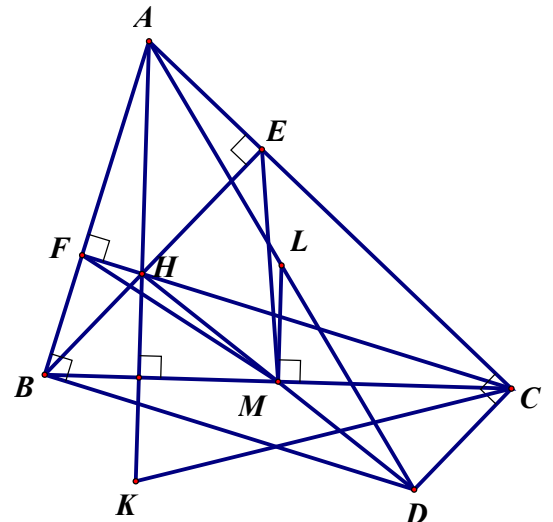
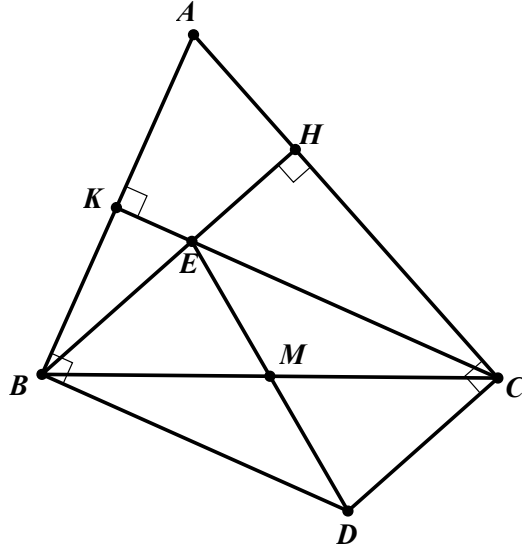
$$CH \perp AB, DB \perp AB \Rightarrow CH \parallel DB \quad (2)$$

(1) và (2) suy ra BHCD là hình bình hành.

- b) Hình bình hành BHCD có hai đường chéo BC và HD, do đó M là trung điểm BC cũng là trung điểm HD.

Vậy H, M, D thẳng hàng.

ΔFBC vuông tại F, có FM là trung tuyến, do đó $FM =$



$\frac{1}{2}BC$. $\triangle EBC$ vuông tại E, có EM là trung tuyến, do đó $EM = \frac{1}{2}BC$.

Từ đó ta được $FM = EM$, hay $\triangle EMF$ cân tại M.

c) Chứng minh $BD = CK$.

K và H đối xứng nhau qua đường thẳng BC nên $CH = CK$.

Tứ giác BHCD là hình bình hành nên $CH = BD$.

Từ đó có ta $BD = CK$.

d) Chứng minh $AH = 2ML$.

Theo trên $AH \perp BC$, theo giả thiết $ML \perp BC$, do đó $ML \parallel AH$.

Trong $\triangle AHD$ có M là trung điểm của HD (chứng minh trên), L thuộc AD và $ML \parallel AH$.

Từ đó suy ra ML là đường trung bình trong tam giác AHD. Vậy $AH = 2ML$.

Bài . Cho hình bình hành ABCD. Vẽ hình bình hành BDCE là BDFC. CD cắt BF ở M và AM cắt CF ở N.

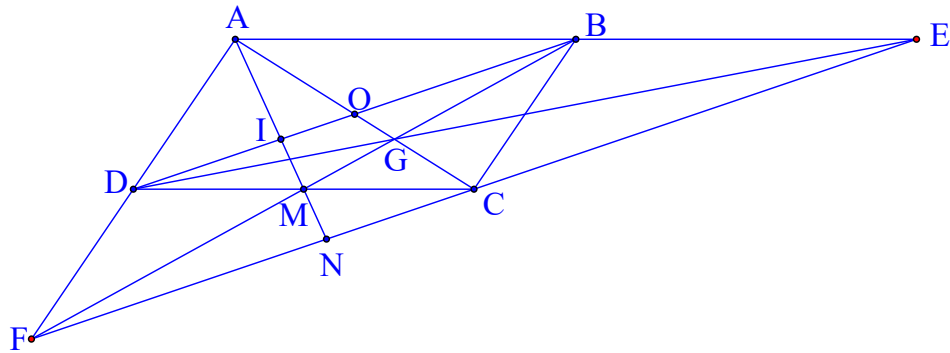
a) Chứng minh A đối xứng với E qua B.

b) Chứng minh C là trung điểm của EF.

c) Chứng minh AC, BF, DE đồng qui tại một điểm.

d) Chứng minh $FC = 3NC$.

Giải:



a) Vì ABCD là hình bình hành nên $AB \parallel CD$ và $AB = CD$;

Vì BDCE là hình bình hành nên $EB \parallel CD$ và $EB = CD$.

Từ đó ta có A, B, E thẳng hàng và $AB = EB$, do đó A đối xứng với E qua B.

b) BDCE là hình bình hành nên $CE = DB$ và $CE \parallel DB$; BDFC là hình bình hành nên $CF = DB$ và $CF \parallel DB$.

Do đó C, E, F thẳng hàng và $CE = CF$, vậy C là trung điểm của EF.

c) Dễ thấy $DF = BC$ và $DF \parallel BC$; $AD = BC$ và $AD \parallel BC$. Do đó $DF = AD$ và A, D, F thẳng hàng, hay D là trung điểm của AF.

Xét tam giác AEF, có AC, BF và ED là trung tuyến, do vậy AC, BF, BD đồng qui tại trọng tâm tam giác AEF.

d) Gọi I là giao điểm của AN và BD và O là giao điểm của AC và BD. Ta có I là trọng tâm tam giác ACD, suy ra $IO = \frac{1}{3}DO = \frac{1}{6}DB = \frac{1}{6}FC$ (1).

Trong tam giác CAN có O là trung điểm của AC và $OI \parallel CN$ nên OI là đường trung bình, do đó ta có $IO = \frac{1}{2} CN$ (2).

(1), (2) suy ra $FC = 3CN$.

Bài 43.* Cho tam giác nhọn ABC. Về phía ngoài tam giác, dựng các tam giác vuông cân ABD và ACE vuông tại A. Chứng tỏ rằng đường trung tuyến AM của tam giác ADE vuông góc với BC.

Lời giải:

Gọi H là giao điểm của AM và BC.

Dựng hình bình hành ADFE.

Ta có $\widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180^\circ$. Suy ra $\widehat{FEA} = \widehat{BAC}$ (cùng bù với góc \widehat{DAE}).

Hai tam giác CAB và AEF có:

$AC = EA$.

$CAB = AEF$ (theo trên).

$AB = EF$.

Suy ra $\triangle CAB = \triangle AEF$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{EAF}$.

Mặt khác $\widehat{CAH} + \widehat{EAF} = 90^\circ$

Do đó $\widehat{CAH} + \widehat{ACB} = 90^\circ$

Vậy $\widehat{AHC} = 90^\circ$.

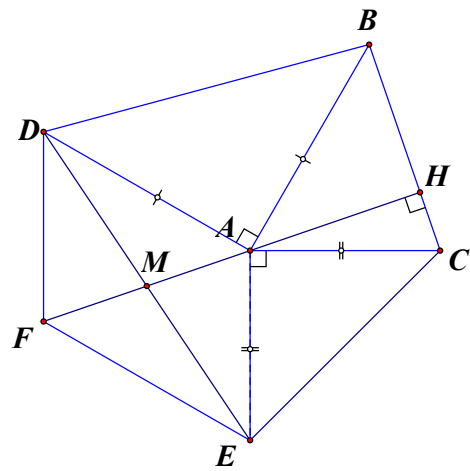
Bài 44*. Cho hình bình hành ABCD. Dựng các tam giác đều ABE, ADF ở ngoài hình bình hành ABCD.

Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AF, BD, AE.

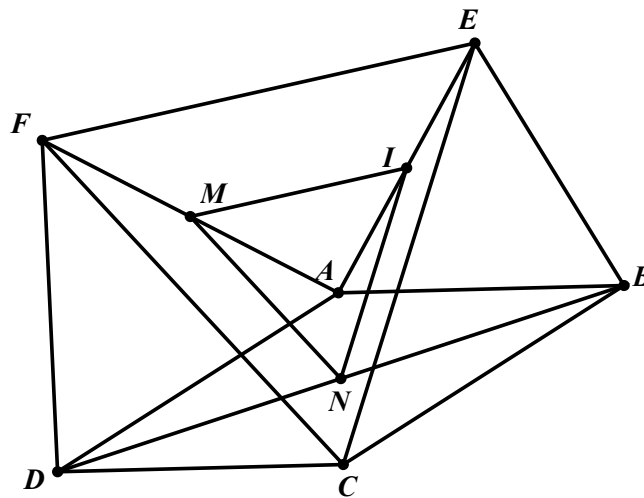
Chứng minh rằng:

a) Tam giác CEF là tam giác đều.

b) $\widehat{MNI} = 60^\circ$.



Bài giải:



a) Ta có: $\widehat{EBC} = \widehat{EBA} + \widehat{ABC} = 60^\circ + \widehat{ABC}$, $\widehat{FDC} = \widehat{FDA} + \widehat{ADC} = 60^\circ + \widehat{ADC}$.

Mặt khác, vì tứ giác ABCD là hình bình hành nên $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$, suy ra $\widehat{EBC} = \widehat{FDC}$.

Hai tam giác EBC và FDC có:

$EB = CD$ (cùng bằng AB), $\widehat{EBC} = \widehat{CDF}$, $BC = DC$ (cùng bằng AD)

Suy ra $\triangle EBC = \triangle FDC$ (c-g-c), từ đó ta có $EC = FC$ (1).

$$\begin{aligned}\widehat{EAF} &= 360^\circ - (\widehat{EAB} + \widehat{FAD} + \widehat{DAB}) = 240^\circ - \widehat{DAB} \\ &= 240^\circ - (180^\circ - \widehat{ABC}) = 60^\circ + \widehat{ABC}\end{aligned}$$

Do đó $\widehat{EAF} = \widehat{EBC}$. Hai tam giác EAF và EBC có:

$EA = EB$, $\widehat{EAF} = \widehat{EBC}$ và $AF = BC$, do vậy $\triangle EAF = \triangle EBC$, từ đó ta có $EF = EC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $EC = CF = FE$. Vậy $\triangle CEF$ đều.

b) N là trung điểm của BD cũng là trung điểm của AC. Như vậy, MN, IN, MI lần lượt là đường trung bình trong các tam giác AFC, AEC và AEF. Ta có:

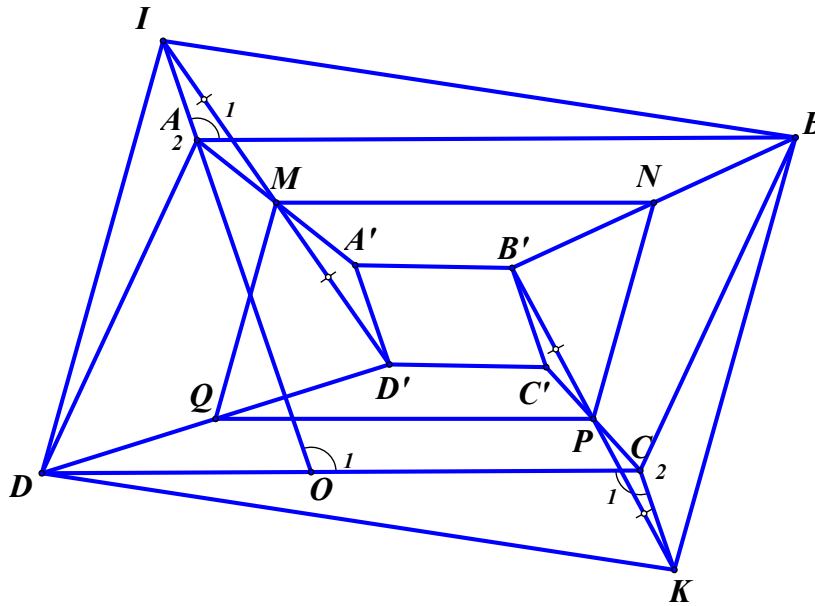
$$MN = \frac{1}{2} FC, IN = \frac{1}{2} EC, MI = \frac{1}{2} EF.$$

Theo trên, $FC = EC = EF \Rightarrow MN = IN = MI$. Suy ra MNI là tam giác đều.

Vậy $\widehat{MNI} = 60^\circ$.

Bài 45*. Cho hình bình hành ABCD. Ở miền trong hình bình hành ABCD vẽ hình bình hành $A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AA' , BB' , CC' , DD' . Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Bài giải:



Gọi I là điểm đối xứng của D' qua M, K là điểm đối xứng của B' qua P, suy ra các tứ giác $AIA'D'$ và $CKC'B'$ là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn).

Từ đó ta có $AI = A'D' = B'C' = CK$ và $AI \parallel A'D' \parallel B'C' \parallel CK$.

AI cắt CD tại O thì $A_1 = O_1$ (góc đồng vị) và $O_1 = C_1$ (so le trong).

Vì $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{IAD} = \widehat{KCB}$.

Từ đó ta chứng minh được $\triangle IAD = \triangle KCB$ và $\triangle IAB = \triangle KCD$ (c-g-c)

$\triangle IAD = \triangle KCB \Rightarrow ID = KB$.

$$\Delta IAB = \Delta KCD \Rightarrow IB = KD.$$

Như vậy ta được tứ giác IDKB là hình bình hành, suy ra $ID \parallel KB$, $ID = KB$ (1).

MQ là đường trung bình trong tam giác $ID'D$, ta có $MQ = \frac{1}{2}ID$ và $MQ \parallel ID$ (2).

Tương tự $NP = \frac{1}{2}KB$ và $NP \parallel KB$ (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow MQ \parallel NP$ và $MQ = NP$. Vậy MNPQ là hình bình hành.

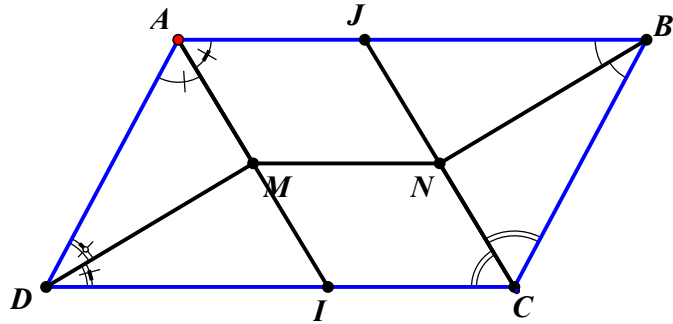
Bài 46*. Cho hình bình hành ABCD, các phân giác \widehat{A} và \widehat{D} cắt nhau tại M, các phân giác \widehat{B} và \widehat{C} cắt nhau tại N. Chứng minh rằng $MN \parallel AB$.

Bài giải:

Giả sử AM cắt DC tại I, CN cắt AB tại J.

Ta có $\widehat{DAI} = \widehat{BAI} = \widehat{DIA}$ (so le trong) suy ra tam giác DAI cân tại D, do đó M là trung điểm của AI. Chứng minh tương tự, ta có N là trung điểm của CJ.

Xét tứ giác AICJ, có $AJ \parallel CI$ nên AICJ là hình thang và MN là đường trung bình trong hình thang AICJ. Vậy $MN \parallel AB$ (chứng minh xong).



Bài 47. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm F; trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $BE = CF$. Vẽ hình bình hành BEFD.

a) Chứng minh $DC \perp BC$.

b) Gọi I là giao EF và BC. Chứng minh $AI = \frac{1}{2}DB$.

c) Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với AF cắt BD tại M. Chứng minh MICF là hình thang cân.

d) Tìm vị trí của E trên AB để A, I, D thẳng hàng.

Giải:

a) BEFD là hình bình hành suy ra $DF \parallel AB$ và $DF = BE$.

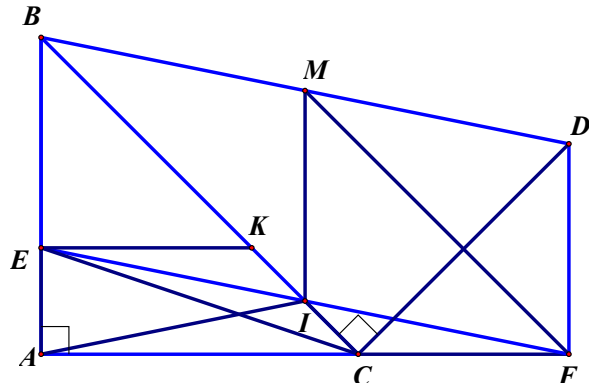
Từ đó ta có: $DF \perp FC$ và $DF = CF$. Hay tam giác DFC vuông cân tại F

Do đó $\widehat{DCF} = 45^\circ$.

Lại có $\widehat{BCA} = 45^\circ$, suy ra $\widehat{BCD} = 90^\circ$.

Vậy $DC \perp BC$.

b) Dựng đường thẳng qua E vuông góc với



AB, cắt BC tại K. Dễ thấy BEK là tam giác vuông cân, suy ra $EK = BE = CF$.

Mặt khác $EK \parallel CF$ (cùng vuông góc với AB). Từ đó ta được EKFC là hình bình hành, suy ra I là trung điểm của EF.

Trong tam giác AEF vuông tại A, có AI là trung tuyến, do vậy: $AI = \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} BD$.

c) $MI \perp AF \Rightarrow MI \parallel BE$.

Lại có I là trung điểm của EF và BEFD là hình bình hành nên M là trung điểm của BD. Suy ra $MF \parallel BI \parallel IC$ và $MI = DF = FC$.

Vậy MICF là hình thang cân.

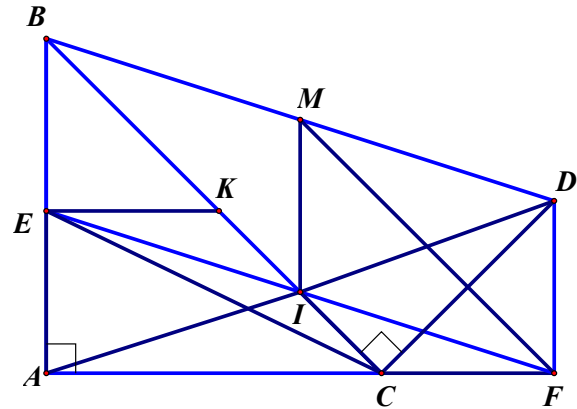
Giả sử A, I, D thẳng hàng.

Xét $\triangle ABD$ có M là trung điểm của BD, $MI \parallel AB$. Suy ra MI là đường trung bình trong $\triangle ABD$. Như vậy I là trung điểm của AD.

Từ đó dễ dàng suy ra AEDF là hình chữ nhật.

Khi đó: $AE = FD = FC = BE$. Vậy E là trung điểm của AB.

Ngược lại, nếu E là trung điểm của AB thì ta dễ dàng suy ra A, I, D thẳng hàng.



Bài 48*. Cho hình bình hành ABCD, \hat{A} là góc nhọn, AC cắt BD tại O, $DE \perp AB$ tại E, $DF \perp BC$ tại F.

a) Chứng minh rằng tam giác FOE cân

b) Giả sử $\widehat{BAD} = m$. Tính \widehat{EOF} theo m.

Bài giải:

a) Trên tia đối của tia FB lấy điểm I sao cho $FI = FB$. Ta có F là trung điểm của BI.

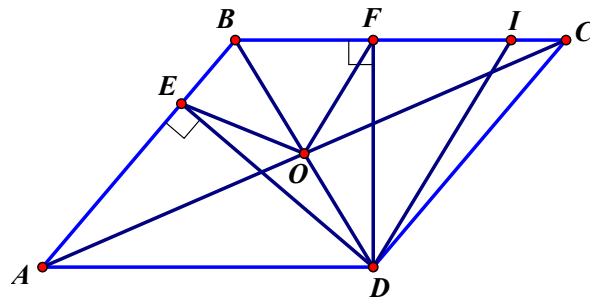
Ta giác DBI có DF vừa là trung tuyến, vừa là đường cao nên tam giác BDI cân tại D.

OF là đường trung bình trong tam giác BDI, suy ra $FO = \frac{1}{2} ID = \frac{1}{2} BD$.

Lập luận tương tự, ta có $EO = \frac{1}{2} BD$.

Từ đó suy ra $EO = FO$, hay tam giác FOE cân tại O.

b) Theo chứng minh ở câu trên, tam giác ODF cân tại O suy ra $\widehat{ODF} = \widehat{OFD}$



Ta có: $\widehat{ODF} + \widehat{OFD} = \widehat{BOF}$ (góc ngoài tam giác ODF) $\Rightarrow \widehat{BOF} = 2\widehat{ODF}$

Tương tự $\widehat{BOE} = \widehat{ODE}$.

Do đó $\widehat{EOF} = \widehat{BOE} + \widehat{BOF} = 2\widehat{EDF}$.

Mặt khác, $\widehat{EDF} + \widehat{ABC} + \widehat{BED} + \widehat{BFD} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{EDF} + \widehat{ABC} = 180^\circ$

Do đó $\widehat{EDF} = \widehat{BAD} = m$ (cùng bù với \widehat{ABC})

Vậy $\widehat{EOF} = 2m$.

Bài 49*. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Lấy điểm G trên AM sao cho $AG = 2GM$.

a) Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC.

b) Gọi N, P lần lượt là trung điểm của CA, AB. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm của tam giác MNP.

Bài giải:

a) $AG = 2GM$ suy ra $AM = AG + GM = AG + \frac{1}{2}AG = \frac{3}{2}AG$.

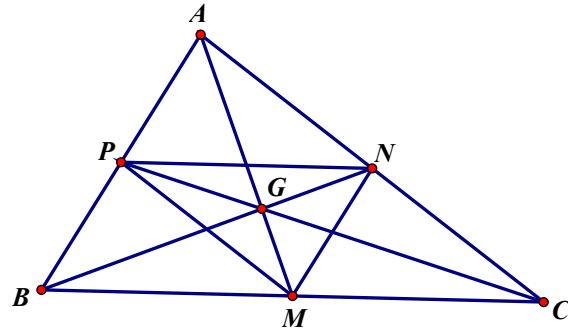
Điểm G trên đoạn AM thỏa mãn $AG = \frac{2}{3}AM$, do đó G là trọng tâm tam giác ABC

b) Ta có $PN = \frac{1}{2}BC = MC$ và $PN \parallel MC$, do

đó tứ giác CMPN là hình bình hành. Suy ra đường thẳng CP đi qua trung điểm của MN. Vì CP là đường trung tuyến trong tam giác ABC nên CP đi qua G, do vậy PG là đi qua trung điểm của MN.

Chứng minh tương tự, NG đi qua trung điểm của MP.

Vậy G là trọng tâm tam giác MNP.



Bài 50. Cho tam giác ABC cân tại B, trực tâm H, M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua H vuông góc với MH cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng H là trung điểm của EF.

Giải:

Gọi D là điểm đối xứng của C qua H.

HM là đường trung bình trong tam giác BCD nên $BD \parallel MH$.

Mà $MH \perp HE$ nên $HE \perp BD$ (1).

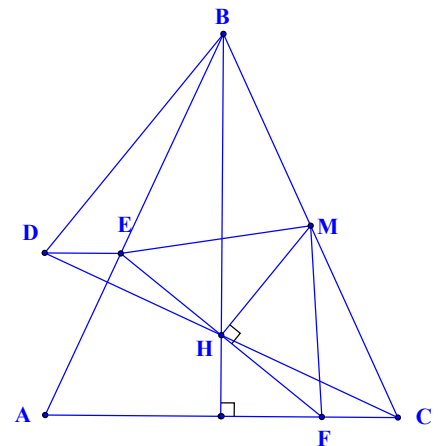
Vì H là trực tâm tam giác ABC nên $BE \perp AC$ (2).

Từ đó suy ra E là trực tâm tam giác BDH, do đó $DE \perp BH$.

Suy ra $DE \parallel CF$.

Từ đó ta chứng minh được DECF là hình bình hành, với H là giao điểm hai đường chéo.

Vậy H là trung điểm của EF.



BÀI 8.

ĐỐI XỨNG TÂM

A. LÝ THUYẾT

1. Hai điểm đối xứng qua một điểm:

a) **Định nghĩa:** Hai điểm M, M' gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng MM'.

b) **Quy ước:** Nếu điểm M trùng với điểm O thì điểm đối xứng với điểm M là điểm M' cũng trùng với điểm O.

c) **Tính chất:** M đối xứng với M' qua O $\Rightarrow OM = OM'$

2. Hai hình đối xứng qua một điểm:

a) **Định nghĩa:** Hai hình H và H' gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình H có điểm đối xứng qua O thuộc hình H'. Khi đó, điểm O gọi là tâm đối xứng của hai hình H và H'.

b) **Định lí:** Nếu điểm A và A', B và B', C và C' đối xứng với nhau qua tâm O thì:

* Đoạn thẳng AB đối xứng với đoạn thẳng A'B' qua tâm O và $AB = A'B'$.

* \widehat{ABC} , $\widehat{A'B'C'}$ đối xứng với nhau qua tâm O và $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

* $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ đối xứng với nhau qua tâm O và $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

* Đường thẳng AB đối xứng với đường thẳng A'B' qua O và $AB \parallel A'B'$ (tính chất này sử dụng phải chứng minh, dựa vào tính chất của hình bình hành)

3. Hình có tâm đối xứng:

a) **Định nghĩa:** Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình H (hay hình H có tâm đối xứng là O) nếu mỗi điểm thuộc hình H có điểm đối xứng cũng thuộc hình H.

b) **Định lí:** Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.

Nhận xét: Từ định lí trên, ta suy ra rằng “Nếu có một đường thẳng đi tâm đối xứng của hình bình hành và cắt 2 cạnh đối diện của hình bình hành tại A, B thì A và B đối xứng với nhau qua tâm O.”

B. VÍ DỤ

Ví dụ: Cho tam giác ABC trung tuyến AM và G là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi K, H, N lần lượt là các điểm đối xứng của G qua A, B, C. Gọi T là giao điểm của tia KG với NH.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm của GT.

b) Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác KNH.

Giải:

a) Dễ thấy A, B, C lần lượt là trung điểm của GK, KH, GN.

Xét tam giác NGH có BT là đường trung bình

$$\Rightarrow BT \parallel GN \text{ và } BT = \frac{1}{2} GN \text{ hay } BT \parallel GC \text{ và } BT =$$

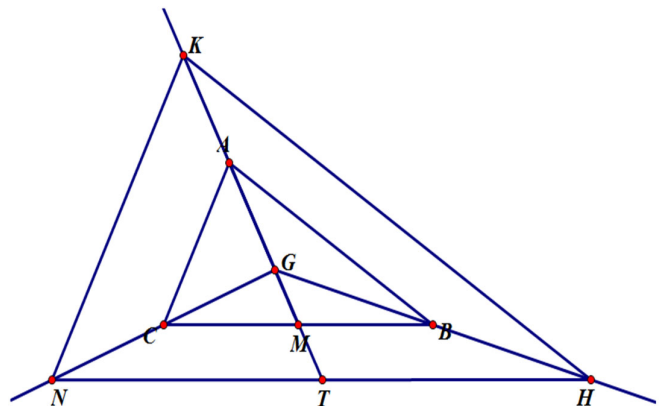
GC

Suy ra BTGC là hình bình hành.

M là giao điểm 2 đường chéo GT và BC nên

M là trung điểm của GT.

b) Xét tam giác GNT có CM là đường trung



bình nên $CM = \frac{1}{2} NT$

Tương tự, ta có $BM = \frac{1}{2} HT$.

Mà $CM = BM$ nên $NT = HT \Rightarrow T$ là trung điểm NH . (1)

Ta lại có $KA = AG = 2GM = GT$, suy ra $KG = 2GT$ hay $KG = \frac{2}{3} KT$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra G là trọng tâm tam giác KNH .

B. RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

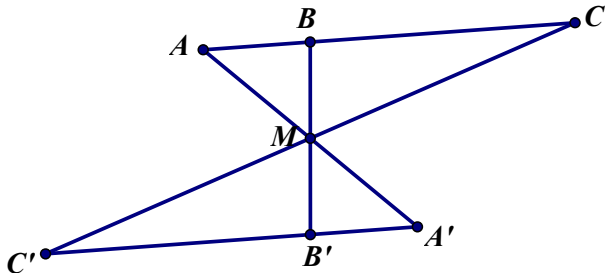
Bài 51. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và điểm M không thuộc đường thẳng đó. Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng của A, B, C qua M . Chứng minh A', B', C' thẳng hàng.

Bài giải:

Giả sử A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó, ta có $AB + BC = AC$ (1).

Các đoạn thẳng $A'B', B'C'$ và $A'C'$ lần lượt đối xứng với các đoạn thẳng AB, BC, AC qua điểm M nên ta có $A'B' = AB, B'C' = BC, A'C' = AC$.

Kết hợp đẳng thức (1) ta được $A'B' + B'C' = A'C'$. Vậy A', B', C' thẳng hàng.



Bài 52. Cho tam giác ABC . Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . M là một điểm tùy ý không thuộc các cạnh của tam giác ABC . Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua O_1, M_2 là điểm đối xứng của M_1 qua O_2, M_3 là điểm đối xứng của M_2 qua O_3 . Chứng minh M_3 đối xứng với M qua A .

Bài giải:

Để dàng chứng minh được các tứ giác $AMBM_1, BM_2CM_1, CM_2AM_3$ là các hình bình hành (dựa vào tính chất các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

Từ đó ta có: $AM = M_1B = M_2C = M_3A$,

$AM \parallel M_1B \parallel M_2C, AM_3 \parallel M_2C$

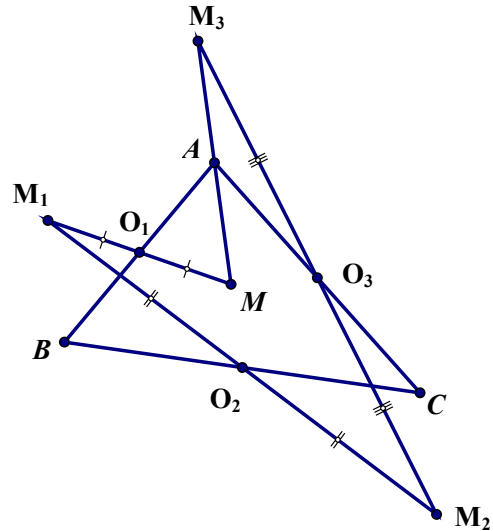
Từ đó $AM = AM_3$ và A, M, M_3 thẳng hàng.

Vậy A là trung điểm của MM_3 , hay A và M_3 đối xứng nhau qua A .

Bài 53. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm đối xứng O , E là điểm bất kỳ trên cạnh OD . Gọi F là điểm đối xứng của C qua E .

a) Chứng minh rằng $AF \parallel BD$.

b) Điểm E ở vị trí nào trên OD để tứ giác $ODFA$ là hình bình hành.

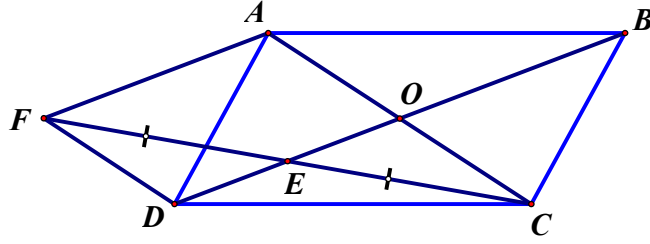


Bài giải:

a) Ta có O là trung điểm AC và E là trung điểm CF nên OE là đường trung bình trong tam giác ACF , từ đó ta có $AF \parallel BC$.

b) $ODFA$ là hình bình hành khi và chỉ khi $FD = AO$ và $FD \parallel AO$, khi và chỉ khi $FD = OC$ và $FD \parallel OC$, hay $OCDF$ là hình bình hành. Vì E là trung điểm của CF , do đó $OCDF$ là hình bình hành khi và chỉ khi E là trung điểm của OD .

Vậy $ODFA$ là hình bình hành khi và chỉ khi E là trung điểm của DO .



Bài 54. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc nhau tại O và một điểm P không nằm trên d_1, d_2 . Gọi P_1 là điểm đối xứng của P qua d_1 , P_2 là điểm đối xứng của P_1 qua d_2 . Chứng minh hai điểm P_1 và P_2 đối xứng nhau qua O .

Bài giải:

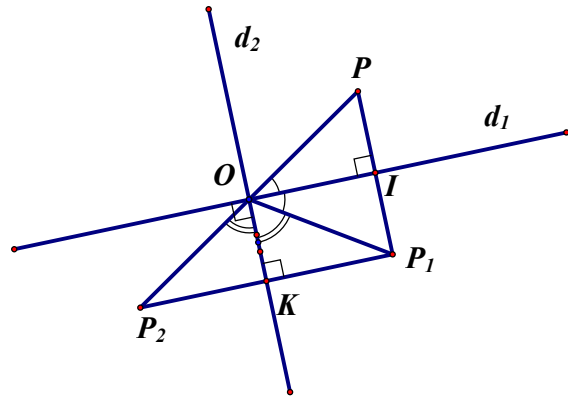
Gọi I, K lần lượt là trung điểm của PP_1, P_1P_2 .

Dễ dàng nhận thấy $OP = OP_1 = OP_2$ (1).

$$\begin{aligned} \widehat{POP_2} &= \widehat{POP_1} + \widehat{P_1OP_2} \\ &= 2(\widehat{IOP_1} + \widehat{P_1OK}) = 2\widehat{IOK} = 180^\circ \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra O là trung điểm PP_2 .

Vậy hai điểm P và P_2 đối xứng nhau qua O .



Bài 55. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm P trên AB . Gọi M, N là các trung điểm của AD, BC ; E, F lần lượt là điểm đối xứng của P qua M, N . Chứng minh rằng:

a) E, F thuộc đường thẳng CD .

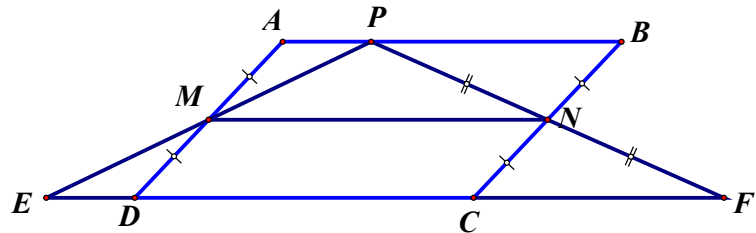
b) $EF = 2CD$

Bài giải:

a) M là trung điểm của AD và PE suy ra tứ giác $APDE$ là hình bình hành do đó $DE \parallel AP$.

Tương tự $BPCF$ là hình bình hành, suy ra $FC \parallel PB$. Mặt khác $CD \parallel AB$ nên suy ra các điểm E, F nằm trên đường thẳng CD .

b) Trong tam giác PEF , MN là đường trung bình suy ra $EF = 2MN = 2CD$.



Bài 56. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Lấy điểm E trên cạnh AB , F trên cạnh CD sao cho $AE = CF$. gọi I là giao điểm của AF và DE ; K là giao điểm của BF và CE . Chứng minh I là điểm đối xứng của K qua O .

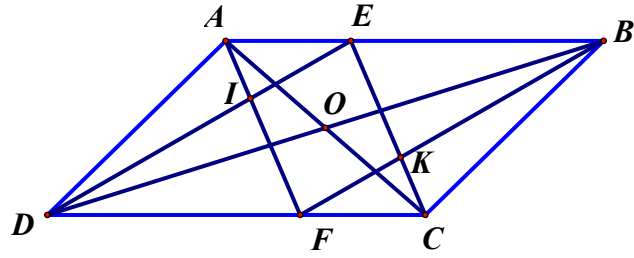
Bài giải:

Ta có $AE = CF$ và $AE \parallel CD$ nên $AECF$ là hình bình hành. Tương tự, $BEDC$ cũng là hình bình hành. Do đó ta có O là trung điểm của EF và $IEKF$ là hình bình hành (hai cặp cạnh đối diện song song). Từ đó suy ra O là trung điểm của IK .

Vậy hai điểm I và K đối xứng nhau qua O.

Bài 57*. Cho điểm O tùy ý nằm trong tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi G, H, I theo thứ tự là các điểm đối xứng với O qua D, qua E, qua F. Chứng minh rằng:

- Ba đường AG, BH, CI đồng quy tại một điểm. (Gọi điểm đồng quy là K)
- Khi O di chuyển trong tam giác ABC thì đường thẳng OK luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải:

a) Ta có các tứ giác AIBO và BGCO là các hình bình hành (vì các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường). Suy ra $AI = OB$, $AI \parallel OB$ và $CG = BO$, $CG \parallel BO \Rightarrow AI = CG$, $AI \parallel CG$. Ta được tứ giác AIGC cũng là hình bình hành, suy ra AG cắt CI tại trung điểm mỗi đoạn.

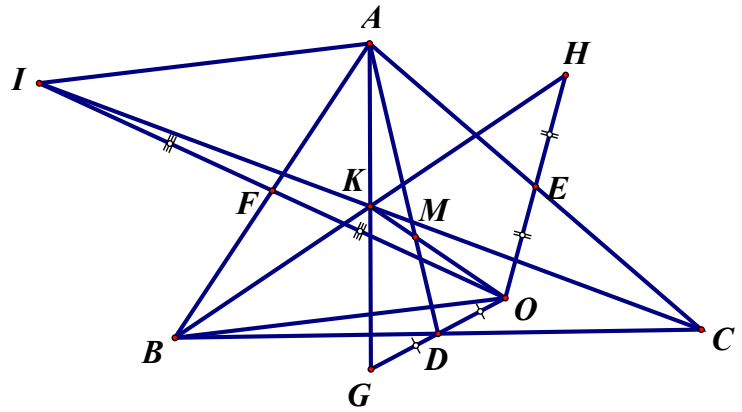
Chứng minh tương tự, ta cũng có AI cắt BH tại trung điểm mỗi đoạn.

Vậy AG, BH, CI đồng quy tại K, là trung điểm của mỗi đoạn.

b) Trong tam giác AGO, AD và OK là hai đường trung tuyến. Gọi M là giao điểm của OK và AD thì M là trọng tâm tam giác AGO.

Ta có điểm M trên cạnh AD, thỏa mãn $AM = 2MD$, suy ra M là trọng tâm tam giác ABC, là điểm cố định.

Vậy khi O thay đổi, đường thẳng OK luôn đi qua trọng tâm tam giác ABC.

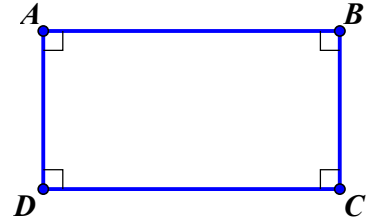


BÀI 9, 10. HÌNH CHỮ NHẬT – ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

A. LÝ THUYẾT

1) Định nghĩa: Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

Nhận xét: Hình chữ nhật là hình bình hành đặc biệt (có các góc bằng 90°) hoặc là hình thang cân đặc biệt (có số đo các góc đáy bằng nhau là 90°)



2) Tính chất:

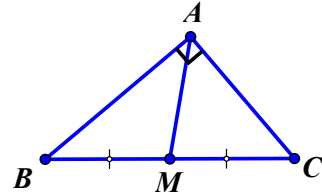
- Từ nhận xét trên, ta suy ra hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành và hình thang cân.
- Tính chất đặc trưng của hình chữ nhật là: “Hai đường chéo bằng nhau” và “hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường”.

3) Hệ quả:

- a) Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với nửa cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

Ví dụ . $\triangle ABC$ vuông tại A và trung tuyến M thì ta có

$$AM = \frac{1}{2} BC.$$



- b) Nếu một tam giác có một trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông, và trung tuyến đó ứng với cạnh huyền.

4) Dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật:

- a) Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- b) Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- c) Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- d) Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

5) Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song:

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của đường thẳng này lên đường thẳng kia.

6) Tính chất của các điểm cách đều một đường thẳng cho trước:

Tập hợp các điểm cách đường thẳng a một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với a và cách a một khoảng bằng h.

7) Đường thẳng song song cách đều:

- a) **Định nghĩa:** Khi các đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và khoảng cách giữa các đường thẳng a và b, b và c, c và d bằng nhau thì ta gọi chúng là các đường thẳng song song cách đều.

b) **Định lý:**

- * Nếu các đường thẳng song song và cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.
- * Nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

B. VÍ DỤ:

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), trung tuyến AM. E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC.

- Chứng minh rằng AEMF là hình chữ nhật.
- Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh EHMF là hình thang cân.

Giải:

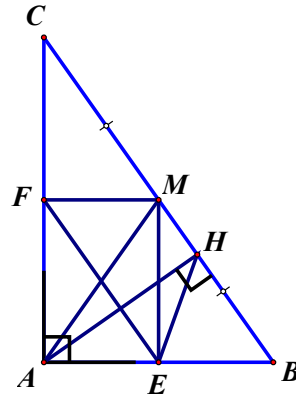
a) Theo tính chất tam giác vuông, ta có $AM = MC = MB$. Tam giác CMA cân tại M và F là trung điểm AC suy ra $MF \perp AC$.

Chứng minh tương tự: $ME \perp AB$.

Vậy AEMF là hình chữ nhật.

b) Ta có EF là đường trung bình trong tam giác ABC, suy ra $EF \parallel BC$. Theo giả thiết, $AB < AC$ suy ra $HB < HA$, do đó H thuộc đoạn MB. Vậy EHMF là hình thang.

Tam giác HAB vuông tại H, ta có $HE = EA = EB = MF$, từ đó suy ra EHMF là hình thang cân.



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BE và CF cắt nhau tại H. lấy M là trung điểm của BC và I là điểm đối xứng của H qua M.

- Chứng minh rằng: $IC = BH$ và $IB \perp AB$.
- Chứng minh rằng $\triangle MEF$ là tam giác cân.
- Vẽ $CQ \perp BI$ tại Q. Chứng minh rằng $\triangle FEQ$ là tam giác vuông.

Giải:

a) Tứ giác BHCI là hình bình hành (vì hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường). Từ đó suy ra $IC = BH$.

$IB \parallel CH$, $CH \perp AB \Rightarrow IB \perp AB$.

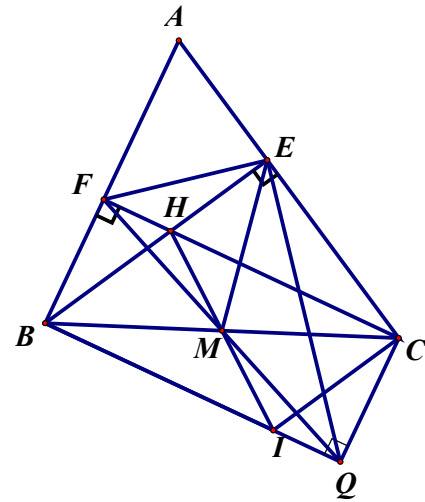
b) Hai tam giác EBC và FBC là tam giác vuông tại E và F, suy ra $EM = FM = \frac{1}{2}BC$.

Vậy MEF là tam giác cân tại M.

c) $CQ \perp BI \Rightarrow CQ \parallel BF$, dễ dàng chứng minh được CQBF là hình chữ nhật, suy ra M là trung điểm của QF.

Theo trên thì $EM = FM = MQ$.

Trong tam giác EFQ, MF là đường trung tuyến và $MF = \frac{1}{2}FQ$. Do vậy tam giác EFQ vuông tại E.

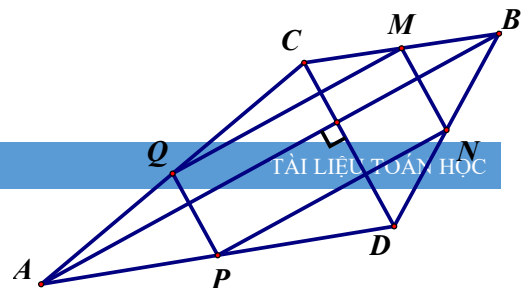


C. RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 58. Cho tứ giác ACBD có $AB \perp CD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, BD, AD, AC. Chứng minh rằng :

- Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.
- Biết $BC \parallel AD$, $BC = 4\text{cm}$, $AD = 16\text{cm}$. Tính MP.

Lời giải:



a) Trong tam giác ACD, PQ là đường trung bình, suy ra $PQ \parallel CD$.

Tương tự, $MN \parallel CD$, $MQ \parallel AB$, $NP \parallel AB$.

Từ đó ta có $MN \parallel PQ$ và $NP \parallel MQ$

Suy ra MNPQ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MN \perp MQ$.

Vậy MNPQ là hình chữ nhật.

b) Ta có $MP = NQ$. Theo giả thiết thì BCAD là hình thang với hai đáy BC, AD và QN là

đường trung bình nên $MP = NQ = \frac{1}{2}(BC + AD) = 10\text{cm}$.

Bài 59. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia CB và DA lấy lần lượt hai điểm E và F sao cho $CE = DF = CD$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm H sao cho $CH = CB$. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác CEFD là hình chữ nhật.

b) $AE \perp FH$.

Lời giải:

a) Theo giả thiết, $DF = CE$ và $DF \parallel CE$, suy ra tứ giác CDEF là hình bình hành.

Mặt khác, $\widehat{CDF} = 90^\circ$. Vậy CDEF là hình chữ nhật.

b) Ta có $AF = AD + DF = CH + CD = DH$.

Hai tam giác AFE và HDF có:

$AF = HD$, $\widehat{AFE} = \widehat{HDF} = 90^\circ$, $FE = DF$.

Do đó $\triangle AFE = \triangle HDF \Rightarrow \widehat{FAE} = \widehat{DHF}$.

Mặt khác $\widehat{DHF} + \widehat{DFH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FAE} + \widehat{DFH} = 90^\circ$

Vậy $AE \perp FH$.

Bài 60. Cho hình chữ nhật ABCD, $BH \perp AC$ tại H. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AH, BH, CD. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác CNMP là hình bình hành.

b) $\widehat{BMP} = 90^\circ$.

Lời giải:

a) Trong tam giác ABH, MN là đường trung bình nên

$MN = \frac{1}{2}AB$ và $MN \parallel AB$.

$\Rightarrow MN = CP$, $MN \parallel CP$. Vậy MNCP là hình bình hành.

b) Xét tam giác BCM, $BH \perp CM$, $MN \perp BC$ (vì $MN \parallel PC$, $PC \perp BC$), suy ra N là trực tâm tam giác BCM, do đó $CN \perp BM$.

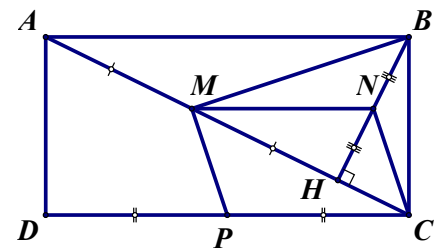
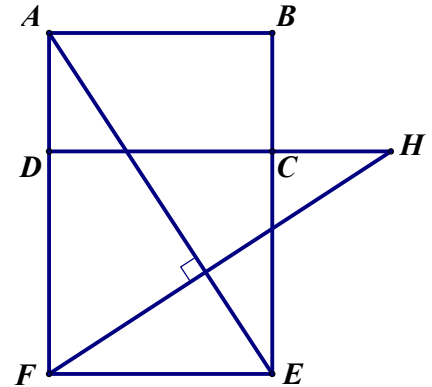
Mặt khác, vì $PM \parallel CN$ nên $PM \perp BM$, hay $\widehat{BMP} = 90^\circ$.

Bài 61. Cho ABCD là hình bình hành có tâm O. Lấy E bất kì thuộc đoạn OD. Dựng F là điểm đối xứng của C qua E.

a) Chứng minh AFDE là hình thang.

b) Tìm vị trí của E trên OD để AFDE là hình bình hành.

c) Nếu E là trung điểm của OD. Chứng minh AFDO là hình bình hành.



d) Tìm điều kiện của hình bình hành ABCD để AFDO là hình chữ nhật.

Giải:

a) Theo giả thiết thì E là trung điểm của CF, do đó OE là đường trung bình trong tam giác ACF, từ đó suy ra $OE \parallel AF$, hay $DE \parallel AF$. Vậy AFDE là hình thang.

b) Theo trên thì AFDE là hình bình hành khi và chỉ khi $AF = DE$.

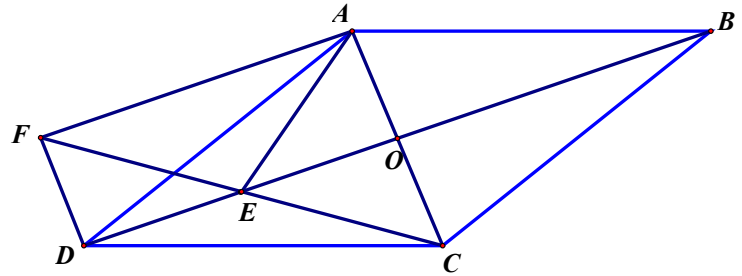
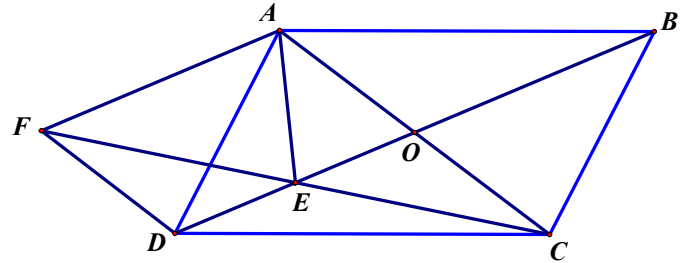
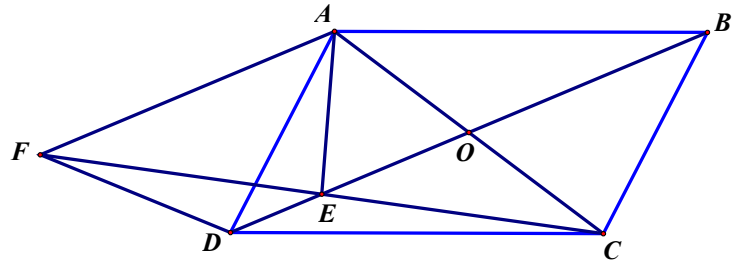
Mà $AF = 2OE$ nên AFDE là hình bình hành khi và chỉ khi $DE = 2OE$, hay E là trọng tâm của tam giác ADC.

c) Trường hợp E là trung điểm của OD.

Ta có $AF \parallel OD$ và $AF = 2OE = OD$. Vậy nên AFDO là hình bình hành.

d) Trường hợp E là trung điểm của OD, tìm điều kiện của hình bình hành ABCD để AFDO là hình chữ nhật.

Theo câu trên thì AFDO đã là hình bình hành, nên AFDO là hình chữ nhật khi và chỉ khi $AO \perp DO$, hay ABCD là hình thoi.



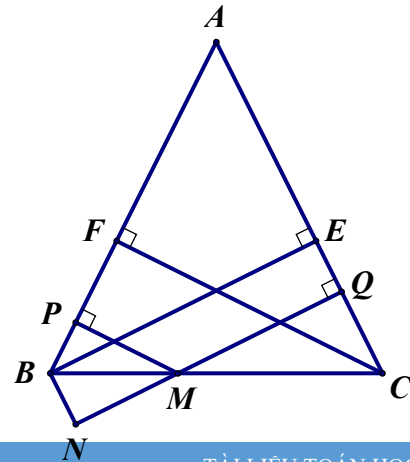
Bài 62. Cho tam giác ABC cân tại A ($AB > BC$) có hai đường cao BE, CF và điểm M bất kỳ trên cạnh BC. Vẽ $MP \perp AB$ tại P, $MQ \perp AC$ tại Q. Trên tia đối của tia MQ lấy điểm N sao cho $MN = MP$. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác BEQN là hình chữ nhật.

b) $MP + MQ = CF$.

Lời giải:

a) Ta có $\widehat{PMB} + \widehat{PBM} = 90^\circ$, $\widehat{QMC} + \widehat{QCM} = 90^\circ$.



Vì $\widehat{PBM} = \widehat{QCM} \Rightarrow \widehat{PMB} = \widehat{QMC}$. Do đó ta có $\widehat{PMB} = \widehat{NMB}$. Kết hợp giả thiết $MP = MN$, suy ra P và N đối xứng nhau qua đường thẳng BM.

$\widehat{NBM} = \widehat{PBM} = \widehat{QCM} \Rightarrow BN \parallel QC$ (góc so le trong bằng nhau).

Mặt khác, $BE \parallel NQ$ (cùng vuông với AC), suy ra BNQE là hình bình hành.

Vì hình bình hành BNQE có một góc vuông nên BNQE là hình chữ nhật.

b) Ta có $MP + MQ = MN + MQ = NQ = BE$.

Dễ dàng chứng minh được $\triangle ECB = \triangle FBC \Rightarrow BE = CF$.

Vậy $MP + MQ = CF$.

Bài 63. Cho tam giác ABC vuông cân tại C, M là điểm bất kỳ trên cạnh AB. Vẽ $ME \perp AC$ tại E, $MF \perp BC$ tại F. Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác CFME là hình chữ nhật.

b) $\triangle DEF$ vuông cân.

Lời giải:

a) Theo giả thiết thì tứ giác CFME có $\widehat{C} = \widehat{F} = \widehat{E} = 90^\circ$

Do đó MECF là hình chữ nhật.

b) Gọi I là giao điểm của EF và CM, I là trung điểm của EF và CM.

Vì tam giác ABC vuông cân tại C nên $CD \perp AB$. Xét tam giác DCM vuông tại D, có DI là trung tuyến nên:

$$DI = \frac{1}{2} MC = \frac{1}{2} EF. \text{ Mà DI cũng là trung tuyến trong tam}$$

giác DEF, do vậy tam giác DEF vuông tại D.

Trong tứ giác CEDF có

$$\widehat{CED} + \widehat{CFD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{BFD} \quad (1).$$

Dễ thấy $\widehat{ECD} = \widehat{FBD} = 45^\circ$ (2) và $EC = MF = BF$ (tam giác BFM vuông cân tại F).

Từ (1), (2), (3) suy ra hai tam giác CED và BFD bằng nhau (g-c-g).

Từ đó, $DE = DF$. Vậy tam giác DEF vuông cân tại D.

Bài 64. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Gọi E là điểm đối xứng của C qua H, vẽ EK vuông góc với AB tại K. Gọi I là trung điểm AK, N là trung điểm của BE. Chứng minh rằng: $KE \parallel IH$ và HK vuông góc KN.

Giải:

* Ta có $EK \perp AB \Rightarrow EK \parallel AC$, tứ giác EKAC là hình thang vuông tại K và A.

Lại có H là trung điểm EC, I là trung điểm AK nên HI là đường trung bình của hình thang EKAC. Từ đó ta có $EK \parallel HI$.

* $HI \perp AK$, I là trung điểm AK, nên tam giác HKA cân tại H.

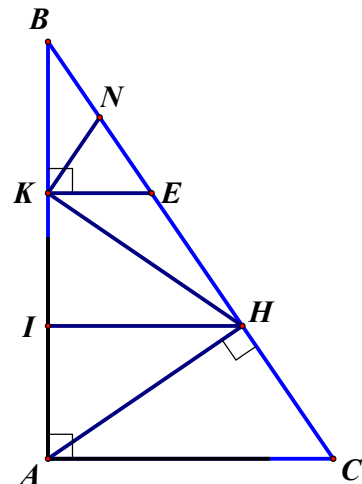
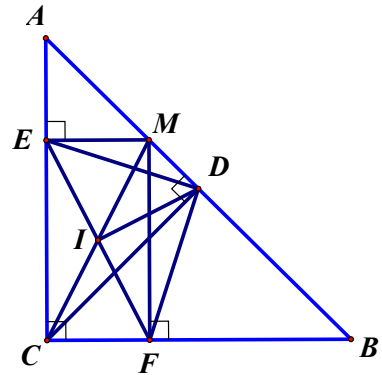
$$\text{Do đó } \widehat{HKA} = \widehat{HAK} \quad (1)$$

Tam giác BEK vuông tại K, có KN là trung tuyến nên $KN =$

$$NB = NE. \text{ Tam giác KBN cân tại N, do đó } \widehat{BKN} = \widehat{KBN} \quad (2).$$

$$(1), (2) \text{ suy ra } \widehat{BKN} + \widehat{AKH} = \widehat{KBN} + \widehat{KAH} = 90^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{KNH} = 90^\circ.$$

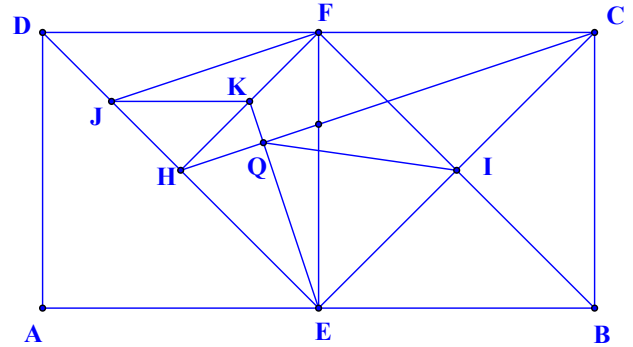


Bài 65. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2BC$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD. H, K lần lượt là trung điểm của DE, HF; I là trung điểm của BF và Q là giao điểm của CH và EK.

- a) Chứng minh $CH \perp EK$ tại Q.
b) Chứng minh $QI = IE = IC = IB$.

Giải:

- a) Gọi J là trung điểm HD.
Ta có $JK \parallel DF$ nên $JK \perp EF$.
 $FK \perp DE$ (vì ADKE là hình vuông)
K là trực tâm tam giác EFJ
Suy ra $EK \perp FJ$, mà $FJ \parallel CH$ nên $EK \perp CH$.
b) Theo trên, tam giác CQE vuông tại Q, từ đó suy ra $QI = IE = IC = IB$.



Bài 66. Cho hình chữ nhật ABCD, $E \in AC$. Đường thẳng qua E và song song với BD cắt các đường thẳng AD, CD lần lượt tại M, N. vẽ hình chữ nhật DMFN. Gọi O, I lần lượt là giao điểm của 2 đường chéo của hai hình chữ nhật ABCD, DMFN. Chứng minh:

- a) Tứ giác EIDO là hình bình hành.
b) E là trung điểm của BF.

Lời giải:

- a) Ta có $\widehat{EAM} = \widehat{ADO} = \widehat{EMA}$ (1).

Vì DMFN là hình chữ nhật nên

$$\widehat{IDM} = \widehat{IMD} = \widehat{AME} \quad (1)$$

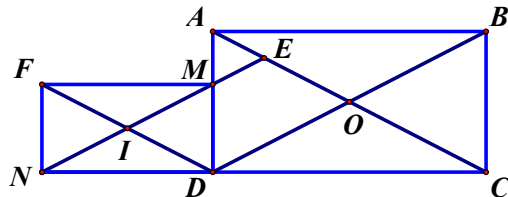
$$(1), (2) \Rightarrow \widehat{EAM} = \widehat{IDM} \Rightarrow OE \parallel DI.$$

Mặt khác theo giả thiết thì $EI \parallel DO$. Vậy EIDO là hình bình hành.

- b) Ta có O, I lần lượt là trung điểm của BD và FD. Theo trên, $AC \parallel DF$, $NE \parallel BD$.

Xét tam giác DFB, đường thẳng AC và NE lần lượt là hai đường trung bình, suy ra AC và NE cùng đi qua trung điểm của BF.

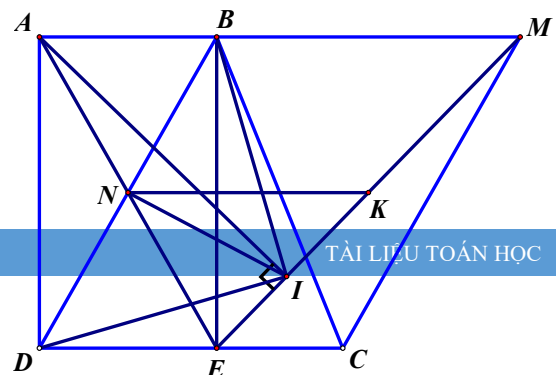
Vì E là giao điểm của AC và NE nên E là trung điểm của BF.



Bài 67. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) ($AB < CD$). Vẽ BE vuông góc CD tại E. trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = CD$. Gọi N là giao điểm của AE và BD, K là trung điểm của EM. Vẽ AI vuông góc ME tại I. Chứng minh rằng $NK \parallel AM$ và $\widehat{BID} = 90^\circ$.

Giải:

Trong tam giác AEM, NK là đường trung bình, do đó $NK \parallel AM$.

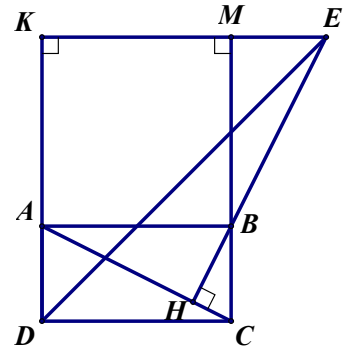


Để thấy tứ giác ABED là hình chữ nhật, do đó N là trung điểm của AE và BD và $AE = BD$.
 Tam giác IAE vuông tại I, có IN là đường trung tuyến, do đó:
 $IN = NA = NE = NB = ND$.
 Tam giác IBD có IN là trung tuyến thỏa mãn $IN = IB = ID$, do đó BID là tam giác vuông tại I.

Bài 68. Cho hình chữ nhật ABCD, vẽ BH vuông góc AC tại H. Trên tia đối của tia BH lấy điểm E sao cho $BE = AC$. Vẽ EK vuông góc với đường thẳng AD tại K, EK cắt đường thẳng BC tại M. Chứng minh rằng góc ADE bằng 45° .

Lời giải:

$\widehat{BAC} = \widehat{CBH} = \widehat{EBM}$ (cùng phụ với góc \widehat{ABH}).
 Tam giác ABC và BME là hai tam giác vuông có $AC = BE$ và $\widehat{BAC} = \widehat{MBE}$ suy ra $\triangle ABC = \triangle BME \Rightarrow ME = BC$.
 Dễ dàng chứng minh được ABMK là hình chữ nhật, suy ra $AK = BM = AB = KM$.
 $KD = KA + AD = KM + ME = KE$. Do vậy tam giác KFE vuông cân tại K.
 Vậy $\widehat{ADE} = 45^\circ$.

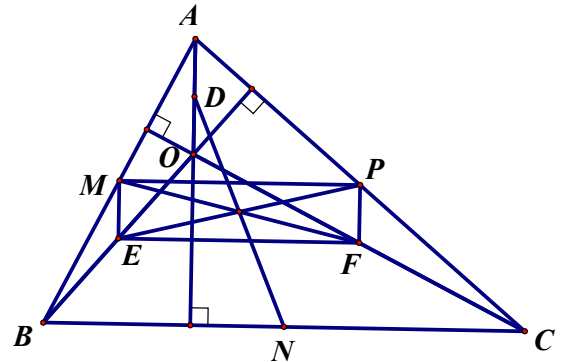


Bài 69. Các đường cao của tam giác ABC gặp nhau tại O. Gọi M, N, P, D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA, OA, OB, OC. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng DN, MF, EF đồng quy và cùng độ dài.

Lời giải:

MP và EF lần lượt là đường trung bình trong tam giác ABC và OBC.

Ta có $MP \parallel EF$ và $MP = EF$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}BC$ và cùng song song BC), suy ra MPFE là hình bình hành.
 $ME \parallel AO$, $EF \parallel BC$ và $AO \perp BC$, suy ra $ME \perp EF$, ta được tứ giác MPEF là hình chữ nhật. Do đó $MF = PE$ và MF cắt PE tại trung điểm mỗi đoạn.
 Chứng minh tương tự, $DN = PE$ và DN cắt PE tại trung điểm mỗi đoạn.
 Vậy ba đoạn DN, MF, PE đồng quy và cùng độ dài.



Bài 70. Cho góc $\widehat{xOy} = 90^\circ$, M nằm trong góc đó. Vẽ $MA \perp Ox$ tại A, $MB \perp Oy$ tại B. Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB, lấy các điểm E, F sao cho $ME = MF = AB$. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{EOF} = 90^\circ$, $\widehat{MOA} = \widehat{EMA}$, $\widehat{MOA} + \widehat{FMA} = 180^\circ$.

b) $\widehat{EOy} = \widehat{OMA} + \widehat{MOF}$, $\widehat{BOF} = \widehat{OMA} + \widehat{MOF}$. Từ đó suy ra Oy là tia phân giác của góc \widehat{EOF} .

Lời giải:

a) Dễ dàng chứng minh được OAMB là hình chữ nhật. Ta có M là trung điểm của EF.

$ME = MF = AB = MO$, từ đó suy ra tam giác EOF vuông tại O.

$\widehat{EMA} + \widehat{MAB} = 90^\circ$, $\widehat{MOA} + \widehat{MAB} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{EMA} = \widehat{MOA}$.

$\widehat{MOA} + \widehat{FMA} = \widehat{EMA} + \widehat{FMA} = 180^\circ$.

b) Tam giác OMF cân tại M nên $\widehat{MOF} = \widehat{MFO}$.

EF cắt Oy tại N, $\widehat{ONE} = \widehat{MNB}$, suy ra

$\widehat{OMA} + \widehat{ONE} = \widehat{BMN} + \widehat{MNB} = 90^\circ$.

Vì tam giác OEF vuông tại O nên $\widehat{MFO} + \widehat{OEN} = 90^\circ$.

$\widehat{OMA} + \widehat{MOF} + \widehat{ONE} + \widehat{OEN} = \widehat{OMA} + \widehat{ONE} + \widehat{MFO} + \widehat{OEN} = 180^\circ$.

Do đó $\widehat{OEy} = \widehat{OMA} + \widehat{MOF}$; $\widehat{BOF} = \widehat{BOM} + \widehat{MOF} = \widehat{OMA} + \widehat{MOF}$

Từ đây suy ra $\widehat{OEy} = \widehat{BOF}$. Vậy Oy là phân giác góc \widehat{EOF} .

Bài 71. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Gọi giao điểm của AM, AN với BD lần lượt là P, Q. Gọi AC cắt BD tại O. Chứng minh rằng:

a) $AP = \frac{2}{3}AM$, $AQ = \frac{2}{3}AN$.

b) $BP = PQ = QD = 2.OP$.

Lời giải:

a) Ta có O là trung điểm của AC và BD.

Trong tam giác ABC, AM và BO là hai đường trung tuyến, do đó P là trọng tâm tam giác ABC.

Từ đó ta có $AP = \frac{2}{3}AM$.

Chứng minh tương tự, ta có $AQ = \frac{2}{3}AN$.

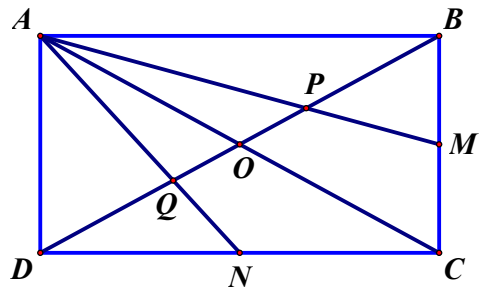
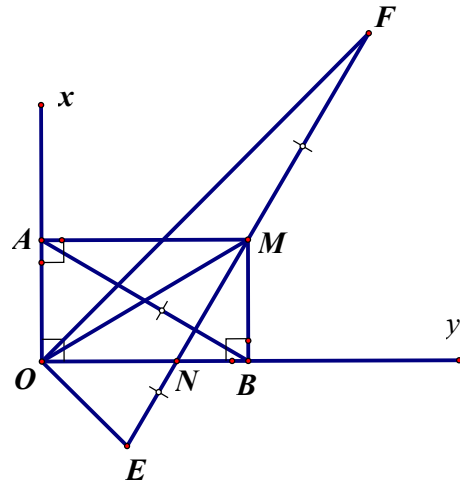
b) Ta có: $BP = \frac{2}{3}BO = \frac{1}{3}BD$; tương tự, $DQ = \frac{1}{3}BD$

, suy ra $PQ = \frac{1}{3}BD$.

Mặt khác $OP = OQ = \frac{1}{3}OB$, do đó O là trung điểm PQ.

Vậy $BP = PQ = QD = 2.OP$.

Bài 72. Cho hình bình hành ABCD, tia phân giác góc \widehat{A} cắt tia phân giác góc \widehat{B} và tia phân giác góc \widehat{D} lần lượt tại P, Q.



- a) Chứng minh rằng: $BP \parallel DQ$ và $AP \perp BP$, $AQ \perp DQ$.
 b) Tia phân giác góc \widehat{C} cắt BP , DQ lần lượt tại N và M . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì? Vì sao?
 c) Chứng minh rằng: $NQ \parallel AB$, $MP \parallel AD$.
 d) Giả sử $AB > AD$. Chứng minh rằng $MP = NQ = AB - AD$.
 e) Chứng minh rằng AC , BD , EF , MP , NQ đồng quy.

Lời giải:

a) Chứng minh $BP \parallel DQ$.

Gọi E là giao điểm của BP và CD , F là giao điểm của DQ và AB . Ta có:

$$\widehat{ABE} = \widehat{BEC} \text{ (so le trong)}$$

$$\text{và } \widehat{FDC} = \widehat{ABE} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}.$$

Suy ra $\widehat{FDE} = \widehat{BEC} \Rightarrow BP \parallel DQ$ (hai góc đồng vị bằng nhau).

* Chứng minh $AP \perp BP$, $AQ \perp DQ$.

$\widehat{AFD} = \widehat{FDC} = \widehat{FDA}$, suy ra tam giác AFD cân tại A . AQ là đường phân giác cũng là đường cao nên $AQ \perp DQ$. Vì theo trên, $BP \parallel DQ$ nên suy ra $AP \perp BP$.

b) Chứng minh tương tự như trên, ta có $CN \perp BN$, $CM \perp DM$. tứ giác $MNPQ$ có bốn góc vuông nên $MNPQ$ là hình chữ nhật.

c) Tứ giác $BEDF$ là hình bình hành (hai cặp cạnh đối song song).

Theo chứng minh trên thì Q là trung điểm của DF , chứng minh tương tự, N là trung điểm của BE . Từ đó suy ra $NQ \parallel BF$, hay $NQ \parallel AB$.

$$\text{Vì } NQ \parallel AB \Rightarrow \widehat{BAQ} = \widehat{NQP}.$$

$$\text{Lại có } \widehat{BAQ} = \widehat{BCM} = \frac{1}{2} \widehat{BCD} \text{ và } \widehat{NQP} = \widehat{NMP} \text{ (vì } MNPQ \text{ là hình chữ nhật).}$$

Từ đó suy ra $\widehat{NMP} = \widehat{BCM} \Rightarrow MN \parallel BC$ (hai góc so le trong bằng nhau).

d) Vì $AB > AD$ nên F thuộc cạnh AB , E thuộc cạnh CD .

Theo chứng minh trên, $BEDF$ là hình bình hành và Q, N lần lượt là trung điểm của DF, BE , suy ra $QN = BF = DE = AB - AF$.

Vì tam giác ADF cân tại A nên $AB - AF = AB - AD \Rightarrow QN = AB - AD$.

Lại có $MNPQ$ là hình chữ nhật nên $QN = MP$.

Vậy $NQ = MP = AB - AD$.

e) $ABCD$ là hình bình hành nên AC cắt BD tại trung điểm mỗi đoạn.

$BEDF$ là hình bình hành nên BD cắt EF tại trung điểm mỗi đoạn.

$MNPQ$ là hình bình hành nên MP cắt NQ tại trung điểm mỗi đoạn.

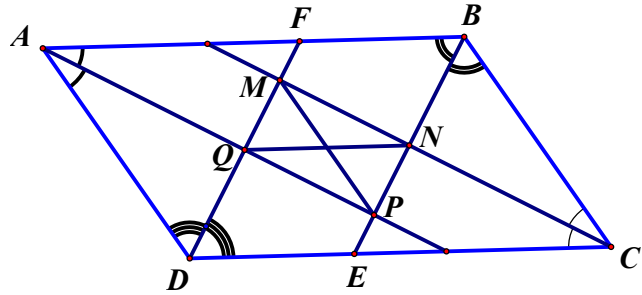
Q, N lần lượt là trung điểm của DF và BE nên dễ thấy $BNDQ$ cũng là hình bình hành. Suy ra BD cắt NQ tại trung điểm của mỗi đoạn.

Từ đó ta có kết luận AC, BD, EF, MP, NQ đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

Bài 73. Cho tam giác ABC nhọn. Gọi B là một điểm thuộc miền trong của tam giác sao cho:

$\widehat{PAC} = \widehat{PBC}$. Gọi L và M là chân đường vuông góc vẽ từ P đến BC và AC . Gọi D là trung điểm của AB . Chứng minh tam giác DLM cân.

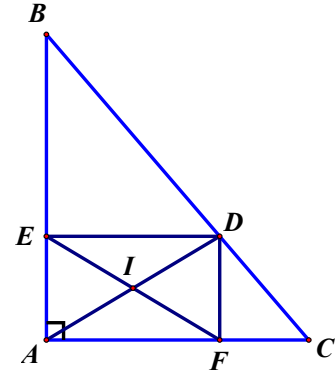
Giải:



- a) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh rằng A, I, D thẳng hàng.
 b) Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì EF có độ dài ngắn nhất? Vì sao?
 c) Đặt điểm D trên cạnh BC sao cho $\widehat{CFE} = 150^\circ$.

Lời giải:

- a) Tứ giác AEDF có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$, do đó AEDF là hình chữ nhật. Suy ra I là trung điểm EF, cũng là trung điểm của AD.
 b) Ta có $EF = AD$. EF nhỏ nhất khi AD nhỏ nhất, hay điểm D là hình chiếu vuông góc của A lên BC.
 c) $\widehat{CFE} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{EFA} = \widehat{DAC} = 30^\circ$.



Bài 76. Cho $\triangle ABC$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của A lên hai đường phân giác trong và ngoài của góc B và C. Chứng minh rằng:

- a) Các tứ giác AMBN, APCQ là các hình chữ nhật.
 b) M, N, P, Q, E, F thẳng hàng.

Lời giải:

a) Ta có đường phân giác trong và ngoài của một góc trong tam giác thì vuông góc với nhau nên $\widehat{NBM} = 90^\circ$.

Trong tứ giác ANBM có $\widehat{B} = \widehat{N} = \widehat{M} = 90^\circ$ nên ANBM là hình chữ nhật.

Chứng minh tương tự, ta cũng có APCQ là hình chữ nhật.

b) Vì ANBM là hình chữ nhật nên

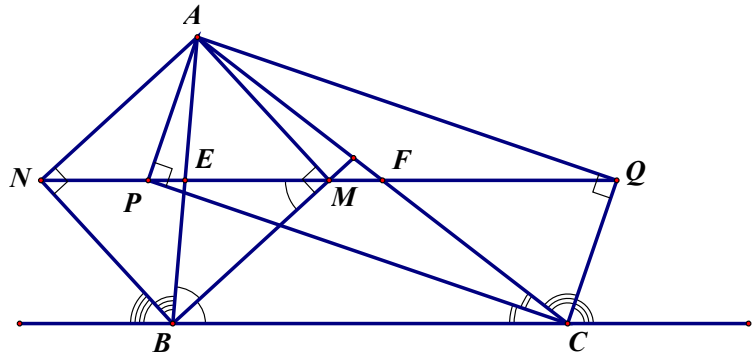
ta có $\widehat{NMB} = \widehat{ABM} = \widehat{MBC}$, suy ra $NM \parallel BC$ (hai góc so le trong bằng nhau).

ANBM là hình chữ nhật suy ra E là trung điểm của AB, cũng là trung điểm của NM.

NM qua E, song song với BC nên NM là đường trung bình trong tam giác ABC, do đó NM đi qua F.

Chứng minh tương tự, PQ là đường trung bình trong tam giác ABC.

Vậy các điểm M, N, P, Q, E, F thẳng hàng.



Bài 77. Cho $\triangle ABC$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ MD vuông góc với AB tại D và ME vuông góc với AC tại E. Vẽ đường cao AH của $\triangle ABC$.

- a) Chứng minh ADME là hình chữ nhật.
 b) Chứng minh CMDE là hình bình hành.
 c) Chứng minh MHDE là hình thang cân.
 d) Qua A kẻ đường thẳng song song với DH cắt DE tại K. Chứng minh HK vuông góc với AC.

Giải:

a) Tứ giác ADME có:

$\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ nên ADME là hình chữ nhật.

b) $MD \perp AB$, $AC \perp AB$, suy ra $MD \parallel AC$.

Vì M là trung điểm của BC nên MD là đường trung bình của ΔABC .

Tương tự, ME cũng là đường trung bình của ΔABC . Từ đó ta có A, E lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Suy ra $MD \parallel CE$ và $DE \parallel MC$. Vậy CMDE là hình chữ nhật.

c) Theo trên thì $DE \parallel HM$ (1).

Xét tam giác ABH vuông tại H, có HD là trung tuyến nên $HD = \frac{1}{2}AB$.

Mặt khác, trong tam giác ABC, ME là đường trung bình nên $ME = \frac{1}{2}AB$.

Suy ra $HD = ME$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra MHDE là hình thang cân.

d) Xét hai tam giác ADK và DBH, có:

$DE \parallel BC \Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{DBH}$ (Hai góc đồng vị).

$AD = DB$ (vì D là trung điểm của AB)

$DH \parallel AK \Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{BDH}$ (Hai góc đồng vị).

Suy ra $\Delta ADK = \Delta DBH \Rightarrow AK = DH$.

Lại có $AK \parallel DH$, do đó ADHK là hình bình hành, suy ra $HK \parallel DA$.

Vì $DA \perp AC$ nên $HK \perp AC$.

Bài 78. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh DC. Từ M vẽ đường thẳng vuông góc với DC và cắt cạnh AB tại N.

a) Chứng minh ADMN là hình chữ nhật.

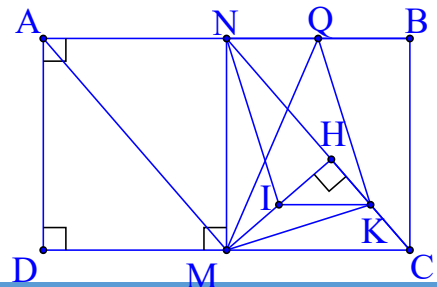
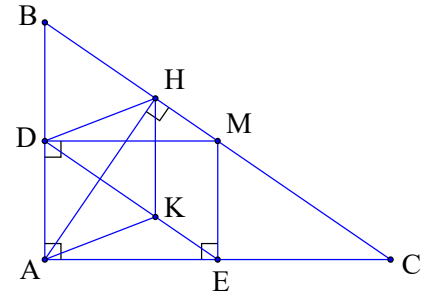
b) Chứng minh AMCN là hình bình hành.

c) Vẽ MH vuông góc với NC tại H; Gọi Q và K lần lượt là trung điểm của NB và HC. Chứng minh QK vuông góc với MK.

Giải:

a) Tứ giác ADMN có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{M} = 90^\circ$, do đó ADMN là hình chữ nhật.

b) Vì ADMN là hình chữ nhật nên:



$AN = DM = MC$.

Lại có $AN \parallel MC$, do đó $AMCN$ là hình bình hành.

c) Trong tứ giác $BCMN$, $\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{M} = 90^\circ$ nên $BCMN$ là hình chữ nhật.

Ta có $NQ \parallel CM$ và $NQ = \frac{1}{2}CM$ (1).

Gọi I là trung điểm của MH , thì KI là đường trung bình trong tam giác HCM .

Do đó: $KI \parallel CM$ và $KI = \frac{1}{2}CM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $NQ = KI$ và $NQ \parallel KI$, hay $NQKI$ là hình bình hành.

Xét tam giác MNC có: $MH \perp NC$; $KI \perp MN$ (vì $KI \parallel CM$ và $CM \perp MN$).

Suy ra I là trực tâm tam giác MNC , do đó $NI \perp MK$ (3).

Theo trên $NQKI$ là hình bình hành nên $NI \parallel QK$ (4).

(3) và (4) suy ra $MK \perp QK$.

Bài 79. Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$). Gọi I, M, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA .

a) Chứng minh $AIMK$ là hình chữ nhật.

b) Trên tia MI lấy điểm E sao cho I là trung điểm của ME , trên tia MK lấy điểm F sao cho K là trung điểm của MF . Chứng minh $IF \parallel EF$ và $EF = 2IK$.

c) Vẽ AH vuông góc với BC tại H . Chứng minh tứ giác $IKMH$ là hình thang cân.

d) Cho $IK = 2MH$. Tính \widehat{ABC} .

Giải:

a) Ta có MI là đường trung bình trong tam giác ABC nên $MI \parallel AC$, do đó $MI \perp AB$.

Tương tự, $MK \perp AC$.

Tứ giác $AIMK$ có $\widehat{A} = \widehat{I} = \widehat{K} = 90^\circ$ nên $AIMK$ là hình chữ nhật.

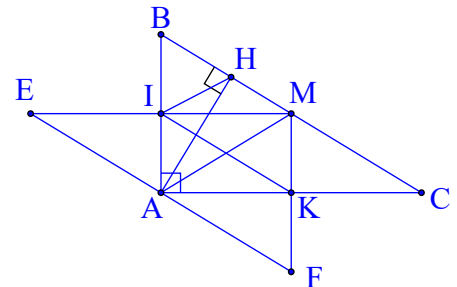
b) Vì I, K lần lượt là trung điểm của ME, MF nên IK là đường trung bình trong tam giác MEF , từ đó ta có $IK \parallel EF$ và $EF = 2IK$.

c) Theo trên, $IK \parallel HM$ (a).

Vì MK là đường trung bình trong tam giác ABC nên MK

$$= \frac{1}{2}AB \quad (1).$$

Xét tam giác ABH vuông tại H , có HI là đường trung tuyến nên $HI = \frac{1}{2}AB$ (2).



Từ (1) và (2) suy ra $MK = HI$ (b).

Từ (a) và (b) suy ra $IKMH$ là hình thang cân với hai đáy IK, HM .

d) Giả sử $IK = 2HM$. Vì $AIMK$ là hình chữ nhật nên $IK = AM$.

Mà AM là trung tuyến trong tam giác vuông ABC nên $AM = MB$. Từ đó suy ra $MB = 2HM$.

Theo giả thiết $AB < AC$ nên H nằm giữa M và B , do vậy H là trung điểm của MB .

Trong tam giác ABM có AH là đường cao và là trung tuyến nên tam giác ABM cân tại A .
N như vậy ta có $AB = AM = MB$, hay $\triangle ABM$ là tam giác đều.

Vậy $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

Bài 80. Cho $\triangle ABC$ nhọn, các đường trung tuyến BN và CM cắt nhau tại G . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BG và CG .

- Chứng minh tứ giác $MNCB$ là hình thang.
- Chứng minh tứ giác $MNKI$ là hình bình hành.
- $\triangle ABC$ cần thêm điều kiện gì để tứ giác $MNKI$ là hình chữ nhật.
- Tính diện tích $\triangle ABC$ biết diện tích của $\triangle ABN$ bằng 5cm^2 .

Giải:

a) M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC , nên MN là đường trung bình trong tam giác ABC , suy ra $MN \parallel BC$.
Vậy $MNCB$ là hình thang.

b) Trong $\triangle BCG$, IK là đường trung bình, suy ra $IK = \frac{1}{2}BC$ và $IK \parallel BC$ (1).

Theo trên: $MN = \frac{1}{2}BC$ và $MN \parallel BC$ (1).

Từ (1) và (2) suy ra $MN = IK$ và $MN \parallel IK$. Vậy $MNKI$ là hình bình hành.

c) $MNKI$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $MI \perp IK$.

Vì $IK \parallel BC$ nên $MI \perp IK \Leftrightarrow MI \perp BC$.

Trong $\triangle ABG$, MI là đường trung bình nên $MI \parallel AG$. Do đó $MI \perp BC \Leftrightarrow AG \perp BC$.

Vì AG là đường trung tuyến trong $\triangle ABC$ nên $AG \perp BC$ khi $\triangle ABC$ cân tại A .

N như vậy $MNKI$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $\triangle ABC$ cân tại A .

d) Gọi h là khoảng cách từ đỉnh B lên AC . Khi đó ta có:

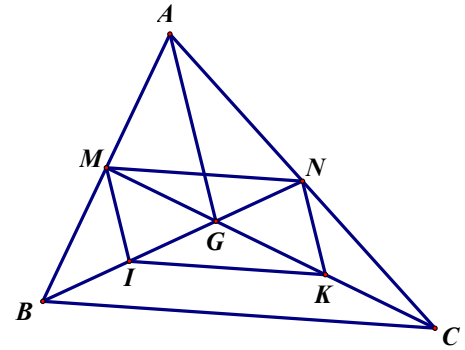
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}h.AC \text{ và } S_{ABN} = \frac{1}{2}h.AN = \frac{1}{2}h \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

N như vậy $S_{ABC} = 2.S_{ABN}$.

Theo giả thiết $S_{ABN} = 5\text{cm}^2$ nên $S_{ABC} = 10\text{cm}^2$.

Bài 81. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB < CD$). Vẽ BE vuông góc CD tại E . Trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = DC$.

- Chứng minh rằng tứ giác $ABED$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh rằng $AE = MC$.
- Gọi N là giao điểm của AE và BD , K là trung điểm của EM .



Chứng minh rằng $NK = \frac{1}{2} AM$.

d) Vẽ AI vuông góc với ME tại I. Chứng minh rằng $BI \perp ID$.

Giải:

a) Tứ giác ABED có:

$\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ nên ABED là hình chữ nhật.

b) Theo giả thiết ta có:

$BM = DC$ và $BM \parallel DC$.

Do đó BMCD là hình bình hành, suy ra $MC = BD$.

Mặt khác, vì ABED là hình chữ nhật nên $BD = AE$.

Từ đó ta có: $AE = MC$.

c) Ta có N là trung điểm của AE và BD.

Trong tam giác AME, NK là đường

trung bình. Do đó $NK = \frac{1}{2} AM$.

d) Xét tam giác AIE vuông tại I, có IN là trung tuyến nên $IN = \frac{1}{2} AE$.

Vì $AE = BD$ nên $IN = \frac{1}{2} BD$.

Xét tam giác BDI có IN là đường trung tuyến và $IN = \frac{1}{2} BD$, do đó $\triangle BDI$ vuông tại I.

Vậy $BI \perp ID$.

Bài 82. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB > AC$). Đường trung tuyến AO. Trên tia đối của tia OA lấy điểm D sao cho $OD = OA$. Từ B kẻ BH vuông góc với AD tại H. Từ C kẻ CK vuông góc với AD tại K. Tia BH cắt CD ở M, tia CK cắt AB ở N.

a) Chứng minh ABDC là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $BH = CK$ và $BK \parallel CH$.

c) Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng.

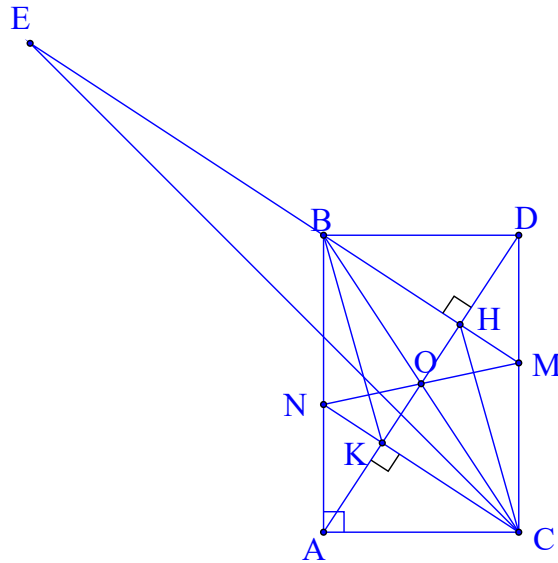
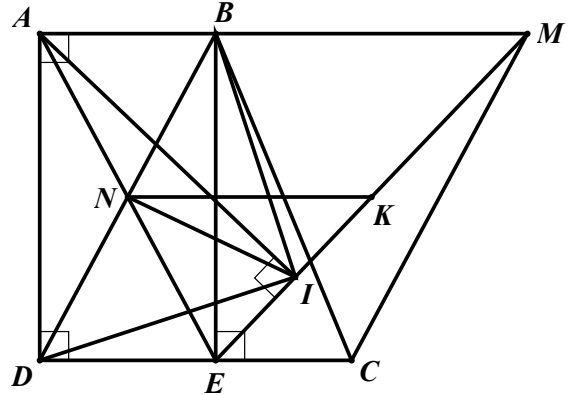
d) Trên tia đối của tia BH lấy điểm E sao cho $BE = AD$. Chứng minh $\widehat{DCE} = 45^\circ$.

Giải:

a) Theo giả thiết, O là trung điểm của BC và AD. Tứ giác ABDC có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn nên ABCD là hình bình hành. Hơn nữa $\widehat{A} = 90^\circ$ nên ABCD là hình chữ nhật.

b) Xét hai tam giác ACK và DBH lần lượt

vuông tại K và H, có $AC = BD$; $\widehat{KAC} = \widehat{HDB}$ (vì ABDC là hình chữ nhật).



Suy ra $\triangle ACK = \triangle DBH$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow CK = BH$.

Ta có $BH \parallel CK$ (vì cùng vuông góc với AD) và $BH = CK$ (theo trên).

Do đó $BHCK$ là hình bình hành, suy ra $BK \parallel CH$.

c) $BM \parallel CN$, $BN \parallel CM$, do đó $BMCN$ là hình bình hành. Vì O là trung điểm của BC nên O cũng là trung điểm của MN , suy ra điều phải chứng minh.

d) Vì $ABDC$ là hình chữ nhật nên ta có $AD = BC = BE$, suy ra tam giác BEC cân tại B , nên $\widehat{BEC} = \widehat{BCE}$.

Lại có $BM \parallel CN$ nên $\widehat{BEC} = \widehat{NCE}$ (so le trong). Suy ra $\widehat{BCE} = \widehat{NCE}$ (1).

Theo trên $ABDC$ là hình chữ nhật nên dễ dàng suy ra $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$

Suy ra $\widehat{ACN} = \widehat{DCB}$ (2) (hai góc cùng phụ với góc \widehat{CAD} , \widehat{CBD}).

Từ (1) và (2) cho ta $\widehat{CAN} + \widehat{NCE} = \widehat{DCB} + \widehat{BCE}$, suy ra $\widehat{ACE} = \widehat{DCE}$.

CE là tia phân giác của góc vuông \widehat{DCA} nên $\widehat{DCE} = 45^\circ$.

Bài 83. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng của B qua C . Vẽ BH vuông góc với AE tại H . Gọi I là trung điểm của HE .

a) Chứng minh tứ giác $ACED$ là hình bình hành.

b) Gọi K là trực tâm của ABI . Chứng minh K là trung điểm của HB .

c) Chứng minh tứ giác $BCIK$ là hình bình hành.

d) Chứng minh AC , BD và đường trung trực của IC đồng qui tại một điểm.

Giải:

a) Ta có $AD \parallel CE$ và $AD = BC = CE$. Do vậy $ADEC$ là hình bình hành.

b) K là giao điểm của BH và đường thẳng qua I , vuông góc với AB .

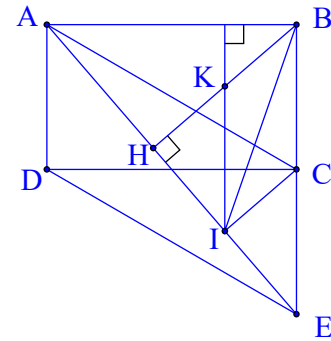
$EB \perp AB$, $IK \perp AB \Rightarrow IK \parallel EB$.

Mà I là trung điểm của EH nên IK là đường trung bình trong tam giác BHE . Vậy K là trung điểm của BH .

c) $IK \parallel BC$; $IK = BC$ (cùng bằng $\frac{1}{2}BE$) $\Rightarrow BCIK$ là hình bình hành.

d) $BCIK$ là hình bình hành $\Rightarrow CI \parallel BK \Rightarrow CI \perp AE$. Tam giác ACI vuông tại I nên đường trung trực của CI cũng là đường trung bình của tam giác ACI . Do vậy đường trung trực của CI đi qua trung điểm của AC .

Mặt khác vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên AC cắt BD tại trung điểm của mỗi đoạn. từ đó ta có AC , BD , CI đồng qui tại trung điểm của AC .



Bài 84. Cho hình chữ nhật ABCD, E thuộc đường chéo BD. Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $CE = EF$. Vẽ $FG \perp AB$ tại G, $FH \perp AD$ tại H.

- Chứng minh rằng tứ giác AHFG là hình chữ nhật.
- $AF \parallel BD$.
- * E, G, H thẳng hàng.

Lời giải:

a) Tứ giác AHFG có $\widehat{A} = \widehat{H} = \widehat{G} = 90^\circ$ nên AHFG là hình chữ nhật.

b) Gọi I là giao điểm của AC và BD, ta có I là trung điểm của AC. Theo giả thiết thì E là trung điểm của CF, do đó đường thẳng BD là đường trung bình trong tam giác ACF. Vậy $AF \parallel BD$.

c) Gọi K là giao điểm của AF và GH, suy ra K là trung điểm của AF.

Để thấy AIEK là hình bình hành, suy ra $KE \parallel AC$. Ta sẽ chứng minh $GH \parallel AI$.

Vì AHFG là hình chữ nhật nên $\widehat{AGH} = \widehat{GAF}$ (1).

Vì $AF \parallel BD$ nên $\widehat{GAF} = \widehat{ABD}$ (2).

Vì ABCD là hình chữ nhật nên $\widehat{ABD} = \widehat{BAC}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{AGH} = \widehat{BAC}$. Do đó $GH \parallel AC$ (hai góc so le trong bằng nhau).

Vì GH qua K nên hai đường thẳng GH và KE trùng nhau. Vậy ba điểm G, H, E thẳng hàng.

Bài 85. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = 4\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$. Gọi O là trung điểm của BC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O.

- Tính BC, AO.
- Chứng minh ABDC là hình chữ nhật.
- Vẽ $AH \perp BC$ (H thuộc BC). Gọi M, K, I lần lượt là trung điểm của AH, BH, CD. Chứng minh $CM = IK$.
- Chứng minh ΔAKI vuông.

Giải:

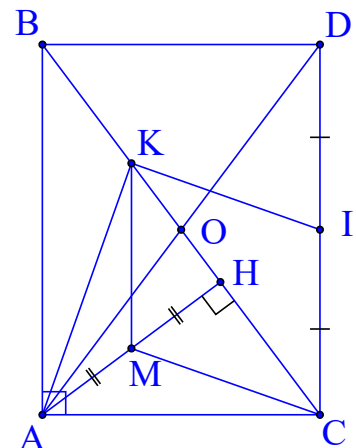
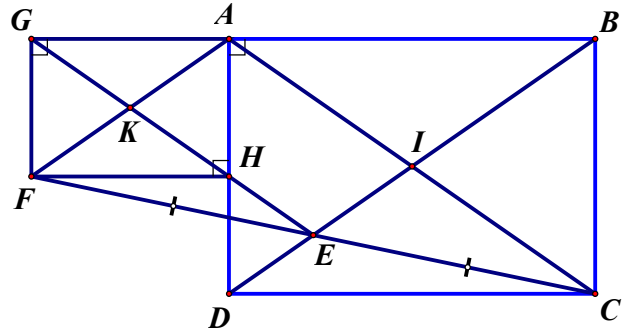
a) Trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow BC = 5(\text{cm}).$$

Vì AO là trung tuyến trong tam giác vuông ABC nên $AO =$

$$\frac{1}{2}BC = \frac{5}{2}(\text{cm}).$$

b) Tứ giác ABDC có hai đường chéo BC và AD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn, nên ta có ABDC là hình bình hành. Mà $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên ABDC là hình chữ nhật.



c) Dễ thấy KM là đường trung bình trong tam giác ABH nên $KM \parallel AB$ và $KM = \frac{1}{2} AB$.

Lại có $CI \parallel AB$ và $CA = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AB$.

Như vậy ta có $KM = CI$ và $KM \parallel CI$, nên KMCI là hình bình hành $\Rightarrow CM = IK$.

d) Theo trên, $KM \parallel AB$ nên $KM \perp AC$. Lại có $AM \perp KC$, nên M là trực tâm tam giác ACK. Do đó $CM \perp AK$ (1).

Mà KMCI là hình bình hành nên $IK \parallel CM$ (2).

(1), (2) $\Rightarrow AK \perp IK$, hay $\triangle AKI$ vuông.

Bài 86*. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH, I là trung điểm BC. Vẽ $HD \perp AB$ tại D, $HE \perp AC$ tại E. Chứng minh $AI \perp DE$.

Lời giải:

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AI = IB = IC$.

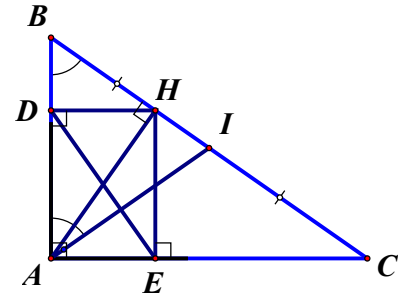
Do đó $\widehat{ABI} = \widehat{DAI}$ (1).

Dễ thấy ADHE là hình chữ nhật ($\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = 90^\circ$). Suy

ra $\widehat{ADE} = \widehat{AHE} = \widehat{BHD}$ (cùng phụ với \widehat{AHD}) (2)

Mặt khác $\widehat{ABI} + \widehat{DHB} = 90^\circ$ (3).

(1), (2), (3) suy ra $\widehat{ADE} + \widehat{DAI} = 90^\circ$. Vậy $AI \perp DE$.



Bài 87. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$; $AB < CD$). Vẽ BE vuông góc với CD tại E. Trên tia đối tia BA lấy điểm M sao cho $BM = DC$. Gọi N là giao điểm của AE và BD; Gọi K là trung điểm của EM. Vẽ AI vuông góc với ME tại I.

a) Chứng minh ABED là hình chữ nhật.

b) Chứng minh BMCD là hình bình hành.

c) Chứng minh NK song song AM.

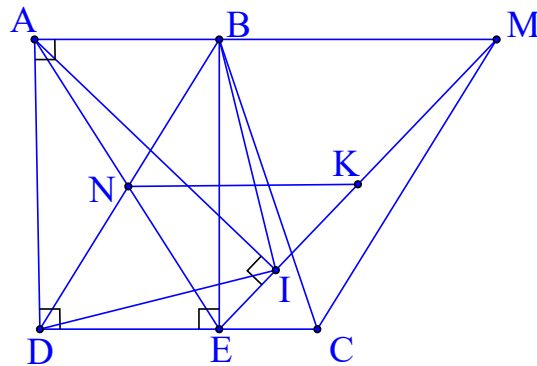
d) Chứng minh $\triangle BID$ vuông.

Giải:

a) Tứ giác ABED có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ nên ABED là hình chữ nhật.

b) Theo giả thiết thì $BM = CD$. Vì ABCD là hình thang nên $CD \parallel BM$. Do đó ta có BMCD là hình bình hành.

c) Vì ABED là hình chữ nhật có N là giao điểm hai đường chéo nên N là trung điểm của AE và BD. Xét tam giác EAM có NK là đường trung bình nên $NK \parallel AM$.



d) Tam giác AIE có IN là trung tuyến nên $IN = \frac{1}{2}AE$. Mà $AE = BD$ nên ta được

$IN = \frac{1}{2}BD$. Trong tam giác IBD có IN là trung tuyến và $IN = \frac{1}{2}BD$ nên $\triangle BID$ vuông tại I.

Bài 88. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có AH là đường cao. Từ H vẽ HD vuông góc với cạnh AB tại D; vẽ HE vuông góc với cạnh AC tại E. Biết $AB = 15\text{cm}$; $BC = 25\text{cm}$.

a) Tính độ dài cạnh AC và diện tích $\triangle ABC$.

b) Chứng minh ADHE là hình chữ nhật.

c) Trên tia đối của tia AC lấy điểm F sao cho $AF = AE$. Chứng minh tứ giác AFDH là hình bình hành.

d) Gọi K là điểm đối xứng của B qua A. Gọi M là trung điểm của AH. Chứng minh CM vuông góc với HK.

Giải:

a) Áp dụng định lý Pytago trong tam giác ABC vuông tại A, có:

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 25^2 - 15^2 = 400. \text{ Suy ra } AC = 20(\text{cm}).$$

$$\text{Diện tích tam giác ABC: } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150 (\text{cm}^2).$$

b) Từ giác ADEH có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = 90^\circ$ nên ADEH là hình chữ nhật.

c) Ta có $AF \parallel DH$ và $AF = DH$ (vì cùng bằng AE), nên AFDH là hình bình hành.

d) Gọi I là trung điểm của HB. IM là đường trung bình trong $\triangle ABH$ nên $IM \parallel AB$, do đó $IM \perp AC$. Lại có $AM \perp IC$ nên suy ra M là trực tâm của $\triangle ACI$, do đó ta có $CM \perp AI$ (1).

Xét $\triangle BKH$ có AI là đường trung bình nên $AI \parallel KH$ (2).

Từ (1) và (2) cho ta $CM \perp KH$.

Bài 89*. Cho tam giác ABC cân tại A. từ một điểm D trên đáy BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại E, F. Vẽ các hình chữ nhật BDEM, CDFN có tâm lần lượt là O, I. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AODI là hình bình hành.

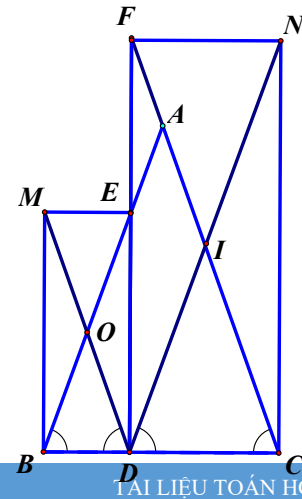
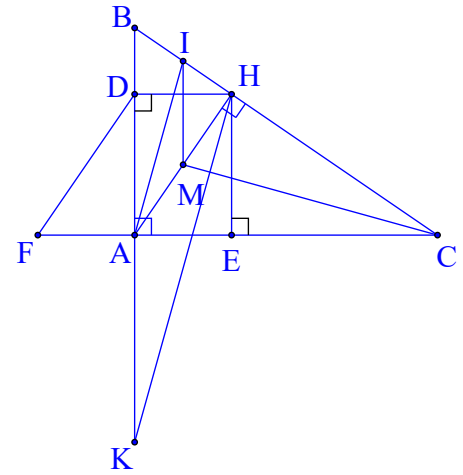
b) A là trung điểm của MN.

Lời giải:

a) Vì tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (1).

Các tứ giác BDEM và CDFN là hình chữ nhật nên ta có:

$$\widehat{EBD} = \widehat{MDB} \text{ (2) và } \widehat{NDC} = \widehat{FCD} \text{ (3).}$$



(1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{MDB} \Rightarrow DO \parallel IA$ (hai góc đồng vị bằng nhau).

(1) và (3) $\Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{ABC} \Rightarrow AO \parallel ID$ (hai góc đồng vị bằng nhau).

Từ đó suy ra AODI là hình bình hành.

b) Ta có $IA \parallel OM$ và $IA = OD = OM$, suy ra AIOM là hình bình hành $\Rightarrow AM = IO$ và $AM \parallel IO$ (4).

$AO \parallel NI$ và $AO = ID = NI$, suy ra AOIN là hình bình hành $\Rightarrow AN = IO$ và $AN \parallel IO$ (5).

Từ (4) và (5) $\Rightarrow M, N, A$ thẳng hàng và $AM = AN$. Hay A là trung điểm của MN.

Bài 90. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$). Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Vẽ MD vuông góc AB tại D; Vẽ ME vuông góc AC tại E.

a) Chứng minh rằng tứ giác ADME là hình chữ nhật.

b) Chứng minh CMDE là hình bình hành.

c) Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Tứ giác MHDE là hình gì? Vì sao?

d) Qua A vẽ đường thẳng song song với DH cắt DE tại K, đường thẳng HK cắt AC tại N. Chứng minh rằng $HN^2 = NA \cdot CN$.

Giải:

a) Tứ giác ADME có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ do đó ADME là hình chữ nhật.

b) Ta có $MD \parallel AC$, $ME \parallel AB$ và M là trung điểm của BC nên D và E lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Vì ADME là hình chữ nhật, ta có $MD \parallel EC$ và $MD = AE = EC$, do đó CMDE là hình bình hành.

c) Vì $AB < AC$ nên H nằm giữa B và M.

DE là đường trung bình trong tam giác ABC nên $DE \parallel BC$.

Ta có $MH \parallel ED$ (1).

$$ME = AD = \frac{1}{2}AB \quad (2).$$

Trong tam giác ABH vuông tại H có HD là trung tuyến nên $HD = \frac{1}{2}AB$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra MHDE là hình thang cân.

d) $DE \parallel BC \Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{KDA}$ (hai góc so le trong);

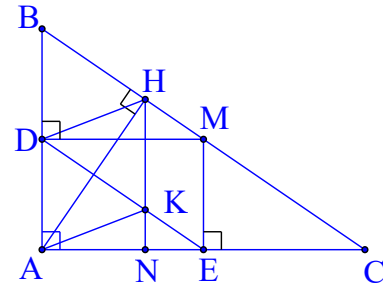
$$BD = DA;$$

$$DH \parallel AK \Rightarrow \widehat{BDH} = \widehat{DAK}$$

Từ đó ta có $\triangle HBD = \triangle KDA \Rightarrow DH = AK$, suy ra DHKA là hình bình hành.

Do đó $HN \parallel AB \Rightarrow HN \perp AC$.

Tam giác HAN vuông tại N có: $HN^2 = HA^2 - NA^2$.



Tam giác HCN vuông tại N có: $HN^2 = HC^2 - NC^2$

$$\text{Suy ra } 2HN^2 = (HA^2 + HC^2) - (NA^2 + NC^2) \quad (4)$$

Tam giác HAC vuông tại H có: $HA^2 + HC^2 = AC^2$ (5)

$$NA^2 + NC^2 = (NA + NC)^2 - 2NA \cdot NC = AC^2 - 2NA \cdot NC \quad (6)$$

$$\text{Từ (4), (5), (6) suy ra } 2HN^2 = AC^2 - (AC^2 - 2NA \cdot NC) = 2NA \cdot NC$$

Vậy $HN^2 = NA \cdot NC$.

Bài 91. Cho ΔABC cân tại A, đường cao AH. Gọi M là trung điểm của AB và E là điểm đối xứng của H qua M.

a) Chứng minh AHBE là hình chữ nhật.

b) Chứng minh ACHE là hình bình hành.

c) Gọi N là trung điểm của AC. Chứng minh ba đường thẳng AH, CE, MN đồng qui.

d) CE cắt AB tại K. Chứng minh $AB = 3AK$.

Giải:

a) Theo giả thiết thì M là trung điểm của AB và HE. Tứ giác AHBE có hai đường chéo AB và HE cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn nên AHBE là hình bình hành.

Mặt khác $\widehat{AHB} = 90^\circ$ nên AHBE là hình chữ nhật.

b) Vì tam giác ABC cân tại A nên H là trung điểm của BC. Suy ra $BH = CH$.

Ta có $AE \parallel CH$ và $AE = BH = CH$ nên ACHE là hình bình hành.

c) HN là đường trung bình trong tam giác ABC, ta có $HN \parallel AM$ và $HN = AM$ nên AMHN là hình bình hành.

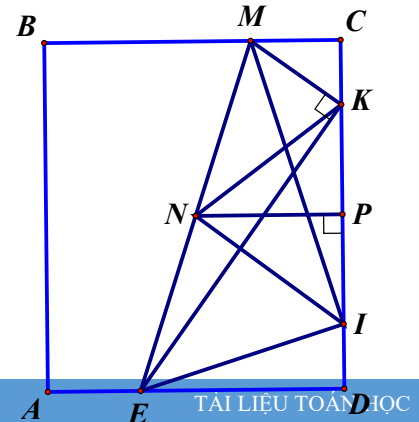
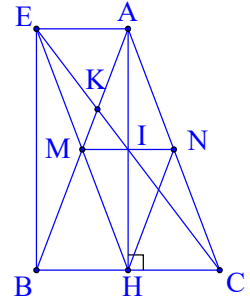
AEHC và AMHN là hai hình bình hành nên AH, CE, MN đồng qui tại trung điểm I của mỗi đoạn.

d) Trong tam giác AEH có AM và EI là hai đường trung tuyến, do đó K là trọng tâm tam giác AEH. Suy ra $AK = \frac{2}{3}AM = \frac{1}{3}AB$.

Vậy $AB = 3AK$.

Bài 92*. Cho hình chữ nhật ABCD. Hai điểm I, K trên cạnh CD sao cho $DI = CK$, E là điểm bất kỳ trên cạnh AD. Đường thẳng vuông góc với EK tại K cắt BC ở M. Tính \widehat{EIM} .

Lời giải:



Gọi N, P lần lượt là trung điểm của ME và CD, suy ra NP là đường trung bình trong hình thang vuông CMED. Do đó ta có $NP \perp CD$.

Mặt khác, theo giả thiết $DI = CK$, suy ra $PK = PI$.

Trong tam giác NIK có NP là đường cao và trung tuyến, do đó NIK cân tại N.

Khi đó ta có $IN = NK = NM = NE$.

Tam giác IME có IN là trung tuyến và $IN = NM = NE$ nên tam giác MIE vuông tại I.

Vậy $\widehat{EIM} = 90^\circ$.

Bài 93*. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm D so cho $HD = HA$, đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh rằng $AE = AB$.

b) Gọi M là trung điểm của BE. Tính \widehat{AHM} .

Lời giải:

a) Dựng $AI \perp DE$, I thuộc DE. Ta có AHDI là hình chữ nhật.

Suy ra $AI = HD = AH$.

Hai tam giác vuông AIE và AHB có:

$\widehat{EAI} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ với góc \widehat{IAB}), $AI = AH$.

Do đó $\triangle AIE = \triangle AHB$, suy ra $AE = AB$.

b) Ta có tam giác DBE vuông tại D, tam giác ABE vuông tại A. Vì M là trung

điểm của BE nên $AM = DM = \frac{1}{2}BE$. Từ

đó dễ dàng thấy được $\triangle AMH = \triangle DMH$ (c-c-c).

suy ra $\widehat{MHA} = \widehat{MHD} = 45^\circ$.

Bài 94*. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có đường cao BH, M thuộc cạnh BC. Vẽ $MD \perp AB$ tại D và $ME \perp AC$ tại E. Trên tia đối của tia ME lấy điểm F sao cho $MF = MD$. Chứng minh rằng: $MD + ME = BH$.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{DMB} + \widehat{DBM} = 90^\circ \\ \widehat{EMC} + \widehat{ECM} = 90^\circ \\ \widehat{DBM} = \widehat{ECM} \end{cases} \Rightarrow \widehat{DMB} = \widehat{EMC} = \widehat{FMB}.$$

Mặt khác, theo giả thiết $DM = FM$, từ đó ta chứng minh được D và F đối xứng nhau qua BC.

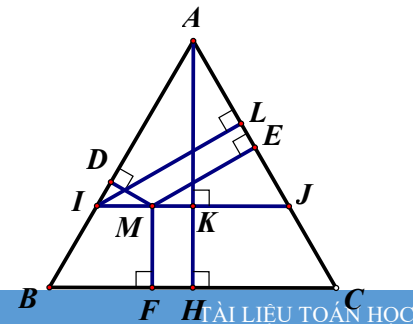
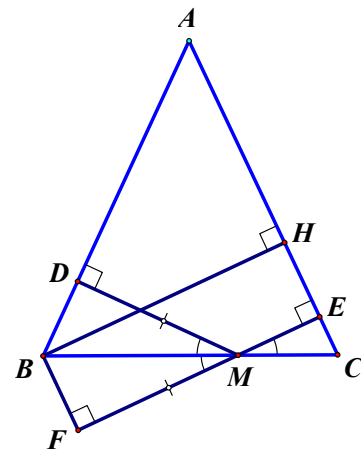
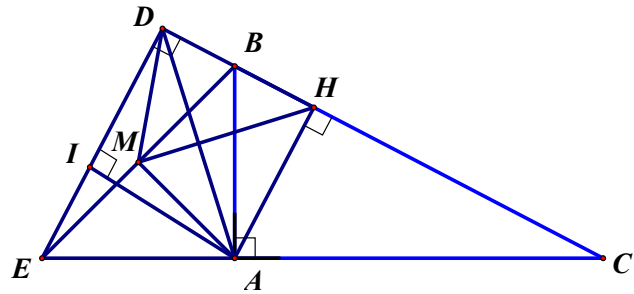
Suy ra $\widehat{BFM} = 90^\circ$.

$MD + ME = MF + ME = EF$.

Tứ giác BHEF có $\widehat{H} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$, do đó BHEF là hình chữ nhật, suy ra $BH = EF$.

Vậy ta có $MD + ME = BH$.

Bài 95*. Cho tam giác ABC đều có đường cao AH, M nằm trong $\triangle ABC$ (M có thể thuộc các cạnh của tam giác). Vẽ



$MD \perp AB$ tại D, $ME \perp AC$ tại E, $MF \perp BC$ tại F. Chứng minh rằng: $MD + ME + MF = AH$.

Lời giải:

Đường thẳng qua M, song song với BC, cắt AB, AC, AH lần lượt tại I, J, K. Vì M nằm trong tam giác ABC nên M thuộc đoạn IJ và K thuộc đoạn AH.

Tứ giác MFHK có $\widehat{F} = \widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$, suy ra MFHK là hình chữ nhật. Ta có $MF = KH$.

Dễ thấy tam giác AIJ đều. Dựng $IL \perp AJ$, L thuộc AJ, ta có $IL = AK$.

Theo bài tập 68, $MD + ME = IL = AK$.

Từ đó: $MD + ME + MF = AK + KH = AH$.

Bài 96. Cho góc $\widehat{xOy} = 90^\circ$ và một điểm M nằm trong góc đó. Vẽ MA vuông góc với Ox tại A; MB vuông góc với Oy tại B. trên đường thẳng đi qua M và vuông góc với AB, lấy điểm E và F sao cho $ME = MF = AB$. Chứng minh Oy là tia phân giác của góc \widehat{EOF} .

Giải:

Ta có tứ giác AMBO là hình chữ nhật

Suy ra $AB = OM$

Xét tam giác EOF ta có

$$AB = OM = \frac{4}{5} EF$$

Suy ra tam giác EFO là tam giác vuông tại O

Suy ra $\widehat{HRD} + \widehat{DRI} = \angle 3$

Mà $\widehat{xOy} = 90^\circ$ suy ra

$$\widehat{DRI} + \widehat{IRI} = \angle 3$$

Suy ra $\widehat{HRD} = \widehat{IRI}$

Qua F dựng đường thẳng vuông góc với OI cắt OE tại Q

Xét hai tam giác vuông QOI và FOP ta có $\widehat{IRT} = \widehat{IRS}$ và $OI = PF$

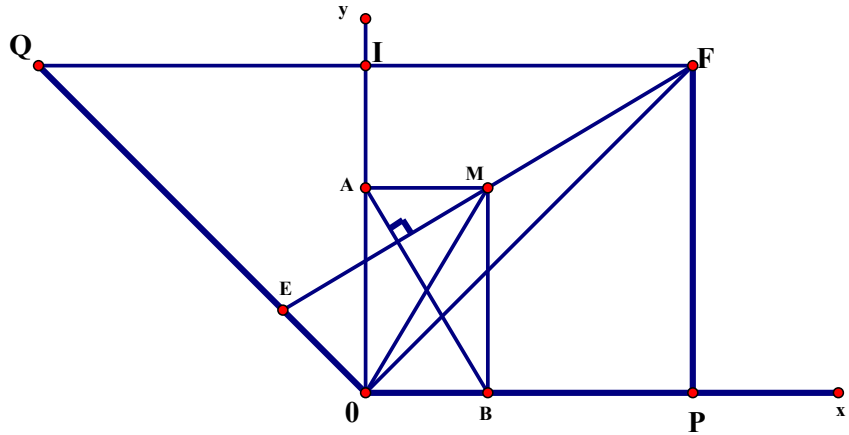
Suy ra $\triangle QOI = \triangle FOP$

Suy ra $OQ = OF \Rightarrow \triangle QOF$ cân tại O

Mà $OI \perp QF \Rightarrow OI$ là đường cao của tam giác QOF

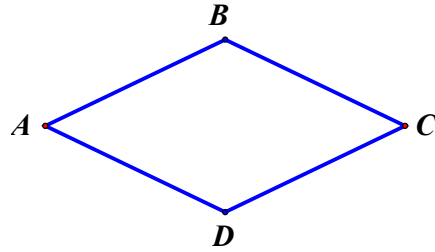
Trong tam giác cân đường cao cũng là đường phân giác

Vậy Oy là tia phân giác của góc \widehat{EOF} .



BÀI 11.**HÌNH THOI****A. LÝ THUYẾT****1. Định nghĩa:**

Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
 $AB = BC = CD = DA \Leftrightarrow$ Tứ giác ABCD là hình thoi.

**2. Tính chất:**

Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành, ngoài ra còn có:

- a) Hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường.
- b) Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết hình thoi

- a) Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
- b) Tứ giác có 2 đường chéo vuông góc nhau tại trung điểm mỗi đường.
- c) Hình bình hành có 2 cạnh kề bằng nhau.
- d) Hình bình hành có một đường chéo là phân giác một góc.

B. BÀI TẬP

Bài 97. Cho tứ giác ABCD có $AD = BC$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình thoi

Lời giải:

Trong tam giác ABD, MQ là đường trung bình nên

$$MQ = \frac{1}{2} AD \text{ và } MQ \parallel AD \quad (1).$$

Trong tam giác ACD, NP là đường trung bình nên

$$NP = \frac{1}{2} AD \text{ và } NP \parallel AD \quad (1).$$

Từ (1) và (2) suy ra $MQ = NP$ và $MQ \parallel NP$. Do đó MNPQ là hình bình hành.

Lại có: trong tam giác ABC, MN là đường trung bình, ta có $MN = \frac{1}{2} BC$. Theo giả thiết, $AD = BC$ nên $MN = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AD = MQ$.

$$= BC \text{ nên } MN = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AD = MQ.$$

Tứ giác MNPQ là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau nên MNPQ là hình thoi.

Bài 98. Cho hình thang cân ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình thoi.

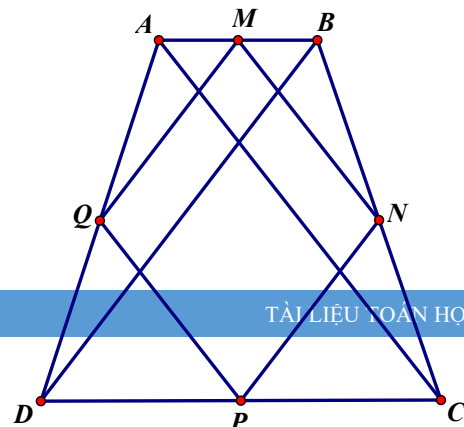
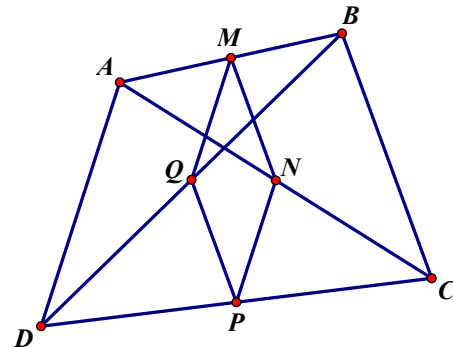
Lời giải:

Trong tam giác ABC, MN là đường trung bình nên

$$\text{ta có } MN = \frac{1}{2} AC \text{ và } MN \parallel AC \quad (1).$$

Tương tự trong tam giác ACD, $PQ = \frac{1}{2} AC$ và $PQ \parallel AC$ (2)

AC (2)



Từ (1) và (2) suy ra $MN = PQ$ và $MN \parallel PQ$, do vậy $MNPQ$ là hình bình hành (3).

Lại xét tam giác ABD , MQ là đường trung bình, suy ra $MQ = \frac{1}{2} BD$.

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $AC = BD$, từ đó suy ra $MN = MQ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MNPQ$ là thoi.

Bài 99. Cho tứ giác $ABCD$. Biết AC là đường phân giác của \widehat{A} và \widehat{C} ; BD là đường phân giác của \widehat{B} và \widehat{D} . Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Lời giải:

Ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$.

Từ giả thuyết suy ra: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = 180^\circ$

(1) và

Mặt khác trong tam giác ACD , ta có:

$\widehat{A}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 180^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_2 \Rightarrow AB \parallel CD$ (so

le trong)

$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2, \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ suy ra $\widehat{B}_2 = \widehat{D}_1 \Rightarrow AD \parallel BC$ (so le trong)

Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

$ABCD$ có đường chéo là phân giác một góc nên $ABCD$ là hình thoi.

Bài 100. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ $AE \perp BC$ tại E , $DF \perp AB$ tại F . Biết $AE = DF$.

Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Lời giải:

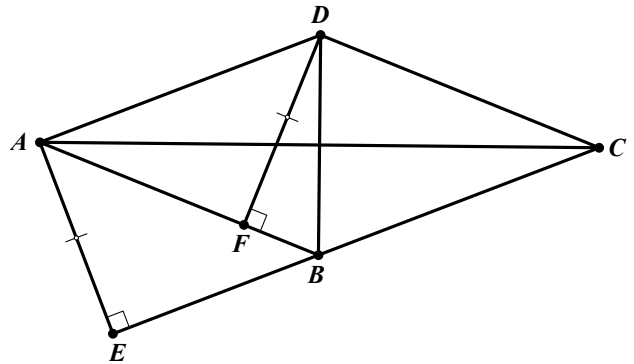
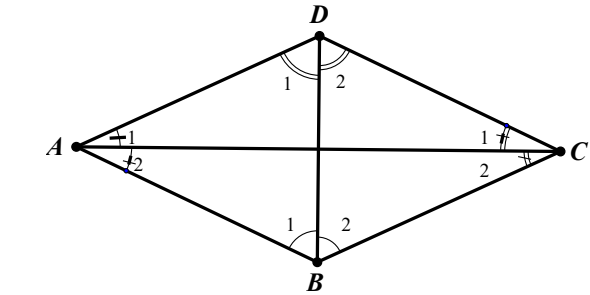
Xét hai tam giác EAB và FDA có:

$\widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$, $EA = FD$ (theo giả thiết),

$\widehat{EBA} = \widehat{FAD}$ (so le trong)

Do đó hai tam giác EAB và FDA bằng nhau, suy ra $AB = DA$.

$ABCD$ là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau nên $ABCD$ là hình thoi.



Bài 101. Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Trên tia đối của tia BA lấy điểm M , trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Gọi D, E, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, MN, MC, NB .

a) DQ cắt AM tại J . Chứng minh rằng $\widehat{PEQ} = \widehat{MJQ}$

b) DE cắt AN tại I . Chứng minh rằng DE song song với đường phân giác của góc \widehat{BAC}

Lời giải:

a) Tam giác BNM có QE là đường trung bình nên ta có: $QE \parallel BM$.

Tương tự $DP \parallel BM, QD \parallel CN, PE \parallel CN$.

Từ đó $QE \parallel DP$ và $PE \parallel DQ$, suy ra $DPEQ$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow \widehat{PEQ} = \widehat{PDQ}.$$

Mặt khác $\widehat{PDQ} = \widehat{MJQ}$ (so le trong)

$$\text{Vậy } \widehat{PEQ} = \widehat{MJQ}.$$

b) Gọi Ax là đường phân giác góc \widehat{BAC} .

$$\text{Ta có: } DP = \frac{1}{2} BM \text{ và } PE = \frac{1}{2} CN.$$

Theo giả thiết, $BM = CN \Rightarrow DP = PE$. Do đó DPEQ là hình thoi, suy ra DE là tia phân giác góc \widehat{PDQ} đồng thời $\widehat{PDQ} =$

$$\widehat{PEQ} = \widehat{MJQ} = \widehat{BAC} \text{ (góc đồng vị)}.$$

Từ đó suy ra $\widehat{A_2} = \widehat{D_2} = \widehat{DIC}$ (góc đồng vị) $\Rightarrow DE \parallel Ax$ (hai góc đồng vị bằng nhau).

Bài 102. Cho tam giác ABC ($AB = AC$). Gọi E là điểm đối xứng với A qua cạnh BC. Chứng minh rằng ABEC là hình thoi.

Giải:

Gọi I là trung điểm của AE, thì I thuộc BC và $AI \perp BC$.

Theo giả thiết, tam giác ABC cân tại A nên I là trung điểm của BC.

Tứ giác ABEC có hai đường chéo AI và BC vuông góc nhau tại trung điểm của mỗi đoạn nên tứ giác ABEC là hình thoi.

Bài 89. Cho tam giác ABC đều có trọng tâm G. Vẽ hình chữ nhật ABDE sao cho C thuộc đoạn thẳng DE. Tia AG cắt BD tại I, tia AE cắt BG tại J. Chứng minh rằng:

- I và J đối xứng nhau qua CG
- Các tứ giác CGBI, GICJ, CJAG là hình thoi.

Lời giải:

a) Dễ thấy hai tam giác ABJ là BAI bằng nhau (g-c-g), nên $AI = BJ$.

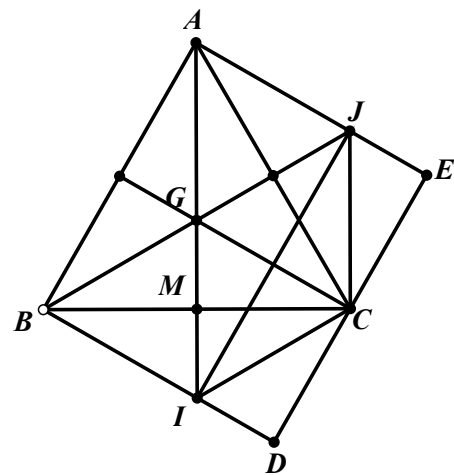
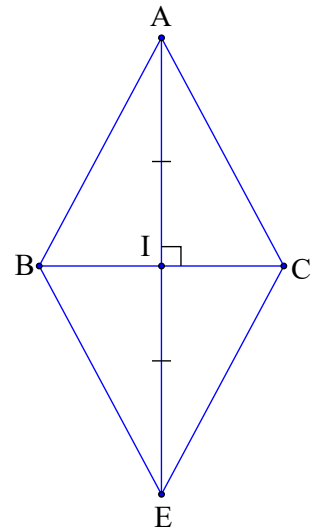
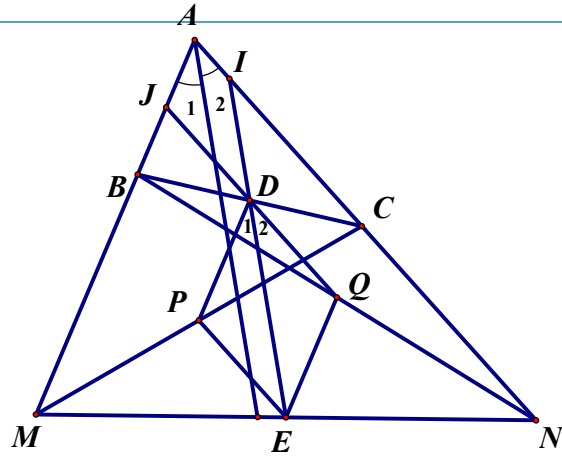
Do đó ABIJ là hình thang cân có hai đáy AJ và BI.

Vì hình thang cân ABIJ có một góc vuông nên suy ra ABIJ là hình chữ nhật, tâm G. Mặt khác, $GC \perp AB$ nên GC là đường trung trực cạnh IJ. Vậy IJ đối xứng nhau qua đường thẳng CG.

b) Ta có $\widehat{ABI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{GBC} = \widehat{IBC} = 30^\circ$.

Gọi M là trung điểm của BC, trong tam giác BGI, BM là đường cao và là đường phân giác nên M là trung điểm của GI.

Tứ giác CGBI có hai đường chéo BC và GI vuông góc nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, do đó CGBI là hình thoi.



Chứng minh tương tự như trên, ta có CGAI là hình thoi.

Vì I, J đối xứng nhau qua đường thẳng CG nên CI = CJ và GI = GJ (1).

Dễ thấy tam giác BGI là tam giác đều, suy ra CI = BG = GI (2).

(1) và (2) suy ra tứ giác GICJ có bốn cạnh bằng nhau, vậy GICJ là hình thoi.

Bài 103. Cho hình bình hành ABCD có $AD = 2AB$. Gọi M là trung điểm của AD, $CE \perp AB$ tại E, $MF \perp CE$ tại F, MF cắt BC tại N. Chứng minh rằng

a) MNCD là hình thoi

b) Tam giác EMC cân

c) $\widehat{BAD} = 2\widehat{AEM}$

Lời giải:

a) $MF \perp CE$, $AE \perp CE$ do đó $MN \parallel AE \parallel CD$ (1)

Lại có $MD \parallel NC$ và $MD = \frac{1}{2} AD = CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra MNCD là hình thoi.

b) Ta có ADCE là hình thang với hai đáy AE và CD.

Vì M là trung điểm AD nên MF là đường trung bình của hình thang ADCE, suy ra F là trung điểm của CE.

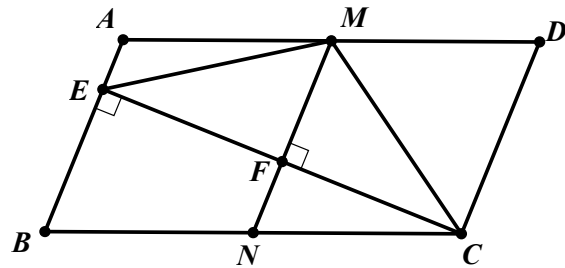
Tam giác EMC có MF là đường cao và là trung tuyến nên EMC cân tại M.

c) MNCD là hình thoi nên $\widehat{NMD} = 2\widehat{NMC}$

Ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{NMD} = 2\widehat{NMC} = 2\widehat{EMF}$ (1).

Lại có $\widehat{AEM} = \widehat{EMF}$ (2) (vì cùng phụ với góc MEF).

(1) và (2) suy ra $\widehat{BAD} = 2\widehat{AEM}$.



Bài 104. Cho hình thoi ABCD cạnh a có $\hat{A} = 60^\circ$.

Đường thẳng d cắt 2 cạnh AB, BC lần lượt tại M, N sao cho $MB + NB = CD$. Chứng minh rằng tam giác DMN đều.

Lời giải:

Theo đề: $MB + NB = CD = AB$ suy ra $MA = NB$.

Góc $\hat{A} = 60^\circ$ suy ra góc $\widehat{ABC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{NBD} = 60^\circ$

Tam giác ABD đều nên $AD = BD$

Xét hai tam giác MAD và NBD, có:

$MA = NB$, $\widehat{MAD} = \widehat{NBD} = 60^\circ$, $AD = BD$

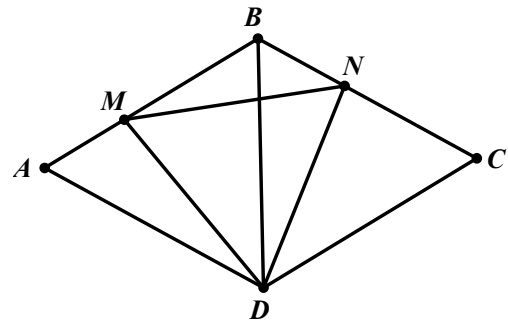
Do đó $\triangle MAD = \triangle NBD$ (c-g-c).

Từ đó: $MD = ND$ và $\widehat{ADM} = \widehat{BDN}$.

$\widehat{MDN} = \widehat{MDB} + \widehat{BDN} = \widehat{MDB} + \widehat{ADM} = \widehat{ADB} = 60^\circ$ (Vì tam giác ABD đều)

Tam giác MND có $MD = ND$ và góc \hat{D} bằng 60° . Vậy tam giác MND đều.

Bài 105. Cho tam giác ABC cân tại A có $BC = 6\text{cm}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.



- a) Tính độ dài MN? Chứng minh MBNC là hình thang cân.
 b) Gọi K là điểm đối xứng của B qua N. Chứng minh tứ giác ABCK là hình bình hành.
 c) Gọi H là điểm đối xứng của P qua M. Chứng minh AHBP là hình chữ nhật.
 d) Chứng minh AMPN là hình thoi.

Giải:

- a) MN là đường trung bình trong tam giác ABC. Ta có $MN \parallel BC$
 và $MN = \frac{1}{2} BC$.

Từ đó ta có $MN = 3\text{cm}$ và BMNC là hình thang.

Ta giác ABC cân tại A nên $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Ta được BMNC là hình thang cân.

- b) Theo đề thì N là trung điểm của AC và BK. Tứ giác ABCK có hai đường chéo AC và BK cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn nên ABCK là hình bình hành.

- c) M là trung điểm của AB và HP nên AHBP là hình bình hành.

Lại có tam giác ABC cân tại A và P là trung điểm của BC nên $AP \perp BC$.

Hình bình hành AHBP có một góc vuông nên AHBP là hình chữ nhật.

- d) MP là đường trung bình trong tam giác ABC nên $MP \parallel AC$ và $MP = \frac{1}{2} AC$. Suy ra $MP = AN$ và $MP \parallel AN$. Như vậy AMPN là hình bình hành.

Mặt khác, $AM = \frac{1}{2} AB$, $AN = \frac{1}{2} AC$ và $AB = AC$ nên $AM = AN$.

Hình bình hành AMPN có hai cạnh kề AM và AN bằng nhau nên AMPN là hình thoi.

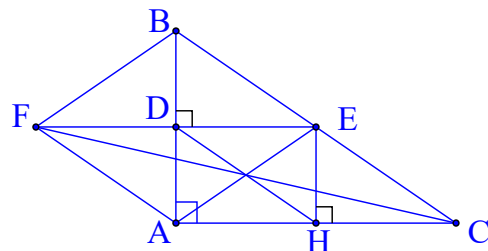
Bài 106. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC.

- a) Chứng minh tứ giác ACED là hình thang vuông.
 b) Gọi F là điểm đối xứng của E qua D. Chứng minh ACEF là hình bình hành.
 c) Chứng minh AEBF là hình thoi.
 d) Gọi H là hình chiếu của điểm E trên AC. Chứng minh ba đường thẳng AE, CF, DH đồng qui.

Giải:

- a) DE là đường trung bình trong tam giác ABC nên $DE \parallel AC$, do đó tứ giác ACED là hình thang. Mặt khác tứ giác ACED có $\widehat{A} = 90^\circ$ nên ACED là hình thang vuông.

- b) Ta có $EF \parallel AC$ (1).



F là điểm đối xứng của E qua D nên D là trung điểm của EF, do đó $EF = 2ED$.

Mặt khác, theo trên thì $ED = \frac{1}{2}AC$. Do đó ta có $EF = AC$ (2).

(1) và (2) suy ra ACEF là hình bình hành.

c) Theo giả thiết thì D là trung điểm của AB và EF. Tứ giác AEBF có hai đường chéo AB và EF vuông góc nhau tại trung điểm của mỗi đoạn, nên AEBF là hình thoi.

d) Theo trên, ACEF là hình bình hành nên AE cắt CF tại trung điểm mỗi đoạn.

Tứ giác ADEH có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = 90^\circ$ nên ADEH là hình chữ nhật, do đó AE và DH cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Từ đó ta có AE, CF, DH đồng qui tại trung điểm của mỗi đoạn.

Bài 107. Cho hình thoi ABCD, 2 đường chéo cắt nhau tại O. Vẽ AE vuông góc BC tại E, AF vuông góc CD tại F. Biết $EF = \frac{1}{2}BD$

a) Chứng minh rằng EF là đường trung bình của tam giác BCD

b) Tính các góc của hình thoi ABCD.

Lời giải:

a) Ta có hai tam giác ABC và ADC bằng nhau và AE, AF lần lượt là đường cao, do đó $AE = AF$.

Gọi M là giao điểm của EF và AC. Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BAE} + \widehat{ABE} = 90^\circ \\ \widehat{DAF} + \widehat{ADF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{DAF} \\ \widehat{ABE} = \widehat{ADF} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\widehat{EAM} = \widehat{FAM}$. Tam giác cân AEF có AM là đường phân giác nên AM là đường cao. Vậy $EF \parallel BD$.

Mặt khác, $EF = \frac{1}{2}BD = DO$, suy ra EFDO là hình bình hành

$\Rightarrow OE \parallel DF \parallel AB \Rightarrow E$ là trung điểm của BC. Vậy EF là đường trung bình trong tam giác BCD.

b) E là trung điểm của BC nên tam giác ABC cân tại A.

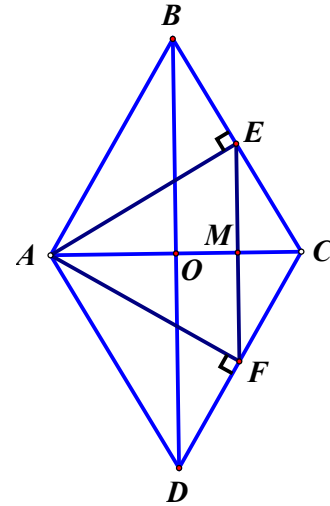
Vì ABCD là hình thoi nên suy ra tam giác ABC đều, từ đó ta được góc $\widehat{B} = 60^\circ$.

Vậy ta có: $\widehat{A} = \widehat{C} = 120^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{D} = 60^\circ$.

Bài 108. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{B} > 90^\circ$. Vẽ BM vuông góc AD tại M, BN vuông góc CD tại N, DP vuông góc AB tại P, DQ vuông góc BC tại Q; BM cắt DP tại E, BN cắt DQ tại F. Chứng minh rằng BFDE là hình thoi.

Lời giải:

Theo giả thiết: $BF \perp CD$, $DE \perp AB$, vì $AB \parallel CD$ nên $BF \parallel DE$.



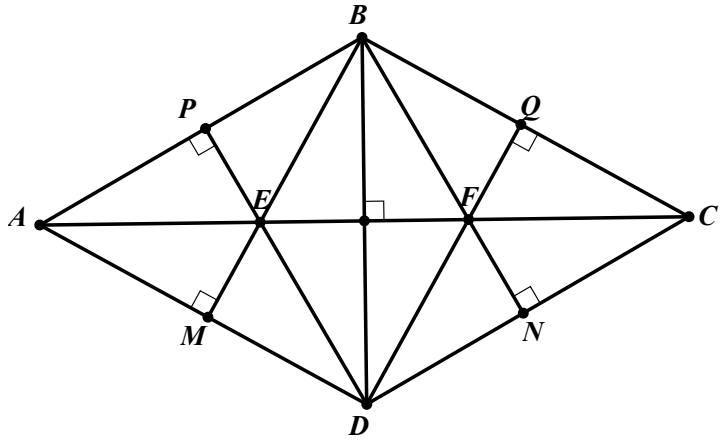
Chúng minh tương tự ta có $BE \parallel DF$. Do đó tứ giác BFED là hình bình hành.

Ta chứng minh $EF \perp BD$. Thật vậy, Trong tam giác ABD, BE và DE là đường cao nên AE cũng là đường cao, suy ra $AE \perp BD$.

Tương tự, $CE \perp BD$.

Vì $AC \perp BD$ suy ra bốn điểm A, C, E, F thẳng hàng và $EF \perp BC$.

Tứ giác BFDE là hình bình hành và có hai đường chéo vuông góc, suy ra BFDE là hình thoi.



Bài 109. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Kẻ đường cao AH ($H \in BC$), gọi M là trung điểm của AC. Lấy điểm D đối xứng với H qua M.

a) Chứng minh tứ giác ADCH là hình chữ nhật.

b) Trên tia đối của tia HC lấy điểm E sao cho $HE = HC$. Chứng minh ADHE là hình bình hành.

c) Gọi I là trung điểm của AE. Chứng minh AIHM là hình thoi.

Giải:

a) Ta có M là trung điểm của AC và HD.

Tứ giác ADCH có hai đường chéo AC và HD cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đoạn nên ADCH là hình bình hành.

Lại có $\widehat{AHC} = 90^\circ$ nên ADCH là hình chữ nhật.

b) Theo trên ta suy ra $AD \parallel BC$ hay $AD \parallel HE$, và $AD = HC = HE$.

Từ đó suy ra ADHE là hình bình hành.

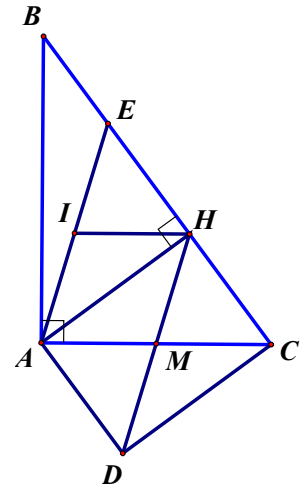
c) Theo giả thiết thì H, I lần lượt là trung điểm của EC và EA.

Trong $\triangle EAC$ có HI là đường trung bình nên $HI \parallel AC$ và $HI = \frac{1}{2} AC$.

Suy ra $HI \parallel AM$ và $HI = AM$. Do vậy AIHM là hình bình hành.

Mặt khác, vì ADCH là hình chữ nhật có tâm M nên $MA = MH$.

Hình bình hành AIHM có hai cạnh kề bằng nhau nên AIHM là hình thoi.



Bài 110. Cho hình bình hành ABCD, $AB = \frac{3}{2} AD$. Đường phân giác góc \widehat{A} cắt CD tại E,

đường phân giác góc \widehat{D} cắt AB tại F; hai đường phân giác đó cắt nhau tại M.

a) Chứng minh rằng ADEF là hình thoi.

b) Gọi N là giao điểm của phân giác góc \widehat{ABC} và phân giác góc \widehat{BCD} . Chứng minh rằng N là trung điểm của EF.

c) Giả sử $\widehat{A} = 120^\circ$. Chứng minh rằng lúc này, tứ giác MNCE là hình thoi.

Lời giải:

a)

$$\widehat{MAD} + \widehat{MDA} = \frac{1}{2}(\widehat{FAD} + \widehat{EDA}) = 90^\circ$$

$\Rightarrow AM \perp DF$. Từ đó ta được tam giác ADF cân tại A, suy ra M là trung điểm của DF.

Chứng minh tương tự, M là trung điểm của AE.

Tứ giác ADEF có hai đường chéo vuông góc nhau tại trung điểm mỗi đường, do vậy ADEF là hình thoi.

b) Dễ dàng chứng minh $\widehat{BNC} = 90^\circ$.

$$EF \parallel AD \parallel BC \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{NBC}.$$

Lại có $EF \parallel BC$. Từ đó ta có hai tam giác vuông MEF và NCB bằng nhau.

$$\Rightarrow MF = NB. \text{ Mặt khác } \widehat{AFD} = \widehat{ABN} \Rightarrow MF \parallel BN.$$

Vậy MFBN là hình bình hành. Suy ra $MN \parallel BF \parallel DE$.

Vì M là trung điểm của DF nên N là trung điểm của EF.

c) Theo chứng minh trên ta có $ME = NC$. Dễ dàng chứng minh $ME \parallel NC$. Do đó MNCE là hình bình hành.

$$\widehat{MEN} = \widehat{DAM} = 60^\circ; \widehat{NEC} = \widehat{ADE} = 60^\circ \Rightarrow EN \text{ là phân giác của góc } \widehat{MEC}.$$

Tứ giác MNCE là hình bình hành có đường chéo là đường phân giác của một góc nên MNCE là hình thoi.

Bài 111. Cho hình thoi ABCD. Vẽ hình bình hành ACEF có $CE = AD$. Gọi K là điểm đối xứng của E qua C (K không trùng với D). Chứng minh rằng:

a) FK, BD, AC cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

b) * Một trong bốn điểm B, D, E, F là trực tâm của tam giác có ba đỉnh là ba điểm còn lại.

Lời giải:

a) Gọi I là giao điểm của AC và BD, suy ra I là trung điểm của AC và BD.

Ta có $AF \parallel CE \parallel CK$ và $AF = CE = CK$ nên AFCK là hình bình hành. Do đó trung điểm I của AC cũng là trung điểm của KF.

Vậy ba đường đoạn thẳng FK, BD, AC đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.

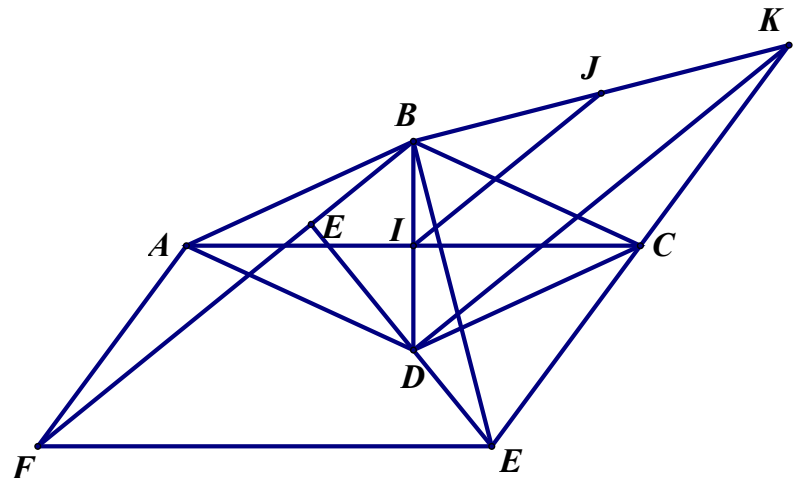
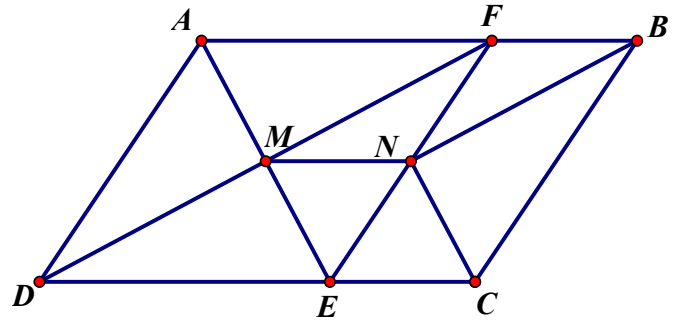
b) Giả sử E, F nằm cùng phía với D so với đường thẳng AC.

Ta chứng minh D là trực tâm tam giác BEF.

Vì $BD \perp AC$ và $EF \parallel AC$ nên $BD \perp EF$ (1).

Gọi J là trung điểm của BK. IJ là đường trung bình trong tam giác BFK nên $IJ \parallel BF$.

Mặt khác IJ là đường trung bình trong tam giác BDK nên $IJ \parallel DK$.



Như vậy $DK \parallel BF$ (a).

Trong tam giác DKE , có DC là trung tuyến, đồng thời $DC = CE = CK$ nên tam giác DKE vuông tại D , suy ra $DE \perp DK$ (b).

(a) và (b) suy ra $ED \perp BF$ (2).

(1) và (2) suy ra D là trực tâm tam giác BEF .

Trường hợp nằm khác phía so với đường thẳng AC , ta chứng minh được B là trực tâm tam giác DEF .

Bài 112. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , AH là đường cao. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và AC . Biết $AH = 16\text{cm}$ và $BC = 12\text{cm}$.

a) Tính diện tích tam giác ABC và độ dài cạnh MN .

b) Gọi E là điểm đối xứng của H qua M . Chứng minh tứ giác $AHBE$ là hình chữ nhật.

c) Gọi F là điểm đối xứng của A qua H . Chứng minh tứ giác $ABFC$ là hình thoi.

d) Gọi K là hình chiếu của H lên cạnh FC . Gọi I là trung điểm của HK . Chứng minh BK vuông góc IF .

Giải:

$$\text{a) } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} 16 \cdot 12 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) Theo giả thiết, M là trung điểm của AB và HE , do đó tứ giác $AHBE$ là hình bình hành (vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Lại có $AH \perp BC$. Hình bình hành $AHBE$ có một góc vuông nên $AHBE$ là hình chữ nhật.

c) Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên H là trung điểm của BC , và H là trung điểm của AF .

Tứ giác $ABFC$ có hai đường chéo BC và AF vuông góc nhau tại trung điểm của mỗi đoạn nên $ABFC$ là hình thoi.

d) Gọi J là trung điểm của CK , tam giác CHK có IJ là đường trung bình nên $IJ \parallel CH$, do đó $IJ \perp FH$.

Trong tam giác HFJ , HI và JI là hai đường cao nên I là trực tâm của $\triangle HFJ$, suy ra $FI \perp HJ$ (1).

Xét tam giác BCK , HJ là đường trung bình nên $HJ \parallel BK$ (2).

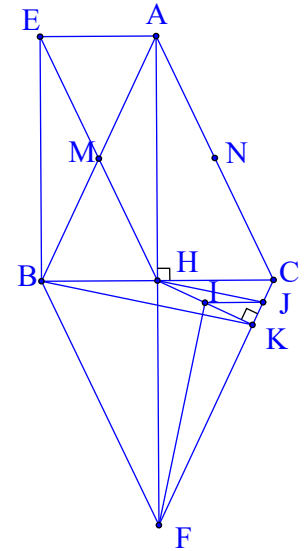
Từ (1) và (2) suy ra $FI \perp BK$.

Bài 113. Cho hình thoi $ABCD$. Trên các tia đối của tia BA , CB , DC , AD lấy các điểm M , N , E , F sao cho $BM = CN = DE = AF$. Chứng minh rằng:

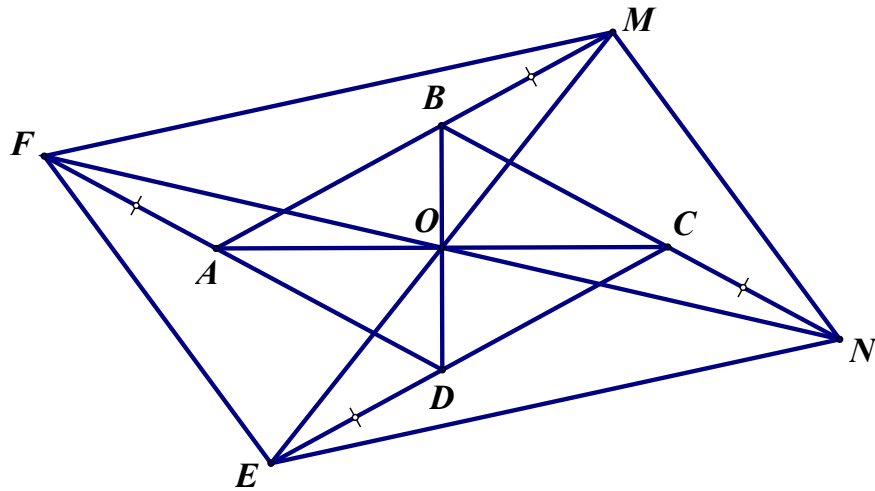
a) $\triangle FAM = \triangle NCE$.

b) $MNEF$ là hình bình hành.

c) AC , BD , ME , NF đồng quy.



Lời giải:



a) $\widehat{FAM} + \widehat{BAD} = 180^\circ$, $\widehat{NCE} + \widehat{DCB} = 180^\circ$. Mặt khác $\widehat{BAD} = \widehat{DCB}$ nên $\widehat{FAM} = \widehat{NCE}$.
Lại có: $FA = NC$ và $MA = MB + BA = ED + DC = EC$.
Do đó $\triangle FAM = \triangle NCE$ (c-g-c).

b) Theo trên ta có $FM = NE$ (1).

Chứng minh tương tự câu a, hai tam giác MBN và EDF bằng nhau. Suy ra $MN = EF$ (2).

(1), (2) suy ra $MNEF$ là hình bình hành.

c) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có O là trung điểm của AC và BD .

$ED \parallel MB$ và $ED = MB$ nên $MBED$ là hình bình hành, suy ra O là trung điểm của ME .

Chứng minh tương tự, $NCFA$ là hình bình hành, do đó O cũng là trung điểm của NF .

Vậy bốn đoạn thẳng AC , BD , ME , NF đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn.

Bài 114*. Cho $\triangle ABC$ đều có G là trọng tâm, đường cao AH . Lấy điểm M bất kì trên cạnh BC , I là trung điểm của AM . Gọi D , E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB và AC .

a) Tứ giác $DIEH$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng IH , DE , MG đồng quy.

Lời giải:

a) Giả sử M nằm giữa C và H .

Tam giác AHM vuông tại H , HI là trung tuyến nên $HI = IM = IA$.

Tam giác AME vuông tại E có EI là trung tuyến nên $EI = IM = IA$.

$\Rightarrow HI = EI$ (a).

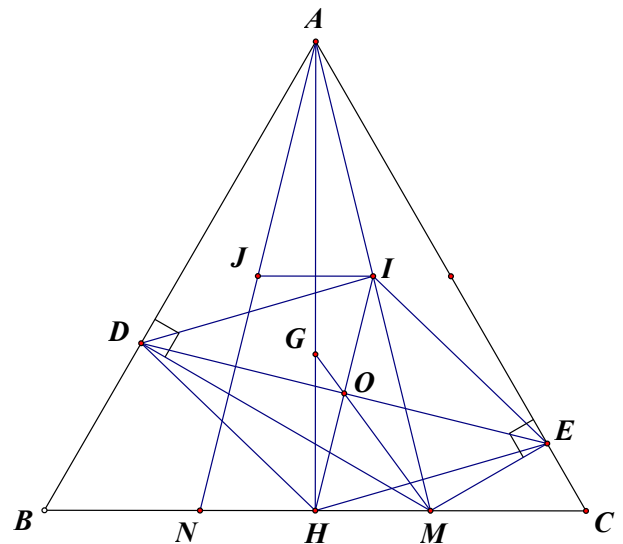
Tam giác AHI cân tại I nên: $\widehat{AHI} = \widehat{HAI}$

$\widehat{HIM} = \widehat{AHI} + \widehat{HAI} = 2\widehat{HAM}$.

Tương tự ta có $\widehat{EIM} = 2\widehat{CAM}$

Suy ra:

$\widehat{HIE} = \widehat{HIM} + \widehat{EIM} = 2(\widehat{HAM} + \widehat{CAM}) = 60^\circ$ (b)



(a), (b) suy ra tam giác IEH đều (1).

Tam giác DMA vuông tại D, có DI là trung tuyến nên $DI = IA = IM = IH$ (c).

Tương tự như trên ta cũng có $\widehat{DIM} = 2\widehat{DAM}$

$$\widehat{DIH} = \widehat{DIM} - \widehat{HIM} = 2(\widehat{DAM} - \widehat{HAM}) = 2\widehat{DAH} = 60^\circ \text{ (d).}$$

(c), (d) suy ra tam giác DIH đều (2).

(1), (2) suy ra tứ giác DIEH là hình thoi.

b) Gọi N là điểm đối xứng của M qua H và J là trung điểm của AN.

Trong tam giác AMN, IJ là đường trung bình, nên $IJ \parallel MH$ và $IJ = MH$. Từ đó suy ra IJHM là hình bình hành.

Gọi O là trung điểm của IH thì O cũng là trung điểm của JM.

Mặt khác, H là trung điểm của MN và $AG = \frac{2}{3}AM$ nên G là trọng tâm tam giác AMN. Do

đó M, J, G thẳng hàng.

Vì DIEH là hình thoi nên O cũng là trung điểm của DE.

Vậy ba đường thẳng DE, IH, MG đồng quy tại O.

Bài 115*. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có hai đường trung phân giác AD và BE thỏa mãn $BE = 2$.

AD. Tính \widehat{BAC} .

Giải:

Ta có D là trung điểm của BC và $AD \perp BC$

Gọi H là điểm đối xứng của A qua D, dễ dàng chứng minh được ABHC là hình thoi.

Dựng hình bình hành EAHF.

$HF \parallel AE, BH \parallel AC \Rightarrow B, H, F$ thẳng hàng.

Đồng thời ta có $EF = AH = 2AD = BE$.

Suy ra tam giác BEF cân tại E $\Rightarrow \widehat{EFB} = \widehat{EBF}$

Vì ABHC là hình thoi nên $\widehat{HBC} = \widehat{ABC}$.

$$\text{Ta có: } \widehat{EAD} = \widehat{EFH} = \widehat{EBH} = \widehat{EBC} + \widehat{HBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \widehat{ABC} = \frac{3}{2}\widehat{ABC}$$

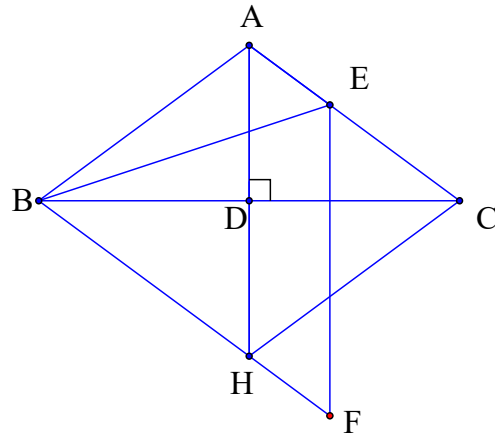
$$\text{Suy ra } \widehat{CAB} = 3\widehat{ABC} = 3\widehat{ACB}.$$

$$\text{Lại có: } \widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CAB} + \frac{1}{3}\widehat{CAB} + \frac{1}{3}\widehat{CAB} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}\widehat{CAB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CAB} = 108^\circ.$$

Bài 116*. Cho $\triangle ABC$ nhọn, các đường cao BD, CE. Tia phân giác của góc ABD và ACE cắt nhau tại O, cắt AC và AB lần lượt tại N và M. Tia BN cắt CE tại K, tia CM cắt BD tại H.

Chứng minh MNHK là hình thoi.



Giải:

Ta có $\widehat{ABD} + \widehat{BAC} = 90^\circ$ và $\widehat{ACE} + \widehat{BAC} = 90^\circ$.

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2}(\widehat{ABD} + \widehat{BAC}) + \frac{1}{2}(\widehat{ACE} + \widehat{BAC}) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ABN} + \widehat{BAC} + \widehat{ACM} = 90^\circ \quad (1)$$

Xét tam giác ABN có $\widehat{ABN} + \widehat{BAC} = \widehat{BNC}$ (góc ngoài của tam giác) (2).

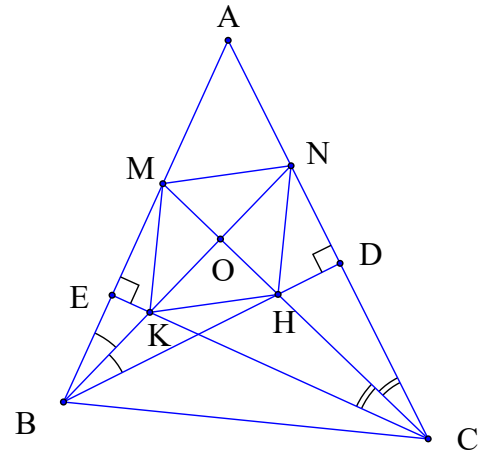
$$(1), (2) \text{ suy ra } \widehat{NCO} + \widehat{CNO} = 90^\circ$$

Do đó $CO \perp NK$.

Lại có CO là phân giác góc NCK từ đó ta có O là trung điểm NK.

Chứng minh tương tự, O là trung điểm của MH.

Tứ giác MNHK có hai đường chéo vuông góc nhau tại trung điểm mỗi đường nên MNHK là hình thoi.



BÀI 12.**HÌNH VUÔNG****A. LÝ THUYẾT****1. Định nghĩa:**

Hình vuông là tứ giác có 4 cạnh bằng nhau và 4 góc bằng nhau.

Như vậy, hình vuông vừa là hình thoi, vừa là hình chữ nhật.

$$\left. \begin{array}{l} AB = BC = CD = DA \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{Tứ giác ABCD là hình vuông.}$$

2. Tính chất: Hình vuông có tất cả tính chất của hình thoi và hình chữ nhật.

3. Dấu hiệu nhận biết hình vuông:

- a) Hình chữ nhật có 2 cạnh kề bằng nhau.
- b) Hình chữ nhật có 2 đường chéo vuông góc nhau.
- c) Hình chữ nhật có 1 đường chéo là phân giác một góc của nó
- d) Hình thoi có 1 góc vuông
- e) Hình thoi có 2 đường chéo bằng nhau.

B. BÀI TẬP

4) Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia CB và DA lấy lần lượt hai điểm E và F sao cho $CE = DF = CD$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm H sao cho $CH = CB$. Chứng minh AE vuông góc với FH.

Giải:

Tứ giác CDFE có $DF = CE = CD$, $DF \parallel CE$, $\hat{D} = 90^\circ$ nên CDFE là hình vuông.

Ta có: $AF = HD$, $\widehat{HDF} = \widehat{AFE} = 90^\circ$, $FE = DF$.

Do vậy $\triangle AFE = \triangle HDF \Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{FHD}$.

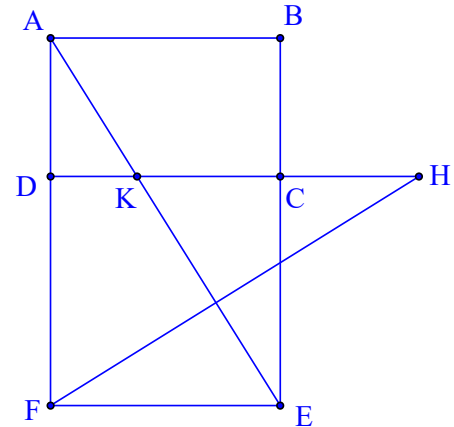
Gọi K là giao điểm của AE và CD.

$$\widehat{AKD} = \widehat{HKE}, \widehat{AKD} + \widehat{FAE} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{HKE} + \widehat{FAE} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{EAF} = \widehat{FHD} \text{ nên } \widehat{HKE} + \widehat{FHD} = 90^\circ.$$

Vậy AE vuông góc HF.



Bài 117. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB, BC, CD, DA, lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Chứng minh EFGH là hình vuông.

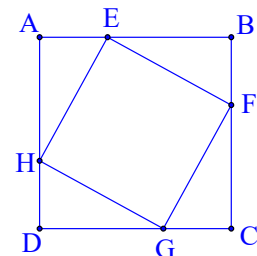
Giải:

Dễ thấy $AH = BE = CF = DG$. Từ đó suy ra:

$$\triangle AEH = \triangle BFE = \triangle CGF = \triangle DHG \text{ (c-g-c).}$$

Do đó $EH = FE = GF = HG$ (1).

Mặt khác, vì $\triangle AEH = \triangle BFE \Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{AHE}$



Suy ra $\widehat{AEH} + \widehat{BEF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FEH} = 90^\circ$ (2).

(1), (2) suy ra EFGH là hình vuông.

Bài 118. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2AD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

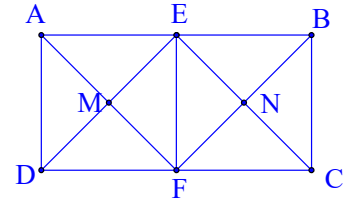
a) Tứ giác ADFE là hình gì? Vì sao?

b) Tứ giác EMFN là hình gì? Vì sao?

Giải:

a) E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD nên ta có $EF \parallel AD \parallel BC$, do đó dễ thấy ADFE là hình chữ nhật.

Mặt khác $AD = AE = \frac{1}{2}AB$. Vậy ADFE là hình vuông.



b) Chứng minh tương tự câu a, ta có BCFE cũng là hình vuông. Do đó hai tam giác MEF và NEF là hai tam giác vuông cân tại M, N, từ đó suy ra EMFN là hình vuông.

Bài 119. Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA ta lấy một điểm M, trên tia đối của tia CB ta lấy điểm N, trên tia đối của tia DC ta lấy một điểm P và trên tia đối của tia AD ta lấy điểm Q sao cho $AQ = BM = CN = DP$. Chứng minh:

a) Các tam giác vuông AQM, BMN, CNP, DPQ bằng nhau.

b) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình vuông.

c) Hai hình vuông MNPQ và ABCD có chung một tâm đối xứng.

Giải:

a) Dễ thấy $AM = BN = CP = DQ$, do đó các tam giác vuông AQM, BMN, CNP, DPQ bằng nhau (c-g-c).

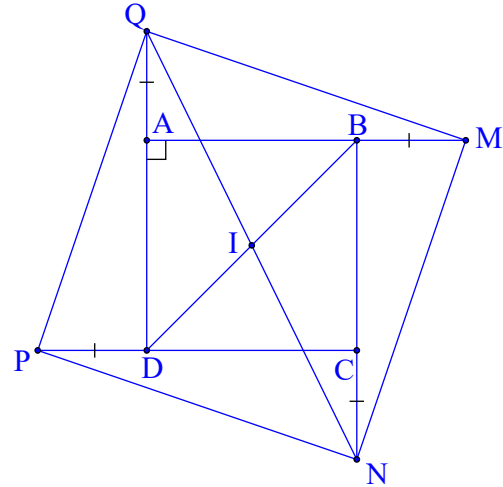
b) $\triangle AQM = \triangle BMN = \triangle CNP = \triangle DPQ$ suy ra $QM = MN = NP = PQ$ (1).

Mặt khác $\triangle AQM = \triangle BMN \Rightarrow \widehat{AMQ} = \widehat{BMN}$.

Và $\widehat{BNM} + \widehat{BMN} = 90^\circ$, do đó ta có $\widehat{AMQ} + \widehat{BMN} = 90^\circ$, hay $\widehat{QMN} = 90^\circ$ (2).

Từ (1), (2) suy ra MNPQ là hình vuông.

c) Xét tứ giác BNDQ có $BN \parallel DQ$ và $BN = DQ$ nên BNDQ là hình bình hành. Gọi I là giao điểm của BD và NQ, thì I là trung điểm của BD và NQ. Do đó I là tâm của hai hình vuông ABCD và MNPQ.



Vậy hai hình vuông ABCD và MNPQ có chung tâm đối xứng I.

Bài 120. Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

- Chứng minh $AN = DM$ và $AN \perp DM$.
- Chứng minh rằng các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành một hình vuông.
- Gọi E là giao điểm của DM và AN. Chứng minh $CE = CD$.

Giải:

a) Xét hai tam giác ABN và DAM vuông tại B và A, có $AB = AD$ và $BN = AM$, do đó $\triangle ABN = \triangle DAM$

suy ra $AN = DM$ và $\widehat{BAN} = \widehat{ADM}$.

Mà $\widehat{BAN} + \widehat{DAN} = 90^\circ$, do đó $\widehat{ADM} + \widehat{DAN} = 90^\circ$, hay $\widehat{AED} = 90^\circ$.

Vậy ta có $AN = DM$ và $AN \perp DM$.

b) Giả sử các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành tứ giác EFGH.

$MB \parallel DP$ và $MB = DP \Rightarrow MBPD$ là hình bình hành.

Suy ra $BP \parallel DM \Rightarrow AN \perp BP$.

Tương tự ta cũng có $CQ \perp DM$.

Như vậy tứ giác EFGH có $\widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{H} = 90^\circ$.

* Ta chứng minh $EF = EH$:

Dễ thấy EM là đường trung bình trong tam giác ABF, E là trung điểm của AF.

Tương tự H là trung điểm của DE.

Xét hai tam giác ABF và DAE vuông tại F và E, có:

$AB = DA$; $\widehat{BAF} = \widehat{ADE}$ (vì $\triangle ABN = \triangle DAM$). Suy ra $\triangle ABF = \triangle DAE \Rightarrow AF = DE$.

Từ đó ta có $EF = EH$. Vậy EFGH là hình vuông.

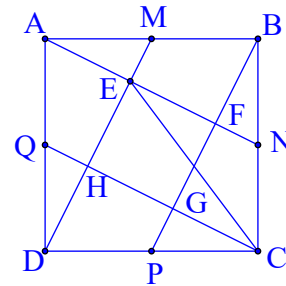
c) H là trung điểm của DE và $CH \perp DE$, do đó ta suy ra $\triangle CDE$ cân tại C, hay là $CE = CD$.

Bài 121. Cho hình vuông ABCD. Từ điểm M thuộc đường chéo BD kẻ $ME \perp AB$ và $MF \perp AD$. Chứng minh rằng:

- $CF = DE$ và $CF \perp DE$.
- Ba đường thẳng CM, BF và FE đồng qui.

Giải:

a) Tứ giác MEAF có $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$ nên MEAF là hình chữ nhật. Mặt khác, dễ thấy $\triangle MEB$ vuông cân tại E.



Do đó $AF = EM = EB \Rightarrow DF = AE$.

Từ đó ta có $\triangle DAE = \triangle CDF$ (c-g-c).

$\Rightarrow CF = DE$ và $\widehat{FCD} = \widehat{EDA}$.

Vì $\widehat{FCD} + \widehat{CFD} = 90^\circ$ nên $\widehat{EDA} + \widehat{CFD} = 90^\circ$.

Hay $CF \perp DE$.

b) Chứng minh tương tự như trên, ta có:

$\triangle ABF = \triangle CBE$, suy ra $BF \perp CE$.

* Ta chứng minh $CM \perp EF$:

Giả sử FM cắt BC tại J ; CM cắt EF , AB lần lượt tại I , K . Ta có $\widehat{MJC} = 90^\circ$.

Để thấy $BEMJ$ là hình vuông nên $MJ = FA$ và $CJ = EA$.

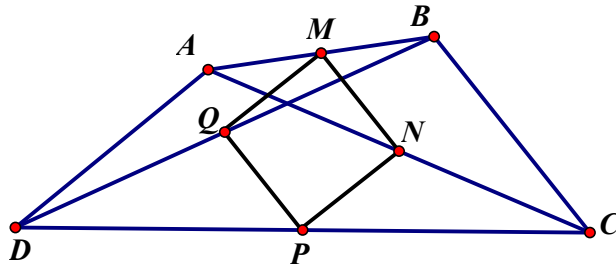
Suy ra $\triangle CJM = \triangle EAF$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{JCM} = \widehat{AEF}$.

Vì $\widehat{JCM} + \widehat{EKI} = 90^\circ$ nên $\widehat{AEF} + \widehat{EKI} = 90^\circ$, hay $\widehat{KIE} = 90^\circ$.

Xét tam giác EFC có $ED \perp FC$, $FB \perp CE$, $CM \perp EF$, do đó ED , FB , CM là ba đường cao trong tam giác EFC . Vậy ED , FB , CM đồng qui.

Bài 122. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ADC} + \widehat{BCD} = 90^\circ$ và $AD = BC$. Gọi M , N , P , Q lần lượt là trung điểm của AB , AC , CD , BD . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

Lời giải:



Trong tam giác ABC , MN là đường trung bình nên $MN = \frac{1}{2} BC$.

Lập luận tương tự, ta có $PQ = \frac{1}{2} BC$, $MQ = \frac{1}{2} AD$, $NP = \frac{1}{2} AD$.

Theo giả thiết, $AD = BC$ suy ra $MN = QP = MQ = NP$. Vậy $MNPQ$ là hình thoi (1).

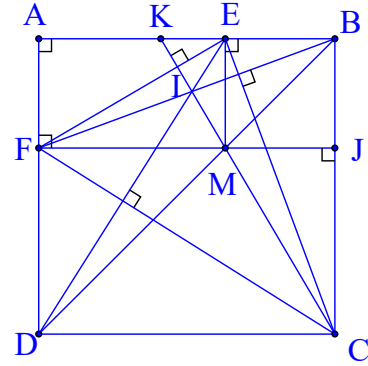
Mặt khác ta có:

$\widehat{DPQ} = \widehat{DCB}$, $\widehat{NPC} = \widehat{ADC}$ (góc đồng vị). theo giả thiết $\widehat{DCB} + \widehat{ADC} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{DPQ} + \widehat{NPC} = 90^\circ$. Do vậy ta được góc $\widehat{QPN} = 90^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) cho ta $MNPQ$ là hình vuông.

Bài 123. Cho tam giác ABC . Phía ngoài tam giác ABC dựng hình vuông $BCGF$, $ACHI$ và tam giác ABC' vuông cân tại C' . Gọi O , A' , B' lần lượt là trung điểm của AB , BG , AH .

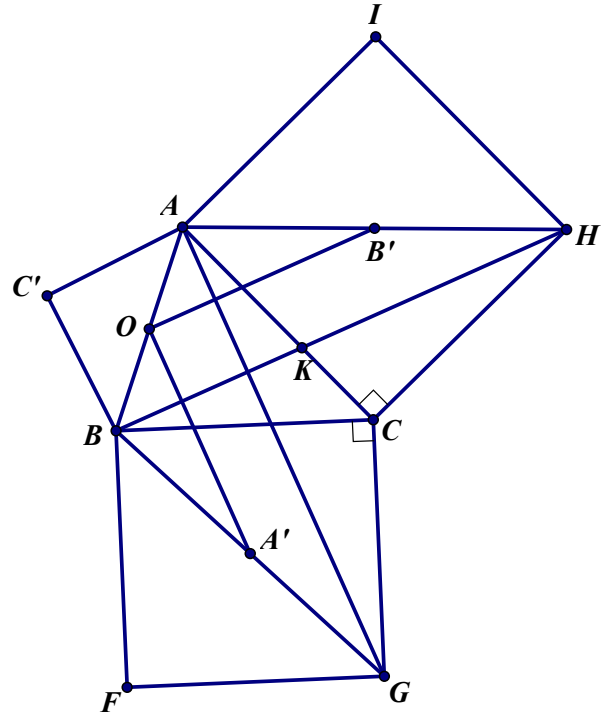
Chứng minh rằng:



- a) $AG = BH$
 b) $AG \perp BH$
 c) Tam giác $OA'B'$ vuông cân

Lời giải:

- a) Xét hai tam giác BCH và GCA có:
 $BC = GC$ (hai cạnh của hình vuông $BCGF$).
 $\widehat{BCH} = \widehat{GCA}$ (Vì cùng bằng góc $\widehat{ACB} + 90^\circ$).
 $CH = CA$ (hai cạnh trong hình vuông $ACHI$).
 Suy ra hai tam giác BCH và GCA bằng nhau (c-g-c).
 Vậy $AG = BH$.
 b) Gọi K là giao điểm của BH và AH ,
 $\widehat{CKH} = \widehat{AKB}$ (góc đối đỉnh) (1).
 Theo chứng minh trên: $\widehat{CHK} = \widehat{CAG}$ (2) (vì hai tam giác BCH và GCA bằng nhau).
 Mặt khác: $\widehat{CHK} + \widehat{CKH} = 90^\circ$ (3).
 Từ (1), (2), (3) suy ra: $\widehat{CAG} + \widehat{AKB} = 90^\circ$.
 Vậy $AG \perp BH$.
 c) Trong tam giác ABG , OA' là đường trung bình, do đó $OA' \parallel AG$ và $OA' = \frac{1}{2} AG$ (1).



Trong tam giác ABH , OB' là đường trung bình, do đó $OB' \parallel BH$ và $OB' = \frac{1}{2} BH$ (2).

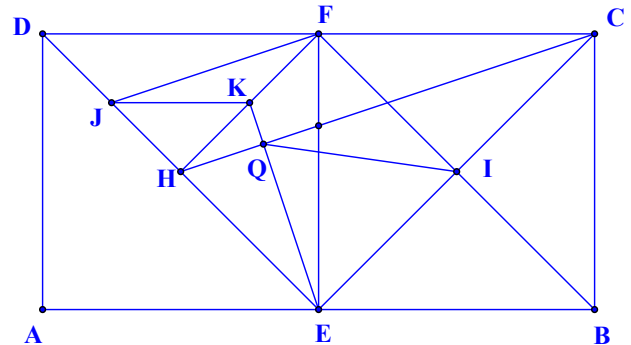
Theo hai câu trên, $AG = BH$ và $AG \perp BH$, kết hợp với (1) và (2) suy ra $OA' = OB'$ và $OA' \perp OB'$. Vậy tam giác $OA'B'$ vuông cân tại O .

Bài 124. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . H, K lần lượt là trung điểm của DE, HF ; I là trung điểm của BF và Q là giao điểm của CH và EK .

- a) Chứng minh $CH \perp EK$ tại Q .
 b) Chứng minh $QI = IE = IC = IB$.

Giải:

- a) Gọi J là trung điểm HD .
 Ta có $JK \parallel DF$ nên $JK \perp EF$.
 $FK \perp DE$ (vì $ADFE$ là hình vuông)
 K là trực tâm tam giác EFJ
 Suy ra $EK \perp FJ$, mà $FJ \parallel CH$ nên $EK \perp CH$.
 b)



Để thấy $BCFE$ là hình vuông, I là trung điểm của FB nên I là trung điểm của BC .
 Theo trên, tam giác CQE vuông tại Q . từ đó suy ra $QI = IE = IC = IB$.

Bài 125. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) ($AB < CD$). Vẽ BE vuông góc CD tại E. trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = CD$. Gọi N là giao điểm của AE và BD, K là trung điểm của EM. Vẽ AI vuông góc ME tại I. Chứng minh rằng $NK \parallel AM$ và $\widehat{BID} = 90^\circ$.

Giải:

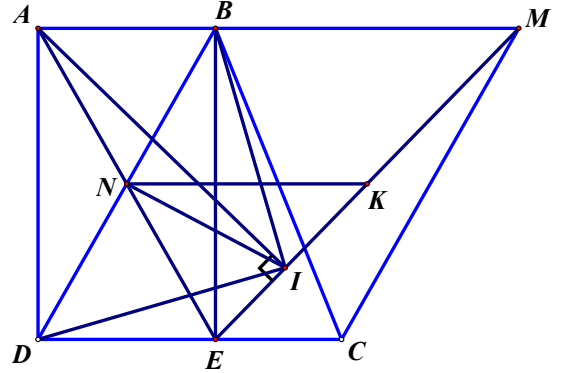
Trong tam giác AEM, NK là đường trung bình, do đó $NK \parallel AM$.

Dễ thấy tứ giác ABED là hình chữ nhật, do đó N là trung điểm của AE và BD và $AE = BD$.

Tam giác IAE vuông tại I, có IN là đường trung tuyến, do đó:

$$IN = NA = NE = NB = ND.$$

Tam giác IBD có IN là trung tuyến thỏa mãn $IN = IB = ID$, do đó BID là tam giác vuông tại I.



Bài 126. Cho tam giác ABC. Phía ngoài tam giác ABC dựng hình vuông ACPG, ABDE. Gọi H, K, L, M, N lần lượt là trung điểm của BE, BC, CG, AB, AC. Chứng minh rằng

a) $\triangle KNL = \triangle HMK$

b) $HK \perp KL$

Lời giải:

a)

* Trong tam giác ABE, HM là đường trung bình, do đó $HM \parallel EA$ và $HM = \frac{1}{2} EA$ (1).

Trong tam giác ABC, KN là đường trung bình, do đó $KN = \frac{1}{2} AB$ (2).

Mặt khác, vì ABDE là hình vuông nên $EA = AB$. Kết hợp (1) và (2) suy ra $HM = KN$.

* Lập luận tương tự, ta có $MK = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AG = NL$.

* Ta có $HM \parallel EA \Rightarrow HM \perp AB$, suy ra $\widehat{HMK} = 90^\circ + \widehat{BMK}$ (3).

Chứng minh tương tự, $\widehat{LNK} = 90^\circ + \widehat{CNK}$ (4).

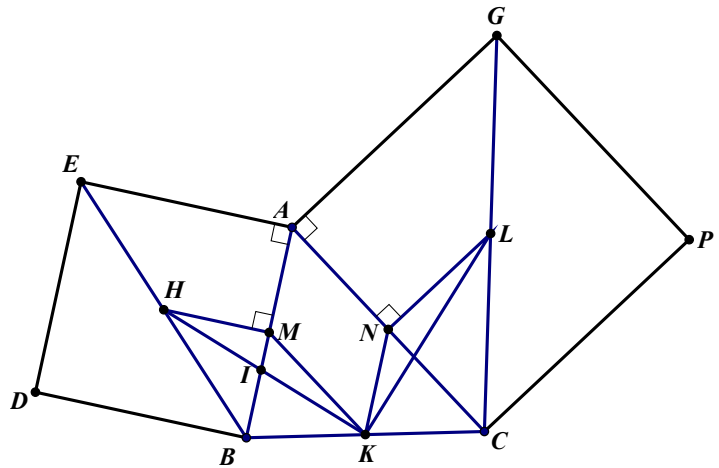
Vì $MK \parallel AC$ nên $\widehat{BMK} = \widehat{BAC}$ (góc đồng vị).

Vì $NK \parallel AB$ nên $\widehat{CNK} = \widehat{CAB}$ (góc đồng vị).

Từ đó suy ra $\widehat{BMK} = \widehat{CNK}$. Kết hợp (3) và (4), ta được $\widehat{HMK} = \widehat{LNK}$.

* Xét hai tam giác KNL và HMK có:

$$KN = HM, \widehat{HMK} = \widehat{LNK}, NL = MK.$$



Suy ra hai tam giác KNL và HMK bằng nhau (c-g-c) (Chứng minh xong).

Bài 127. Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{A} = 45^\circ$, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng của H qua AB, E là điểm đối xứng của H qua AC, K là giao điểm của DB và EC.

- a) Chứng minh tứ giác ADKE là hình vuông.
b) $\triangle ABC$ có thêm điều kiện gì thì A, H, K thẳng hàng.

Lời giải:

a) Vì tam giác ABC nhọn nên H thuộc cạnh BC.
Vì D và E lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC nên ta có:

$$\widehat{BAH} = \widehat{BAD}; \widehat{CAH} = \widehat{CAE}.$$

$$\text{Do đó: } \widehat{DAE} = 2(\widehat{BAH} + \widehat{CAH}) = 2\widehat{BAC} = 90^\circ.$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{ADB} = \widehat{AHB} = 90^\circ, \widehat{AEC} = \widehat{AHC} = 90^\circ.$$

Tứ giác ADKE có ba góc vuông nên ADKE là hình chữ nhật.

Lại có $AD = AE = AH$.

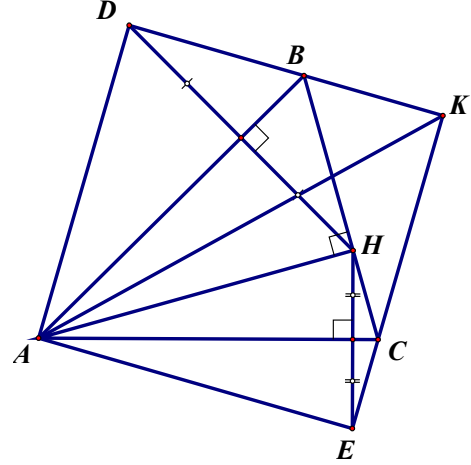
Vậy ADKE là hình vuông.

b) Vì ADKE là hình vuông nên AK là đường phân giác của góc \widehat{BAC} .

A, H, K thẳng hàng khi và chỉ khi AH là đường phân giác góc \widehat{BAC} , hay $\widehat{DAH} = \widehat{EAH}$.

Theo trên, $\widehat{BAH} = \widehat{BAD}; \widehat{CAH} = \widehat{CAE}$, do đó $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$.

Như vậy A, H, K thẳng hàng khi AH là đường phân giác góc \widehat{BAC} , hay tam giác ABC cân tại A.



Bài 128. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của AC. Phía ngoài tam giác ABC dựng hình vuông BCKL, ABDE. Lấy điểm Q trên tia đối của tia MB sao cho $MB = MQ$. Chứng minh:

a) $DL = BQ$.

b) $DL \perp BM$

Lời giải:

a) Ta chứng minh hai tam giác DBL và BAQ bằng nhau.

Dễ dàng nhận thấy M là trung điểm của QB, vì M là trung điểm AC suy ra tứ giác ABCQ là hình bình hành.

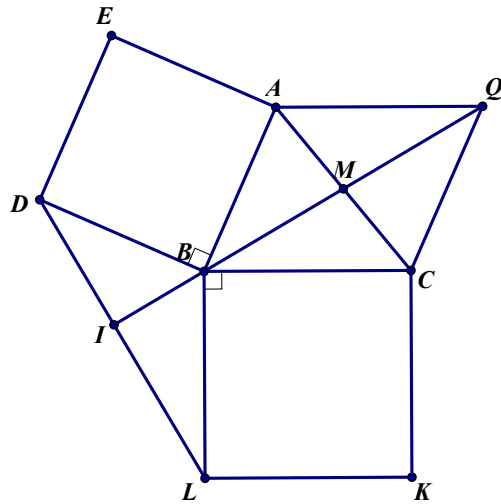
$BD = BA$ (vì ABDE là hình vuông).

$BL = AQ$ (cùng bằng cạnh BC).

Ta có:

$$\widehat{DBL} + \widehat{ABC} + 2.90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \widehat{DBL} + \widehat{ABC} = 180^\circ.$$

Lại có ABCQ là hình bình hành nên $\widehat{BAQ} + \widehat{ABC} = 180^\circ$.



Từ đây suy ra $\widehat{DBL} = \widehat{BAQ}$.

Vậy hai tam giác DBL và BAQ bằng nhau (c-g-c), từ đó suy ra $DL = BQ$.

b) Theo trên ta có $\widehat{DLB} = \widehat{QBC}$ (5). Gọi I là giao điểm của BQ và DL.

Ta có $\widehat{IBL} + \widehat{QBC} = 180^\circ - \widehat{LBC} = 90^\circ$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{IBL} + \widehat{ILB} = 90^\circ$. Vậy $\widehat{BIL} = 90^\circ$ (chứng minh xong).

Bài 129. Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F lần lượt trên cạnh AB, AD sao cho $AE = DF$. Chứng minh rằng $DE = CF$ và $DE \perp CF$.

Lời giải:

Gọi I là giao điểm của DE và CF.

Xét hai tam giác ADE và DCF có:

$AD = DC$ (vì ABCD là hình vuông).

$\widehat{EAD} = \widehat{FDC} = 90^\circ$.

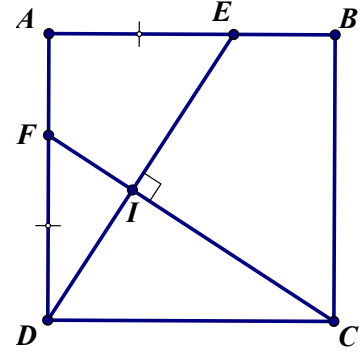
$AE = DF$ (theo giả thiết)

Vậy hai tam giác ADE và DCF bằng nhau, khi đó ta có:

$DE = CF$ và $\widehat{ADE} = \widehat{DCF}$.

Mặt khác $\widehat{DCF} + \widehat{DFC} = 90^\circ$, suy ra

$\widehat{ADE} + \widehat{DFC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DIF} = 90^\circ$. Vậy $DE \perp CF$.



Bài 130. Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.

a) Chứng minh rằng $CM = DN$ và $CM \perp DN$.

b) Vẽ $AH \perp DN$ tại H, AH cắt CD tại P. Chứng minh rằng P là trung điểm của CD

c) CM cắt DN tại I. Chứng minh rằng $AI = AB$.

Lời giải:

a) Dễ dàng nhận thấy hai tam giác BCM và CDN bằng nhau

(c-g-c), suy ra $CM = DN$ và $\widehat{BCM} = \widehat{CDN}$.

Mặt khác: $\widehat{CND} + \widehat{CDN} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{BCM} + \widehat{CND} = 90^\circ$.

Vậy $CM \perp DN$.

b) $AP \parallel MC$ suy ra $\widehat{APD} = \widehat{DCM}$ (đồng vị)

suy ra $\widehat{DAP} = \widehat{BCM}$ (cùng phụ với góc \widehat{APD}).

Do đó hai tam giác ADP và CBM bằng nhau (g-c-g) $\Rightarrow DP = BM = \frac{1}{2}AB$.

Vì P thuộc đoạn CD, do vậy P là trung điểm của CD.

c) Trong tam giác CDI, $PH \parallel CI$ và P là trung điểm của CD, suy ra H là trung điểm của DI.

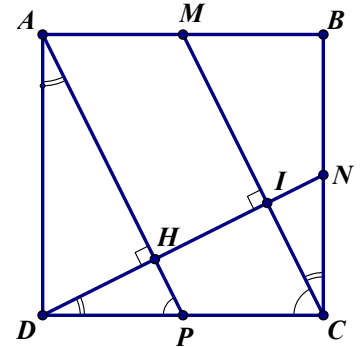
Tam giác ADI có AH là đường cao và là trung tuyến, suy ra tam giác ADI cân tại A. Vậy $AI = AD = AB$ (chứng minh xong).

Bài 131. Cho hình vuông ABCD. Từ điểm M tùy ý trên cạnh BC, vẽ đường thẳng cắt cạnh CD tại K sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{AMK}$, $AH \perp MK$ tại H. Chứng minh rằng

a) $\triangle AMH = \triangle AMB$

b) $\widehat{KAM} = 45^\circ$

Lời giải:



a) Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{BAM} + \widehat{BMA} = 90^\circ \\ \widehat{HAM} + \widehat{HMA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{HAM} \\ \widehat{BAM} = \widehat{HMA} \end{cases}$$

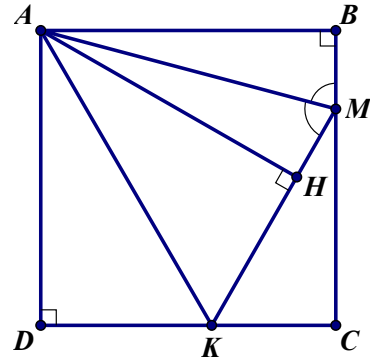
Hai tam giác AMH và AMB có:

$\widehat{HMA} = \widehat{BAM}$, AM chung, $\widehat{HAM} = \widehat{BAM}$, do đó $\triangle AMH = \triangle AMB$ (g-c-g)

b) Xét hai tam giác ADK và AHK lần lượt vuông tại D và H, có cạnh huyền AK chung, đồng thời AH = AD (vì cùng bằng AB). Vậy

$$\triangle ADK = \triangle AHK \Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{HAK}.$$

$$\widehat{KAM} = \widehat{HAK} + \widehat{HAM} = \frac{1}{2}(\widehat{HAD} + \widehat{HAB}) = \frac{1}{2}\widehat{BAD} = 45^\circ \text{ (chứng minh xong).}$$



Bài 132. Cho hình vuông ABCD, E thuộc cạnh AB. Phân giác \widehat{CDE} cắt BC tại K. Trên tia đối của tia AB, lấy điểm F sao cho AF = CK. Chứng minh rằng

a) Tam giác DEF cân

b) AE + CK = DE

Lời giải:

a) Từ giả thiết dễ dàng thấy được hai tam giác ADF và CDK bằng nhau (c-g-c).

Suy ra $\widehat{ADF} = \widehat{CDK} = \widehat{EDK}$.

Từ đó ta có:

$$\widehat{KDF} = \widehat{ADF} + \widehat{KDA} = \widehat{CDK} + \widehat{KDA} = 90^\circ \quad (1).$$

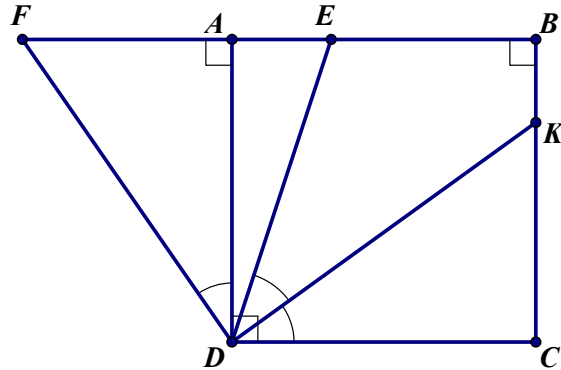
$$\widehat{AFD} + \widehat{ADF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AFD} + \widehat{KDE} = 90^\circ \quad (2).$$

Từ (1) và (2), $\widehat{EFD} = \widehat{EDF}$ (vì cùng phụ với góc EDK).

Vậy tam giác DEF cân tại E.

b) AE + CK = AE + AF = EF (F nằm trên tia đối tia AB nên A nằm giữa EF)

Theo câu trên thì EF = ED. Vậy AE + CK = DE.



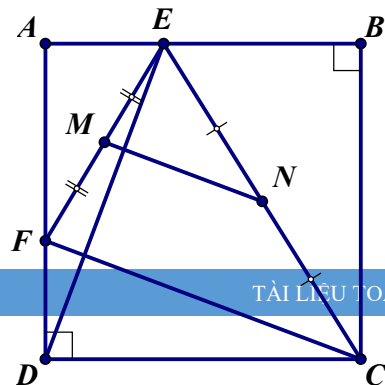
Bài 133. Cho hình vuông ABCD, E thuộc AB, F thuộc AD sao cho AE = DF. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF, CE. Chứng minh rằng $MN \perp DE$ và $MN = \frac{1}{2} DE$.

Lời giải:

Theo chứng minh bài 90. Thì ta có DE = CF và $DE \perp CF$ (1).

Trong tam giác EFC, MN là đường trung bình nên

$$MN \parallel CF \text{ và } MN = \frac{1}{2} CF \quad (2).$$



Từ (1) và (2) suy ra $MN \parallel DE$ và $MN = \frac{1}{2}DE$.

(CM xong).

Bài 134. Cho hình vuông ABCD. Một góc vuông \widehat{xAy} quay xung quanh đỉnh A thỏa mãn Ax cắt cạnh BC tại M, Ay cắt CD tại N. Phân giác \widehat{xAy} cắt CD tại P. Chứng minh rằng khi \widehat{xAy} quay quanh đỉnh A thì chu vi tam giác CMP bằng 2AB.

Lời giải:

Ta có: $\widehat{MAB} = \widehat{NAD}$ (vì cùng phụ với góc \widehat{MAD})

Từ đó dễ thấy $\triangle ABM = \triangle ADN$ (g-c-g).

Suy ra $AM = AN$ và $BM = DN$.

Vì $AM = AN$ và AP là đường phân giác góc \widehat{MAN} nên M và N đối xứng nhau qua AP, từ đó $PM = PN$.

Điểm M thuộc cạnh BC nên điểm N nằm trên tia đối của tia DC và P nằm trên cạnh CD.

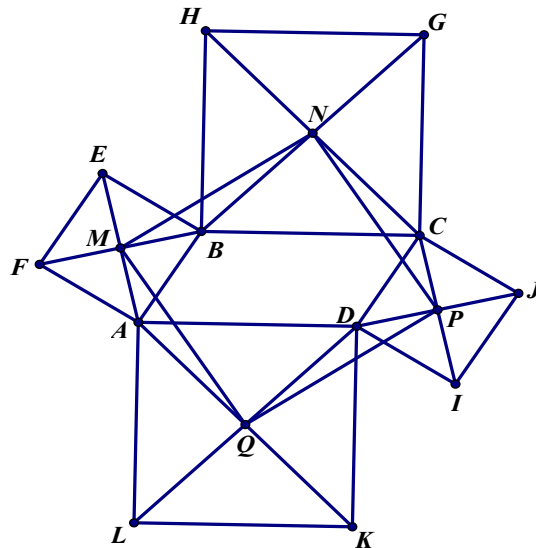
Gọi T là chu vi tam giác PCM, ta có:

$$\begin{aligned} T &= CP + PM + MC = CP + PN + MC = CN + MC = CD + DN + MC \\ &= CD + BM + MC = CD + BC = 2AB. \end{aligned}$$

Vậy khi \widehat{xAy} quay quanh đỉnh A thì chu vi tam giác CMP không đổi bằng 2AB.

Bài 135. Cho hình bình hành ABCD. Bên ngoài hình bình hành dựng các hình vuông ABEF, BCGH, CDIJ, ADKL. Gọi M, N, P, Q lần lượt là tâm của 4 hình vuông đó. Chứng minh rằng MNPQ là hình vuông.

Bài giải:



Dễ dàng nhận thấy $CP = BM = AM = DP$ và $CN = BN = AQ = DQ$ (1)

Trong bình hành ABCD, đặt $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = x$

Ta có: $\widehat{PCN} = \widehat{PCD} + \widehat{DCB} + \widehat{BCN} = 45^\circ + x + 45^\circ = x + 90^\circ$.

Chứng minh tương tự, ta được:

$\widehat{PCN} = \widehat{MBN} = \widehat{MAQ} = \widehat{PDQ} = x + 90^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\triangle PCN = \triangle MBN = \triangle MAQ = \triangle PDQ$

Suy ra $PN = MN = MQ = PQ$, hay tứ giác MNPQ là hình thoi.

Lại có: $\begin{cases} \widehat{BMN} = \widehat{AMQ} \\ \widehat{BMQ} + \widehat{AMQ} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{BMN} + \widehat{BMQ} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NMQ} = 90^\circ$.

Vậy MNPQ là hình vuông.

Bài 136. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ các hình vuông ABDE, BCFG sao cho C, D ở cùng một phía của cạnh AB; A, G ở cùng một phía của cạnh BC. Chứng minh $AG = CD$ và $AG \perp CD$.

Lời giải:

Vì A và G nằm cùng phía so với đường thẳng BC, \widehat{CBA} nhọn nên tia BA nằm trong góc \widehat{CBG} .

Tương tự tia BC nằm trong góc \widehat{ABD} .

Ta có $\widehat{ABG} = \widehat{DBC}$ (cùng phụ với góc \widehat{ABC}).

Xét hai tam giác ABG và DBC có:

$AB = DB$, $\widehat{ABG} = \widehat{DBC}$, $BG = BC$, suy ra hai tam giác ABG và DBC bằng nhau (c-g-c).

Do đó, $AG = CD$ và $\widehat{BGA} = \widehat{BCD}$.

Đường thẳng GA cắt BC tại I, cắt CD tại H. Ta

có: $\widehat{BIG} = \widehat{HIC}$ (góc đối đỉnh)

$\widehat{BGI} + \widehat{BIG} = 90^\circ$.

Kết hợp $\widehat{BGA} = \widehat{BCD}$ cho ta $\widehat{HIC} + \widehat{BCD} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{GHC} = 90^\circ$.

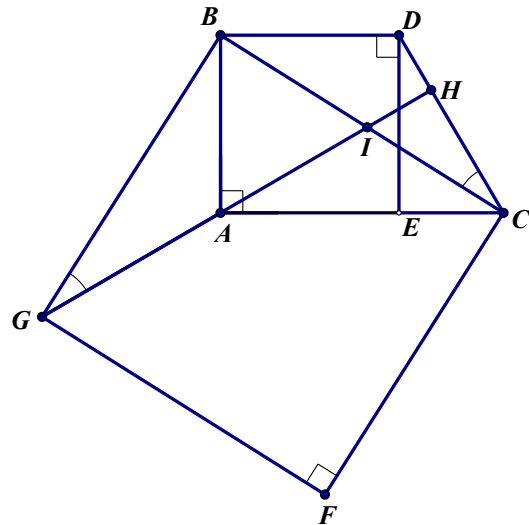
Tóm lại ta có: $AG = CD$ và $AG \perp CD$.

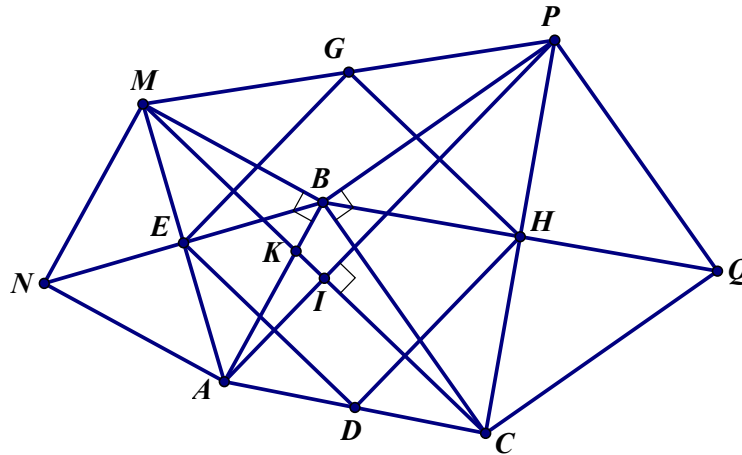
Bài 137. Cho tam giác ABC, bên ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông ABMN và BCQP. Gọi D, E, G, H lần lượt là trung điểm của AC, BN, MP, BQ. Chứng minh:

a) $AP = CM$ và $AP \perp CM$

b) Tứ giác DEGH là hình vuông

Lời giải:





a) Chứng minh $AP = CM$ và $AP \perp CM$

Ta chứng minh tam giác ABP và MBC bằng nhau. Thật vậy:

$AB = MB$ ($ABMN$ là hình vuông), $\widehat{ABP} = \widehat{MBC} = \widehat{ABC} + 90^\circ$, $BP = BC$ ($BCQP$ là hình vuông).

Vậy $\triangle ABP = \triangle MBC$ (c-g-c). Suy ra $AP = CM$ và $\widehat{BAP} = \widehat{BMC}$.

Gọi I là giao điểm của AP và CM , K là giao điểm của AB và CM .

Hai tam giác BMK và IAK có: $\widehat{M} = \widehat{A}$ (vì $\widehat{BAP} = \widehat{BMC}$), góc K đối đỉnh. Vì tổng ba góc trong một tam giác cùng bằng 180° , do đó $\widehat{KIA} = \widehat{KBM} = 90^\circ$.

Vậy $AP = CM$ và $AP \perp CM$.

b) Chứng minh tứ giác $DEGH$ là hình vuông.

Vì $ABMN$ và $BCQP$ là hình vuông, do đó E và H lần lượt là trung điểm của AM và CP .

EG là đường trung bình trong tam giác MAP , suy ra $EG \parallel AP$ và $EG = \frac{1}{2} AP$ (1).

Tương tự, $DH \parallel AP$, $DH = \frac{1}{2} AP$, $ED \parallel CM$, $ED = \frac{1}{2} CM$, $GH \parallel CM$ và $ED = \frac{1}{2} CM$.

Kết hợp kết quả ở câu a), suy ra $DEGH$ là hình vuông.

Bài 138. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm E tùy ý trên cạnh BC . Kẻ tia $Ax \perp AE$; tia Ax cắt đường thẳng CD tại G . Gọi H là đỉnh thứ tư của hình bình hành $EAGH$ và O là giao điểm của hai đường chéo.

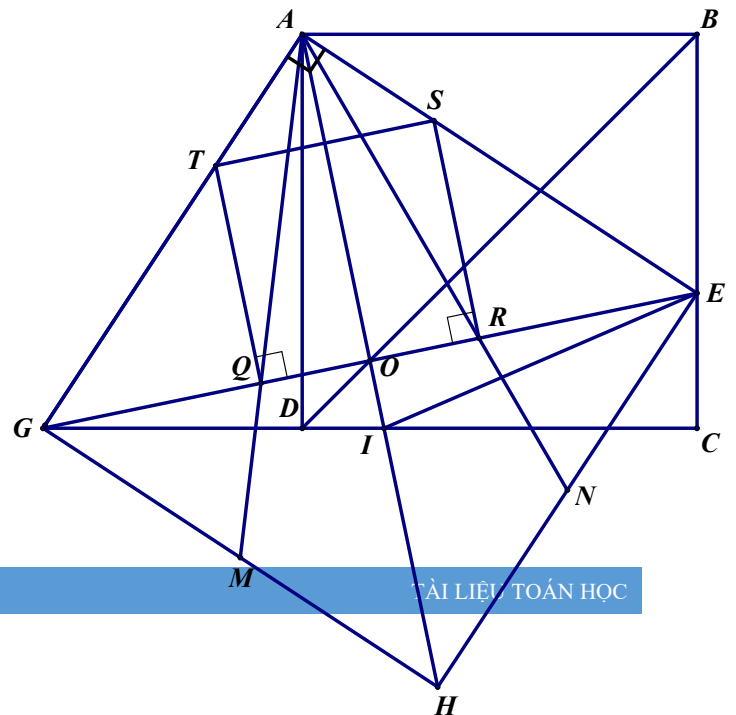
a) Chứng minh $\triangle AEG$ vuông cân.

b) Chứng minh D, O, B thẳng hàng.

c) M, N lần lượt là trung điểm của GH, EH, AM, AN cắt GE lần lượt tại Q, R . qua Q và R kẻ các đường vuông góc với GE , chúng cắt AG và AE lần lượt tại T và S . Chứng minh tứ giác $TSRQ$ là hình vuông.

d) AO cắt CD ở I . Chứng minh chu vi $\triangle EIC$ bằng $2AB$.

Lời giải:



a) Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{DAG}$ (cùng phụ với góc \widehat{DAE}).

Hai $\triangle BAE$ và $\triangle DAG$ có $\widehat{BAE} = \widehat{DAG}$; $BA = DA$; $\widehat{EBA} = \widehat{GDA} = 90^\circ$.

Do đó: $\triangle BAE = \triangle DAG$ (g-c-g) $\Rightarrow AE = AG$.

Vì $\widehat{EAG} = 90^\circ$ nên $\triangle EAG$ vuông cân tại A.

b) Tam giác BOE có $\widehat{BOE} + \widehat{OBE} + \widehat{OEB} = 180^\circ$.

$$\widehat{OBE} = \widehat{OEA} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BOE} + \widehat{AEB} = 90^\circ \quad (1)$$

Tam giác GOD có $\widehat{GOD} + \widehat{OGD} = 45^\circ$ (vì $\widehat{GDO} = 135^\circ$) $\Rightarrow \widehat{GOD} + \widehat{AGD} = 90^\circ \quad (2)$

Lại có $\widehat{AEB} = \widehat{AGD}$ (vì $\triangle BAE = \triangle DAG$), kết hợp (1) và (2) suy ra $\widehat{BOE} = \widehat{DOG}$.

Vì G, O, E thẳng hàng nên hai góc \widehat{BOE} , \widehat{DOG} đối đỉnh. Vậy B, O, D thẳng hàng.

c) Ta có Q, R lần lượt là trọng tâm hai tam giác AGH và AEH.

Do đó $QO = \frac{1}{3}GO = \frac{1}{3}EO = RO$. Từ đó dễ dàng suy ra $GQ = QR = RE \quad (3)$.

$\triangle GQT$ vuông cân tại Q nên $QT = GQ$; tương tự, $RS = RE \quad (4)$.

(3), (4) suy ra $QT = RS$. Mặt khác $QT \parallel RS$ (cùng vuông góc GE).

Như vậy tứ giác TSRQ có: $TQ = QR = RS$, $TQ \parallel RS$, $\widehat{Q} = 90^\circ$. Do đó TSRQ là hình vuông.

d) Vì O là trung điểm GE và $IO \perp GE$ nên tam giác IGE cân tại I $\Rightarrow IE = IG$.

Gọi l là chu vi tam giác EIC.

$$l = IE + IC + CE = IG + IC + CE = GC + CE = GD + DC + CE.$$

Mặt khác, do $\triangle BAE = \triangle DAG$ nên $GD = EB$. Từ đó:

$$l = BE + CE + DC = BC + DC = 2AB.$$

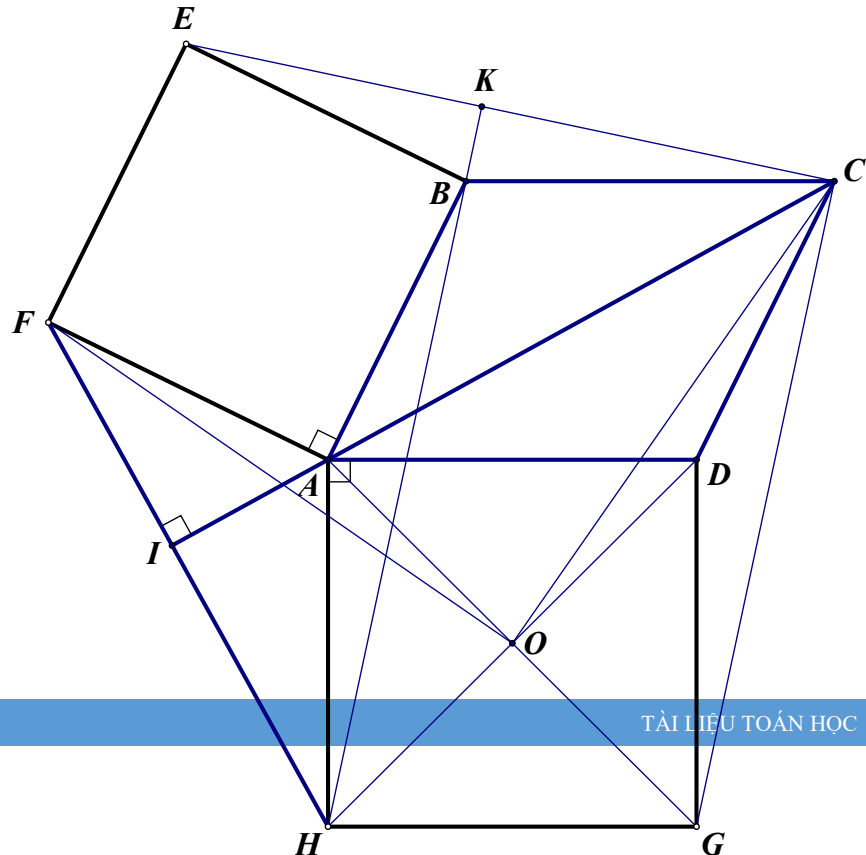
Bài 139. Cho hình bình hành ABCD. Ở phía ngoài hình bình hành, vẽ các hình vuông ABEF và ADGH.

a) Chứng minh $AC = FH$ và $AC \perp FH$.

b) Gọi O là tâm đối xứng của hình vuông ADGH. Chứng minh $OF \perp OC$ và $BH \perp CE$.

c) Chứng minh $\triangle ECG$ vuông cân.

Lời giải:



a) Hai tam giác ADC và HAF có:

$AD = HA$; $\widehat{ADC} = \widehat{HAF}$ (cùng bù với góc \widehat{BAD}); $DC = AF$ (cùng bằng AB).

Do đó: $\triangle ADC = \triangle HAF$, suy ra $AC = HF$ và $\widehat{DAC} = \widehat{AHF}$ (1).

Gọi I là giao điểm của AC và HF. Ta có:

$$\widehat{DAC} + \widehat{HAI} + \widehat{HAD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DAC} + \widehat{HAI} = 90^\circ \quad (2).$$

$$(1), (2) \Rightarrow \widehat{AHF} + \widehat{HAI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HIA} = 90^\circ. \text{ Vậy } AC \perp HF.$$

$$b) \widehat{OAF} = \widehat{OAH} + \widehat{HAF} = 45^\circ + \widehat{HAF} = 45^\circ + \widehat{CAD} = \widehat{ODC}.$$

Hai tam giác OAF và ODC có:

$$OA = OD; \widehat{OAF} = \widehat{ODC}; AF = DC \text{ (cùng bằng AB)}.$$

$$\text{Suy ra } \triangle OAF = \triangle ODC \Rightarrow \widehat{AOF} = \widehat{DOC}.$$

$$\widehat{COF} = \widehat{COA} + \widehat{AOF} = \widehat{COA} + \widehat{DOC} = \widehat{DOA} = 90^\circ \Rightarrow FO \perp OC.$$

$$\widehat{BAH} = \widehat{BAD} + 90^\circ; \widehat{EBC} = 360^\circ - (90^\circ + \widehat{ABC}) = 270^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ + \widehat{BAD}$$

Suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{EBC}$. Từ đó dễ dàng chứng minh được $\triangle BAH = \triangle EBC$.

Gọi K là giao điểm của BH và CE.

$$\triangle BAH = \triangle EBC \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{BEK}.$$

$$\text{Lại có } \widehat{ABH} + \widehat{EBK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEK} + \widehat{EBK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EKB} = 90^\circ.$$

Vậy $OF \perp OC$ và $BH \perp CE$.

c) Dễ thấy tứ giác BCGH là hình bình hành, do đó $CG \parallel BH$ và $CG = BH$.

Theo chứng minh trên thì $BH \perp CE$ và $BH = CE$ (vì $\triangle BAH = \triangle EBC$).

Từ đó suy ra $CG = CE$ và $CG \perp CE$, hay $\triangle ECG$ vuông cân tại C.

Bài 140. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh BC. Từ M, vẽ một đường thẳng cắt cạnh CD tại K sao cho: $\widehat{AMB} = \widehat{AMK}$. Chứng minh $\widehat{KAM} = 45^\circ$.

Lời giải:

MA là phân giác góc BMK nên MA là trục đối xứng của hai đường thẳng MK và MB.

Gọi I là điểm đối xứng của K qua MA, suy ra I thuộc đường thẳng BC.

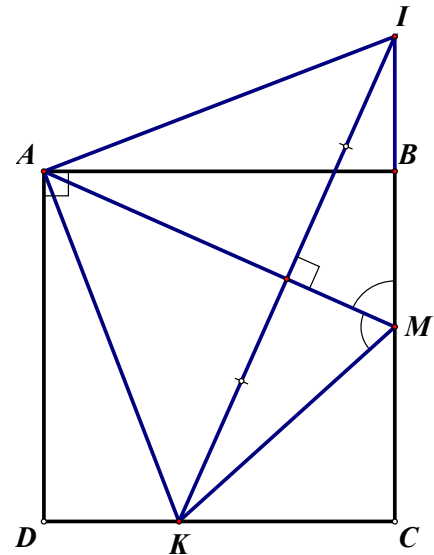
Ta có $AI = AK$, $AB = AD$.

Hai tam giác vuông ABI và ADK có hai cạnh bằng nhau nên $\triangle ABI = \triangle ADK$.

Từ đó ta có $\widehat{IAB} = \widehat{KAD}$.

$$\widehat{IAK} = \widehat{IAB} + \widehat{BAK} = \widehat{KAD} + \widehat{BAK} = 90^\circ. \text{ Vậy ta có:}$$

$$\widehat{MAK} = \frac{1}{2} \widehat{IAK} = 45^\circ.$$



Bài 141. a) Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M, trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao

cho $DN = BM$. Vẽ tia AI sao cho $\widehat{NAI} = 45^\circ$ ($I \in NM$). Gọi O là trung điểm của AC. Chứng minh B, O, D, I thẳng hàng.

c) Cho hình vuông ABCD. Gọi N là trung điểm của AD và M thuộc cạnh AB sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$. Chứng minh MC là phân giác của góc \widehat{BMN} .

Lời giải:

a) Theo giả thiết:

$$2 = AM + AN + MN = (AB - BM) + (AD - DN) + MN = 2 - (BM + DN) + MN$$

$$\text{Suy ra } MN = BM + DN.$$

Trên tia đối của tia DN lấy điểm I thỏa mãn $DI = BM$.

Hai tam giác vuông CBM và CDI bằng nhau vì có:

$$CB = CD, \widehat{CBM} = \widehat{CDI} = 90^\circ; BM = DI.$$

$$\text{Suy ra } CM = CI \text{ và } \widehat{BCM} = \widehat{DCI}.$$

$$\widehat{MCI} = \widehat{MCD} + \widehat{DCI} = \widehat{MCD} + \widehat{BCM} = 90^\circ.$$

$$\text{Theo trên ta có } MN = BM + DN = ID + DN = IN.$$

Xét hai tam giác CMN và CIN có: $CM = CI$; $MN = IN$; CN chung.

$$\text{Suy ra } \triangle CMN = \triangle CIN \Rightarrow \widehat{MCN} = \widehat{ICN}.$$

$$\text{Mà } \widehat{MCN} + \widehat{ICN} = \widehat{MCI} = 90^\circ. \text{ Vậy } \widehat{MCN} = 45^\circ.$$

b) Giả sử $\widehat{MCN} = 45^\circ$. Chứng minh chu vi tam giác AMN bằng 2.

Đường thẳng qua C, vuông góc với CM cắt AD tại I. Vì

$$\widehat{MCN} = 45^\circ \text{ nên } \widehat{ICN} = \widehat{MCN} = 45^\circ.$$

$$\widehat{BCM} = \widehat{DIC} \text{ (cùng phụ với } \widehat{MCD})$$

$$BC = DC.$$

Do đó hai tam giác vuông BCM và DCI bằng nhau. Suy ra $CM = CI$.

Từ đó ta chứng minh được $\triangle MCN = \triangle ICN$ (c-g-c).

$$\Rightarrow MN = NI.$$

Từ đây, tương tự như trên ta chứng minh được tam giác AMN có chu vi bằng 2

c) Đường thẳng qua C, vuông góc với CN, cắt AM tại K.

$$\widehat{BCK} = \widehat{DCN} \text{ (vì cùng phụ với góc } \widehat{NCB})$$

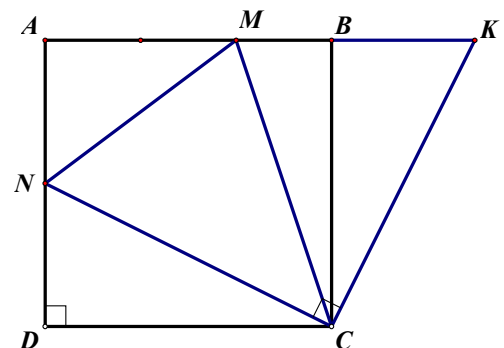
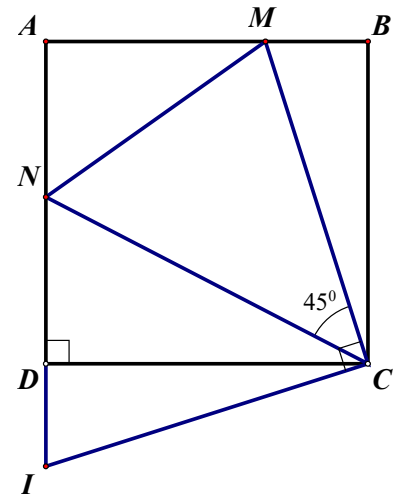
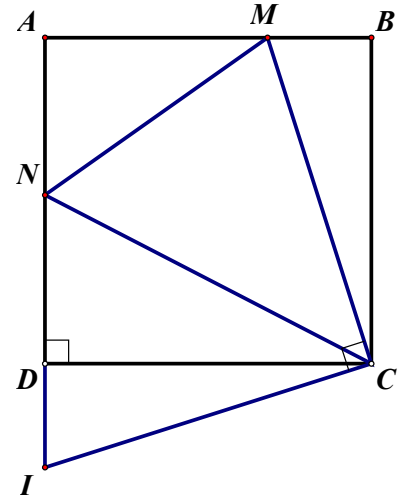
Do đó dễ dàng chứng minh được hai tam giác vuông BCK và DCN bằng nhau (g-c-g).

$$\text{Suy ra } CK = CN \text{ và } BK = DN.$$

$$MK = MB + BK$$

$$= MB + DN = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{3}AB = \frac{5}{6}AB.$$

Theo định lý Pitago:



$$MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{\frac{4AB^2}{9} + \frac{AB^2}{4}} = \frac{5AB}{6}. \text{ Ta được } MK = MN.$$

Từ đó suy ra $\widehat{CKM} = \widehat{CNM}$ (c-c-c).

Vậy $\widehat{CMK} = \widehat{CMN}$, hay MC là phân giác góc \widehat{BMN} .

Bài 143. Ở phía trong hình vuông ABCD, vẽ $\triangle ADE$ cân ở E có góc đáy bằng 15° .

a) Chứng minh $\triangle BEC$ đều.

b) Ở phía ngoài hình vuông ABCD, vẽ $\triangle ADF$ đều. Chứng minh A, E, F thẳng hàng.

Lời giải:

a) $\widehat{BAE} = 90^\circ - \widehat{DAE} = 75^\circ$;

Tương tự, $\widehat{CDE} = 75^\circ$.

Dễ thấy $\triangle ABE = \triangle DCE$ (c-g-c)

Suy ra $EB = EC$.

Bên trong tam giác ABE, dựng tam giác đều AEK.

$$\widehat{BAK} = \widehat{BAE} - \widehat{KAE} = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ.$$

Do đó $\triangle AKB = \triangle AED$ (c-g-c)

$\triangle ABK$ cân tại K, có góc đáy bằng 15° , suy ra:

$$\widehat{AKB} = 150^\circ. \widehat{EKB} = 360^\circ - (60^\circ + 150^\circ) = 150^\circ.$$

$\triangle ABK$ và $\triangle EBK$ có $AK = EK$; $\widehat{AKB} = \widehat{EKB} = 150^\circ$,
BK chung.

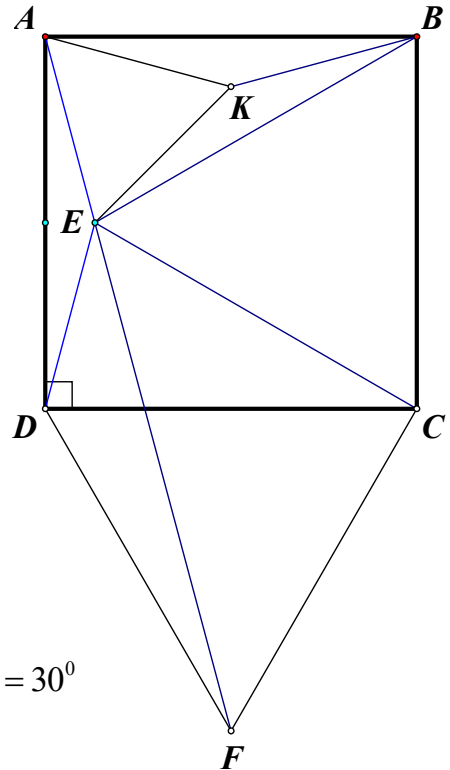
Suy ra $\triangle ABK = \triangle EBK$ (c-g-c) $\Rightarrow EB = AB$.

Vậy ta có $EB = EC = BC$, nên $\triangle BCE$ đều.

b) Tam giác ADF cân tại D nên $\widehat{AFD} = 15^\circ$.

$$\widehat{DEF} = 180^\circ - (\widehat{EDF} + \widehat{EFD}) = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ + 15^\circ) = 30^\circ$$

$\widehat{DEF} + \widehat{DEA} = 30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$. Vậy A, E, F thẳng hàng.



Bài 144. Cho hình vuông ABCD, lấy điểm M trên BD. Vẽ $ME \perp AB$ tại E và $MF \perp AD$ tại F.

Chứng minh rằng:

a) $CF = DE$; $CF \perp DE$

b) $CM = EF$; $CM \perp EF$

c) $BF = CE$; $BF \perp CE$

d) CM, BF, DE đồng quy

Lời giải

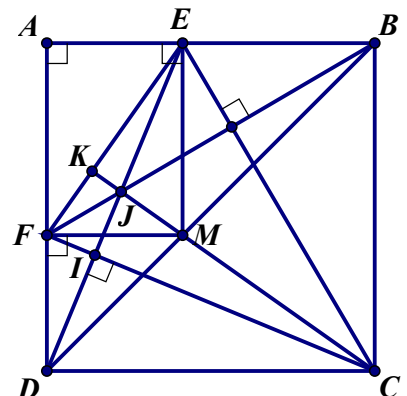
a) Chứng minh $CF = DE$; $CF \perp DE$

Ta có AEMF là hình chữ nhật (vì $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$)

$\Rightarrow AE = MF$.

Mặt khác $\widehat{FMD} = \widehat{ABD} = 45^\circ$ (so le trong), suy ra $MF = DF$.

Từ đó ta suy ra hai tam giác AED và DFC bằng nhau (c-g-c).



Do đó $CF = DE$ và $\widehat{ADE} = \widehat{DCF}$.

Gọi I là giao điểm của CF và DE , ta có:

$$\begin{cases} \widehat{IFD} + \widehat{DCF} = 90^\circ \\ \widehat{ADE} = \widehat{DCF} \end{cases} \Rightarrow \widehat{IFD} + \widehat{ADE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FID} = 90^\circ. \text{ Vậy } CF \perp DE.$$

b) Chứng minh $CM = EF$; $CM \perp EF$

$$\begin{cases} MF = FD \\ \widehat{MFC} = \widehat{FDE} \text{ (vì } \widehat{MFC} + \widehat{IFD} = \widehat{FDE} + \widehat{IFD} = 90^\circ) \\ FC = DE \end{cases} \Rightarrow \Delta MFC = \Delta FDE \Rightarrow CM = EF.$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} \widehat{FCK} = \widehat{DEK} \\ \widehat{DEK} + \widehat{EFC} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{FCK} + \widehat{DEK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EKJ} = 90^\circ.$$

Vậy $CM = EF$; $CM \perp EF$.

c) $BF = CE$; $BF \perp CE$

Ta dễ dàng chứng minh $\Delta ABF = \Delta BCE$, suy ra $BF = CE$ và

$\widehat{ABF} + \widehat{BEC} = \widehat{ECF} + \widehat{BEC} = 90^\circ$, suy ra $BF \perp CE$.

d) Theo kết quả ba câu trên thì CM , FB , ED là ba đường cao trong tam giác CEF . Theo tính chất ba đường cao trong một tam giác đồng quy, ta suy ra CM , BF , DE đồng quy.

Bài 145. Cho hình vuông $ABCD$, lấy các điểm E , F , K lần lượt trên cạnh AB , AD , DC sao cho: $AE = AF = DK$.

a) Chứng minh $AK \perp BF$ tại giao điểm H .

b) Chứng minh $\widehat{EHC} = 90^\circ$.

c) Cho $AB = 3$, $AE = 2$. Gọi I là trung điểm FK , O là trung điểm EC . Chứng minh chu vi

$$\Delta HIO \text{ bằng } \frac{1}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13}).$$

Lời giải:

a) Chứng minh $AK \perp BF$ tại giao điểm H .

Ta có $\Delta ABF = \Delta DAK$ (c-g-c)

Suy ra $\widehat{ABF} = \widehat{DAK}$ (1).

Mặt khác $\widehat{DAK} + \widehat{BAH} = 90^\circ$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \widehat{ABF} + \widehat{BAH} = 90^\circ$.

Vậy $AK \perp BF$.

b) Chứng minh $\widehat{EHC} = 90^\circ$.

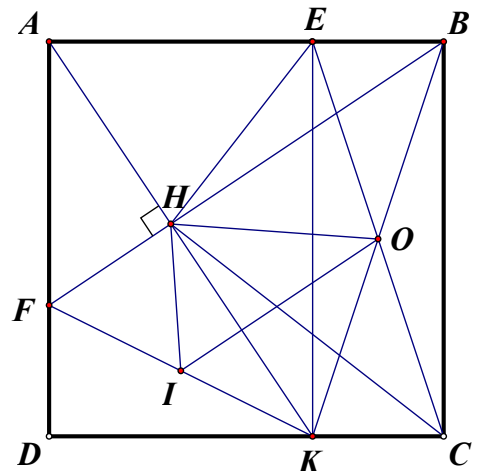
Dễ thấy $BEKC$ là hình chữ nhật, O là trung điểm của EC cũng là trung điểm của BK .

ΔBHK vuông tại H có HO là đường trung tuyến nên $HO = OB = OK$.

Suy ra $HO = OC = OE$. Mà OH là trung tuyến trong

ΔHEC nên ta được ΔHEC vuông tại H . Vậy $\widehat{EHC} = 90^\circ$.

c) Cho $AB = 3$, $AE = 2$.



Theo trên ta có $HO = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}\sqrt{BE^2 + EK^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+9} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$.

HI là đường trung tuyến trong tam giác vuông HFK

Do đó: $HI = \frac{1}{2}FK = \frac{1}{2}\sqrt{FD^2 + DK^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+4} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Trong $\triangle FBK$, OI là đường trung bình, do đó:

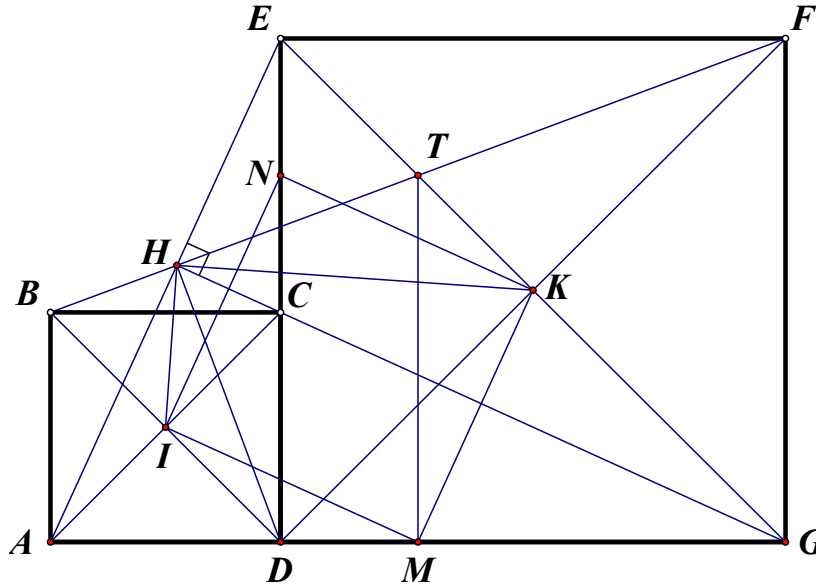
$OI = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9+4} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Vậy chu vi tam giác OIH bằng: $OI + OH + HI = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13})$.

Bài 146. Cho đoạn thẳng AG và điểm D nằm giữa A và G. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AG vẽ các hình vuông ABCD, DEFG. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AG, EC. Gọi I, K lần lượt là tâm đối xứng của các hình vuông ABCD, DEFG.

- Chứng minh $AE = CG$ và $AE \perp CG$ tại H.
- Chứng minh IMKN là hình vuông.
- Chứng minh B, H, F thẳng hàng.
- Gọi T là giao điểm của BF và EG. Chứng minh rằng độ dài TM không đổi khi D di động trên đoạn thẳng AG cố định.

Lời giải:



a) Ta có: $AD = CD$, $DE = DG$, suy ra: $\triangle ADE = \triangle CDG$ (c-g-c) $\Rightarrow AE = CG$.

$\widehat{AED} = \widehat{CGD}$, $\widehat{ECH} = \widehat{GCD} \Rightarrow \widehat{AED} + \widehat{ECH} = \widehat{CGD} + \widehat{GCD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EHG} = 90^\circ$.

Vậy $AE = CG$ và $AE \perp CG$.

b) Chứng minh IMKN là hình vuông.

IN là đường trung bình trong tam giác ADE, $IN = \frac{1}{2}AE$ và $IN \parallel AE$.

KM là đường trung bình trong tam giác AGE, suy ra $KM = \frac{1}{2}AE$ và $KM \parallel AE$.

Từ đó suy ra $IN = KM = \frac{1}{2}AE$ và $IN \parallel KM \parallel AE$.

Tương tự, IM, KN lần lượt là đường trung bình trong hai tam giác ACG và ECG .

Nên $IM = KN = \frac{1}{2}CG$ và $IM \parallel KN \parallel CG$.

Lại có $AE = CG$ và $AE \perp CG$. Từ đó ta được $IMKN$ là hình vuông.

c) Chứng minh B, H, F thẳng hàng.

Tam giác HAC vuông tại H , có HI là trung tuyến nên $HI = IA = IC$

Suy ra $HI = IB = ID$. Mà HI là trung tuyến của $\triangle HBD$, do đó $\triangle HBD$ vuông tại H .

Tương tự, $HK = KE = KG = KD = KF$, suy ra $\triangle HDF$ vuông tại H .

Như vậy ta có $BH \perp DH$ và $FH \perp DH$. Vậy B, H, F thẳng hàng.

d) $\widehat{ADB} = \widehat{AGE} = 45^\circ \Rightarrow BD \parallel GE$.

K là trung điểm của DF nên KT là đường trung bình trong tam giác BDF , hay T là trung điểm của BF .

Tứ giác $ABFG$ là hình thang hai đáy AB và FG , có TM là đường trung bình. Như vậy ta có:

$$TM = \frac{AB + GF}{2} = \frac{AD + DG}{2} = \frac{AG}{2} \text{ (không đổi).}$$

Bài 147. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AB, BC, DE . Vẽ $BT \perp EF$ tại T .

a) Chứng minh $\triangle AGT$ cân.

b) Chứng minh $CE \perp GT$.

c) Gọi M là giao điểm của CE và DF . Chứng minh $AM = AB$.

Lời giải:

a) $\triangle BEF$ cân tại B nên BT là phân giác góc \widehat{ABC} , do vậy BT đi qua D .

$\triangle TED$ vuông tại T có TG là trung tuyến nên $TG = \frac{1}{2}DE$.

$\triangle AED$ vuông tại A có AG là trung tuyến nên $AG = \frac{1}{2}DE$.

Vậy $AG = TG$, hay $\triangle AGT$ cân tại G .

b) Gọi K là trung điểm của CD , ta có $AEKD$ là hình chữ nhật nên G là trung điểm của AK .

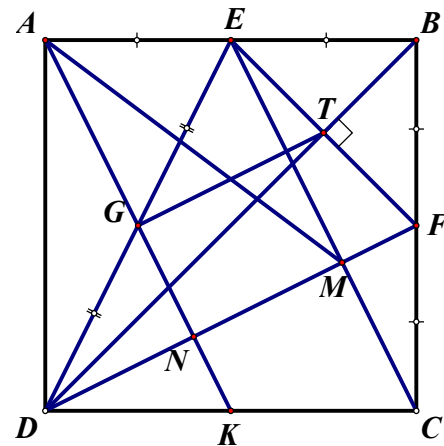
Dễ thấy tứ giác $AECK$ là hình bình hành. Ta có $CE \parallel AG$ (1).

$\triangle ADG$ cân tại $G \Rightarrow \widehat{ADG} = \widehat{DAG} = \frac{1}{2}\widehat{AGE}$. Tương tự, $\widehat{TDG} = \widehat{DTG} = \frac{1}{2}\widehat{TGE}$

$$\Rightarrow \widehat{AGT} = \widehat{AGE} + \widehat{TGE} = 2(\widehat{ADG} + \widehat{TDG}) = 2\widehat{ADB} = 90^\circ$$

$\Rightarrow AG \perp GT$ (2).

(1) và (2) suy ra $CE \perp GT$.



c) Gọi N là giao điểm của AK và DM, ta có $AK \parallel CE$ và K là trung điểm của DC nên N là trung điểm của DM.

Dễ thấy $\triangle BCE = \triangle CDF$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{CDF}$.

$\widehat{MCD} + \widehat{MDC} = \widehat{MCD} + \widehat{MCB} = 90^\circ$. Từ đó suy ra $CE \perp DF$.

Theo trên, $AK \parallel CE$ hay $AN \parallel CE$, suy ra $AN \perp DF$.

Trong tam giác ADM, N là trung điểm DM và $AN \perp DM$ nên $\triangle ADM$ cân tại A.

Vậy ta có $AM = AD = AB$.

Bài 148. Cho hình vuông ABCD có giao điểm của 2 đường chéo là O. Đường thẳng qua O cắt cạnh AD tại P, BC tại Q.

a) Chứng minh rằng $AP = CQ$

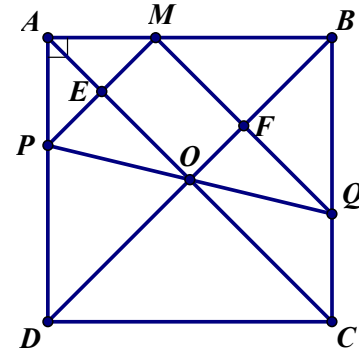
b) Vẽ $Px \perp AC$, $Qy \perp BD$; Px cắt Qy tại M, Px cắt OA tại E, Qy cắt OB tại F. Hỏi tứ giác OFME là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh rằng M nằm trên cạnh AB.

Lời giải:

a) Chứng minh $AP = CQ$. Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{OAP} = \widehat{OCQ} = 45^\circ \\ OA = OC \\ \widehat{AOP} = \widehat{COQ} \end{cases} \Rightarrow \triangle OAP = \triangle OCQ \Rightarrow AP = CQ.$$



b) Theo chứng minh trên, O là trung điểm của PQ. Vì $OF \parallel PM$ (cùng vuông góc với AC) suy ra OF là đường trung bình trong tam giác PQM, do đó F là trung điểm của MQ.

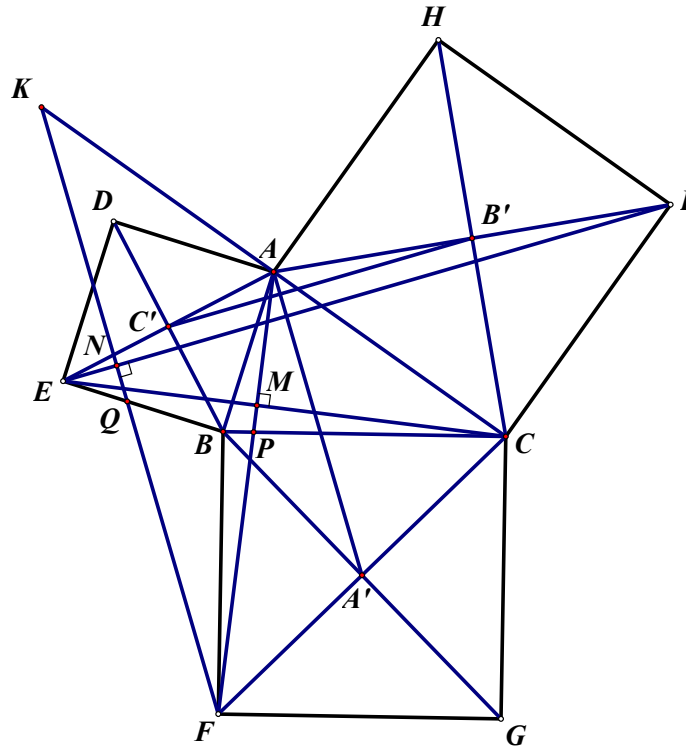
Vậy M và Q đối xứng nhau qua đường thẳng BD. Mặt khác, cạnh AB và cạnh AC đối xứng nhau qua đường thẳng BD và Q thuộc cạnh AC, suy ra M thuộc cạnh AB.

Bài 149.** Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Phía ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông ABED, BCGF, ACHI có tâm lần lượt là C' , A' , B' . Chứng minh:

a) AA' , BB' , CC' là 3 cạnh của một tam giác.

b) Tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

c) Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là trung điểm của $B'C'$, AC, AA' , AB. Chứng minh rằng tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.



Giải:

a) Chứng minh AA' , BB' , CC' là 3 cạnh của một tam giác.

* Ta chứng minh: $AF = EC$ và $AF \perp EC$, $BH = CD$ và $BH \perp CD$.

$$\widehat{ABH} = \widehat{EBC} = 90^\circ + \widehat{ABC} \Rightarrow \triangle ABF = \triangle EBC \Rightarrow AF = CE.$$

AF cắt CE tại M , cắt BC tại P . $\widehat{MCP} + \widehat{MPC} = \widehat{PAF} + \widehat{BPF} = 90^\circ \Rightarrow AF \perp CE$.

Chứng minh tương tự, ta được $AF = EC$ và $AF \perp EC$, $BH = CD$ và $BH \perp CD$.

* Gọi K là điểm đối xứng của C qua A .

Ta có: $\widehat{KAF} + \widehat{FAC} = 180^\circ$. Vì $AF \perp EC$ nên $\widehat{FAC} + \widehat{ECA} = 90^\circ$. Suy ra:

$$\widehat{KAF} = 180^\circ - (90^\circ - \widehat{ECA}) = 90^\circ + \widehat{ECA} = \widehat{ECI}.$$

Từ đó suy ra hai tam giác KAF và ICE bằng

nhau (c-g-c) $\Rightarrow KF = IE$.

Mặt khác AA' và $B'C'$ lần lượt là đường trung bình trong hai tam giác KFC và EAI .

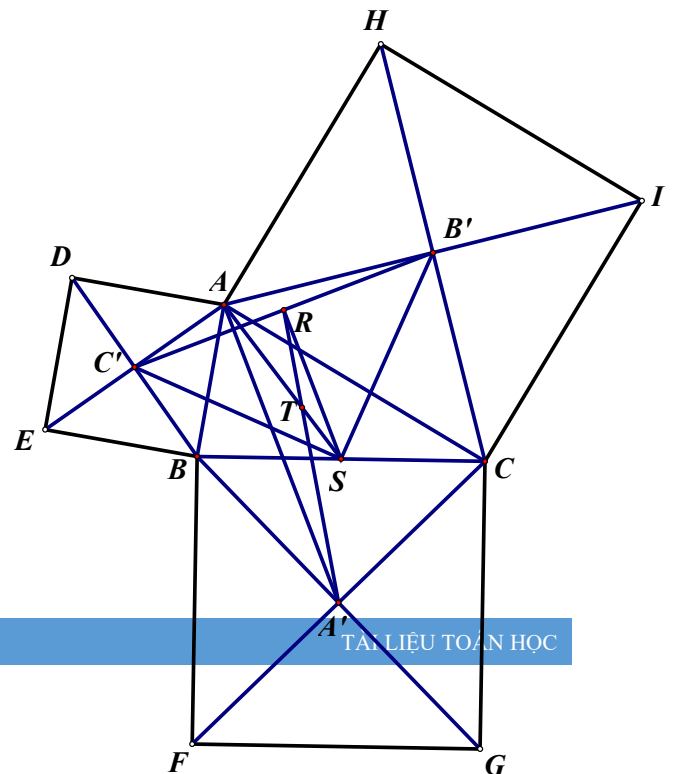
$$AA' = \frac{1}{2}KF, B'C' = \frac{1}{2}EI, KF = IE \Rightarrow AA' =$$

$B'C'$.

Tương tự ta có $BB' = A'C'$, $CC' = A'B'$. Vậy AA' , BB' , CC' là độ dài ba cạnh của tam giác $A'B'C'$.

b) Chứng minh ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

* Chứng minh $KF \perp IE$. Gọi N , Q lần lượt là giao điểm của KF với IE và CE .



$\widehat{NEC} + \widehat{NQE} = \widehat{MFQ} + \widehat{MQF} = 90^\circ$. Vậy $KF \perp IE$.

* Gọi S là trung điểm của BC $\Rightarrow C'S = \frac{1}{2}DC$, $C'S \parallel DC$ và $B'S = \frac{1}{2}BH$, $B'S \parallel BH$. Theo trên ta có: $DC = BH$ và $DC \perp BH \Rightarrow \Delta C'SB'$ vuông cân tại S.

Gọi R là trung điểm $C'B' \Rightarrow SR \perp C'B'$ và $SR = \frac{1}{2}C'B'$.

Theo chứng minh trên, $KF \perp EI$ suy ra $AA' \perp C'B' \Rightarrow SR \parallel AA'$, $SR = \frac{1}{2}AA'$.

Gọi T là giao điểm của AS và A'R. U, V lần lượt là trung điểm của AT và A'T. Để thấy SRUV là hình bình hành, suy ra $UT = ST$, $VT = RT$. Như vậy: $AT = 2ST$, $A'T = 2RT$.

Vậy T là trọng tâm của hai tam giác ABC và A'B'C'.

c) Chứng minh $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

Ta có $O_2O_3 \parallel CA'$, $O_2O_3 = \frac{1}{2}CA'$ và $O_3O_4 \parallel BA'$, $O_3O_4 = \frac{1}{2}BA'$.

Vì $CA' = BA'$ và $CA' \perp BA' \Rightarrow O_2O_3 = O_3O_4$ và $O_2O_3 \perp O_3O_4$ (*).

Gọi B_0 là điểm đối xứng của B qua O_2 . Ta có $AB'CB_0$ là hình vuông.

Vì $AA' \perp B'C'$ nên $\widehat{C'B'C} = \widehat{A'AB'}$ (hai góc cùng phụ với góc $\widehat{AB'C'}$)

$$\widehat{C'B'B_0} = \widehat{C'B'C} - 45^\circ$$

$$= \widehat{A'A'B'} - 45^\circ = \widehat{A'AC}.$$

Do vậy $\Delta C'B'B_0 = \Delta A'AC$ (c-g-c) $\Rightarrow C'B_0 =$

$$A'C = BA' \quad (1) \text{ và } \widehat{C'B_0B'} = \widehat{A'CA}.$$

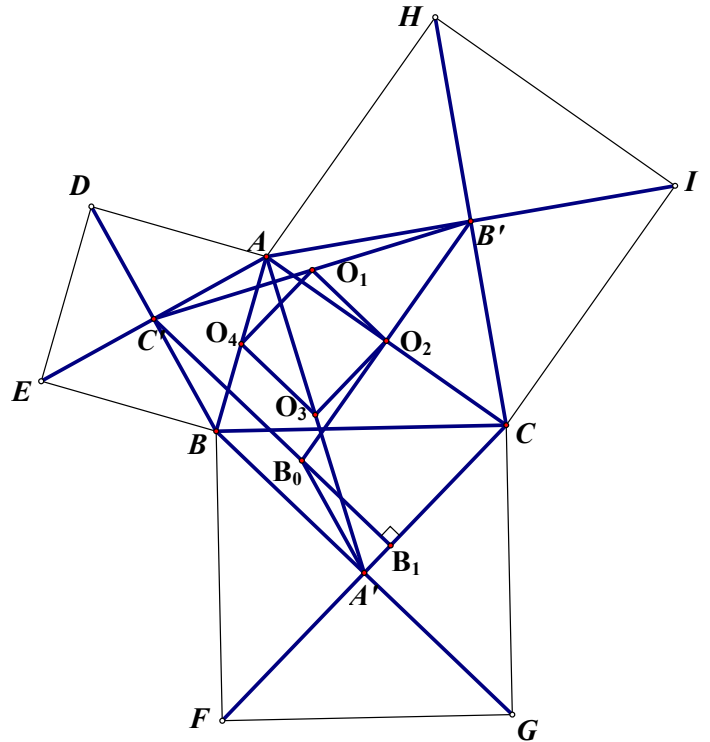
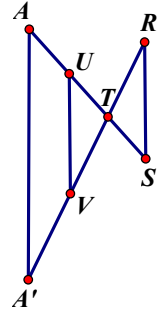
Gọi B_1 là giao điểm của $C'B_0$ và CA'

$$\Rightarrow \widehat{B'B_0B_1} + \widehat{A'CA} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B_0B_1C} = 90^\circ$$

$C'B_0$ vuông góc CA' , suy ra $C'B_0 \parallel BA'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $C'BA'B_0$ là hình bình hành, suy ra $C'B_0 = BA'$ và $C'B_0 \parallel BA'$. Từ đó dễ dàng chứng minh được $O_1O_2 = O_3O_4$ và $O_1O_2 \parallel O_3O_4$ (**).

Từ (*) và (**) ta được $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

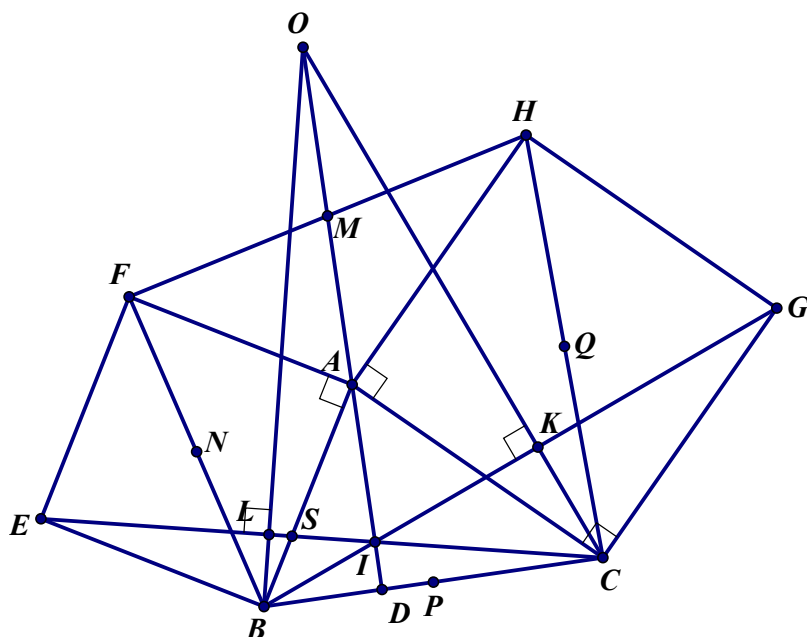


Bài 150.* Cho tam giác ABC. Phía ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông ABEF, ACGH, $AD \perp BC$ tại D.

a) Chứng minh rằng AD, BG, CE đồng quy.

b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của FH, BF, BC, CH. Chứng minh rằng MNPQ là hình vuông.

Lời giải:



a) Trên tia đối của tia AD lấy điểm O sao cho $AO = BC$, OC cắt BG tại K, cắt CE tại L. Ta chứng minh $CE \perp OB$ và $BG \perp OC$.

$\widehat{ABC} = \widehat{OAF}$ (cùng phụ với góc \widehat{BAD}) $\Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{BAO}$.

Từ đó suy ra $\triangle EBC = \triangle BAO$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{ABO}$.

Gọi S là giao điểm của EC và AB, ta có $\widehat{ABO} + \widehat{ESB} = \widehat{BEC} + \widehat{ESB} = 90^\circ$.

Vậy $CE \perp OB$.

Chứng minh tương tự, $BG \perp OC$. Như vậy CE, BG và OD là ba đường cao trong tam giác OBC. Do đó CE, BG và AC đồng quy.

b) Chứng minh tương tự bài 87, ta được $FC = BH$ và $FC \perp BH$ (1).

Ta có MQ và NP lần lượt là đường trung bình trong tam giác FHC và FBC, do đó:

$$\begin{cases} MQ = \frac{1}{2}FC, MQ \parallel FC & (2) \\ NP = \frac{1}{2}FC, NP \parallel FC \end{cases} \Rightarrow MQ = NP$$

. Suy ra MNPQ là hình bình hành.

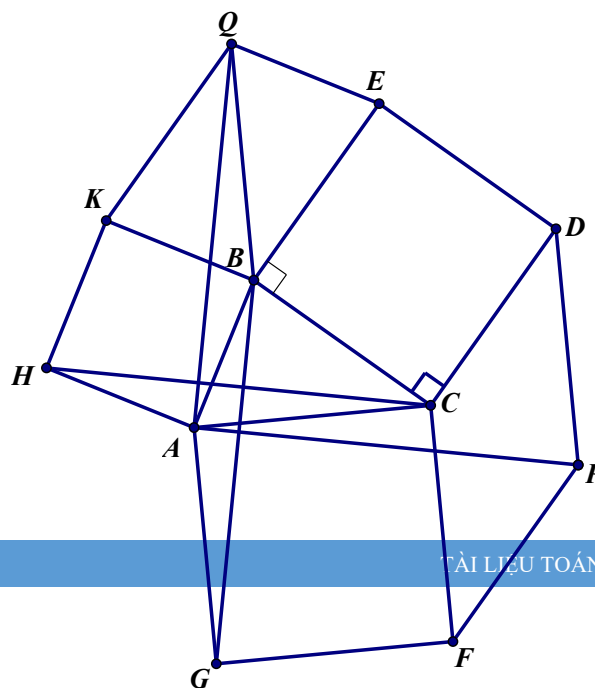
Lại có $PQ \parallel BH$ và $PQ = \frac{1}{2}BH$. Kết hợp

với (1) và (2), ta được $PQ = MQ$ và $PQ \perp MQ$.

Vậy MNPQ là hình vuông.

Bài 151.* Cho tam giác ABC. Phía ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông BCDE, ACFG, ABKH rồi vẽ tiếp các hình bình hành BEQK, CDPF. Chứng minh rằng tam giác APQ vuông cân.

Lời giải:



Xét hai tam giác ABC và BQK

Ta có: $AB = BK$; $KQ = BE = AB$, $\widehat{BKQ} = \widehat{ABC}$ (cùng bằng $180^\circ - \widehat{KBE}$)

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle BKQ \Rightarrow BQ = AC = AG$ và $\widehat{KBQ} = \widehat{CAB} \Rightarrow \widehat{ABQ} = \widehat{BAG}$

Suy ra $BQ \parallel AG$ (hai góc so le trong bằng nhau). Vậy AQBG là hình bình hành.

Ta có $AQ = BG$ và $AQ \parallel BG$

Chứng minh tương tự, AHCP là hình bình hành, suy ra $AP = CH$ và $AP \parallel CH$.

Mặt khác, ta chứng minh được $\triangle ABG = \triangle AHC$, từ đó suy ra $BG = CH$ và $BG \perp CH$.

Do đó $AP = AQ$ và $AP \perp AQ$ suy ra tam giác APQ vuông cân tại A.

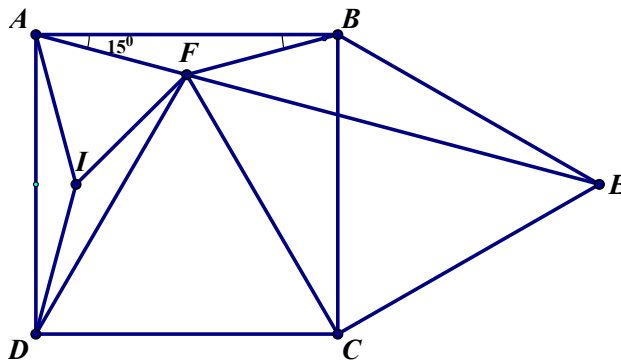
Bài 152.* Cho hình vuông ABCD, bên trong ta dựng tam giác FAB cân tại F có $\widehat{FAB} = 15^\circ$;

E là 1 điểm nằm ngoài hình vuông sao cho $\widehat{EBC} = \widehat{ECB} = 60^\circ$. Chứng minh rằng:

a) Tam giác FCD đều

b) A, F, E thẳng hàng.

Lời giải:



Dễ dàng nhận thấy hai tam giác DAF và CBF bằng nhau (c-g-c), suy ra $DF = CF$, hay tam giác CDF cân tại F.

Dựng tam giác đều AFI bên trong hình vuông ABCD.

$$\widehat{DAI} = 90^\circ - (15^\circ + 60^\circ) = 15^\circ = \widehat{FAB}.$$

Hai tam giác DAI và FAB có:

$$\begin{cases} DA = AB \\ \widehat{AID} = \widehat{FAB} = 15^\circ \Rightarrow \triangle DAI = \triangle BAF \Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{AFB} = 150^\circ \\ AI = AF \end{cases}$$

Do đó ta chứng minh được $\triangle DAI = \triangle FDI$ (c-g-c) $\Rightarrow FD = AD = CD$.

Vậy tam giác CDF là tam giác đều.

b) Chứng minh A, E, F thẳng hàng

Tam giác FCB cân tại C, do đó $\widehat{FCB} = 180^\circ - 2\widehat{FBC} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$.

Suy ra $\widehat{FCE} = \widehat{FCB} + \widehat{BCE} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.

Dễ dàng chứng minh được tam giác CEF vuông cân tại C.

$$\widehat{AFD} + \widehat{DFE} = \widehat{AFI} + \widehat{IFD} + \widehat{DFC} + \widehat{CFE} = 60^\circ + 15^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ.$$

Vậy A, F, E thẳng hàng.

CHƯƠNG II

ĐA GIÁC, DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

A. LÝ THUYẾT:

1. Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác.

2. Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và các góc ở đỉnh bằng nhau.

3. Cho đa giác n cạnh, số đường chéo xuất phát từ một đỉnh là $n - 3$ và số tam giác được tạo thành là $n - 2$; tổng số đo các góc của đa giác là $(n - 2)180^\circ$; tổng số đường chéo là $\frac{n(n-3)}{2}$

4. Diện tích đa giác có các tính chất sau:

- Hai tam giác bằng nhau thì diện tích của chúng bằng nhau.

- Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích những đa giác đó.

- Nếu chọn hình vuông có cạnh bằng 1cm, 1dm, 1m, ... làm đơn vị đo diện tích thì đơn vị diện tích tương ứng là 1cm^2 , 1dm^2 , 1m^2 ,

5) Diện tích của đa giác ABCDE thường được kí hiệu là S_{ABCDE}

6) Công thức tính diện tích hình chữ nhật (có 2 kích thước a , b) là:

$$S = a.b$$

7) Công thức tính diện tích hình vuông (có độ dài cạnh: a) là:

$$S = a^2$$

8) Công thức tính diện tích tam giác vuông (2 cạnh góc vuông: a , b) là:

$$S = \frac{1}{2} a.b$$

9) Công thức tính diện tích tam giác (cạnh đáy: a và chiều cao tương ứng: h) là:

$$S = \frac{1}{2} a.h$$

10) Công thức tính diện tích hình thang (2 đáy: a , b và chiều cao: h) là:

$$S = \frac{1}{2} (a + b).h$$

11) Công thức tính diện tích hình bình hành (có độ dài cạnh a và chiều cao tương ứng h_1 hay có độ dài cạnh b và chiều cao tương ứng h_2) là:

$$S = a.h_1 = b.h_2$$

12) Công thức tính diện tích hình thoi hay tứ giác có hai đường chéo vuông góc (có độ dài hai đường chéo d_1 , d_2) là:

$$S = \frac{1}{2} d_1.d_2$$

B. BÀI TẬP:

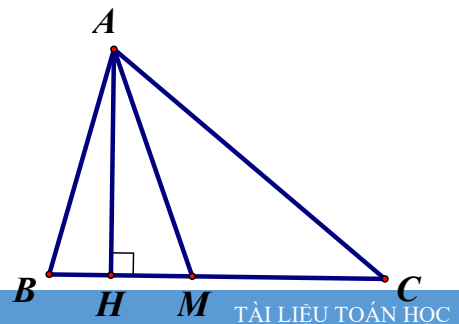
Bài 153. Cho tam giác ABC, trên cạnh BC lấy điểm M

bất kỳ. Chứng minh: $\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{BM}{CM}$

Lời giải:

Dựng $AH \perp BC$, H thuộc BC.

Ta có: $S_{ABM} = \frac{1}{2} AH.BM$, $S_{ACM} = \frac{1}{2} AH.CM$.



$$\text{Do đó } \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{\frac{1}{2}AH.BM}{\frac{1}{2}AH.CM} = \frac{BM}{CM}.$$

Bài 154. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM, trọng tâm G.
Chứng minh rằng $S_{ABC} = 6S_{BMG}$

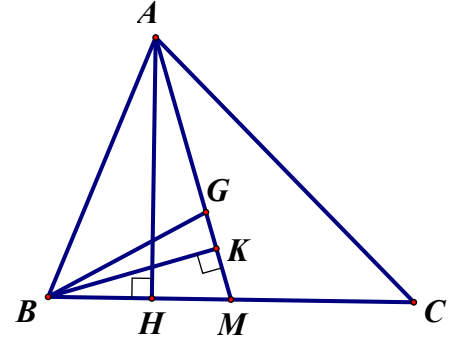
Lời giải:

Dựng $AH \perp BC$ (H thuộc BC) và $BK \perp AM$ (K thuộc AM).

Ta có:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABM}} = \frac{\frac{1}{2}AH.BC}{\frac{1}{2}AH.BM} = 2, \quad \frac{S_{ABM}}{S_{AGM}} = \frac{\frac{1}{2}BK.AM}{\frac{1}{2}BK.GM} = \frac{AM}{GM} = 3.$$

Từ đó suy ra $S_{ABC} = 6S_{BMG}$.



Bài 155. Cho tam giác ABC. Trên BC lấy điểm M bất kỳ. Trên đoạn thẳng AM lấy một điểm D bất kỳ. Chứng minh $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BM}{CM}$

Lời giải:

Dựng AH, DK vuông góc với BC (H, K thuộc BC).

Ta có:

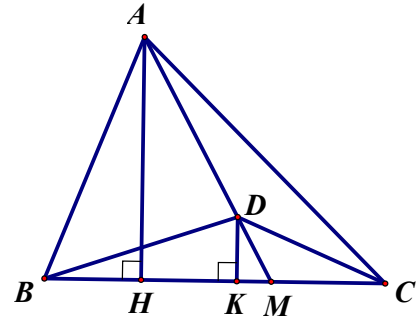
$$\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{\frac{1}{2}AH.BM}{\frac{1}{2}AH.CM} = \frac{BM}{CM}.$$

$$\frac{S_{DBM}}{S_{DCM}} = \frac{\frac{1}{2}DK.BM}{\frac{1}{2}DK.CM} = \frac{BM}{CM}.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{S_{DBM}}{S_{DCM}} = \frac{BM}{CM}.$$

Như vậy ta có: $\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{S_{DBM}}{S_{DCM}} = \frac{BM}{CM}$. Áp dụng tỷ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$, ta suy ra:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{S_{DBM}}{S_{DCM}} = \frac{S_{ABM} - S_{DBM}}{S_{ACM} - S_{DCM}} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BM}{CM}.$$



Bài 156. Cho hình bình hành ABCD. Lấy M tùy ý trên cạnh DC. Gọi O là giao điểm của AM và BD

a) Chứng minh rằng $S_{ABCD} = 2S_{MAB}$

b) Chứng minh rằng $S_{ABO} = S_{MOD} + S_{BMC}$

Lời giải:

a) Dựng DH , MK vuông góc với AB (H , K thuộc AB).
 Tứ giác $DMKH$ có $HK \parallel DM$, $DH \parallel MK$,
 $\hat{H} = 90^\circ$. Do đó $DMKH$ là hình chữ nhật, suy ra $DH = MK$.

$$S_{ABCD} = DH \cdot AB, \quad S_{MAB} = \frac{1}{2} MK \cdot AB.$$

Từ đó suy ra $S_{ABCD} = 2S_{MAB}$.

b) Vì M thuộc cạnh CD nên O thuộc cạnh AM và BD .

Theo câu a) ta có:

$$S_{MAB} = S_{BCD} \Rightarrow S_{ABO} + S_{BOM} = S_{BCM} + S_{BOM} + S_{MOD} \Rightarrow S_{ABO} = S_{BCM} + S_{MOD}.$$

Bài 157. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm M trên BC và điểm N trên AB sao cho $AM = CN$. Chứng minh rằng $S_{DAM} = S_{DCN}$, từ đó suy ra: đỉnh D của hình bình hành cách đều hai đường thẳng AM , CN .

Lời giải:

Dựng MH vuông góc AD tại H , NK vuông góc với CD tại K .

MH là đường cao của hình bình hành $ABCD$ ứng với cạnh AD , suy ra: $S_{ABCD} = MH \cdot AD$.

Lập luận tương tự, $S_{ABCD} = NK \cdot CD$.

Do đó $MH \cdot AD = NK \cdot CD$ (1)

$$\text{Mặt khác, } S_{DAM} = \frac{1}{2} MH \cdot AD, \quad S_{DCN} = \frac{1}{2} NK \cdot CD$$

$NK \cdot CD$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $S_{DAM} = S_{DCN}$.

Gọi h_1 , h_2 lần lượt là khoảng cách từ D đến AM , CN . Ta có:

$$S_{DAM} = \frac{1}{2} h_1 \cdot AM, \quad S_{DCN} = \frac{1}{2} h_2 \cdot CN. \text{ Vì } S_{DAM} = S_{DCN} \text{ và } AM = CN \text{ nên suy ra } h_1 = h_2.$$

Bài 158. Cho tam giác ABC , trên các cạnh AB , AC lần lượt lấy các điểm M , N . Chứng minh

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}$$

Lời giải:

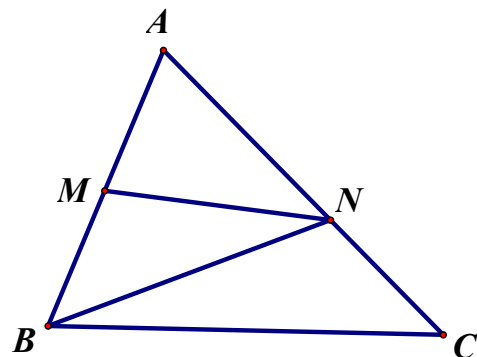
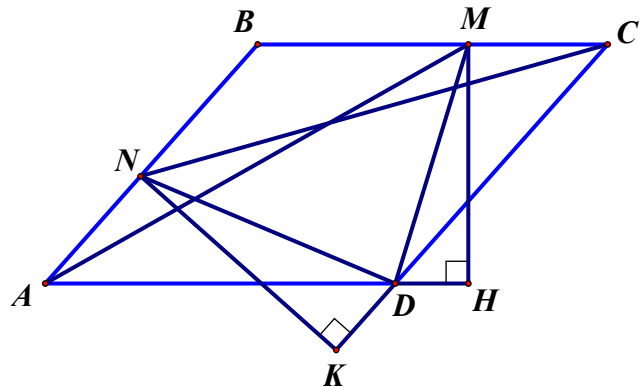
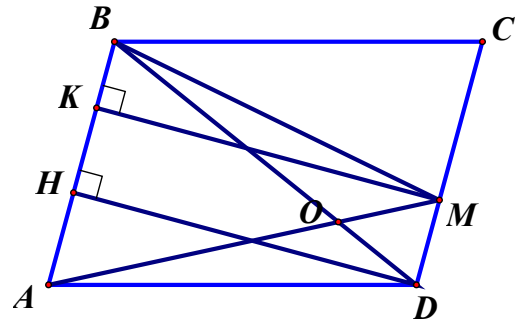
Chứng minh tương tự bài tập 105, ta được:

$$\frac{S_{NAM}}{S_{NAB}} = \frac{AM}{AB} \text{ và } \frac{S_{BAN}}{S_{BAC}} = \frac{AN}{AC}.$$

Suy ra:

$$\frac{S_{NAM}}{S_{NAB}} \cdot \frac{S_{BAN}}{S_{BAC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}$$

Bài 159. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M , N , P , Q lần lượt



là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng: $S_{AMN} = \frac{1}{4} S_{ABC}$; $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Lời giải:

* Chứng minh $S_{AMN} = \frac{1}{4} S_{ABC}$

M là trung điểm AB suy ra $S_{NAM} = \frac{1}{2} S_{NAB}$

N là trung điểm BC nên $S_{NAB} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

Từ đó suy ra $S_{AMN} = \frac{1}{4} S_{ABC}$.

* Chứng minh $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Ta có: $S_{MNPQ} = S_{ABCD} - (S_{AMQ} + S_{BMN} + S_{CNP} + S_{DPQ})$.

Theo bài tập 110, thì ta có:

$$\frac{S_{AMQ}}{S_{ABD}} = \frac{S_{BMN}}{S_{BAC}} = \frac{S_{CNP}}{S_{CBD}} = \frac{S_{DPQ}}{S_{DAC}} = \frac{1}{4}. \text{ Suy ra}$$

$$S_{MNPQ} = S_{ABCD} - \frac{1}{4} (S_{ABD} + S_{BAC} + S_{CBD} + S_{DAC}) = S_{ABCD} - \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

Bài 160. Cho tứ giác ABCD có giao điểm hai đường chéo là O. Chứng minh rằng nếu $S_{OAB} = S_{BOC} = S_{COD}$ thì ABCD là hình bình hành.

Giải:

Xét hai tam giác OAB và $\triangle OBC$.

Có chung đường cao hạ từ B. Gọi h_1 là độ dài của đường cao này.

$$\text{Khi đó } S_{OAB} = \frac{4}{5} h_1 \cdot AO \text{ và } S_{OBC} = \frac{4}{5} h_1 \cdot OC$$

$$\text{Mà } S_{OAB} = S_{OBC} \Leftrightarrow \frac{4}{5} h_1 \cdot AO = \frac{4}{5} h_1 \cdot OC \Leftrightarrow AO = OC$$

Suy ra O là trung điểm AC

Xét hai tam giác COD và $\triangle COB$

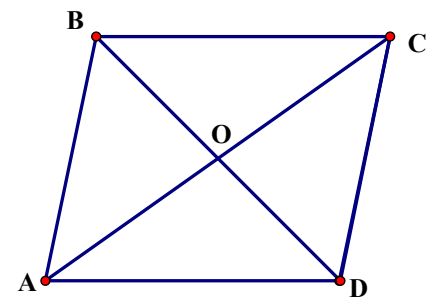
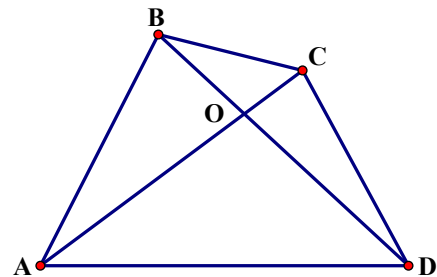
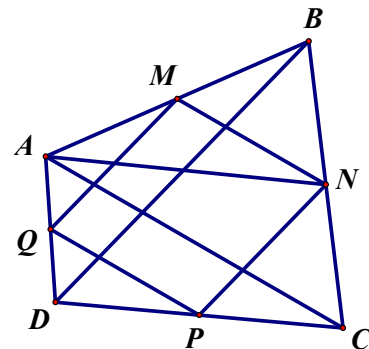
Có chung đường cao hạ từ C. Gọi h_2 là độ dài của đường cao này.

$$\text{Khi đó } S_{COD} = \frac{4}{5} h_2 \cdot OE = \frac{4}{5} h_2 \cdot OG \Rightarrow OE = OG$$

Suy ra O là trung điểm BD

Tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên tứ giác này là hình bình hành

Bài 161. Cho hình chữ nhật ABCD có AB=8cm, BC=6cm và hai đường chéo cắt nhau tại O. Qua B kẻ đường thẳng a vuông góc với BD, a cắt DC kéo dài tại E.



a) Tính tỉ số diện tích: $\frac{S_{BCE}}{S_{DBE}}$.

b) Kẻ đường cao CF của tam giác BCE. Chứng minh $AC.EF = EB.CF$.

Giải:

a) Ta có $\widehat{CBE} = \widehat{CDB}$ (cùng phụ với góc \widehat{CBD}).

$\widehat{BCD} = \widehat{ECB} = 90^\circ$. Do đó $\triangle CEB \sim \triangle CBD$

$$\text{Suy ra: } \frac{EC}{BC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow EC = \frac{BC^2}{CD} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} (cm)$$

$$\Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{EC}{EC + CD} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{2} + 8} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{S_{BCE}}{S_{DBE}} = \frac{EC}{ED} = \frac{9}{25}.$$

b) Ta có: $\widehat{CEF} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với góc \widehat{CDB}) và $\widehat{CFE} = \widehat{ABC} = 90^\circ$.

$$\text{Do đó: } \triangle CEF \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{EF}{CB} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow AC.EF = CE.CB \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác, dễ thấy: } \triangle BCF \sim \triangle BEC \Rightarrow \frac{BC}{BE} = \frac{CF}{EC} \Rightarrow CB.CE = CF.BE \quad (2).$$

(1), (2) suy ra: $AC.EF = EB.CF$.

Bài 162.* Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm bất kì trong tam giác đều đến các cạnh không phụ thuộc vào vị trí của điểm ấy.

Giải:

Giả sử tam giác ABC đều và M là một điểm bên trong tam giác.

Gọi a là cạnh của tam giác đều; h_1, h_2, h_3 lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.

$$\text{Ta có: } S_{MBC} = \frac{1}{2} h_1.a, S_{MCA} = \frac{1}{2} h_2.a, S_{MAB} = \frac{1}{2} h_3.a.$$

$$\text{Do đó: } S_{ABC} = \frac{1}{2} a(h_1 + h_2 + h_3).$$

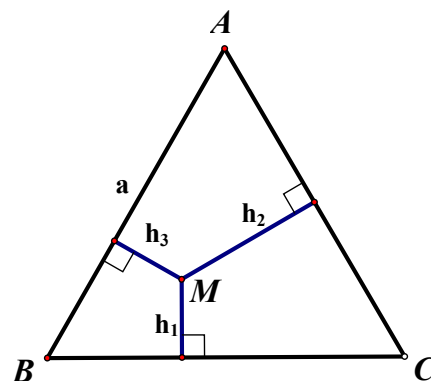
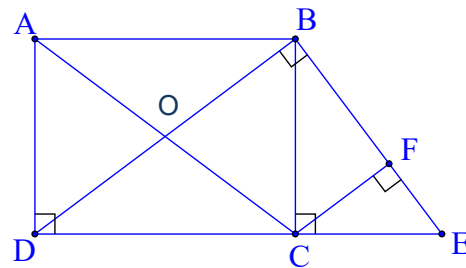
$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{1}{2} a.h, \text{ với } h \text{ là chiều cao của tam giác}$$

đều ABC. Từ đó ta có:

$$\frac{1}{2} a(h_1 + h_2 + h_3) = \frac{1}{2} a.h \Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 = h \text{ (không}$$

đổi).

Vậy khoảng cách từ một điểm bất kì trong tam giác đều đến các cạnh không phụ thuộc vào vị trí của điểm ấy.



Bài 163.* Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC. Lấy điểm O sao cho B, C cùng phía so với bờ AO. Gọi B', M', C' lần lượt là hình chiếu của B, M, C lên đường thẳng OA. Chứng minh rằng $S_{OAB} + S_{OAC} = 2S_{OAM}$

(Mở rộng: Xét trường hợp điểm O sao cho B, C khác phía với bờ AO. Chứng minh rằng $2S_{OAM} = |S_{OAC} - S_{OAB}|$).

Lời giải:

Ta có $BB' \parallel CC' \parallel MM'$ (vì cùng vuông góc với OA)

$BCC'B'$ là hình thang với hai đáy BB' và CC' và MM' là đường trung bình của hình thang.

Ta có $2MM' = BB' + CC'$ (1)

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} BB' \cdot OA, S_{OAC} = \frac{1}{2} CC' \cdot OA$$

$$S_{OAB} + S_{OAC} = \frac{1}{2} (BB' + CC') \cdot OA \quad (2)$$

$$S_{OAM} = \frac{1}{2} MM' \cdot OA \quad (3)$$

(1), (2), (3) suy ra $S_{OAB} + S_{OAC} = 2S_{OAM}$

* Mở rộng trường hợp B và C nằm khác phía so với đường thẳng OA.

Giả sử $BB' \geq CC'$. Gọi D là giao điểm của CM' với đường thẳng $B'B$.

$MM' \parallel BB'$, M là trung điểm BC nên MM' là đường trung bình trong tam giác BCD, suy ra M' là trung điểm của CD.

Dễ dàng chứng minh được $\triangle M'B'D = \triangle M'C'C$ (g-c-g), suy ra $CC' = B'D$.

Vì M', B' thuộc đường thẳng AO nên D nằm trên tia B'B. Mặt khác $B'D = CC' \leq B'B$, do đó D thuộc đoạn B'B.

$$MM' = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} (BB' - CC') \Rightarrow \frac{1}{2} MM' \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (BB' - CC') OA$$

Hay $2S_{OAM} = S_{OAB} - S_{OAC}$.

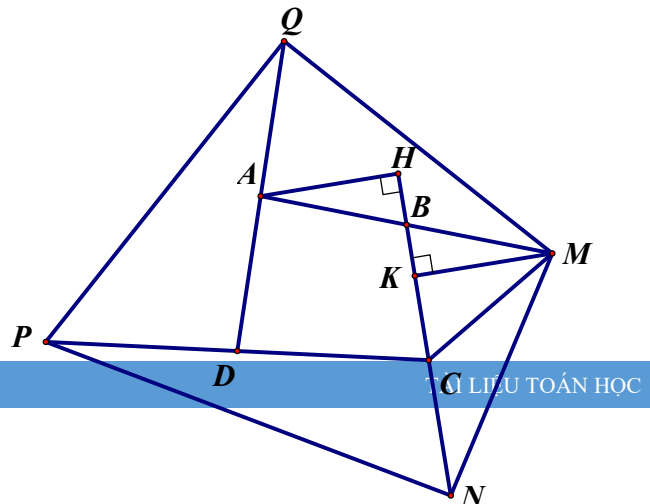
Trường hợp $CC' \geq BB'$ chứng minh tương tự.

Bài 164.* Cho tứ giác ABCD. Kéo dài AB một đoạn $BM = AB$, kéo dài BC một đoạn $CN = BC$, kéo dài CD một đoạn $DP = CD$ và kéo dài DA một đoạn $AQ = DA$. Chứng minh rằng $S_{MPNQ} = 5S_{ABCD}$

Lời giải:

* Ta chứng minh $S_{MBC} = S_{ABC}$. Thật vậy:

Dựng MK, AH vuông góc với BC (K, H thuộc đường thẳng BC). Vì B là trung điểm của AM, ta chứng minh được hai tam giác AHB và MKB bằng nhau (g-c-g), suy ra $MK = AH$. Từ đó:



$$S_{MBC} = \frac{1}{2} MK.BC = \frac{1}{2} AH.BC = S_{ABC}$$

* Mặt khác, vì C là trung điểm của BN nên $S_{MBN} = 2S_{MBC} = 2S_{ABC}$.

Chứng minh tương tự, ta được:

$$S_{MBN} = 2S_{ABC}, S_{NCP} = 2S_{BCD}, S_{PDQ} = 2S_{CDA}, S_{QAM} = 2S_{DAB}$$

$$\begin{aligned} * S_{MNPQ} &= S_{ABCD} + S_{MBN} + S_{NCP} + S_{PDQ} + S_{QAM} \\ &= S_{ABCD} + 2(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB}) \\ &= S_{ABCD} + 2(S_{ABC} + S_{CDA} + S_{BCD} + S_{DAB}) \\ &= S_{ABCD} + 2(S_{ABCD} + S_{ABCD}) \\ &= 5S_{ABCD} \end{aligned}$$

HÌNH HỌC – HỌC KÌ 2

Chương 3. ĐỊNH LÝ THALES TRONG TAM GIÁC.

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Bài 1,2. ĐỊNH LÝ THALES TRONG TAM GIÁC.

ĐỊNH LÝ ĐẢO, HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ THALES

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1) Đoạn thẳng tỉ lệ

a) Tỉ số của hai đoạn thẳng

Tỉ số của hai đoạn thẳng AB và CD, ký hiệu $\frac{AB}{CD}$, là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

Chú ý: Tỉ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào các chọn đơn vị đo.

b) Đoạn thẳng tỉ lệ

Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D' nếu có tỉ lệ thức:

$$\frac{DE}{FG} = \frac{D'E'}{F'G'} \quad \text{hay} \quad \frac{DE}{D'E'} = \frac{FG}{F'G'}$$

c) Một số tính chất của tỉ lệ thức

$$\text{I, } \frac{DE}{FG} = \frac{D'E'}{F'G'} \Rightarrow DE \cdot F'G' = D'E' \cdot FG$$

$$\text{II, } \frac{DE}{FG} = \frac{D'E'}{F'G'} = \frac{DE + D'E'}{FG + F'G'} = \frac{DE - D'E'}{FG - F'G'}$$

$$\text{III, } \frac{DE}{FG} = \frac{D'E'}{F'G'} \Rightarrow \begin{cases} \frac{DE \pm FG}{FG} = \frac{D'E' \pm F'G'}{F'G'} \\ \frac{FG}{DE} = \frac{F'G'}{D'E'} \\ \frac{FG \pm DE}{DE} = \frac{F'G' \pm D'E'}{D'E'} \end{cases}$$

d) Điểm chia một đoạn thẳng theo một tỉ số cho trước

* Cho đoạn thẳng AB. Một điểm C thuộc đoạn thẳng AB (hoặc thuộc đường thẳng AB)

được gọi là chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{a}{b}$, nếu có $\frac{CA}{CB} = \frac{a}{b}$

* Nếu C chia AB theo tỉ số $\frac{a}{b} \neq 0$ thì C chia BA theo tỉ số là $\frac{b}{a}$

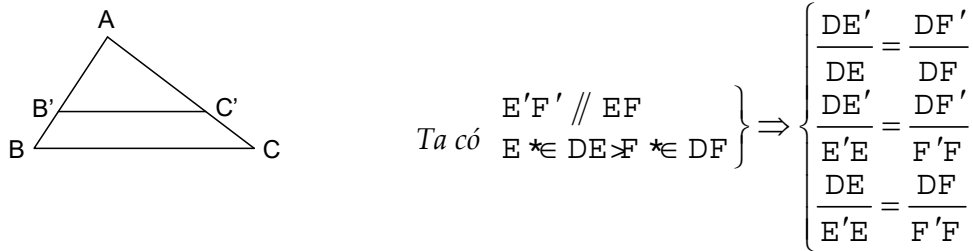
* Nếu C chia AB theo tỉ số $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow AC = CB$

2) Định lý thales (Talet) trong tam giác

a) Định lý Talet thuận

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Ví dụ 1. Cho hình vẽ



b) Định lý Talet đảo

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

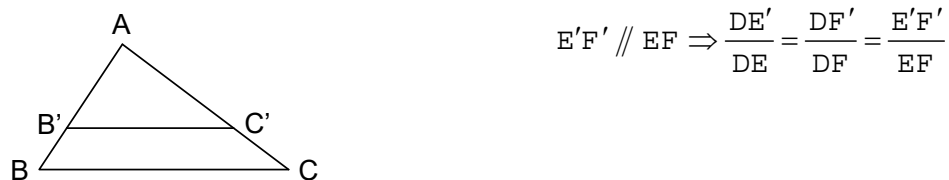
Ví dụ 2.

$$\left. \begin{array}{l} E' \in DE, F' \in DF \\ \frac{DE'}{E'E} = \frac{DF'}{F'F} \left(\text{kd} \mid \frac{DE}{E'E} = \frac{DF}{F'F} \text{kd} \mid \text{III} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow E'F' \parallel EF$$

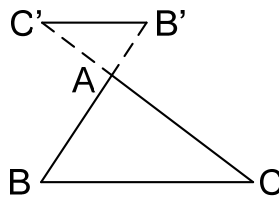
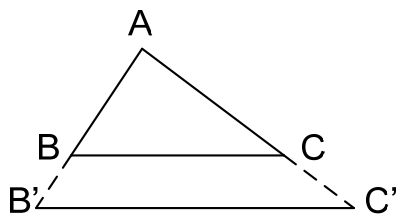
c) Hệ quả của định lý Talet

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

Ví dụ 3.



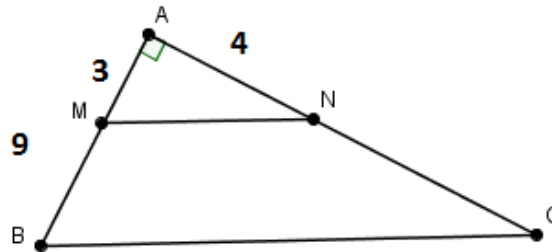
Chú ý: Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng song song với một cạnh và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.



$$E'F' \parallel EF \Rightarrow \frac{DE'}{DE} = \frac{DF'}{DF} = \frac{E'F'}{EF}$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, $MN \parallel BC$ ($M \in AB$; $N \in AC$), $AB=9\text{cm}$; $AM = 3\text{cm}$; $AN = 4\text{cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng NC, MN, BC

Bài giải



$MB = AB - AM = 6\text{cm}$. Vì $MN \parallel BC$

nên theo hệ quả định lý Talet ta có

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AC - AN} \Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{4}{NC} = \frac{1}{2}$$

Suy ra $NC = 8\text{cm}$

Xét tam giác vuông AMN có góc A bằng 1 vuông, ta có

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 = 25$$

$$MN = 5\text{cm}$$

Vì $MN \parallel BC$ nên theo hệ quả định lý Talet ta có

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow \frac{3}{9} = \frac{5}{BC} \text{ Suy ra } BC = 15\text{cm}$$

B. LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC, M là một điểm bất kì trên BC. Các đường song song với AM vẽ

từ B và C cắt AC, AB tại N và P. Chứng minh $\frac{1}{AM} = \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP}$

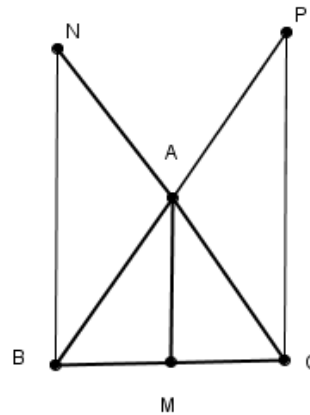
Bài giải

Áp dụng hệ quả của định lý Talet cho tam giác BNC và tam giác CPB, ta có

$$\frac{AM}{BN} = \frac{MC}{CB} \quad (1) \text{ và } \frac{AM}{CP} = \frac{BM}{BC} \quad (2)$$

Lấy (1) + (2) ta được $\frac{AM}{BN} + \frac{AM}{CP} = \frac{MC + BM}{CB} = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} = \frac{1}{AM}$$



Bài 2. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), M là trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm BM và AC.

a) Chứng minh $IK \parallel AB$

b) Đường thẳng IK cắt AD, BC theo lần lượt E, F. Chứng minh $EI = IK = KF$

Bài giải

a) Theo giả thiết $AB \parallel CD$ nên theo định lý Talet ta có

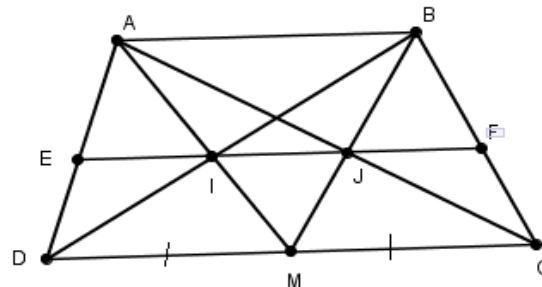
$$\frac{IM}{IA} = \frac{DM}{AB}; \frac{KM}{KB} = \frac{MC}{AB}$$

Mà $CM = DM$ nên

$$\frac{IM}{IA} = \frac{KM}{KB} \Rightarrow IK \parallel AB$$

(theo định lý Talet đảo)

b) Theo chứng minh câu a ta có $IE \parallel CD$



$$\Rightarrow \frac{EI}{DM} = \frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC} = \frac{KF}{MC} \Rightarrow \frac{EI}{DM} = \frac{KF}{MC}$$

Mà $DM = MC \Rightarrow IE = KF$

Chứng minh tương tự $IK = KF$

Vậy $IE = IK = KF$

Bài 3. Cho tam giác ABC và trung tuyến AD. Một đường thẳng bất kỳ song song với AD cắt cạnh BC, đường thẳng CA, AB lần lượt tại E, N, M.

Chứng minh $\frac{EM}{AD} + \frac{EN}{AD} = 2$

Bài giải

Trong tam giác ADC có $EN \parallel AD$

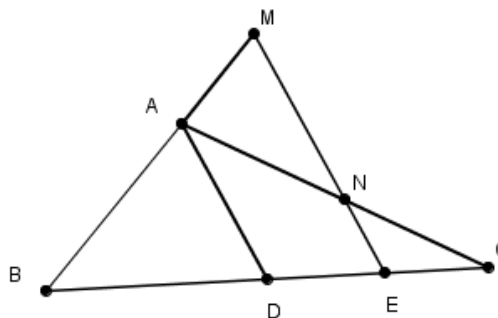
$$\text{Nên } \frac{EN}{AD} = \frac{EC}{CD}$$

Trong tam giác BME có $AD \parallel ME$

$$\text{Nên } \frac{EM}{AD} = \frac{BE}{BD}$$

Mà $BD = DC$ (AM là trung tuyến)

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \frac{EN}{AD} + \frac{EM}{AD} &= \frac{EC}{CD} + \frac{BE}{CD} \\ &= \frac{CE + BE}{CD} = \frac{EC + BD + DE}{CD} = \frac{2BD}{CD} = 2 \quad (\text{vì } BD = CD) \end{aligned}$$



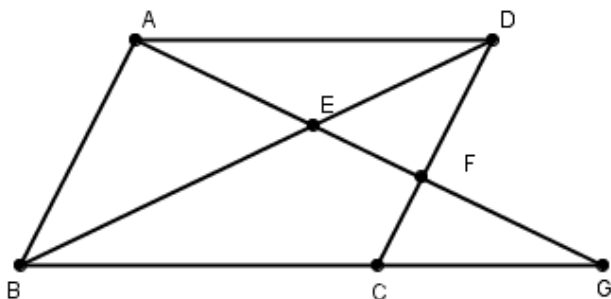
Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng bất kỳ qua A cắt đoạn BD, đường thẳng CD và BC lần lượt tại E, F và G. Chứng minh rằng

a) $AE^2 = EF \cdot EG$

b) $\frac{1}{AF} + \frac{1}{AG} = \frac{1}{AE}$

c) Khi đường thẳng qua A thay đổi thì tích $BK \cdot DG$ có giá trị không đổi

Bài giải



a) Ta có $DF \parallel AB$. Theo hệ quả của định lý Talet ta có $\frac{EF}{AE} = \frac{ED}{EB}$ (1)

Lại có $AD \parallel BG$ nên $\frac{ED}{EB} = \frac{AE}{EG}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{EF}{EA} = \frac{AE}{EG}$

$$\Rightarrow AE^2 = EF \cdot EG$$

b) Đẳng thức phải chứng minh tương đương với $\frac{AE}{AF} + \frac{AE}{AG} = 1$

Từ $\frac{AE}{EF} = \frac{BE}{ED} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{DE}{DB}$ và $\frac{AE}{AG} = \frac{DE}{EB} \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{BE}{DB}$

Do đó $\frac{AE}{AF} + \frac{AE}{AG} = \frac{BE}{DB} + \frac{DE}{DB} = \frac{BD}{DB} = 1$

$$\text{Vậy } \frac{1}{AF} + \frac{1}{AG} = \frac{1}{AE}$$

c) Đặt $AB = a$, $AD = b$ thì

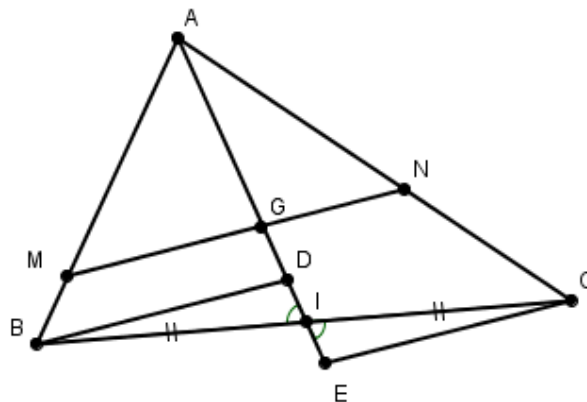
do $AB \parallel CF$ nên $\frac{CF}{a} = \frac{CG}{BG}$ (1) $AD \parallel BG$ nên $\frac{DF}{CF} = \frac{b}{CG}$ (2)

Nhân (1) và (2) vế theo vế ta được $\frac{DF}{a} = \frac{b}{CG} \Rightarrow DF \cdot CG = a \cdot b$ không đổi

Bài 5. Cho tam giác ABC. Với G là trọng tâm. Một đường thẳng bất kì qua G cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M, N

Chứng minh $\frac{AC}{AN} + \frac{AB}{AM} = 3$

Bài giải



Gọi AI là trung tuyến của tam giác ABC, vẽ $BD \parallel MN$, $CE \parallel MM$ ($D, E \in AG$).

Ta có $BD \parallel CE$

Xét $\triangle IBD$ và $\triangle ICE$ có

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

$$BI = IC \text{ (AI là trung tuyến)}$$

$$\hat{DBI} = \hat{ECI} \text{ (so le trong)}$$

Do đó $\triangle IBD = \triangle ICE$ (c.g.c)

nên $BD = CE$, $DI = IE$

Trong tam giác AMG có $MG \parallel BD$ nên $\frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AG}$ (hệ quả định lý Talet)

Trong tam giác ANG có $NG \parallel EC$ nên $\frac{AB}{AM} = \frac{AE}{AG}$ (hệ quả định lý Talet)

$$\text{Do đó } \frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = \frac{AD + AE}{AG} = \frac{AI - DI + AI + IE}{AG} = \frac{2AI}{\frac{2}{3}AI} = 3$$

Vì $DI = IE$ (cmt); $GA = \frac{2}{3} AI$ (G là trọng tâm)

$$\text{Vậy } \frac{AC}{AN} + \frac{AB}{AM} = 3$$

Bài 6. Cho hình thang ABCD có hai đáy BC và AD (BC khác AD). Gọi M, N lần lượt là hai

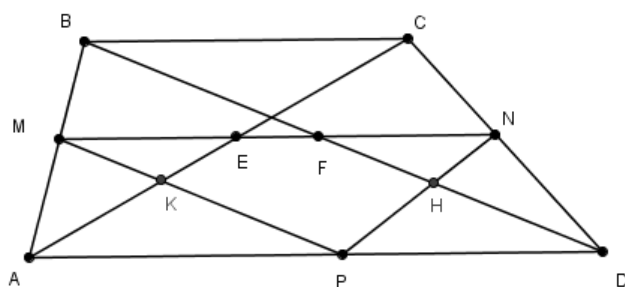
điểm trên cạnh AB, CD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$. Đường thẳng MN cắt AC, BD tương ứng tại

E và F. Vẽ $MP \parallel BD$ ($P \in AD$)

a) Chứng minh rằng $PN \parallel AC$

b) Chứng minh $ME = NF$

Bài giải



a) Ta có $MP \parallel BD$ nên $\frac{AP}{AD} = \frac{AM}{AB}$ (định lý Talet)

Mà $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$ (1) suy ra $\frac{AP}{AD} = \frac{CN}{CD}$

Suy ra $PN \parallel AC$ (định lý Talet)

b) Ta có $FN \parallel BC$ nên $\frac{FN}{BC} = \frac{CN}{CD}$ (1)

$ME \parallel BC$ nên $\frac{ME}{BC} = \frac{AM}{AB}$ (2)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{ME}{BC} = \frac{FN}{BC} \Rightarrow ME = FN$

Bài 7. Cho tam giác ABC. Kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB ở D và cắt AC tại E.

Qua C kẻ Cx song song với AB, cắt DE ở G. Gọi H là giao điểm của AC và BG. Kẻ HI song song với AB ($I \in BC$). Chứng minh rằng

a) $AD \cdot EG = BD \cdot DE$

b) $HC^2 = HE \cdot HA$

c) $\frac{1}{HI} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CG}$

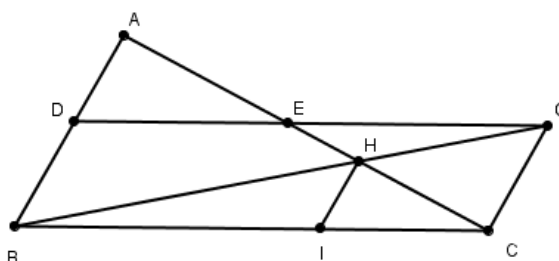
Bài giải

a) Tứ giác DGCB có $DG \parallel BC$; $CG \parallel DB$ nên tứ giác DGCB là hình bình hành

$\Rightarrow BD = CG$ (1)

Trong tam giác AD//CG nên

$\frac{DE}{EG} = \frac{DA}{GC}$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DE}{EG} = \frac{DA}{BD}$

$$\Rightarrow DE \cdot BD = DA \cdot EG \text{ (đpcm)}$$

b) Ta có $BC \parallel EG \Rightarrow \frac{HE}{HC} = \frac{HG}{HB}$ (định lý Talet)

Ta lại có $AB \parallel CG \Rightarrow \frac{HC}{HA} = \frac{HG}{HB}$

Suy ra $\frac{HE}{HC} = \frac{HC}{HA}$

$$\Rightarrow HC^2 = HA \cdot HE \text{ (đpcm)}$$

c) Ta có $AB \parallel IH \Rightarrow \frac{HI}{AB} = \frac{IC}{BC}$ (định lý Talet) (3)

$IH \parallel CG \Rightarrow \frac{IH}{CG} = \frac{IB}{BC}$ (định lý Talet) (4)

Lấy (3) + (4) vế theo vế ta được $\Rightarrow \frac{IH}{CG} + \frac{HI}{AB} = \frac{IB}{BC} + \frac{IC}{BC} = \frac{IB + IC}{BC} = 1$

Hay $\frac{IH}{CG} + \frac{HI}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{CG} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{IH}$ (đpcm)

Bài 8. Cho 3 tia Ox, Oy, Oz tạo thành $\hat{xOy} = \hat{yOz} = 60^\circ$. Chứng minh nếu A, B, C là 3

điểm thẳng hàng trên Ox, Oy, Oz thì ta có $\frac{1}{BD} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$

Bài giải

Qua B vẽ $BD \parallel Ox, D \in Oz$. Và $DE \parallel Oz, E \in Ox$

Ta có tứ giác $ODBE$ là hình bình hành mà OB là tia phân giác của góc AOC , nên $ODBE$ là hình thoi.

Suy ra $DB = BE$

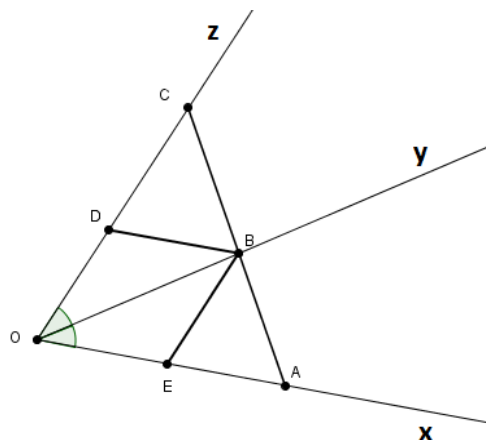
Tam giác AOC có $BD \parallel OA$ nên $\frac{BD}{OA} = \frac{CB}{AC}$ (hệ quả định lý Talet)

Tam giác AOC có $EB \parallel OC$ nên $\frac{BE}{OC} = \frac{AB}{AC}$ (hệ quả định lý Talet)

$$\text{Do đó } \frac{BD}{OA} + \frac{BE}{OC} = \frac{CB + AB}{AC} = 1$$

$$\text{Hay } \frac{BD}{OA} + \frac{BD}{OC} = 1 \text{ vì } BD = BE \text{ (cmt)}$$

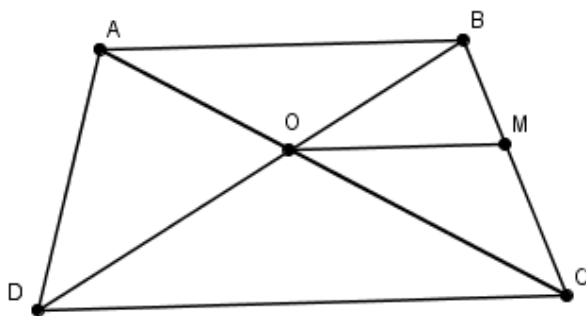
$$\text{Nên } \frac{1}{BD} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$$



Bài 9. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo. Qua O ta kẻ một đường thẳng song song với CD cắt BC tại M.

$$\text{Chứng minh } \frac{1}{OM} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

Bài giải



$$\text{Trong tam giác ABC có } OM \parallel AB \Rightarrow \frac{OM}{AB} = \frac{MC}{BC} \quad (1)$$

$$\text{Trong tam giác DCB có } OM \parallel DC \Rightarrow \frac{OM}{CD} = \frac{MB}{BC} \quad (2)$$

$$\text{Do đó } \frac{OM}{AB} + \frac{OM}{CD} = \frac{MC}{BC} + \frac{MB}{BC} = 1$$

$$\text{Hay } \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{OM}$$

Bài 10. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm. Qua G kẻ đường thẳng song song với AB nó cắt BC tại D, kẻ đường thẳng song song với AC, nó cắt BC tại E. So sánh tỉ số $\frac{BD}{BC}$; $\frac{EC}{BC}$

Bài giải

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta

$$\text{có } \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$$

áp dụng định lí Talet vào tam giác MAB

với $DG \parallel BA$ ta có

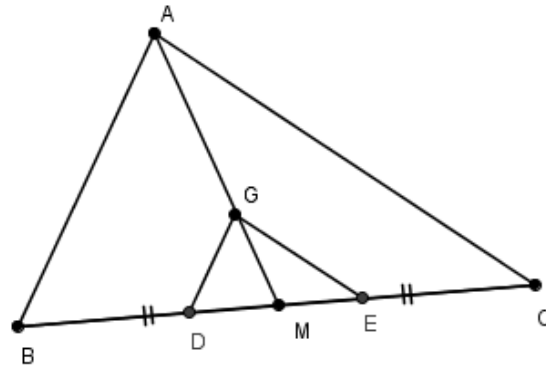
$$\frac{BD}{BM} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Suy ra } \frac{BD}{2 \cdot BM} = \frac{2}{2 \cdot 3} \text{ Hay } \frac{BD}{BC} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

áp dụng định lí Talet vào tam giác MAC với $GE \parallel AC$ ta có

$$\frac{EC}{MC} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \text{ suy ra } \frac{EC}{2 \cdot MC} = \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \text{ hay } \frac{EC}{BC} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{BD}{BC} = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{3}$$



Bài 11. Hình thang ABCD đáy nhỏ CD. Qua D vẽ đường thẳng song song với BC cắt AC tại M. Qua C vẽ đường thẳng AD cắt AB tại F. Qua F lại kẻ đường thẳng song song AC cắt BC tại P. Chứng minh rằng

- $MP \parallel AB$
- Ba đường thẳng MP, CF, BD đồng qui.

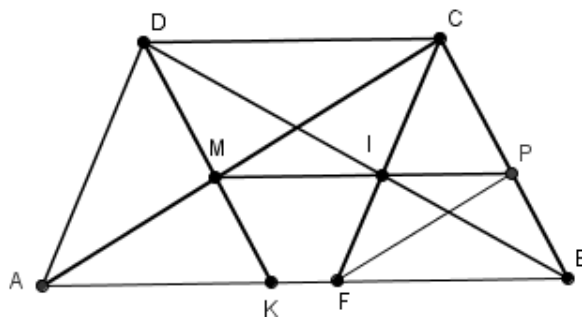
Bài giải

$$\text{a) Trong tam giác ABC có } FP \parallel AC \Rightarrow \frac{CP}{BP} = \frac{AF}{FB} \quad (1)$$

Trong tam giác DMC có $AK \parallel DC$

$$\Rightarrow \frac{CM}{MA} = \frac{DC}{AK} \quad (2)$$

Các tứ giác AFCD; DCBK là các hình bình hành suy ra



$$AF = DC; DC = KB; \Rightarrow FB = AK \quad (3)$$

Kết hợp (1) (2) và (3) ta có $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{MA}$

Áp dụng định lý đảo Talet ta có $MP \parallel AB$

b) Gọi I là giao điểm của BD và CF. Theo câu a ta có

$$\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK} = \frac{DC}{FB} \text{ mà } \frac{DC}{FB} = \frac{DI}{IB} \text{ do } FB \parallel DC$$

Rút ra $\frac{CP}{PB} = \frac{DI}{IB}$ từ đó $PI \parallel DC (\parallel AB)$

Theo a) ta cũng có $PM \parallel AM$. Theo tiên đề Oclit về đường thẳng song song thì ba điểm P, I, M thẳng hàng, nói cách khác, MP phải đi qua giao điểm I của BD và CF

Bài 12. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm I. Gọi E là giao điểm của DI và CB. Gọi J là giao điểm của AE và CI. Chứng minh BJ vuông góc DE.

Giải:

Trên tia đối của tia AB lấy điểm F sao cho $AF = BE$. CF cắt EA, ED lần lượt tại H, O, EA cắt DF tại K.

Ta có $\triangle ABE = \triangle DAF$ (c-g-c)

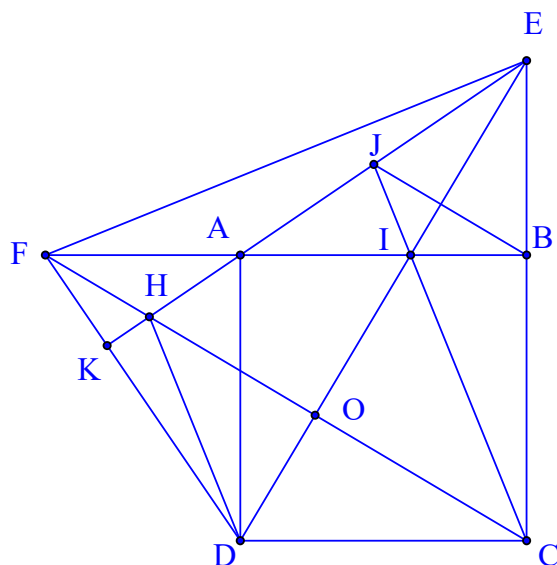
$$\Rightarrow \widehat{AFD} = \widehat{BEA} \quad (1), \quad AE = DF \quad (2),$$

$$\text{Vì } \widehat{FAK} = \widehat{BAE} \text{ và } \widehat{BAE} + \widehat{BEA} = 90^\circ \quad (3)$$

(1), (3) suy ra $\widehat{AFD} + \widehat{FAK} = 90^\circ$, hay $EA \perp DF$.

$\widehat{ADF} = \widehat{BAE} \Rightarrow \widehat{CDF} = \widehat{DAE}$, kết hợp với (2), ta được:

$$\triangle CDF = \triangle DAE \text{ (c-g-c), suy ra } \widehat{DCF} = \widehat{ADE} \quad (4).$$



Mặt khác $\widehat{CDO} + \widehat{ADE} = 90^\circ$ nên $\widehat{CDO} + \widehat{DCF} = 90^\circ$, như vậy ta có $ED \perp CF$.

Từ đây suy ra I là trực tâm tam giác CEF và H là trực tâm tam giác DEF, suy ra $CI \perp EF$, $DH \perp EF \Rightarrow DH \parallel CI$.

Theo định lí Talet thì: $\frac{EJ}{EH} = \frac{EI}{ED} = \frac{EB}{EC}$, do vậy $BJ \parallel CH$.

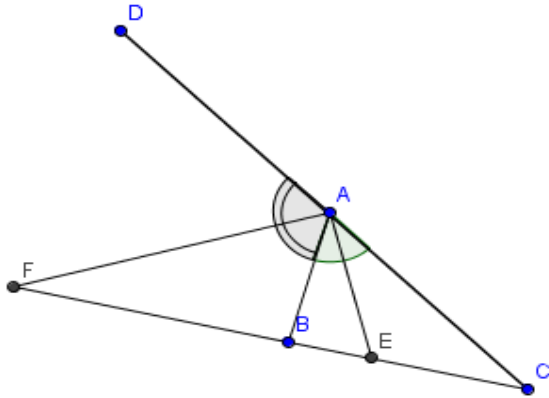
Theo trên $CH \perp ED$, vậy $BJ \perp ED$.

Bài 3. TÍNH CHẤT CỦA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG TAM GIÁC

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1) Định lí

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với 2 cạnh kề đoạn thẳng ấy.



AE là phân giác trong của góc A

$$\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

Ví dụ: Cho tam giác ABC, đường phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại D.

a) Tính tỉ số $\frac{BD}{DC}$ biết $AB = 3\text{cm}$; $AC = 5\text{cm}$

b) Tính độ dài DC, biết $BD = 1,5\text{cm}$

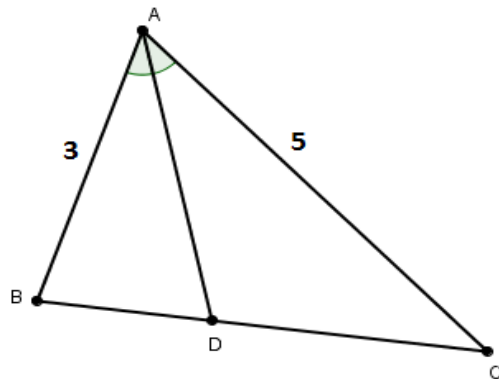
Bài giải:

a) AD là phân giác của \widehat{BAC} , ta có

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}. \text{ Vậy } \frac{BD}{DC} = \frac{3}{5}$$

$$\text{b) } \frac{BD}{DC} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow DC = \frac{5}{3}BD$$

$$\text{hay } DC = \frac{5}{3}1,5 = 2,5\text{cm}$$



2) Lưu ý

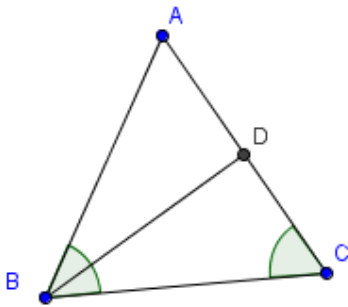
Định lí vẫn đúng với phân giác của góc ngoài của tam giác

AE là phân giác ngoài của góc A $\Rightarrow \frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC}$

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 13. Cho tam giác ABC cân ở A, phân giác trong BD, BC = 10cm, AB = 15cm. Tính AD, DC.

Bài giải:



BD là phân giác trong của góc B nên

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$$

Theo tính chất của tỉ lệ thức, ta có

$$\frac{DA + DC}{DC} = \frac{BA + BC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{15 + 10}{10}$$

$$\Rightarrow DC = \frac{10 \cdot AC}{25} = \frac{10 \cdot 15}{25} = 6 \text{ (cm)}$$

$$\text{Ta có } DA + DC = AC \Rightarrow AD = AC - DC = 15 - 6 = 9 \text{ (cm)}$$

Bài 14. Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Phân giác trong của góc A cắt BC tại D, phân giác ngoài góc A cắt BC tại E. Tính BD, DC, EB, EC theo a, b, c.

Bài giải:

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ABC ta có

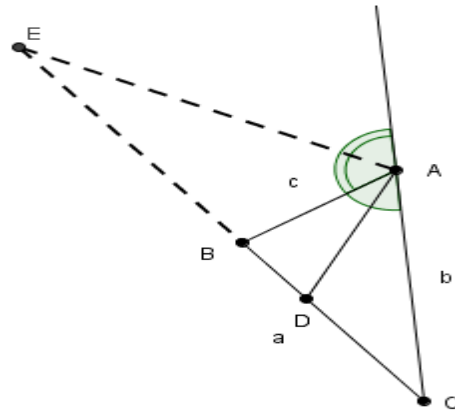
$$\bullet \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD + DC}{DC} = \frac{AB + AC}{AC} \text{ (tính chất dãy tỉ số bằng nhau)}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{AB + AC}{AC} \Rightarrow DC = \frac{BC \cdot AC}{AB + AC} = \frac{a \cdot b}{c + b}$$

$$\Rightarrow BD = a - \frac{ab}{c + b} = a \left(1 - \frac{b}{b + c} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \frac{EC}{EB} &= \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{EC - EB}{EB} = \frac{AC - AB}{AB} \\
 &\Rightarrow \frac{BC}{EB} = \frac{AC - AB}{AB} \\
 &\Rightarrow EB = \frac{BC \cdot AB}{AC - AB} = \frac{a \cdot c}{b - c} \\
 EC &= EB + BC = \frac{a \cdot c}{b - c} + a
 \end{aligned}$$

$$= a \left(\frac{c}{b - c} + 1 \right)$$



Bài 15. Cho tam giác ABC có 3 phân giác trong AM, BN, CP cắt nhau tại I. Chứng minh a)

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$$

$$\text{b) } \frac{MI}{MA} + \frac{NI}{NB} + \frac{PI}{PC} = 1$$

Bài giải

a) Ta có AM là phân giác của góc A

Theo tính chất đường phân giác trong

tam giác, ta có

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$$

Tương tự đối với các đường phân giác

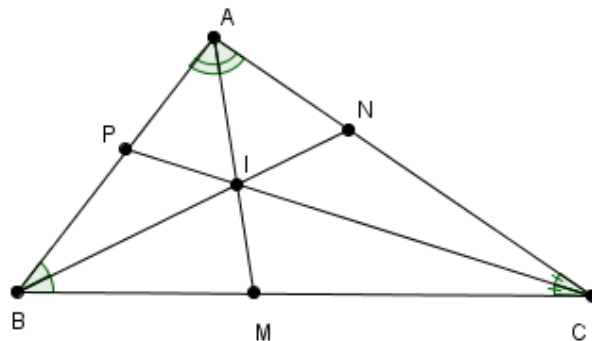
BN, CP ta có

$$\frac{NC}{NA} = \frac{BC}{BA}; \frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}$$

$$\text{Do đó } \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$$

$$\text{Vậy } \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$$

b) Gọi a, b, c lần lượt là độ dài của các cạnh BC, CA, AB



Trong $\triangle ABM$ thì BI là phân giác ứng với cạnh AM nên

$$\frac{MI}{IA} = \frac{BM}{BA} = \frac{BM}{c} \Rightarrow \frac{MI}{MI + IA} = \frac{BM}{BM + c} \Rightarrow \frac{MI}{MA} = \frac{BM}{BM + c} \quad (1)$$

Trong $\triangle ACM$ thì CI là phân giác ứng với cạnh AM nên

$$\frac{MI}{IA} = \frac{CM}{CA} = \frac{CM}{b} \Rightarrow \frac{MI}{MI + IA} = \frac{CM}{CM + b} \Rightarrow \frac{MI}{MA} = \frac{CM}{CM + b}$$

Mà $CM = BC - BM = a - BM$. Nên
$$\frac{MI}{MA} = \frac{a - BM}{a - BM + b} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có
$$\frac{MI}{MA} = \frac{BM}{BM + c} = \frac{a - BM}{a - BM + b} = \frac{BM + a - BM}{BM + c + a - BM + b}$$
$$\Rightarrow \frac{MI}{MA} = \frac{a}{a + b + c}$$

Chúng minh tương tự ta có
$$\frac{NI}{BN} = \frac{b}{a + b + c}$$

$$\frac{PI}{CP} = \frac{c}{a + b + c}$$

Suy ra
$$\frac{MI}{MA} + \frac{NI}{BN} + \frac{PI}{CP} = \frac{a}{a + b + c} + \frac{b}{a + b + c} + \frac{c}{a + b + c} = \frac{a + b + c}{a + b + c} = 1$$

Vậy
$$\frac{MI}{MA} + \frac{NI}{NB} + \frac{PI}{PC} = 1$$

Bài 16. Cho tam giác ABC, phân giác trong AD. Phân giác góc \widehat{ADC} cắt AC tại F, phân giác \widehat{ADB} cắt AB tại E. Chứng minh rằng

a)
$$\frac{AF}{AE} \cdot \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}$$

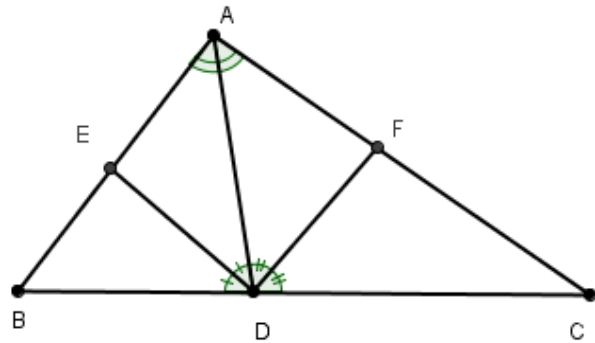
b)
$$AF \cdot BE \cdot CD = AE \cdot BD \cdot CF$$

Bài giải

a) Áp dụng tính chất đường phân giác
ta có

$$\frac{BE}{AE} = \frac{BD}{AD} \quad (1)$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DC} \quad (2)$$



Nhân (1) với (2) vế theo vế ta được

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{BE}{AE} = \frac{AD}{DC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{BD}{DC}$$

Do AD là phân giác góc A nên $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Vậy $\frac{AF}{AE} \cdot \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}$

b) Nhân (1) với (2) vế theo vế ta được

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{BE}{AE} = \frac{AD}{DC} \cdot \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{AF}{FC} \cdot \frac{BE}{AE} \cdot \frac{DC}{BD} = \frac{AD}{DC} \cdot \frac{BD}{AD} \cdot \frac{DC}{BD} = 1$$

Hay $\frac{AF}{FC} \cdot \frac{BE}{AE} \cdot \frac{DC}{BD} = 1$

Vậy $AF \cdot BE \cdot CD = AE \cdot BD \cdot CF$

Bài 17. Cho tam giác ABC, phân giác trong BD, CE. Chứng minh rằng

- Nếu $DE \parallel BC$ thì tam giác ABC cân tại A.
- Nếu tam giác ABC cân tại A thì $DE \parallel BC$.

Bài giải

a) Giả sử $DE \parallel BC$ thì ta có $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \quad (1)$

Mặt khác, BD là phân giác góc B nên ta có $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ và CE là phân giác góc C

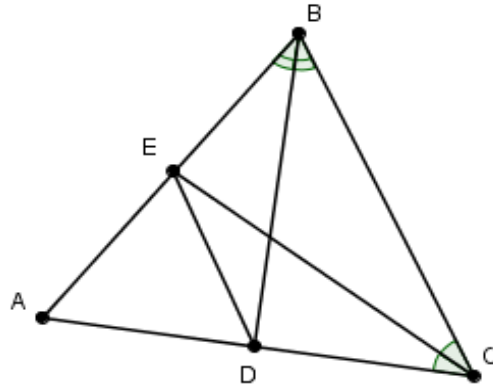
nên ta có $\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC}$

Suy ra $\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AC = AB$

Nên $\triangle ABC$ cân tại A

b) Giả sử $\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow AC = AB$

Ta có BD là phân giác góc B



nên ta có $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ và CE là phân giác góc C nên ta có $\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC}$

Mặt khác $AC = AB$

Suy ra $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow DE \parallel BC$

Bài 18. Cho hình bình hành ABCD ($AB > AD, \hat{A} > 90^\circ$). Trên tia đối của tia CD lấy điểm

E sao cho $\hat{DBC} = \hat{CBE}$. Đường thẳng BE cắt đường thẳng AD tại M. Đường thẳng CM cắt AB tại F, BD tại K. Chứng minh rằng

a) $CK^2 = KF \cdot KM$

b) $\frac{1}{CK} = \frac{1}{CF} + \frac{1}{CM}$

c) $\frac{BF}{FA} = \frac{BE}{BD}$

Bài giải

c) Ta có $BC \parallel DM \Rightarrow \frac{CK}{KM} = \frac{KB}{KD}$

Ta lại có $FB \parallel DC \Rightarrow \frac{FK}{KC} = \frac{KB}{KD}$

Suy ra $\frac{FK}{KC} = \frac{CK}{KM} \Rightarrow CK^2 = KF \cdot KM$

d) Ta có $BC \parallel DM$

$$\Rightarrow \frac{CK}{CM} = \frac{KB}{BD} \quad (1)$$

Ta lại có $FB \parallel DC$

$$\Rightarrow \frac{CK}{CF} = \frac{KD}{BD} \quad (2)$$

Lấy (1) cộng (2) về theo vế ta được

$$\frac{CK}{CF} + \frac{CK}{CM} = \frac{KD}{BD} + \frac{KB}{BD} = \frac{BD}{BD} = 1$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{CF} + \frac{1}{CM} = \frac{1}{CK}$$

c) Ta có $\hat{DBC} = \hat{CBE}$ suy ra BC là phân giác góc B

Theo tính chất phân giác ta có $\frac{CE}{DC} = \frac{BE}{BD} \quad (3)$

Mặt khác, ta có $FB \parallel CE \Rightarrow \frac{FB}{CE} = \frac{MF}{FC}$

$$AF \parallel DC \Rightarrow \frac{FA}{CD} = \frac{MF}{FC}$$

$$\text{Suy ra } \frac{FA}{CD} = \frac{BF}{CE} \Rightarrow CD \cdot BF = FA \cdot CE \Rightarrow \frac{BF}{FA} = \frac{CE}{CD} \quad (4)$$

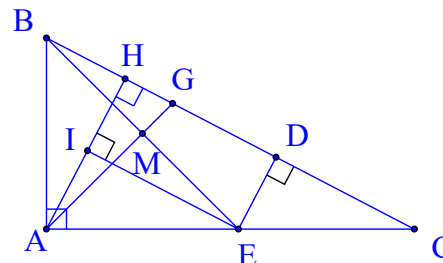
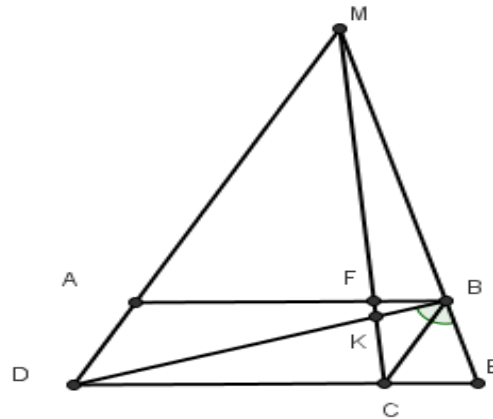
$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } \frac{BF}{FA} = \frac{BE}{BD}$$

Bài 19. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), vẽ đường cao AH . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = AH$. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại E . Gọi M

là trung điểm của BE , tia AM cắt BC tại G . Chứng minh: $\frac{BG}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$.

Giải:

$$\begin{aligned} \frac{BG}{BC} &= \frac{HD}{AH + HC} \\ \Rightarrow \frac{BC}{BG} &= \frac{AH + HC}{HD} = 1 + \frac{HC}{HD} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \frac{BC}{BG} - 1 = \frac{HC}{HD} \Rightarrow \frac{BC - BG}{BG} = \frac{HC}{HD} \Rightarrow \frac{GC}{GB} = \frac{HC}{HD}$$

Ta chứng minh: $\frac{HC}{HD} = \frac{GC}{GB}$. Ta có: $DE \parallel AH \Rightarrow \frac{HC}{HD} = \frac{AC}{AE}$.

Dựng đường thẳng qua E vuông góc AH tại I, suy ra HIED là hình chữ nhật.

$IE = HD = HA$; $\widehat{IAE} = \widehat{HBA}$ do đó hai tam giác vuông IEA và HBA bằng nhau.

$$\Rightarrow AE = AB \Rightarrow \frac{HC}{HD} = \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{AB}.$$

Vì M là trung điểm BE, tam giác ABE cân tại A nên AM là tia phân giác góc \widehat{BAC}

hay G là chân đường phân giác trong góc \widehat{BAC} trong tam giác ABC. Từ đó ta có:

$$\frac{GC}{GB} = \frac{AC}{AB}. \text{ Vậy } \Rightarrow \frac{HC}{HD} = \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{AB} = \frac{GC}{GB}. \text{ Chứng minh xong!}$$

Bài 20. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao (H thuộc BC), N là trung điểm của AB. Biết $AB=6\text{cm}$, $AC=8\text{cm}$.

a) Vẽ AK là tia phân giác của góc \widehat{BAC} (K thuộc BC). Tính AK?

b) Gọi E là hình chiếu vuông góc của H lên AC và T là điểm đối xứng của N qua I với I là giao điểm của CN và HE. Chứng minh tứ giác NETH là hình bình hành.

Giải:

a) Theo tính chất chân đường phân giác trong ta có:

$$\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{CK}{CB} = \frac{4}{7}.$$

Gọi K' là hình chiếu vuông góc của K lên AC, suy ra $KK' \parallel AB$. Theo định lý Talet ta có:

$$\frac{KK'}{AB} = \frac{CK}{CB} = \frac{4}{7} \Rightarrow KK' = \frac{4}{7} \cdot AB = \frac{4}{7} \cdot 6 = \frac{24}{7} (\text{cm})$$

Mặt khác, tam giác AKK' vuông cân tại K' nên:

$$AK = KK' \cdot \sqrt{2} = \frac{24}{7} \sqrt{2} (\text{cm}).$$

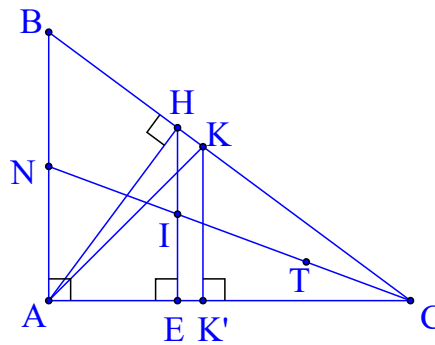
b) Ta chứng minh I là trung điểm của HE.

Vì $HE \perp AC$ nên $HE \parallel BA$. Theo định lý Talet ta có: $\frac{IE}{NA} = \frac{CI}{CN} = \frac{IH}{NB}$.

Vì $NA = NB$ nên $IE = IH$. Do đó I là trung điểm của HE.

Theo giả thiết thì I là trung điểm của NT.

Tứ giác NETH có hai đường chéo NT và EH có chung trung điểm I nên NETH là hình bình hành.



Bài 4, 5, 6. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG.

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA HAI TAM GIÁC

(CẠNH – CẠNH – CẠNH, CẠNH – GÓC – CẠNH, GÓC – GÓC)

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1) Định nghĩa

Hai tam giác gọi là đồng dạng với nhau nếu chúng có 3 cặp góc bằng nhau đôi một và 3 cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.

Ví dụ 1. $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

- Các góc bằng nhau gọi là các góc tương ứng.
- Các đỉnh của các góc bằng nhau gọi là các đỉnh tương ứng.
- Các cạnh đối diện với góc bằng nhau gọi là các cạnh tương ứng
- Khi dùng ký hiệu $\triangle ABC \sim \triangle ABC$ thì **phải** ghi đúng thứ tự cặp đỉnh tương ứng
- Tỉ số của hai cạnh tương ứng k gọi là tỉ số đồng dạng.

2) Tính chất

a) Phản xạ $\triangle ABC \sim \triangle ABC$

b) Đối xứng

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ theo tỉ số k thì $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ theo tỉ số $\frac{1}{k}$

c) bắc cầu

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$$

$$\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_3B_3C_3$$

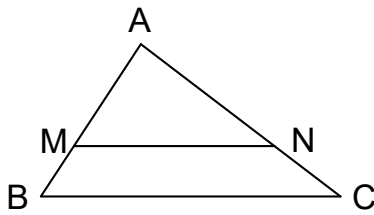
$$\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_3B_3C_3$$

Lưu ý. Nếu $\triangle A_1B_1C_1$ và $\triangle A_2B_2C_2$ đồng dạng theo tỉ số k_1 , $\triangle A_2B_2C_2$ và $\triangle A_3B_3C_3$ đồng dạng theo tỉ số k_2 thì $\triangle A_1B_1C_1$ và $\triangle A_3B_3C_3$ đồng dạng theo tỉ số là k_1k_2

3) Định lý

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác đồng dạng với tam giác đã cho.

Ví dụ 2.

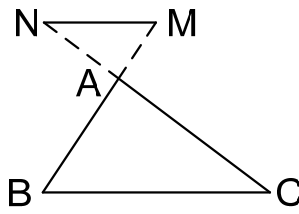
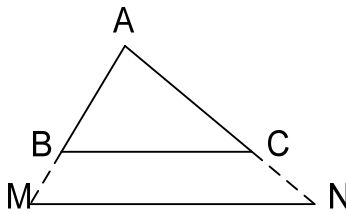


$\triangle ABC$ có $MN \parallel BC$ ($M \in AB; N \in AC$)

$\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$

Lưu ý. Định lý trên cũng đúng trong trường hợp đường thẳng a cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.

Ví dụ 3.

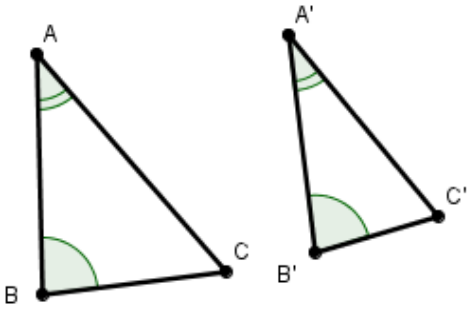


$\triangle ABC$ có $MN \parallel BC$

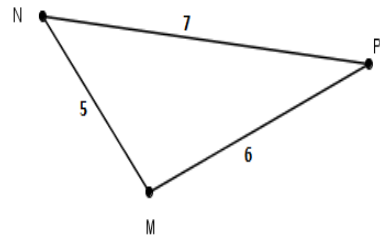
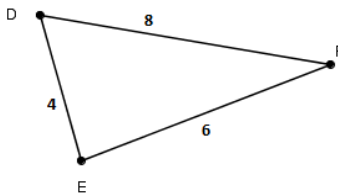
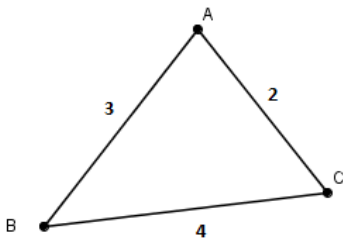
$\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$

4) Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác

<p>a) Trường hợp 1</p> <p>Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.</p>		<p>Xét $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$:</p> $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$ <p>$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$</p> <p>(c-c-c)</p>
<p>b) Trường hợp 2</p> <p>Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng</p>		<p>Xét $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$:</p> $\left. \begin{aligned} \frac{AB}{A'B'} &= \frac{CA}{C'A'} = k \\ \hat{A} &= \hat{A}' \end{aligned} \right\}$ <p>$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$</p> <p>(c-g-c)</p>

nhau thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.		
c) Trường hợp 3 Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.		<p>Xét $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$:</p> $\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{array} \right\}$ $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad (\text{g-g})$

Ví dụ 4. Tìm các cặp tam giác đồng dạng trong các tam giác dưới đây



Bài giải

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$, ta có

$$\frac{AB}{DE} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \frac{AC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \frac{BC}{DF} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{DF} = \frac{1}{2}$$

Vậy $\triangle ABC \sim \triangle DEF$,

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song BC cắt cạnh AB và AC tại D và E

sao cho $DC^2 = BC.DE$. Chứng minh $\hat{ECD} = \hat{DBC}$

Bài giải

Ta có $DC^2 = BC.DE$

$$\Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{DE}{DC}$$

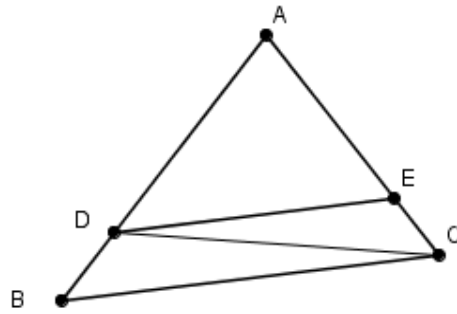
Xét hai tam giác DEC và CDB có

$$\hat{EDC} = \hat{DCB} \text{ (so le trong)}$$

$$\text{Và } \frac{DC}{BC} = \frac{DE}{DC}$$

Nên $\Delta DEC \sim \Delta CDB$

$$\Rightarrow \hat{ECD} = \hat{DBC} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

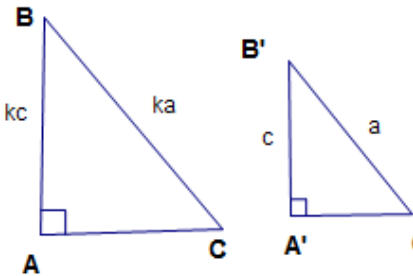


Bài 7. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA HAI TAM GIÁC VUÔNG

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1) Các trường hợp đồng dạng đặc biệt của hai tam giác vuông

Suy ra từ các trường hợp đồng dạng của hai tam giác	a) Trường hợp 1 Tam giác vuông này có 1 góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia.		Xét ΔABC vuông tại A, $\Delta A'B'C'$ vuông tại A' có $\hat{B} = \hat{B}'$ $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (g-g)
	b) Trường hợp 2 Tam giác vuông này có 2 cạnh góc vuông tỉ lệ với 2 cạnh góc vuông của tam giác vuông kia.		Xét ΔABC vuông tại A, $\Delta A'B'C'$ vuông tại A' có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{C'A'} = k$ $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (c-g-c)

<p>Định lí</p>	<p>c) Trường hợp 3 Nếu cạnh huyền và 1 cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và 1 cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.</p>		<p>Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, $\triangle A'B'C'$ vuông tại A' có</p> $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = k$ $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad (\text{ch-cgv})$
-----------------------	--	--	--

2) Áp dụng

a) **Định lí 1.** Tỉ số hai đường cao tương ứng của 2 tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = k \quad (k \text{ là tỉ số đồng dạng})$$

b) **Định lí 2.** Tỉ số các diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = k^2 \quad (S \text{ là diện tích, } k \text{ là tỉ số đồng dạng})$$

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 6cm; BC = 10cm. Lấy điểm D trên AB

và E trên AC sao cho AE = 3cm; DE = 5cm. Chứng minh $\hat{ADE} = \hat{ACB}$

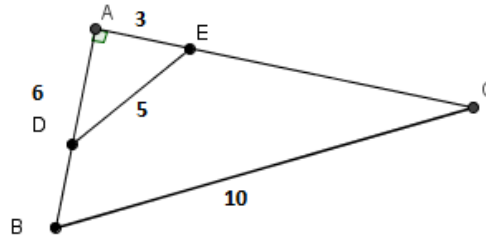
Bài giải

Xét hai tam giác vuông ABC và AED

$$\text{Ta có } \frac{AE}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \frac{DE}{BC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$$

Suy ra $\triangle ABC \sim \triangle AED$



Vậy $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AH là đường cao và AM là đường trung tuyến. Tính diện tích tam giác AHM và tỉ số diện tích tam giác AHM và ABC, biết BH = 4cm; CH = 6cm.

Bài giải

Ta có hai tam giác vuông HAB và HCA đồng dạng $\Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{HB}{HA}$

$$\Rightarrow AH^2 = BH.HC = 16.4 = 64$$

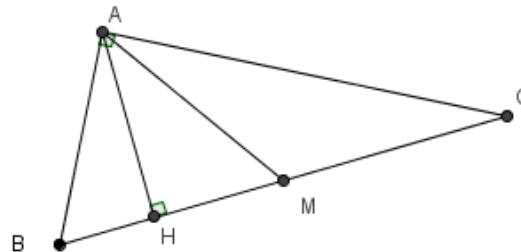
$$\Rightarrow AH = 8\text{cm}$$

$$BM = CM = \frac{1}{2}BC = 10\text{cm}$$

$$\text{Suy ra } HM = CH - MC = 6\text{cm}$$

$$\text{Nên } S_{AHM} = \frac{1}{2}AH.HM = 24\text{cm}^2; S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = 80\text{cm}^2$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{AHM}}{S_{ABC}} = \frac{24}{80} = \frac{3}{10}$$



Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). M là trung điểm BC. Vẽ $MD \perp AB$ tại D, $ME \perp AC$ tại E, $AH \perp BC$ tại H. qua A kẻ đường thẳng song song DH cắt DE tại K. HK cắt AC tại N. Chứng minh $HN^2 = AN.CN$.

Giải:

$MD \perp AB \Rightarrow MD \parallel AC$, do đó D là trung điểm AB. Tương tự E là trung điểm AC.

Ta có $DE \parallel BA$.

Hai tam giác BDH và DAK có:

$$\widehat{HBD} = \widehat{KDA} \text{ (góc đồng vị)}$$

$$BD = DA$$

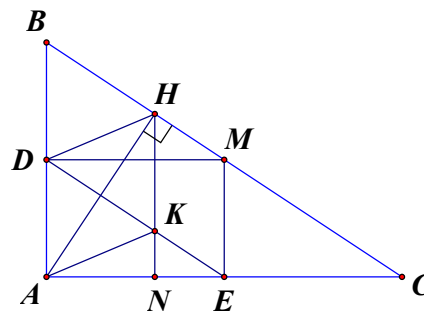
$$\widehat{BDH} = \widehat{DAK}$$

$$\Delta BDH = \Delta DAK \text{ (g - c - g)}$$

$$\Rightarrow DH = AK \Rightarrow ADHK \text{ là hình bình hành.}$$

Ta có $HK \parallel DA \Rightarrow HN \perp AC$.

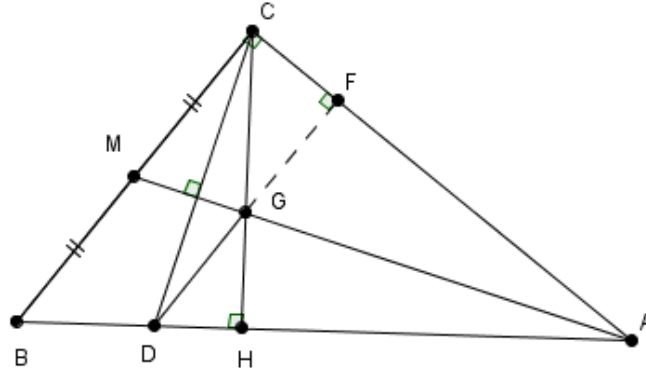
$$\Delta NAH \sim \Delta NHC \Rightarrow \frac{NA}{NH} = \frac{NH}{NC} \Leftrightarrow HN^2 = AN.CN.$$



B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 21. Cho tam giác ABC vuông cân có $\hat{C} = 90^\circ$. Từ C kẻ 1 tia vuông góc với trung tuyến AM cắt AB ở D. Hãy tính tỉ số $\frac{BD}{DA}$

Bài giải



Kẻ $CH \perp AB$ tại H vì tam giác ABC vuông cân tại C nên đường cao CH đồng thời là đường trung tuyến.

Gọi G là giao điểm AH và AM

Suy ra G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow \frac{AG}{GM} = 2$

Trong tam giác ACD có $\left. \begin{array}{l} CH \perp AD \\ AG \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow H$ là trực tâm tam giác ADC

Suy ra $DG \perp AC$

Ta lại có $BC \perp AC$ nên $BC \parallel DG$

Hay $DG \parallel BM \Rightarrow \frac{AG}{MG} = \frac{AD}{BD}$ (định lý Talet)

Mà $\frac{AG}{MG} = 2$ do đó $\frac{AD}{BD} = 2$

Vậy $\frac{BD}{DA} = \frac{1}{2}$

Bài 22. Cho tam giác ABC có phân giác trong AD. Chứng minh rằng

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

Bài giải

Trên tia AD lấy điểm E sao cho $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (vì AD là phân giác)

$$\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$$

do đó $\triangle ABE \sim \triangle ADC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC = AE \cdot AD$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC = (AD + DE) \cdot AD$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC = AD^2 + AD \cdot DE \quad (1)$$

Xét $\triangle BDE$ và $\triangle ADC$ có

$$\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$$

$$\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

suy ra $\triangle BDE \sim \triangle ADC$

$$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow AD \cdot AC = BD \cdot DC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

Bài 23. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi M là trung điểm cạnh BC, N là trung điểm cạnh AC. Các đường trung trực của cạnh BC và AC cắt nhau tại điểm O. H là trực tâm và G là trọng tâm.

a) Hai tam giác ABH và MNO đồng dạng?

b) Hai tam giác AHG và MOG đồng dạng?

c) Ba điểm H, G, O thẳng hàng.

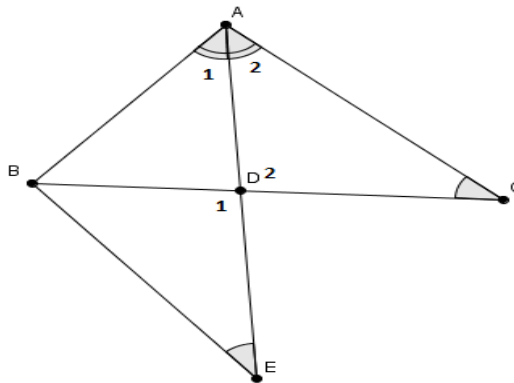
Bài giải

a) Ta có $AH \perp OM$; $AB \perp MN$; $BH \perp ON$ nên

$$\widehat{BAH} = \widehat{OMN}; \widehat{ABH} = \widehat{ONM}$$

Do đó $\triangle OMN \sim \triangle HAB$

b) Xét hai tam giác OMG và HAG ta có



$$\widehat{HAG} = \widehat{OMG}; \frac{OM}{AH} = \frac{MG}{AG} = \frac{1}{2}$$

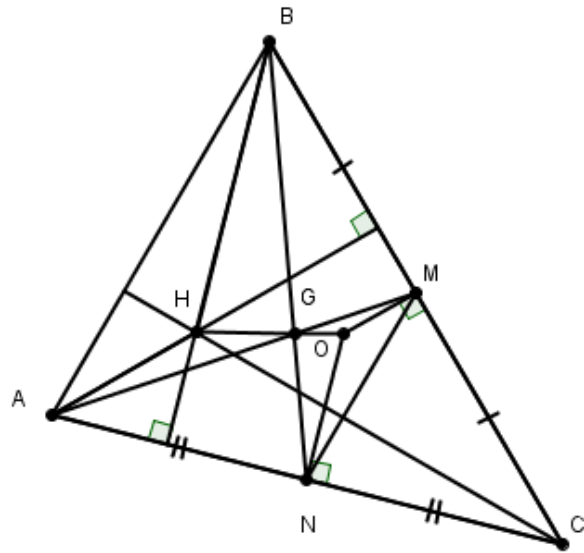
Nên $\triangle OMG \sim \triangle HAG$

c) Từ câu b) suy ra $\widehat{MGO} = \widehat{AGH}$.

Ta có

$$\widehat{MGO} + \widehat{MGH} = \widehat{AGH} + \widehat{MGH} = 180^\circ$$

suy ra H, G, O thẳng hàng



Bài 24. Giả sử AC là đường chéo lớn của hình bình hành ABCD. Từ C kẻ các đường thẳng CE, CF lần lượt vuông góc với AB, AD. Chứng minh rằng:

$$AB.AE + AD.AF = AC^2$$

Bài giải

Vẽ $BH \perp AC (H \in AC)$

Xét $\triangle HAB$ và $\triangle EAC$ có

$$\widehat{H} = \widehat{E} = 90^\circ$$

\widehat{A} chung

Suy ra $\triangle HAB \sim \triangle EAC$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AE} \Rightarrow AB.AE = AH.AC \quad (1)$$

Xét $\triangle HBC$ và $\triangle FCA$ có

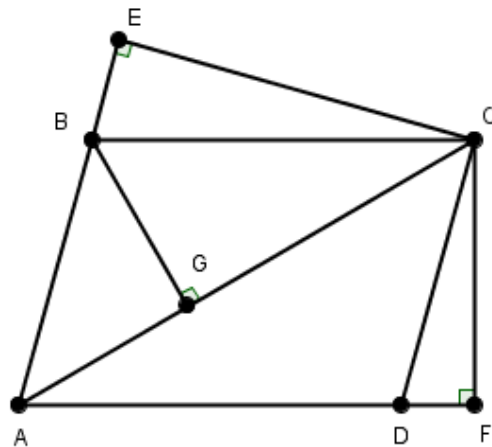
$$\widehat{H} = \widehat{F} = 90^\circ$$

$$\widehat{BCH} = \widehat{CAF} \quad (BC \parallel AF)$$

Suy ra $\triangle HBC \sim \triangle FCA$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{HC}{AF} \Rightarrow BC.AF = HC.AC \quad (2)$$

Mà $AD = BC$ (vì ABCD là hình bình hành)



Lấy (1) cộng (2) vế theo vế ta được:

$$AH.AC + HC.AC = BC.AF + AB.AE$$

$$\Leftrightarrow AC(AH+HC) = BC.AF + AB.AE$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = BC.AF + AB.AE \text{ (đpcm)}$$

Bài 25. Cho tam giác ABC, điểm M thuộc cạnh CA. Vẽ MP song song với AB (P thuộc CB) và MN song song với CB (N thuộc AB). Biết $S_{\triangle AMN} = a^2, S_{\triangle PMC} = b^2$. Chứng minh rằng

$$S_{\triangle ABC} = (a + b)^2$$

Bài giải

Gọi $MA = x; MC = y$ ($x, y > 0$)

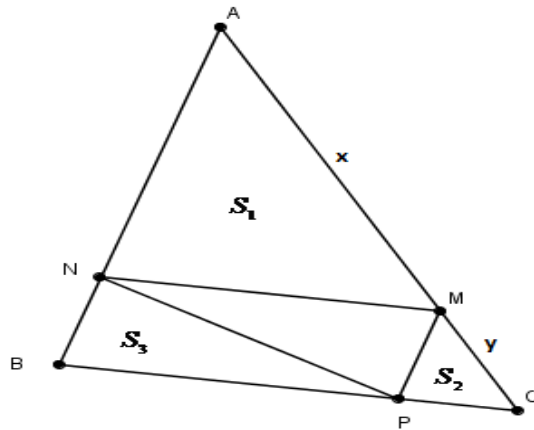
Gọi $S_{\triangle AMN} = S_1, S_{\triangle PMC} = S_2$

$$S_{\triangle BNP} = S_3; S_{\triangle ABC} = S$$

Ta có $MN \parallel BC$

$$\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S} = \left(\frac{AM}{AC} \right)^2 = \left(\frac{x}{x+y} \right)^2$$



Ta có $MP \parallel BA \Rightarrow \triangle CMP \sim \triangle CAB$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{S} = \left(\frac{MC}{AC} \right)^2 = \left(\frac{y}{x+y} \right)^2$$

$$\text{Do đó } \frac{S_1 + S_2}{S} = \left(\frac{x}{x+y} \right)^2 + \left(\frac{y}{x+y} \right)^2$$

$$\text{Ta có } \frac{S - (S_1 + S_2)}{S} = \frac{2xy}{(x+y)^2} \quad (1)$$

Ta có BNMP là hình bình hành $S_{BNMP} = 2S_3$

$$\text{Do đó từ (1) ta có thể viết } \frac{2S_3}{S} = \frac{2xy}{(x+y)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_3}{S} = \frac{x}{(x+y)} \cdot \frac{y}{(x+y)} \quad (2)$$

Bình phương hai vế của (2) ta được

$$\left(\frac{S_3}{S}\right)^2 = \frac{S_1}{S} \cdot \frac{S_2}{S} \Rightarrow S_3^2 = S_1 \cdot S_2$$

Hay $S_3 = a.b$

Mặt khác $S_{\Delta ABC} = S_1 + S_2 + 2S_3 = a^2 + b^2 + 2ab$

Vậy $S_{\Delta ABC} = (a + b)^2$

Bài 26. Cho tam giác ABC, kẻ đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng $AE.AB = AD.AC$

b) Chứng minh rằng $\hat{ADE} = \hat{ABC}$

c) Chứng minh rằng $CH.CE + HB.BD = BC^2$

d) Giả sử góc A có số đo bằng 60° $S_{\Delta ABC} = 120cm^2$. Tính $S_{\Delta ADE}$

Bài giải

a) Xét ΔAEC và ΔADB có $\hat{D} = \hat{E} = 90^\circ$

\hat{A} chung

Nên $\Delta AEC \sim \Delta ADB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$

Vậy $AE.BA = AD.AC$ (đpcm)

b) Xét ΔADE và ΔABC có \hat{A} chung

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB} \text{ (cm câu a)}$$

Nên $\Delta ADE \sim \Delta ABC$. Vậy $\hat{ADE} = \hat{ABC}$

c) Vẽ $HF \perp BC$, $F \in BC$

Xét tam giác BFH và tam giác BDC có

\hat{B} chung

$$\hat{D} = \hat{F} = 90^\circ$$

Nên $\Delta BFH \sim \Delta BDC$

$$\text{Suy ra } \frac{BF}{BD} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH \cdot BD = BF \cdot BC$$

Chứng minh tương tự ta có

$$CH \cdot CE = CF \cdot BC$$

$$\text{Mà } CF \cdot BC + BC \cdot BF = BC(CF + BF) = BC^2$$

$$\text{Do đó } CH \cdot CE + HB \cdot BD = BC^2 \text{ (đpcm)}$$

d) Đặt $AB = a$

Trong tam giác vuông ADB ta có $\hat{A} = 60^\circ$ suy ra $\hat{B}_1 = 30^\circ$

$$\Delta ADB \text{ là nửa tam giác đều cạnh } AB = a \text{ nên đường cao } BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AD = \frac{a}{2}$$

Mặt khác, ta có $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (cm câu b)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{AD}{AB} \right)^2$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{AD}{AB} \right)^2 = \left(\frac{a/2}{a} \right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{và } S_{\Delta ABC} = 120 \text{ cm}^2$$

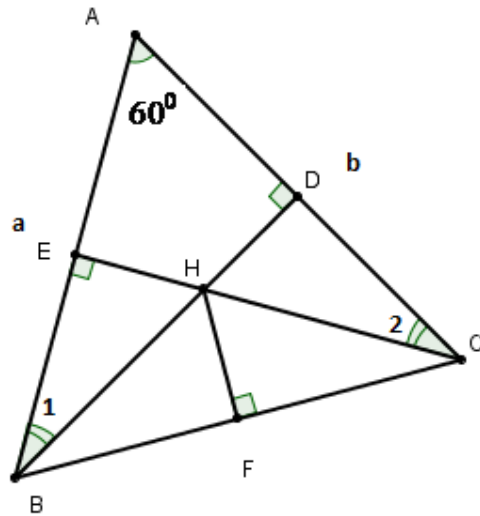
$$\text{nên } S_{\Delta ADE} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4} \cdot 120 = 30 \text{ cm}^2$$

Bài 27. Cho tam giác, đường phân giác AI. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của B và C lên

$$AI. \text{ Chứng minh } \frac{AD}{AE} = \frac{ID}{IE}$$

Bài giải

Ta có AI là phân giác góc A.



Nên theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}$ (1)

Ta lại có $BD \parallel EC$ (vì cùng vuông góc với AI) $\Rightarrow \frac{ID}{IE} = \frac{BI}{IC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow \frac{ID}{IE} = \frac{BA}{AC}$ (3)

Mặt khác, xét $\triangle ADB$ và $\triangle AEC$ có

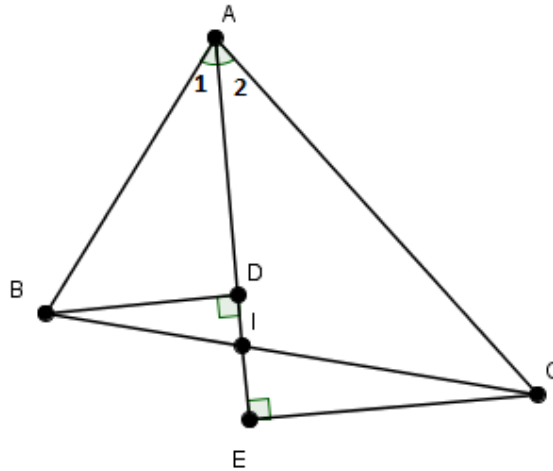
$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (AI là phân giác góc A)}$$

$$\hat{D} = \hat{E} = 90^\circ$$

Suy ra $\triangle ADB \simeq \triangle AEC$ (g-g)

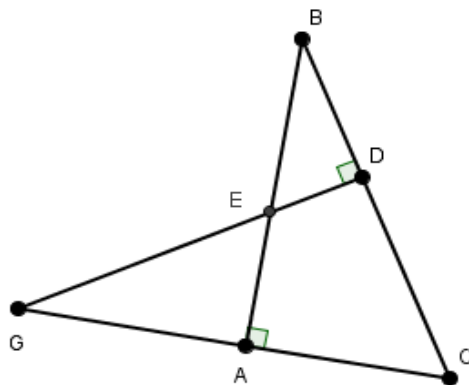
$$\Rightarrow \frac{BD}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{AD}{AE} = \frac{ID}{IE}$



Bài 28. Cho tam giác ABC vuông tại A. Qua điểm D trên đáy BC kẻ đường vuông góc với BC cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự ở E và G. Chứng minh $DB \cdot DC = DE \cdot DG$

Bài giải



Xét $\triangle DGC$ và $\triangle ABC$ có $\hat{D} = \hat{A} = 90^\circ$ và \hat{C} chung

Suy ra $\triangle DGC \simeq \triangle ABC$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{DG}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow AB.DC = DG.AC \Rightarrow \frac{DG}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DBE$ có $\hat{D} = \hat{A} = 90^\circ$ và \hat{B} chung

Suy ra $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC} \Rightarrow AB.DE = DB.AC$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{DB} = \frac{AB}{AC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DE}{DB} = \frac{DC}{DG}$

Vậy $DB.DC = DE.DG$

Bài 29. Trong tam giác ABC có hai góc B và góc A thỏa mãn điều kiện $\hat{D} = \hat{C}^3 - \hat{E}$, kẻ đường cao CH. Chứng minh $FK^5 = EK.DK$

Bài giải

Trong tam giác vuông AHC ta có $\hat{C}_1 + \hat{A} = 90^\circ$ (1)

Trong tam giác vuông BHC ta có $\hat{C}_2 + \hat{B} = 90^\circ$ (2)

Mặt khác ta có $\hat{D} = \hat{C}^3 - \hat{E}$ thay vào (1)

ta được $\hat{C}_1 = \hat{B}$

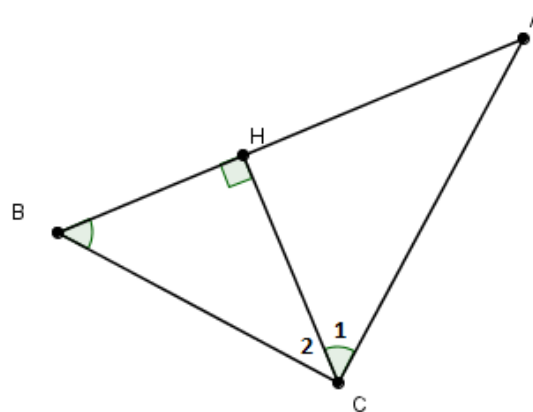
Vậy ta có $\hat{C}_1 = \hat{B}$

Xét $\triangle HBC$ vuông tại H và $\triangle HCA$

vuông tại H có $\hat{C}_1 = \hat{B}$ (cmt)

Nên $\triangle HBC \sim \triangle HCA$

$$\frac{HB}{HC} = \frac{HC}{HA} \Rightarrow HC^2 = HB.HA$$



Bài 30. Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ một điểm D bất kỳ trên cạnh AC kẻ các đường CE vuông góc với DB tại E.

Chứng minh rằng $BE.AC = AB.EC + AE.BC$

Bài giải

Gọi M là giao điểm của AB và CE. Vẽ AF vuông góc với AE (F thuộc BE).

Xét $\triangle MBE$ và $\triangle MCA$ có $\hat{E} = \hat{A} = 90^\circ$

\hat{M} chung

Suy ra $\triangle MBE \simeq \triangle MCA$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{MB}{ME} = \frac{MC}{AM}; \hat{MBE} = \hat{MCA}$$

Xét $\triangle ABF$ và $\triangle ACE$ có

$\hat{MBE} = \hat{MCA}$ (cmt) và $\hat{ABF} = \hat{EAC}$ (cùng phụ với \hat{FED})

Suy ra $\triangle ABF \simeq \triangle ACE$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CE} \Rightarrow AB.CE = AC.BF \quad (1)$$

Mặt khác, ta có $\triangle ABD \simeq \triangle ECD$ (g-g) vì $\hat{E} = \hat{A} = 90^\circ$ và $\hat{ADB} = \hat{EDC}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \frac{DA}{DE} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{DE}{DC}$$

Ta lại có $\triangle ADE \simeq \triangle BDC$ vì có $\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{DC}$ (cmt) và $\hat{ADE} = \hat{BDC}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \hat{AED} = \hat{DCB}$$

Nên $\triangle AEF \simeq \triangle ACB$ vì có $\hat{AED} = \hat{DCB}$ (cmt) và $\hat{E} = \hat{A} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{EF}{CB} \Rightarrow AE.CB = AC.EF \quad (2)$$

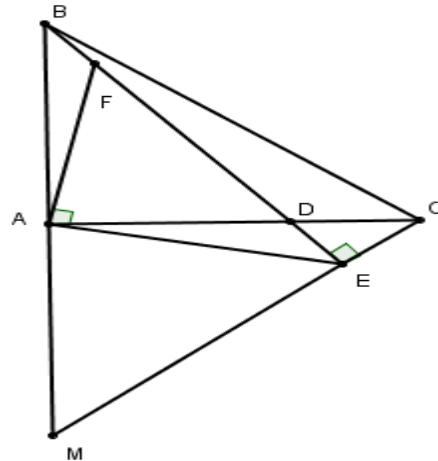
Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được

$$AB.CE + AE.BC = AC.BF + AC.EF = AC(BF + EF) = AC.BE$$

Vậy $BE.AC = AB.EC + AE.BC$

Bài 31. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E. Tia AE cắt đường thẳng CD tại M, tia DE cắt AB tại N. Chứng minh rằng:

a) $\triangle NBC \simeq \triangle BCM$



b) BM vuông với CN

Bài giải

a) Ta có $AB \parallel CM$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CM} = \frac{BE}{CE} \quad (1)$$

Và ta có $CD \parallel BN$

$$\Rightarrow \frac{BN}{CD} = \frac{BE}{CE} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{BN}{CD} = \frac{BA}{CE}$$

$$\Rightarrow BN \cdot MC = CD \cdot AB \text{ mà } CD = AB = BC \text{ (do } ABCD \text{ là hình thang vuông)}$$

$$\Rightarrow BN \cdot MC = BC^2 \Leftrightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{BC}{MC}$$

$$\text{Vậy } \triangle NBC \sim \triangle BCM$$

b) Ta có $\triangle NBC \sim \triangle BCM$ (cm câu a)

$$\text{Suy ra } \hat{B}_2 = \hat{N}; \hat{C}_2 = \hat{M}$$

$$\text{Mà } \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{N} = 90^\circ$$

Vậy BM vuông với CN

Bài 32. Chứng minh rằng trung điểm hai đáy của một hình thang, giao điểm hai đường chéo và giao điểm hai cạnh bên kéo dài của hình thang đó thẳng hàng.

Bài giải

Trong hình vẽ bên ta phải chứng minh

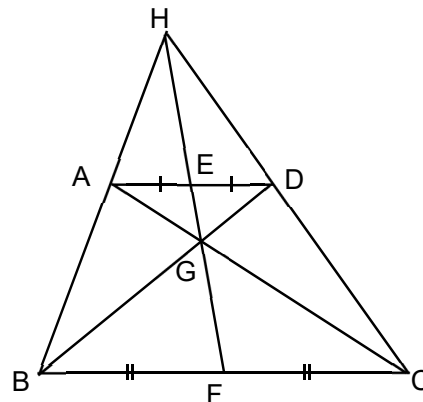
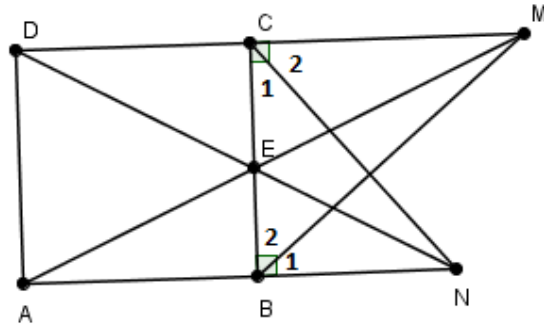
bốn điểm H, E, G, F thẳng hàng.

Nối EG, FG ta được

$$\triangle ADG \sim \triangle CBG \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AD}{CB} = \frac{AG}{CG}$$

$$\text{Hay } \frac{2AE}{2CF} = \frac{AG}{CG} \Leftrightarrow \frac{AE}{CF} = \frac{AG}{CG} \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } \hat{EAG} = \hat{FCG} \text{ (so le trong)} \quad (2)$$



Tổ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle AEG \sim \triangle CFG$ (c.g.c)

Nên $\widehat{AGE} = \widehat{CGF}$. Vậy E, G, F thẳng hàng (3)

Nên EH, FH. Chứng minh tương tự trên ta được $\triangle AEH \sim \triangle BFH$

$$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{BHF}$$

Vậy H, E, F thẳng hàng (4)

Từ (3) và (4) ta kết luận H, E, G, F thẳng hàng

Bài 33. Tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). M là trung điểm BC. Vẽ $MD \perp AB$ tại D, $ME \perp AC$ tại E, $AH \perp BC$ tại H. qua A kẻ đường thẳng song song DH cắt DE tại K. HK cắt AC tại N. Chứng minh $HN^2 = AN.CN$.

Giải:

$MD \perp AB \Rightarrow MD \parallel AC$, do đó D là trung điểm AB. Tương tự E là trung điểm AC.

Ta có $DE \parallel BA$.

Hai tam giác BDH và DAK có:

$$\widehat{HBD} = \widehat{KDA} \text{ (góc đồng vị)}$$

$$BD = DA$$

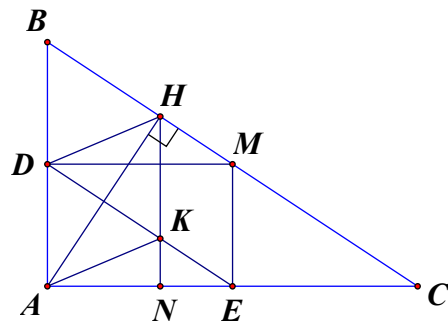
$$\widehat{BDH} = \widehat{DAK}$$

$$\triangle BDH = \triangle DAK \text{ (g - c - g)}$$

$$\Rightarrow DH = AK \Rightarrow ADHK \text{ là hình bình hành.}$$

Ta có $HK \parallel DA \Rightarrow HN \perp AC$.

$$\triangle NAH \sim \triangle NHC \Rightarrow \frac{NA}{NH} = \frac{NH}{NC} \Leftrightarrow HN^2 = AN.CN.$$



Bài 34. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, từ H kẻ HI vuông góc với AB tại I, HK vuông góc với AC tại K

a) Chứng minh tam giác AKI đồng dạng với tam giác ABC suy ra $AI.AB = AK.AC$.

b) Chứng minh $\widehat{ABK} = \widehat{ACI}$.

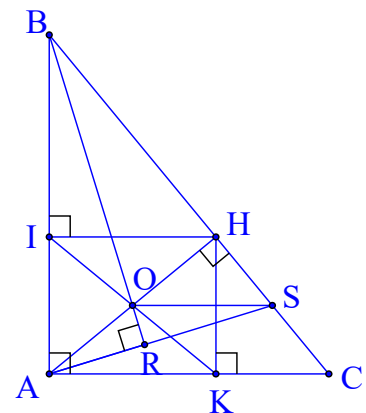
c) Gọi O là trung điểm của đoạn IK. Từ A vẽ đường thẳng vuông góc với đường thẳng BO tại R. Đường thẳng AR cắt cạnh BC tại S. Chứng minh S là trung điểm của đoạn thẳng HC.

Giải:

a) Tứ giác AKHI có $\widehat{A} = \widehat{K} = \widehat{I} = 90^\circ$ nên AKHI là hình chữ nhật, ta có: $\widehat{AKI} = \widehat{AHI}$.

Lại có $\widehat{AHI} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với góc \widehat{BHI}). Suy ra $\widehat{AKI} = \widehat{ABC}$

Hai tam giác AKI và ABC có \widehat{A} chung, $\widehat{AKI} = \widehat{ABC}$ nên $\triangle AKI \sim \triangle ABC$.



b) Theo trên, $\Delta AKI \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AI}{AC}$, và hai tam giác AKB và AIC có \widehat{A} chung nên $\Delta AKB \sim \Delta AIC$. Từ đó ta có $\widehat{ABK} = \widehat{ACI}$.

c) Xét tam giác ABS có AH và BR là đường cao nên O là trực tâm tam giác ABS, do đó $SO \perp AB$, suy ra $SO \parallel AC$.

Mặt khác, theo trên thì tứ giác AKHI là hình chữ nhật nên O là trung điểm AH. Như vậy trong tam giác AHC, SO là đường trung bình. Từ đó ta có S là trung điểm của HC.

Bài 35. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB=3\text{cm}$, $AC=4\text{cm}$, vẽ đường cao AH.

a) Vẽ đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt AH kéo dài tại D. Chứng minh $\Delta BAC \sim \Delta ACD$, rồi suy ra $AC^2 = AB \cdot CD$.

b) Chứng minh tứ giác ABDC là hình thang vuông. Tính diện tích của ABDC.

c) Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt AC tại E và cắt BD tại F. So sánh HE và HF?

Giải:

a) Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với góc \widehat{ABH}),

$\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 90^\circ$. Do đó: $\Delta BAC \sim \Delta ACD$. Từ đó suy ra $\frac{AC}{CD} = \frac{BA}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot CD$.

b) Vì AB và CD cùng vuông góc với AC nên $AB \parallel CD$. Tứ giác ABDC có $AB \parallel CD$ và $\widehat{A} = 90^\circ$ nên ABDC là hình thang vuông.

Theo trên $AC^2 = AB \cdot CD \Rightarrow CD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{16}{9}(\text{cm})$.

$S_{ABDC} = \frac{1}{2}(AB + DC)AC = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{16}{9}\right)4 = \frac{86}{9}(\text{cm}^2)$.

c) Dễ thấy: $\Delta ABH \sim \Delta DCH \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{AH}{DH} \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{AH}{AD}$ (1).

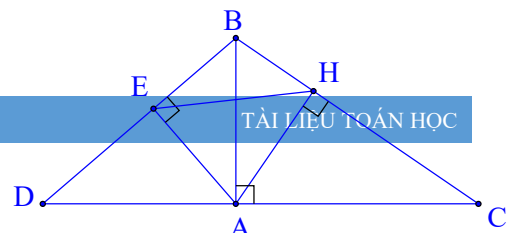
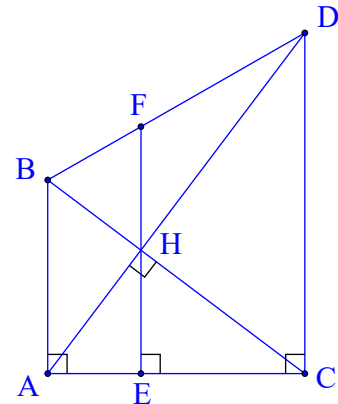
Mặt khác, $EF \parallel DC$ nên theo định lý Talet ta có: $\frac{HF}{CD} = \frac{BH}{BC}$ và $\frac{HE}{DC} = \frac{AH}{AD}$ (2).

(1) và (2) $\Rightarrow \frac{HF}{CD} = \frac{HE}{DC} \Rightarrow HE = HF$.

Bài 36. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao (H thuộc BC)

a) Trên tia đối của tia AC lấy điểm D, vẽ AE vuông góc với BD tại E. Chứng minh tam giác AEB đồng dạng tam giác DAB.

b) Chứng minh $BE \cdot BD = BH \cdot BC$.



c) Chứng minh $\widehat{BHE} = \widehat{BDC}$.

Giải:

a) Ta có: $\widehat{DBA} = \widehat{ABE}$ và $\widehat{AEB} = \widehat{DAB} = 90^\circ$ do đó $\triangle AEB \sim \triangle DAB$.

b) $\triangle AEB \sim \triangle DAB \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BA}{BD} \Rightarrow BE \cdot BD = BA^2$ (1).

Xét hai tam giác BAH và BCA có: $\widehat{ABH} = \widehat{CBA}$ và $\widehat{BHA} = \widehat{BAC} = 90^\circ$ nên

$\triangle BAH \sim \triangle BCA$, suy ra $\frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow BH \cdot BC = BA^2$ (2).

(1) và (2) suy ra $BE \cdot BD = BH \cdot BC$.

c) Theo trên thì $BE \cdot BD = BH \cdot BC \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{BH}{BD}$. Xét hai tam giác BEH và BCD có góc \widehat{B}

chung và $\frac{BE}{BC} = \frac{BH}{BD}$ nên $\triangle BEH \sim \triangle BCD$. Từ đó ta có $\widehat{BHE} = \widehat{BDC}$.

Bài 37. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 8cm, AC = 6cm, đường cao AH. Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt AH tại D.

a) Chứng minh $\triangle AHB \sim \triangle DHC$

b) Chứng minh $AC^2 = AB \cdot DC$.

c) Tứ giác ABDC là hình gì? Vì sao? Tính diện tích của tứ giác ABDC.

Giải:

a) Ta có $\widehat{ABH} = \widehat{DCH}$ (so le trong) và $\widehat{AHB} = \widehat{DHC} = 90^\circ$ nên $\triangle AHB \sim \triangle DHC$.

b) $\widehat{ABC} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với góc \widehat{BAH}).

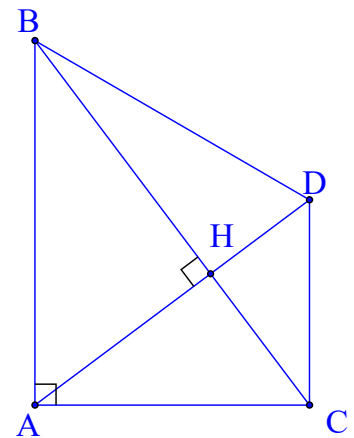
DC // AB nên $DC \perp AC \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 90^\circ$. Do đó $\triangle ABC \sim \triangle CAD$, từ đó suy ra:

$$\frac{AB}{CA} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = AC^2.$$

c) AB // CD và $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên ABDC là hình thang vuông.

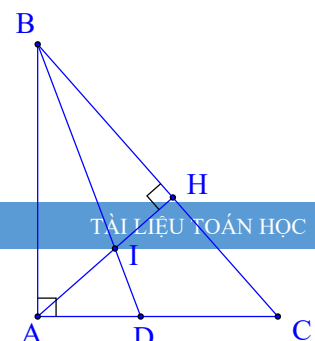
$$AB \cdot CD = AC^2 \Rightarrow CD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} \text{ (cm)}.$$

$$S_{ABDC} = \frac{1}{2}(AB + CD)AC = \frac{1}{2}\left(8 + \frac{9}{2}\right)6 = \frac{75}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Bài 38. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Kẻ BD là tia phân giác của \widehat{ABC} cắt AH tại I. Chứng minh $AD^2 = IH \cdot DC$.

Giải:



Ta sẽ chứng minh $\frac{AD}{DC} = \frac{IH}{AD}$.

Theo tính chất chân đường phân giác trong thì:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{BA}{BC} \quad (1).$$

Dễ thấy hai tam giác BAC và BHA đồng dạng nên:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BH}{BA} \quad (2).$$

Xét hai tam giác BHI và BAD có: $\widehat{HBI} = \widehat{ABD}$ (vì BD là tia phân giác của \widehat{ABC});

$\widehat{BHI} = \widehat{BAD} = 90^\circ$. Do đó $\triangle BHI \sim \triangle BAD$, suy ra: $\frac{IH}{DA} = \frac{BH}{BA}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{AD}{CD} = \frac{IH}{DA} \Rightarrow AD^2 = IH \cdot CD$.

Bài 39. Cho đoạn thẳng AB. Trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB, vẽ hai tia Ax và By vuông góc với AB tại A và B. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (khác A, B). Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), tia vuông góc MC tại M cắt By tại D.

- Chứng minh $\triangle AMC \sim \triangle BDM$.
- Đường thẳng CD cắt AB tại E. Chứng minh rằng $EC \cdot BD = ED \cdot AC$.
- Vẽ MH vuông góc với CD tại H. Chứng minh $HM^2 = HC \cdot HD$.
- Gọi I là giao điểm của BC và AD. Chứng minh $DE \cdot IA = ID \cdot EC$.

Giải:

a) Ta có:

$$\widehat{AMC} + \widehat{BMD} = 90^\circ, \widehat{BMD} + \widehat{BDM} = 90^\circ$$

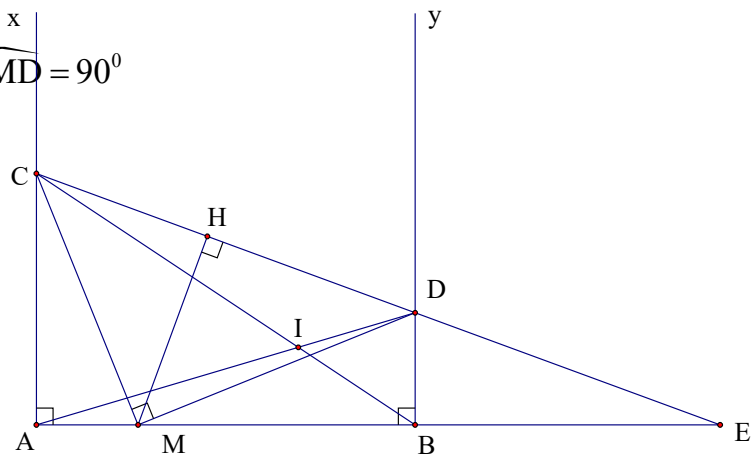
, suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{BDM}$.

Lại có $\widehat{MAC} = \widehat{DBM} = 90^\circ$, do đó $\triangle AMC \sim \triangle BDM$.

b) Vì $BD \parallel AC$, theo định lý

Talet ta có:

$$\frac{ED}{EC} = \frac{BD}{AC} \Rightarrow EC \cdot BD = ED \cdot AC$$



c) $\widehat{MCH} = \widehat{DMH}$ (cùng phụ với góc \widehat{CMH}); $\widehat{MHC} = \widehat{DHM} = 90^\circ$, nên ta có:

$$\triangle MCH \sim \triangle DMH \Rightarrow \frac{MH}{DH} = \frac{CH}{MH} \Rightarrow MH^2 = CH \cdot DH.$$

d) Ta có: $\frac{ED}{EC} = \frac{BD}{AC}$. Mặt khác: $BD \parallel AC$, ta suy ra $\triangle IDB \sim \triangle IAC$ nên $\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{AC}$.

Từ đó ta có: $\frac{ED}{EC} = \frac{ID}{IA} \Rightarrow DE.IA = ID.EC$.

Bài 40. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 15cm, AC = 20 cm và đường cao AH. Vẽ HD vuông góc AB tại D và HE vuông góc AC tại E.

a) Vẽ tia Ax vuông góc DE cắt BC tại M. Chứng minh M là trung điểm BC.

b) Tính diện tích tam giác ADE.

Giải:

a) Tứ giác ADHE có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ nên ADHE là hình chữ nhật.

$\widehat{MAB} = \widehat{EDH}$ (cùng phụ với góc \widehat{EDA}).

$\widehat{EDH} = \widehat{AHD}$ (ADHE là hình chữ nhật).

$\widehat{ABM} = \widehat{AHD}$ (cùng phụ với góc \widehat{BHD}).

Do đó: $\widehat{MAB} = \widehat{ABM}$. Từ đó suy ra được hai tam giác AMB và AMC cân tại M. Vậy M là trung điểm của BC.

b) $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 225 + 400 = 625 \Rightarrow BC = 25(\text{cm})$.

Dễ thấy $\Delta HBA \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{HA}{AC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow AH.BC = AB.AC$

$\Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{15.20}{25} = 12(\text{cm}) \Rightarrow ED = AH = 12(\text{cm})$.

$\widehat{ABC} + \widehat{HAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AED}$. Từ đó suy ra $\Delta ABC \sim \Delta AED$.

$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{12}{25} \Rightarrow AE = \frac{12}{25}.15 = \frac{36}{5}(\text{cm}), AD = \frac{12}{25}.20 = \frac{48}{5}(\text{cm})$.

Vậy $S_{ADE} = \frac{1}{2} AE.AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{5} \cdot \frac{48}{5} = \frac{864}{25}(\text{cm}^2)$.

Bài 41. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AD và BH cắt nhau tại I

a) Chứng minh HI.CB = CH.IA.

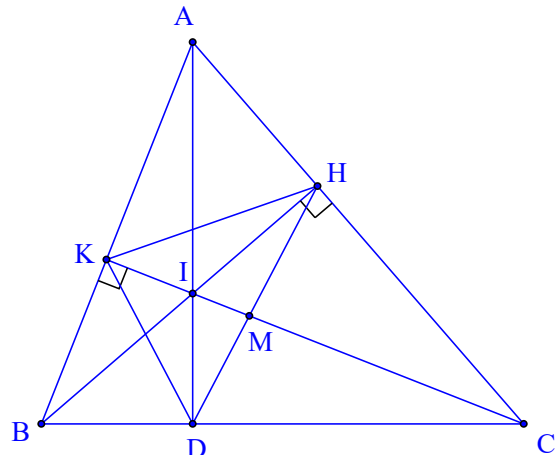
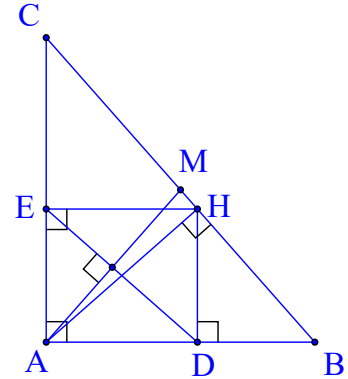
b) Tia CI cắt AB, DH lần lượt tại K, M. Chứng minh: IK.MC = KC.IM.

Giải:

a) Xét hai tam giác IHA và CHB có:

$\widehat{AIH} = \widehat{BCH}$ (cùng phụ với góc \widehat{CAD}).

$\widehat{IHA} = \widehat{CHB} = 90^\circ$.



Do đó $\Delta IHA \sim \Delta CHB$.

$$\text{Suy ra } \frac{IH}{CH} = \frac{IA}{CB} \Rightarrow HI.CB = CH.IA$$

b) Dễ thấy hai tam giác CDA và CHB đồng dạng, do đó: $\frac{CD}{CH} = \frac{CA}{CB}$.

Hai tam giác CDH và CAB có góc \widehat{C} chung và $\frac{CD}{CH} = \frac{CA}{CB}$ nên $\Delta CDH \sim \Delta CAB$.

Chứng minh tương tự, ta có $\Delta AHK \sim \Delta ABC$, từ đó ta có $\Delta CDH \sim \Delta KAH$

Suy ra $\widehat{CHD} = \widehat{KHA} \Rightarrow \widehat{KHI} = \widehat{MHI}$, hay I là chân đường phân giác trong kẻ từ H của tam giác HKM. Vì $HC \perp HI$ nên C là chân đường phân giác ngoài kẻ từ H của tam giác HKM. Theo tính chất chân đường phân giác trong và ngoài thì:

$$\frac{KI}{MI} = \frac{KA}{MA} = \frac{KC}{MC} \Rightarrow KI.MC = KC.MI.$$

(Chứng minh xong)

Bài 42. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc AC, E thuộc AB).

a) Chứng minh tam giác ADE và ABC đồng dạng tam giác ABC.

b) Gọi K, F lần lượt là giao điểm của AH với DE, BC. Chứng minh $KH.AF = AK.HF$

Giải:

a) Dễ thấy $\Delta ADB \sim \Delta AEC \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$. Xét

hai tam giác ADE và ABC có góc \widehat{A} chung và $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ nên $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

b) Chứng minh tương tự câu 1b.

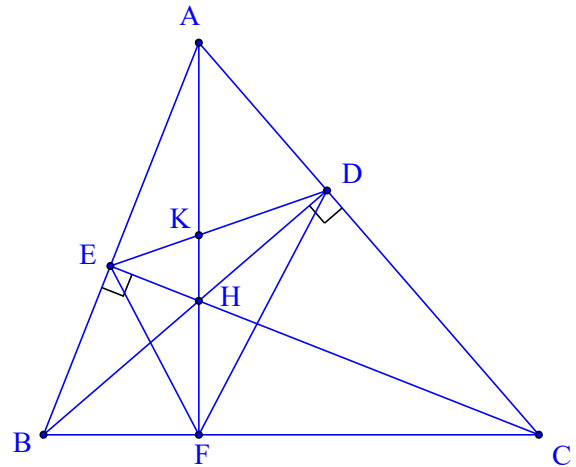
H và A lần lượt là chân đường phân giác trong và ngoài kẻ từ D của tam giác KDF, suy ra:

$$\frac{KH}{FH} = \frac{KA}{FA} = \frac{KD}{FD} \Rightarrow KH.FA = KA.FH.$$

Bài 43. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Kẻ đường cao BE và CF cắt nhau tại H.

a) Gọi K là giao điểm của AH và BC. Chứng minh tam giác BKF đồng dạng tam giác BAC.

b) Tia EF cắt AK và BC lần lượt tại N, D. Chứng minh $DE.FN = DF.NE$



c) Gọi O, I lần lượt là trung điểm của BC và AH. Chứng minh ON vuông góc DI.

Giải:

a) Dễ thấy $\triangle BAK \sim \triangle BCF$, do đó:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{BK}{BF}. \text{ Hai tam giác BKF và}$$

$$BAC \text{ có góc } \widehat{B} \text{ chung và } \frac{BK}{BF} = \frac{BA}{BC}$$

nên $\triangle BKF \sim \triangle BAC$.

b) Ta chứng minh được KN là đường phân giác trong và KD là đường phân giác ngoài kẻ từ K của tam giác FKE. Theo tính chất chân đường phân giác trong và phân giác ngoài, ta có:

$$\frac{EN}{FN} = \frac{ED}{FD} = \frac{EK}{FK} \Rightarrow ED \cdot FN = EN \cdot FD.$$

c) Gọi J là điểm đối xứng của H qua O, ta có BHCJ là hình bình hành, từ đó suy ra $BJ \perp AB$, $CJ \perp AC$.

Dễ thấy :

$$\triangle BFH \sim \triangle CFA \Rightarrow \frac{BF}{CF} = \frac{BH}{CA} = \frac{CJ}{CA}.$$

Từ đó ta có $\triangle BFC \sim \triangle JCA$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AJC}.$$

Mặt khác, tương tự câu a, ta chứng minh được $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{AEF}$.

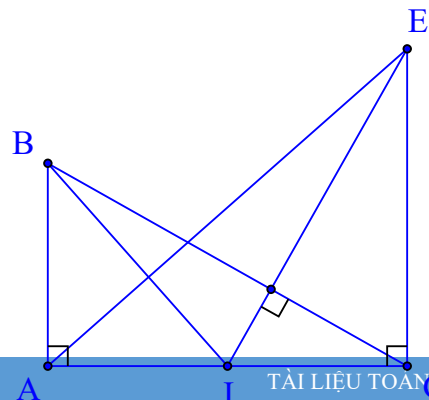
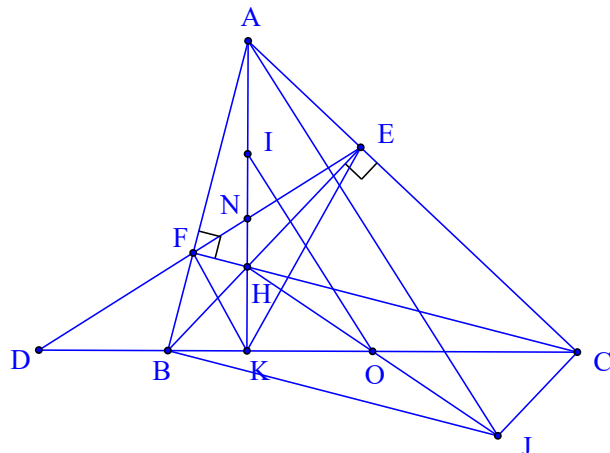
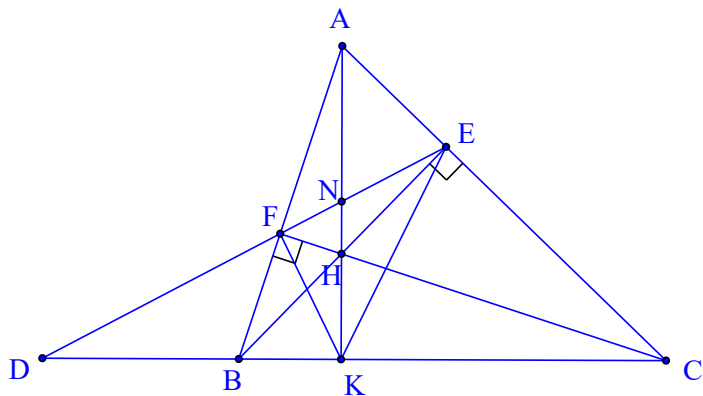
Từ đó ta có $\widehat{AEF} = \widehat{AJC}$. Mà $\widehat{AJC} + \widehat{JAC} = 90^\circ$ nên $\widehat{AEF} + \widehat{JAC} = 90^\circ$, hay $AJ \perp EF$.

Ta có IO là đường trung bình trong tam giác AHJ nên $IO \parallel AJ \Rightarrow EF \perp IO$.

Xét tam giác IDO có $IN \perp DO$, $DN \perp IO$ nên N là trực tâm $\triangle IDO$. Vậy $ON \perp DI$.

Bài 44. Cho tam giác ABC (góc $\widehat{A} = 90^\circ$, $AB < AC$). Qua trung điểm I của AC vẽ đường thẳng vuông góc với BC và qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC, chúng cắt nhau tại E. Chứng minh AE vuông góc BI.

Giải:



Ta có: $\widehat{ACB} = \widehat{CEI}$ (cùng phụ với \widehat{CIE}).

Do đó: $\Delta ACB \sim \Delta CEI$.

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{CI}{CE} = \frac{AI}{CE} \Rightarrow \frac{AB}{AI} = \frac{CA}{CE}$$

Vì $\widehat{BAI} = \widehat{ECA} = 90^\circ$ nên $\Delta ABI \sim \Delta CAE$

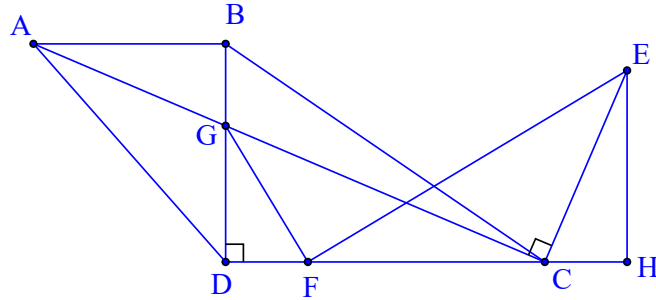
Do đó ta có $\widehat{ABI} = \widehat{CAE}$.

Mặt khác $\widehat{ABI} + \widehat{AIB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CAE} + \widehat{AIB} = 90^\circ$

Vậy $EA \perp BI$.

Bài 45. Cho hình thang ABCD ($CD > AB$; $AB \parallel CD$) có AB vuông góc BD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại G. Trên đường thẳng vuông góc với AC tại C lấy điểm E sao cho $CE = AG$ và đoạn thẳng GE không cắt đường thẳng CD. Trên đoạn thẳng DC lấy điểm F sao cho $DF = GB$. Chứng minh GF vuông góc EF.

Giải:



Dựng đường thẳng qua E, vuông góc với CD, cắt đường thẳng CD tại H.

Ta có $\widehat{ECH} + \widehat{DCG} = 90^\circ$, $\widehat{DCG} + \widehat{DGC} = 90^\circ$, $\widehat{DGC} = \widehat{AGB}$.

Từ đó suy ra $\widehat{ECH} = \widehat{AGB}$.

Như vậy ta có $\Delta AGB = \Delta ECH$ (g-c-g) $\Rightarrow EH = AB$, $CH = BG = DF$.

$$\text{Ta có } \Delta ABG \sim \Delta CDG \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{BG}{DG} = \frac{DF}{DG}.$$

Mà $EH = AB$, $HF = HC + CF = DF + CF = CD$ nên suy ra $\frac{DF}{DG} = \frac{HE}{HF}$ (1).

Lại có $\widehat{FDG} = \widehat{EHF} = 90^\circ$ (2).

(1), (2) suy ra $\Delta FDG \sim \Delta EHF \Rightarrow \widehat{DGF} = \widehat{HFE}$.

Mặt khác $\widehat{DGF} + \widehat{DFG} = 90^\circ$ nên $\widehat{HFE} + \widehat{DFG} = 90^\circ$. Vậy $\widehat{GFE} = 90^\circ$.

Chương 4. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

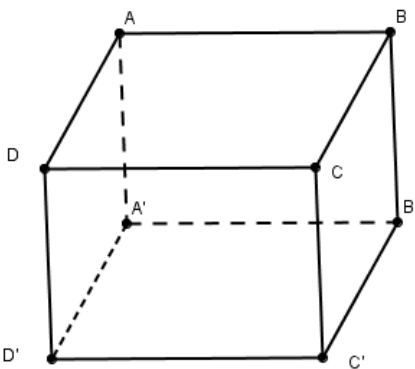
HÌNH CHÓP ĐỀU

Bài 1. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

A. CHUẨN KIẾN THỨC

1) Hình hộp chữ nhật

- Hình hộp chữ nhật có 6 mặt, 8 đỉnh và 12 cạnh.
- Hai mặt của hình hộp chữ nhật không có cạnh chung gọi là hai mặt đối diện và có thể xem chúng là hai đáy của hình hộp chữ nhật, khi đó các mặt còn lại được xem là các mặt bên.
- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt là hình vuông.



Hình hộp chữ nhật

$ABCD.A'B'C'D'$

2) Mặt phẳng và đường thẳng

- Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có thể xem:
 - Các đỉnh: A, B, C, D, A', \dots như là các điểm.
 - Các cạnh AD, DC, CC', \dots như là các đoạn thẳng.
 - Mỗi mặt, chẳng hạn mặt $ABCD$, là một phần của mặt phẳng (ta hình dung mặt phẳng trải rộng về mọi phía).
- Đường thẳng qua hai điểm A, B của mặt phẳng ($ABCD$) thì nằm trọn trong mặt phẳng đó (tức là mọi điểm của nó đều thuộc mặt phẳng).

3) Hai đường thẳng song song trong không gian

- Trong không gian hai đường thẳng a và b gọi là song song với nhau nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.
- Với hai đường thẳng phân biệt trong không gian, chúng có thể:
 - Cắt nhau
 - Song song
 - Không cùng nằm trong một mặt phẳng nào
- Hai đường thẳng phân biệt, cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

4) Đường thẳng song song với mặt phẳng. Hai mặt phẳng song song

- Khi AB không nằm trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ mà AB song song với một đường thẳng của mặt phẳng này, chẳng hạn $AB // A'B'$, thì ta nói AB song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và kí hiệu là $AB // mp(A'B'C'D')$.
- Xét hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$. Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau AB, AD và mặt phẳng $(A'B'C'D')$ chứa hai đường thẳng cắt nhau $A'B', A'D'$, hơn nữa AB song song với $A'B'$ và AD song song với $A'D'$, khi đó ta nói mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và kí hiệu $mp(ABCD) // mp(A'B'C'D')$

Ví dụ 1: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$

- Hãy kể tên các cạnh song song với mặt phẳng $(EFGH)$
- Kể tên các mặt phẳng song song với nhau

Bài giải

- * $BC // FG$ mà FG nằm trong mặt phẳng $(EFGH)$

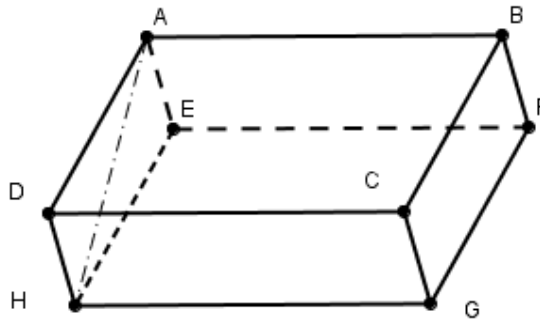
Vậy $BC // mp(EFGH)$

* $CD \parallel GH$ mà GH nằm trong mặt phẳng $(EFGH)$.

Vậy $GH \parallel mp(EFGH)$

* $DA \parallel HE$ mà HE nằm trong mặt phẳng $(EFGH)$.

Vậy $DA \parallel mp(EFGH)$



b) * $mp(BCGF) \parallel mp(ADHE)$ vì BF, BC cắt nhau nằm trong $mp(BCGF)$; AE, AD cắt nhau nằm trong $mp(ADHE)$ và $BF \parallel AE, BC \parallel AD$

* $mp(ABCD) \parallel mp(EFGH)$ vì AB, BC cắt nhau nằm trong $mp(ABCD)$; EF, FG cắt nhau nằm trong $mp(EFGH)$ và $AB \parallel EF, BC \parallel FG$

* $mp(ABFE) \parallel mp(DCGH)$ vì AB, AE cắt nhau nằm trong $mp(ABFE)$; DC, DH cắt nhau nằm trong $mp(DCGH)$ và $AB \parallel DC, AE \parallel DH$

5) Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Hai mặt phẳng vuông góc

- Khi đường thẳng $A'A$ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AD và AB của mặt phẳng $(ABCD)$ ta nói $A'A$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A và kí hiệu là $A'A \perp mp(ABCD)$
- Nhận xét:** Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng tại điểm A thì nó vuông góc với mọi đường thẳng đi qua A và nằm trong mặt phẳng đó.
- Khi một trong hai mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại thì ta nói hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

Ví dụ 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$

a) Đường thẳng AD vuông góc với những mặt phẳng nào?

b) Hai mặt phẳng $(AMQD)$ và $(DQPC)$ có vuông góc với nhau không?

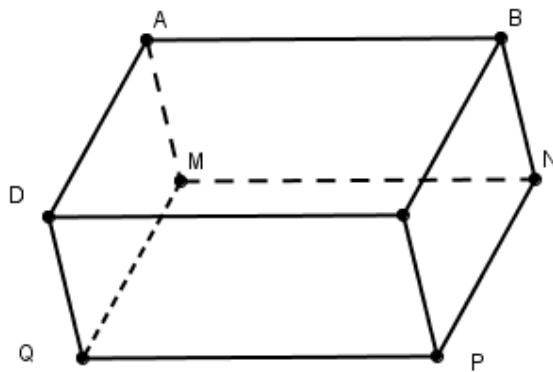
Bài giải

a)* AD vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AM và AB của mặt phẳng (AMNB) nên

$$DA \perp mp(AMNB)$$

* AD vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau DC và DQ của mặt phẳng (DQPC) nên

$$AD \perp mp(DQPC)$$



b) $mp(AMQD) \perp mp(DQPC)$ vì $AD \perp mp(DQPC)$ và AD nằm trong mặt phẳng (AMQD)

5) Diện tích xung quanh - Thể tích của hình hộp chữ nhật

- Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bằng tổng diện tích các mặt bên.

Ta có công thức $S_{xq} = 2ph$ (p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao).

- Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day}$$

- Nếu các kích thước của hình hộp chữ nhật là a, b, c (cùng đơn vị độ dài) thì thể tích của hình hộp chữ nhật đó là $V=abc$.
- Thể tích hình lập phương cạnh a là $V = a^3$.

Ví dụ 3: Tính các kích thước của hình hộp chữ nhật, biết rằng chúng tỉ lệ với 3, 4, 5 và thể tích của hình hộp này là $480cm^3$

Bài giải

Gọi các kích thước của hình hộp là a, b, c

Theo giả thiết ta có $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$ và $V = abc = 480cm^3$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $k^3 = \frac{abc}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{480}{60} = 8$

$$\Rightarrow k = 2$$

Vậy các kích thước của hình hộp là a = 6cm, b = 8cm, c = 10cm.

Ví dụ 4: Diện tích toàn phần của một hình lập phương là 486cm^3 . Thể tích của nó là bao nhiêu?

Bài giải

Hình lập phương có 6 mặt là các hình vuông bằng nhau. Vậy diện tích một mặt hình vuông là $486:6 = 81\text{cm}^2$. Một cạnh hình lập phương dài bằng $a=9\text{cm}$. Thể tích hình lập phương là

$$V = 9.9.9 = 729\text{cm}^3$$

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

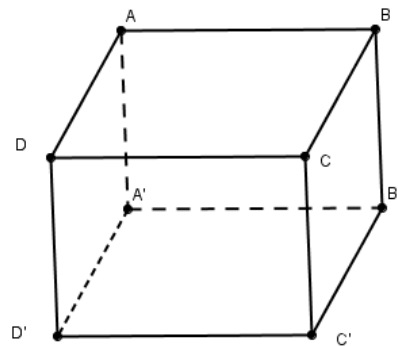
Bài 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

- Những cạnh nào song song với DD' ?
- Những cạnh nào song song với BC ?
- Những cạnh nào song song với CD ?
- Những mặt nào song song với $\text{mp}(BCC'B')$

Bài giải

- Các cạnh song song với DD' là AA' ; BB' ; CC' .
- Các cạnh song song với BC là $B'C'$; AD ; $A'D'$.
- Các cạnh song song với CD là AB ; $C'D'$; $A'B'$.
- $\text{mp}(BCC'B') \parallel \text{mp}(ADD'A')$

vì $\text{mp}(BCC'B')$ chứa hai đường thẳng BC và BB' cắt nhau, mà $BC \parallel AD$ và $BB' \parallel AA'$



Bài 2. Một căn phòng dài 5m, rộng 3,2m và cao 3m. Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường. Biết rằng tổng diện tích các cửa là $6,3\text{m}^2$. Hãy tính diện tích cần quét vôi?

Bài giải

Diện tích trần nhà

$$S_1 = 5.3,2 = 16m^2$$

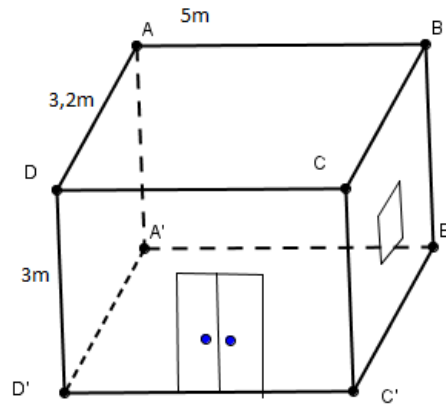
Diện tích một mặt các bức tường của căn phòng

$$S_2 = (3.5).2 + (3.3,2).2 = 49,2m^2$$

Diện tích cần quét vôi căn phòng (đã trừ diện tích các cửa) là

$$S = S_1 + S_2 - 6,3 = 16 + 49,2 - 6,3$$

$$S = 68,8m^2$$



Bài 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm đường thẳng chung (giao tuyến) của hai mặt phẳng

a) $mp(ABCD)$ và $mp(ADD'A')$

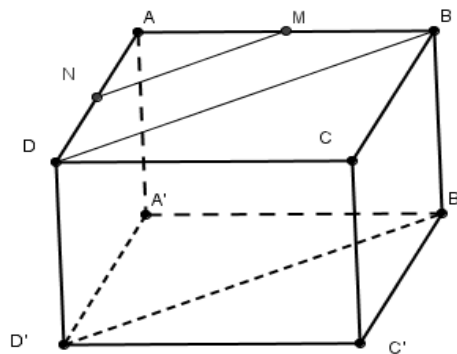
b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Chứng minh MN song song với các mặt phẳng $(BB'D'D)$ và $(A'B'C'D')$.

Bài giải

a) Giao tuyến của hai $mp(ABCD)$ và $mp(ADD'A')$ là AD.

b) Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABD nên $MN \parallel DB$, mà

$BD \subset mp(BB'D'D)$. Suy ra $MN \parallel mp(BB'D'D)$



* Ta có $MN \parallel mp(BB'D'D)$ (cmt)

Suy ra $MN \parallel B'D'$ mà $B'D' \subset mp(A'B'C'D')$

Nên $MN \parallel mp(A'B'C'D')$

Bài 4. Hãy kể tên những cạnh bằng cạnh BD của hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

Bài giải

Những cạnh bằng cạnh BD là AC; $B'D'$; $A'C'$.

Bài 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$; $AA' = 5\text{cm}$. Tính AC'

Bài giải

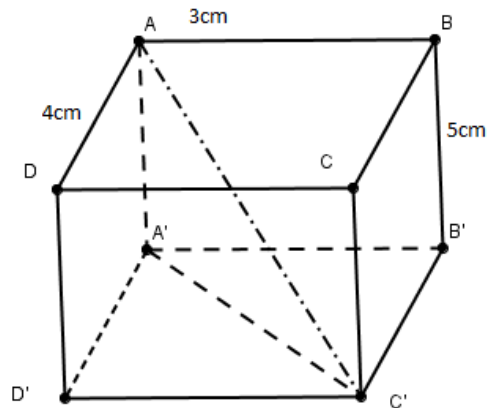
Ta có $AB = A'B' = 3\text{cm}$; $AA' = BB' = 5\text{cm}$

$AD = B'C' = 4\text{cm}$

Áp dụng định lý Py - ta - go vào tam giác vuông $A'B'C'$ ta có

$$A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$A'C' = 5\text{cm}$$



Áp dụng định lý Py - ta - go vào tam giác vuông $AA'C'$ ta có

$$AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = \sqrt{5^2 + 5^2}$$

$$AC' = 5\sqrt{2}\text{cm}$$

Bài 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

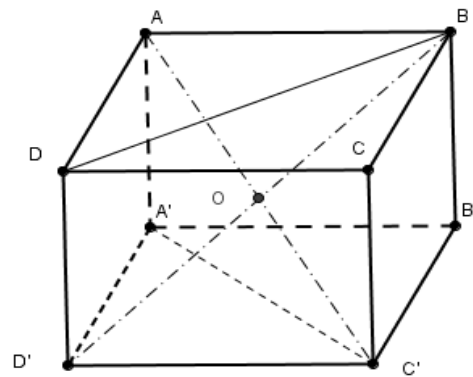
- Hai đường thẳng AC' và BD' có cắt nhau không?
- Đường thẳng BD có cắt các đường thẳng AA' , $A'C'$, CC' hay không?
- Tìm một điểm cách đều các đỉnh của hình hộp chữ nhật.

Bài giải

a) Đường thẳng AC' và BD' cắt nhau vì đó là hai đường chéo của hình hộp chữ nhật.

b) Ta có AA' vuông góc với $mp(ABCD)$ mà $BD \subset mp(ABCD)$ nên $AA' \perp BD$ hay BD cắt AA'

* Ta có $mp(ABCD) // mp(A'B'C'D')$



Mà $BD \subset mp(ABCD)$ và $A'C' \subset mp(A'B'C'D')$

Nên BD không cắt $A'C'$.

* Ta có CC' vuông góc với $mp(ABCD)$ mà $BD \subset mp(ABCD)$ nên $CC' \perp BD$ hay BD cắt CC'

Bài 7. Tìm độ dài cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $BD' = \sqrt{3}$ cm

Bài giải

Gọi độ dài cạnh hình lập phương là a cm

Ta có $B'D' = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ cm

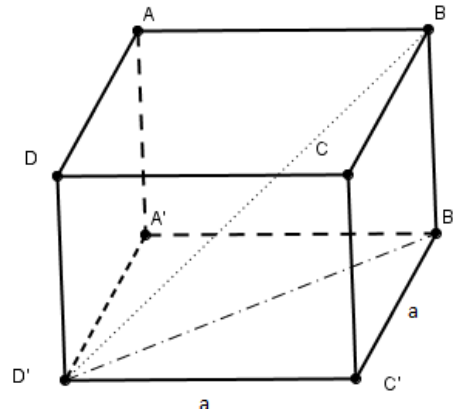
Ta có

$$BD' = \sqrt{B'D'^2 + BB'^2} = \sqrt{2a^2 + a^2}$$

$$BD' = a\sqrt{3} \text{ cm}$$

Mà $BD' = \sqrt{3}$ cm nên ta có $a = 1$ cm

Vậy cạnh hình lập phương là 1cm



Bài 8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng nếu $BA'C'$ là tam giác đều thì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương

Bài giải

Gọi cạnh tam giác đều $BA'C'$ là d

Chiều dài, chiều rộng, chiều cao hình hộp lần lượt là a, b, c

Trong tam giác vuông $A'D'C'$ ta có $d^2 = a^2 + b^2$ (1)

Trong tam giác vuông $AA'B$ ta có $d^2 = a^2 + c^2$ (2)

Trong tam giác vuông $C'B'B$ ta có $d^2 = b^2 + c^2$ (3)

Lấy (2)-(3) vế theo vế ta được

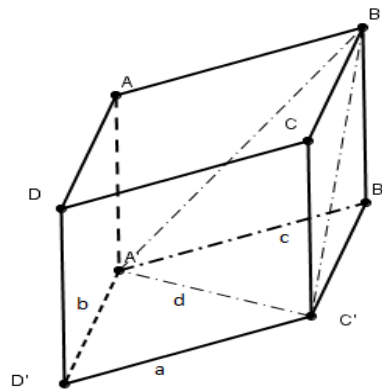
$$a^2 = b^2 \quad (*)$$

Lấy (1)-(2) vế theo vế ta được

$$c^2 = b^2 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $a = b = c$

Hay $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương



Bài 9. Tính các kích thước của hình hộp chữ nhật biết rằng chúng tỉ lệ với 2, 3, 4 và thể tích của hình hộp bằng 1536 cm^3

Bài giải

Gọi 3 kích thước của hình hộp chữ nhật lần lượt là a, b, c

Ta có $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k$ và $V = abc = 1536 \text{ cm}^3$

$$\text{Suy ra } k^3 = \frac{abc}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1536}{24} = 64$$

$$\Rightarrow k = 4$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{2} = 4 \Rightarrow a = 8; \frac{b}{3} = 4 \Rightarrow b = 12; \frac{c}{4} = 4 \Rightarrow c = 16$$

Vậy 3 kích thước của hình hộp lần lượt là 8; 12; 16

Bài 10. Một bể đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật (xem hình vẽ). Mực nước hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình. Nếu ta đặt bình lại rồi dựng đứng lên (lấy mặt (AA'B'B) làm

đáy) thì chiều cao của mực nước là bao nhiêu?

Bài giải

Thể tích hình hộp chữ nhật là

$$V = 6 \cdot 8 \cdot 12 = 576 \text{ cm}^3$$

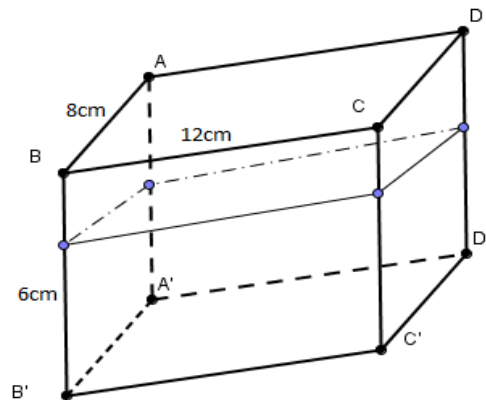
Thể tích nước chứa trong hình hộp là

$$V_1 = 8 \cdot 12 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6 \right) = 384 \text{ cm}^3$$

Nếu chọn (AA'B'B) làm đáy. Gọi h là chiều cao mực nước mới, ta có thể tích

$$V_1 = 8 \cdot 6 \cdot h \Rightarrow 384 = 48h \Rightarrow h = 8 \text{ cm}$$

Vậy chiều cao mực nước mới là 8cm



Bài 11. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng

- BC vuông góc với mp(DD'C'C)
- A'C' vuông góc với mp(BDD'B')
- BD vuông góc với mp(AA'C'C)
- BC vuông góc C'D

Bài giải

a) Ta có $BC \perp DC$; $BC \perp CC'$ mà DC và CC' là hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mp($DD'C'C$). Vậy nên $BC \perp mp(DD'C'C)$

b) Ta có $A'C' \subset mp(A'B'C'D')$

mặt khác DD' vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau $A'D'$ và $D'C'$ nằm trong

mp($A'B'C'D'$) nên $DD' \perp mp(A'B'C'D')$

mà $DD' \subset mp(DD'B'B)$

Suy ra $A'C'$ vuông góc với mp($BDD'B'$)

c) Tương tự như câu b

d) $BC \perp mp(DD'C'C)$ nên BC vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp($DD'C'C$) hay $BC \perp DC'$

Bài 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Đường thẳng $A'B'$ song song với những mặt phẳng nào?

b) Đường thẳng AC có song song với mặt phẳng ($A'B'C'$) không?

Bài giải

a) $A'B' // mp(ABCD)$ vì $A'B' // AB$ và

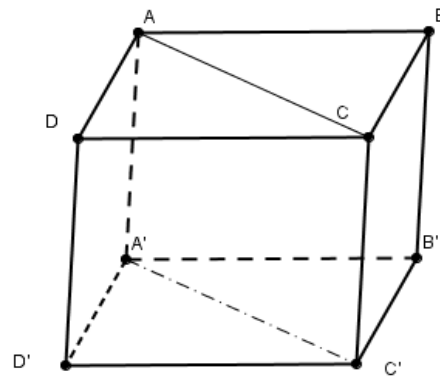
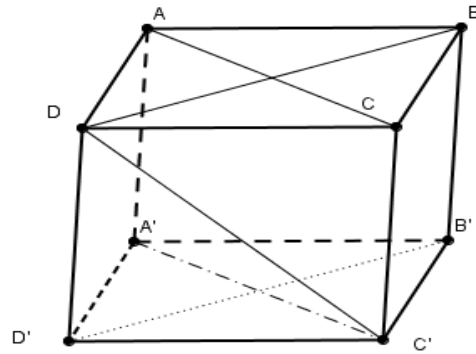
$AB \subset mp(ABCD)$

$A'B' // mp(DCC'D')$ vì $A'B' // D'C'$ và

$D'C' \subset mp(DCC'D')$

b) $AC // mp(A'B'C')$ vì $AC // A'C'$ và

$A'C' \subset mp(A'B'C')$



Bài 13. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Chứng minh

$$D'B = B'D = AC' = A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Bài giải

Trong tam giác vuông $A'B'C'$ ta có $A'C' = \sqrt{B'C'^2 + B'A'^2} \Rightarrow A'C' = \sqrt{b^2 + a^2}$

Trong tam giác vuông $AA'C'$ ta có

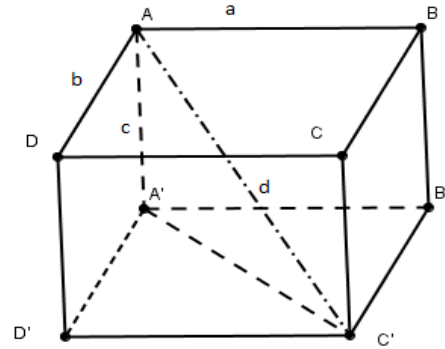
$$AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} \Rightarrow AC' = \sqrt{c^2 + b^2 + a^2}$$

Tương tự ta có $D'B = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$$B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Vậy $D'B = B'D = AC' = A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



Bài 14. Một hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 60 cm^3 và diện tích toàn phần bằng 94 cm^2 . Tính chiều rộng, chiều dài của hình hộp chữ nhật biết chiều cao bằng 4cm.

Bài giải

Gọi hai kích của hình hộp lần lượt là a, b

$$\text{Ta có } V = 4ab = 60 \text{ cm}^3 \Rightarrow ab = 15 \quad (1)$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day} = 2ph + 2ab$$

$$S_{tp} = 2(a + b).4 + 2ab = 94$$

$$\text{Hay } a + b = 8 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 5; b = 3$ hoặc $a = 3; b = 5$

Vậy hai kích thước của hình hộp chữ nhật là 3cm và 5 cm.

Bài 15. Một bể đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật (xem hình vẽ). Mực nước hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình. Nếu ta đặt bình lại rồi dựng đứng lên (lấy mặt $(ADD'A')$ làm

đáy) thì chiều cao của mực nước là bao nhiêu?

Bài giải

$$\text{Thể tích hình hộp chữ nhật là } V = 6.8.12 = 576 \text{ cm}^3$$

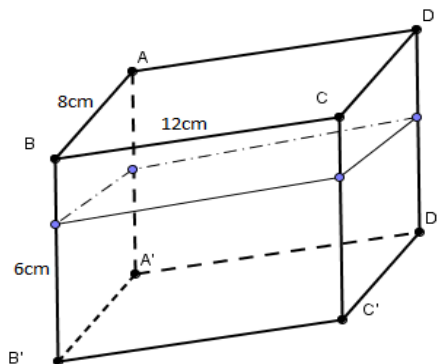
$$\text{Thể tích nước chứa trong hình hộp là } V_1 = 8.12.\left(\frac{2}{3}.6\right) = 384 \text{ cm}^3$$

Nếu chọn (ADD'A') làm đáy . Gọi h là

chiều cao mực nước mới, ta có thể tích

$$V_1 = 12.6.h \Rightarrow 384 = 72h \Rightarrow h = 5,3cm$$

Vậy chiều cao mực nước mới là 5,3cm



Bài 16. Một bình đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật có chiều rộng bằng 4cm, chiều dài

bằng 8cm, chiều cao bằng 5cm. Mực nước hiện tại bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của bình. Nếu ta đổ

nước trong bình vào một bình khác hình lập phương có cạnh bằng 5cm thì chiều cao mực nước là bao nhiêu?

Bài giải

Thể tích nước có trong hình hộp là $V = \frac{3}{4} \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4 = 120cm^3$

Gọi h là chiều cao của mực nước mới ở bình hình lập phương có cạnh là 5cm, ta có

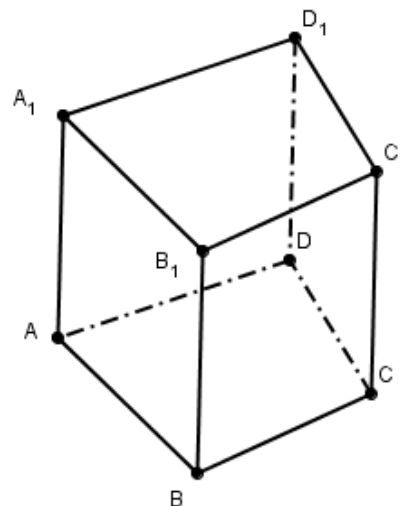
$$h = \frac{V}{25} = \frac{120}{25} = 4,8cm$$

Bài 2. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

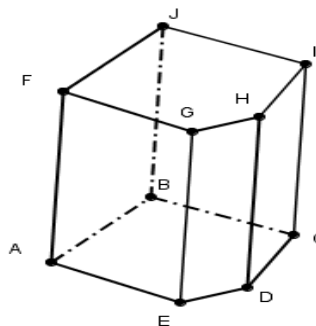
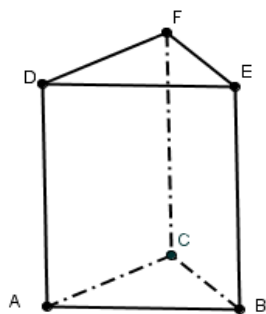
A. CHUẨN KIẾN THỨC

1) Hình lăng trụ đứng

- Hình bên là hình lăng trụ đứng. Trong hình này:
 - $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ là các đỉnh
 - Các mặt $ABB_1A_1; BCC_1B_1; \dots$ là các hình chữ nhật.
 Chúng được gọi là các mặt bên.
 - Hai mặt $ABCD; A_1B_1C_1D_1$ là hai đáy
- Hình lăng trụ đứng trên có hai đáy là tứ giác nên gọi là lăng trụ đứng tứ giác, kí hiệu $ABCD.A_1B_1C_1D_1$
- Hình hộp chữ nhật, hình lập phương cũng là những hình lăng trụ đứng.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.
- Lăng trụ đứng có hai đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác thì hình lăng trụ đứng tương ứng được gọi là lăng trụ đứng tam giác, lăng trụ đứng tứ giác, lăng trụ đứng ngũ giác. (hình 1)



Hình lăng trụ đứng tứ giác



(hình 1)

2) Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng

- Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích các mặt bên. Ta có công thức $S_{xq} = 2ph$ (p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao).

- Diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day}$$

3) Thể tích của hình lăng trụ đứng

- Thể tích của hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao
- Công thức $V = S.h$ (S là diện tích đáy, h là chiều cao)

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 17. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$.

- Những cặp mặt phẳng nào song song với nhau?
- Những cặp mặt phẳng nào vuông góc với nhau?

Bài giải

- Những cặp mặt phẳng song song

là: $mp(ABC) // mp(A'B'C')$

- Những cặp mặt phẳng vuông góc

nhau là: $mp(ABC) \perp mp(AA'B'B)$

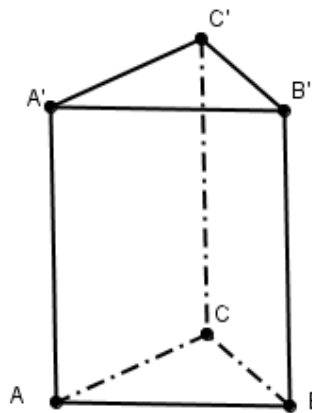
$mp(ABC) \perp mp(BB'C'C)$

$mp(ABC) \perp mp(AA'C'C)$

$mp(A'B'C') \perp mp(BB'C'C)$

$mp(A'B'C') \perp mp(AA'C'C)$

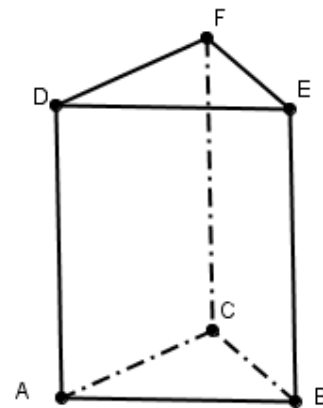
$mp(A'B'C') \perp mp(AA'B'B)$



Bài 18. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.DEF$.

Trong các phát biểu sau phát biểu nào đúng ?

- Các cạnh bên AB và AD vuông góc với nhau.
- Các cạnh bên BE và EF vuông góc với nhau.
- Các cạnh bên AC và DF vuông góc với nhau.
- Các cạnh bên AC và DF song song với nhau.
- Hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) song song với nhau.
- Hai mặt phẳng $(ACFD)$ và $(BCFE)$ song song với



nhau.

g) Hai mặt phẳng (ABED) và (DEF) vuông góc với nhau.

Bài giải

a) Sai vì AB và AD không phải là các cạnh bên.

b) Sai vì BE và EF không phải là các cạnh bên.

c) Sai vì AC và DF không phải là các cạnh bên.

d) Sai vì AC và DF không phải là các cạnh bên.

e) Đúng

f) Sai vì Hai mặt phẳng (ACFD) và (BCFE) vuông góc nhau

g) Đúng

Bài 19. Cho một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

a) Những cặp mặt phẳng nào song song với nhau.

b) Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với những mặt phẳng nào.

Bài giải

a) Những mặt phẳng song song với nhau là: $mp(ABCD) // mp(A'B'C'D')$;

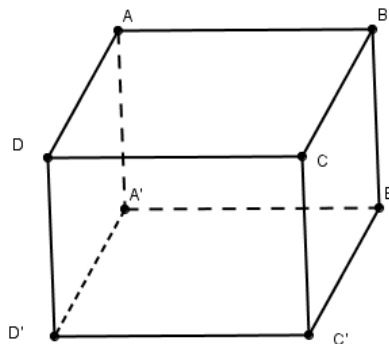
$mp(AA'D'D) // mp(BB'C'C)$;

$mp(DCC'D') // mp(AA'B'B)$

b) $mp(ABCD) \perp mp(AA'B'B)$

$mp(ABCD) \perp mp(BCC'B')$

$mp(ABCD) \perp mp(ADD'D)$



Bài 20. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có hai đáy là hai tam giác vuông tại

A, A' . Chứng minh

a) $AB \perp mp(AA'C'C)$

b) $mp(AA'C'C) \perp mp(AA'B'B)$

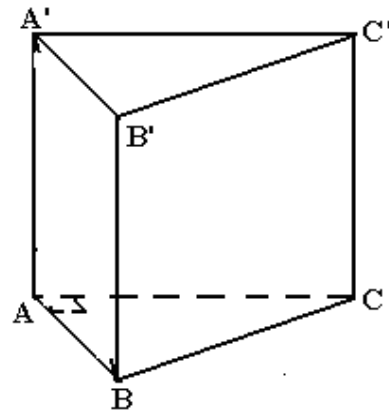
Bài giải

a) $AB \perp AC$ ($\triangle ABC$ vuông tại A)

$AB \perp AA'$ ($AA'B'B$ là hình chữ nhật) nên AB vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AC và AA' của mặt phẳng ($AA'C'C$).

Suy ra $AB \perp mp(AA'C'C)$

b) $mp(AA'B'B)$ chứa AB, mà AB vuông góc với $mp(AA'C'C)$ nên $mp(AA'C'C) \perp mp(AA'B'B)$



Bài 21. Một khối gỗ hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, có cạnh bằng a. Người ta cắt khối gỗ theo mặt ($ACC'A'$) được hai hình lăng trụ đứng bằng nhau. Tính diện tích xung quanh của mỗi hình lăng trụ đó.

Bài giải

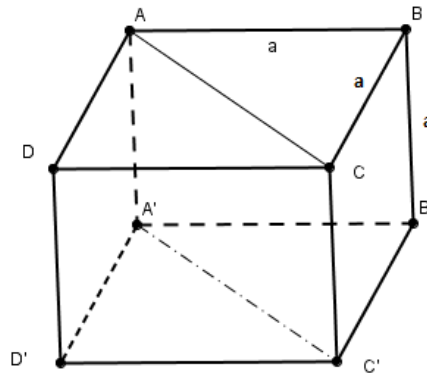
Ta có $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} \text{ cm}$

Chu vi đáy hình lăng trụ

$$a + a + a\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})a$$

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ

$$S_{xq} = 2ph = \frac{2(2 + \sqrt{2})a \cdot a}{2} = (2 + \sqrt{2})a^2 \text{ cm}^2$$



Bài 22 Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$, có đáy là tam giác ABC cân tại C, D là trung điểm của cạnh AB. Tính diện tích toàn phần của hình lăng trụ.

Bài giải

D là trung điểm AB, suy ra CD là chiều cao tam giác đáy

Vậy nên

$$DB = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3cm$$

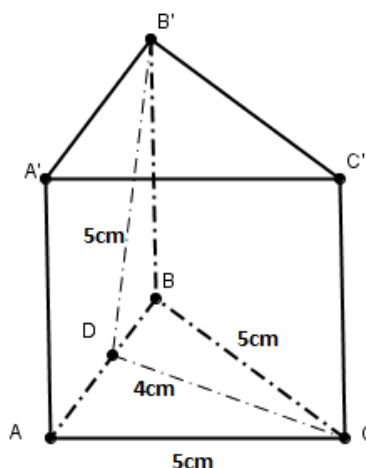
$BB' \perp AB$, áp dụng định lý py-ta-go, ta có

$$BB' = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4cm$$

Diện tích toàn phần của hình lăng trụ là

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = (5 + 5 + 6).4 + 2\left(\frac{1}{2}.4.6\right)$$

$$S_{tp} = 64 + 24 = 88cm^2$$



Bài 23 Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết $A'B$ hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.

Bài giải

Ta có $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp AB$ & AB là hình

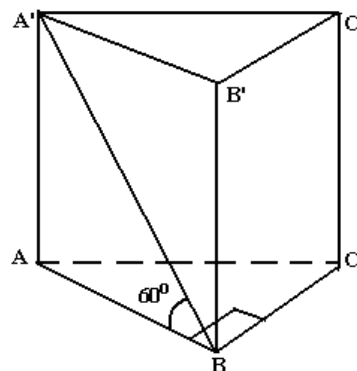
chiếu của $A'B$ trên đáy ABC và $\widehat{ABA'} = 60^\circ$

Trong $\triangle ABA'$ ta có

$$\Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$$



Bài 24. Cho hình lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a . Tính chiều cao (theo a) của hình lăng trụ, biết diện tích xung quanh bằng $\frac{1}{2}$ diện tích toàn phần.

Bài giải

Diện tích xung quanh hình trụ

$$S_{xq} = 2(a + a).h \text{ (cm)}$$

Diện tích toàn phần của hình trụ

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2(a + a).h + 2a.a$$

$$\Rightarrow S_{tp} = 4ah + 2a^2 = 2a(2h + a)$$

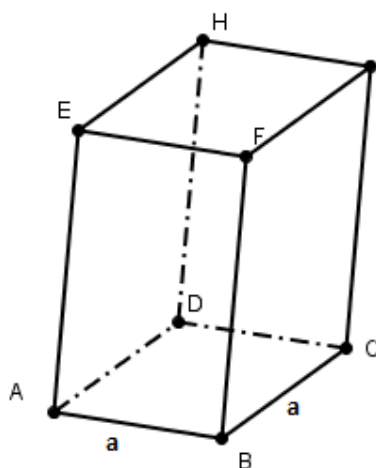
Theo đề ta có $S_{xq} = \frac{1}{2}S_{tp}$

Hay $4ah = \frac{1}{2}2a(a + 2h)$

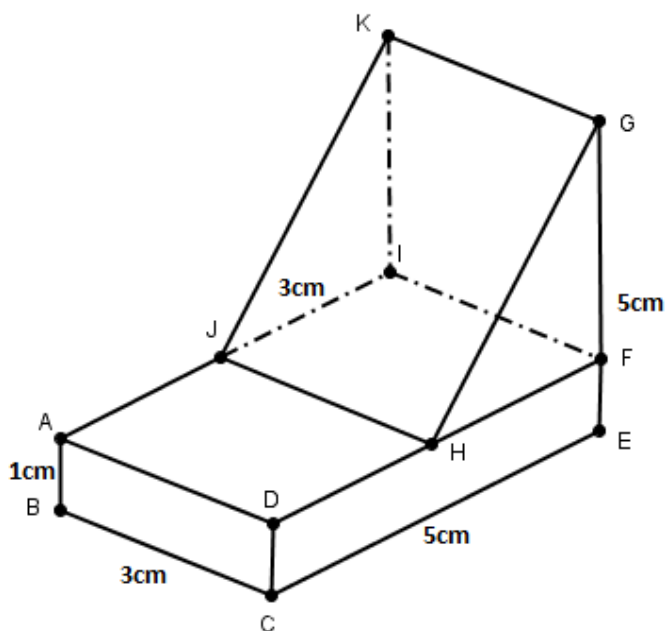
$$\Rightarrow 4h = a + 2h$$

$$\Rightarrow 2h = a \Rightarrow h = \frac{a}{2}$$

Vậy chiều cao của hình trụ là $\frac{a}{2}$ (cm)



Bài 25. Tính diện tích toàn phần (tổng diện tích các mặt) và thể tích của hình sau

**Bài giải**

* Tính diện tích toàn phần hình lăng trụ HFG.IJK

Độ dài đường chéo của tam giác đáy là $JK = HG = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\text{cm}$

Diện tích tam giác đáy $S_{\Delta HFG} = S_{\Delta JIK} = \frac{1}{2} 3.4 = 6cm^2$

Diện tích toàn phần hình lăng trụ HFG.JIK

$$S_{tp1} = S_{xq} + 2S_{day} = 2\left(\frac{3+4+5}{2}\right).3 + 2.6 = 48cm^2$$

* Tính diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật ABCD.EFII'

$$S_{tp2} = S_{xq} + 2S_d = 2(1+3).5 + 2.1.3 = 46cm^2$$

$$* S_{JIFH} = 3.3 = 9cm^2$$

* Diện tích toàn phần của hình đã cho là

$$S_{tp} = S_{tp1} + S_{tp2} - S_{JIFH} = 48 + 46 - 9 = 85cm^2$$

- Thể tích hình lăng trụ $V_1 = S_d.h = 6.3 = 18cm^3$
- Thể tích hình hộp chữ nhật $V_2 = S_d.h = 3.5 = 15cm^3$
- Thể tích của hình đã cho là $V = V_1 + V_2 = 18 + 15 = 33cm^3$

Bài 26.

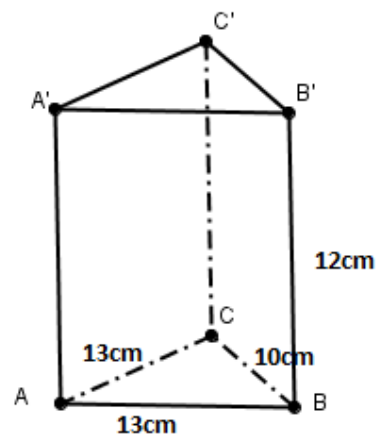
Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC cân tại A có các kích thước như hình vẽ. Tính thể tích của hình lăng trụ.

Bài giải

Chiều cao của tam giác đáy

$$h' = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25}$$

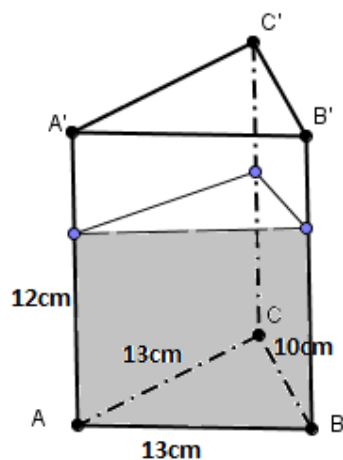
$$h' = \sqrt{144} = 12cm$$



Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} h'.BC = \frac{1}{2}.12.10 = 60cm^2$

Thể tích của hình lăng trụ ABC.A'B'C' là $V = S_d.h = 60.12 = 720cm^3$

Bài 27. Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác cân ABC có kích thước như hình vẽ. Mức nước hiện tại trong bình bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của lăng trụ. Bây giờ ta đặt bình lại và lật đứng lên sao cho mặt $(BCC'B')$ là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.



Bài giải

Chiều cao của tam giác đáy

$$h' = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25}$$

$$h' = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} h' \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 60 \text{ cm}^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là $V = 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 480 \text{ cm}^3$

Nếu chọn đáy là $(BCC'B')$ thì $S_d = 10 \cdot 12 = 120 \text{ cm}^2$

Chiều cao mực nước mới là $h' = \frac{V}{S_d} = \frac{480}{120} \Rightarrow h' = 4 \text{ cm}$

Vậy chiều cao mực nước mới là 4 cm.

Bài 28. Tính thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác và các mặt bên là các hình vuông cạnh bằng a .

Bài giải

Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều cạnh a ,

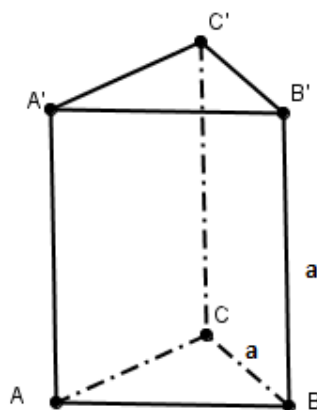
đường cao tam giác đáy là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$

Diện tích tam giác đáy là

$$S = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Thể tích hình lăng trụ là

$$V = S.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3$$



Bài 29. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$

a) Chứng minh $AMNA'$ là hình chữ nhật

b) Tính diện tích hình chữ nhật $AMNA'$ biết thể tích của hình lăng trụ bằng V và $BC = a$.

Bài giải.

a) Ta có $A'N \parallel AM$ và $A'N = AM$ nên

$A'NMA$ là hình bình hành.

Mặt khác $A'N \perp mp(CC'B'B)$ nên $A'N \perp NM$

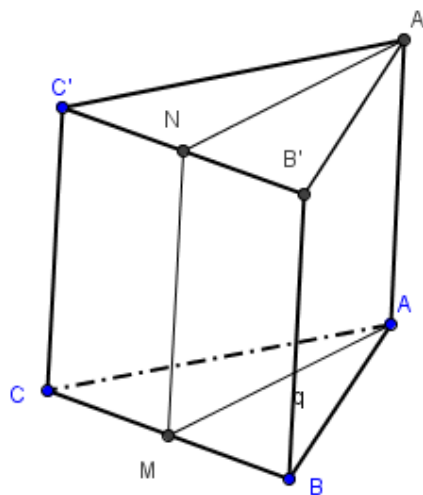
Vậy $AMNA'$ là hình chữ nhật

$$b) V = S_d.h = \frac{1}{2} AM.BC.AA'$$

mà $AA' = MN$

nên diện tích hình chữ nhật $AMNA'$ là

$$S = \frac{1}{2} AM.AA' = \frac{V}{a} (\text{cm}^2)$$



Bài 30. Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC có $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 10 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$, chiều cao $CC' = 12 \text{ cm}$. Mực nước trong bình hiện tại bằng

$\frac{2}{3}$ chiều cao của hình lăng trụ. Bây giờ ta đặt bình lại và lật đứng lên sao cho mặt

$(ACC'A')$ là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.

Bài giải

Diện tích tam giác đáy là $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là

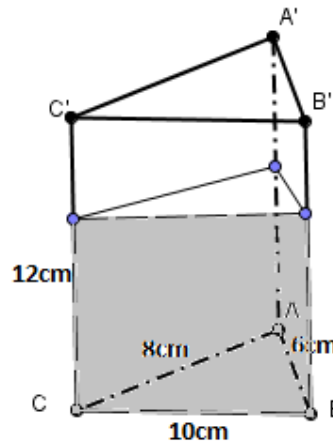
$$V = 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 192 \text{ cm}^3$$

Nếu chọn đáy là $(ACC'A')$ thì $S_d = 8 \cdot 12 = 96 \text{ cm}^2$

Chiều cao mực nước mới là

$$h' = \frac{V}{S_d} = \frac{192}{96} \Rightarrow h' = 2 \text{ cm}$$

Vậy chiều cao mực nước mới là 2cm.



Bài 31. Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC có $AB =$

6cm, $BC = 10\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, chiều cao $CC' = 12\text{cm}$. Mực nước trong bình hiện tại bằng $\frac{2}{3}$

chiều cao của hình lăng trụ. Bây giờ ta đặt bình lại và lật đứng lên sao cho mặt $(BCC'B')$ là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.

Bài giải

Diện tích tam giác đáy là $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là

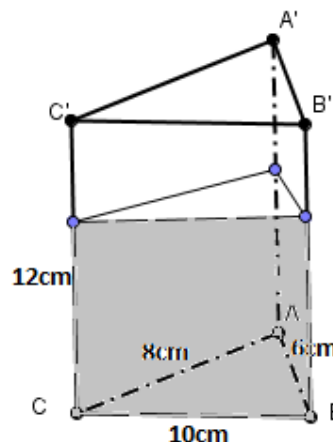
$$V = 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 192 \text{ cm}^3$$

Nếu chọn đáy là $(BCC'B')$ thì $S_d = 6 \cdot 12 = 72 \text{ cm}^2$

Chiều cao mực nước mới là

$$h' = \frac{V}{S_d} = \frac{192}{72} \Rightarrow h' \approx 2,7 \text{ cm}$$

Vậy chiều cao mực nước mới là 2,7cm.



Bài 32. Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{5}$ và biết $A'B = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ.

Bài giải

Ta có

$\triangle DEF$ vuông cân tại A nên $AB = AC =$

a

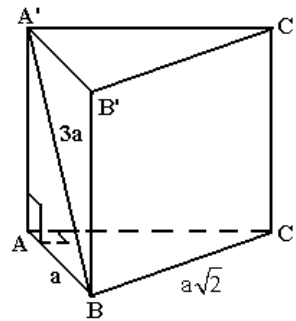
$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng

$\Rightarrow DD \perp DE$

$$AD^2 = AB^2 - DB^2 = a^2 - (3a)^2 = -8a^2$$

$$\Rightarrow DD = 5a\sqrt{5}$$

$$\text{Vậy } V = B.h = S_{ABC}.AA' = \frac{a^2}{2} \cdot 5a\sqrt{5} = \frac{5a^3\sqrt{5}}{2}$$



Bài 33. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $4a$ và đường chéo $5a$. Tính thể tích khối lăng trụ này.

Bài giải

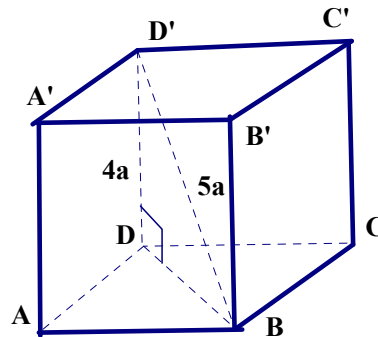
$ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên

$$BD^2 = BD'^2 - DD'^2 = 9a^2 \Rightarrow DD' = 3a$$

$$ABCD \text{ là hình vuông } \Rightarrow DE = \frac{BD}{2} = \frac{3a}{2}$$

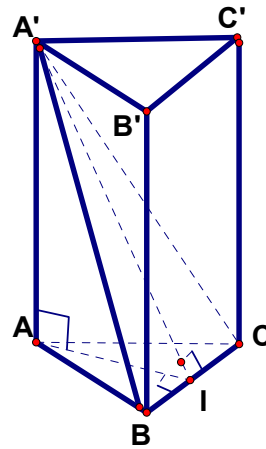
$$\text{Suy ra } B = S_{ABCD} = \frac{9a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } V = B.h = S_{ABCD}.AA' = \frac{27a^3}{2}$$



Bài 34. Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh $a=4$ và biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

- + Phân tích $V = B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào ?
- + Tìm diện tích $B = S_{ABC}$ bằng công thức nào ?
- + Từ diện tích $\triangle A'B'C'$ suy ra cạnh nào ? tại sao ?
- + Tìm $h = AA'$ dùng tam giác nào và định lý gì ?



Lời giải:

Gọi I là trung điểm BC. Ta có $\triangle ABC$ đều nên

$$AI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ \& } AI \perp BC \Rightarrow A'I \perp BC$$

$$S_{A'BC} = \frac{1}{2} BC \cdot A'I \Rightarrow A'I = \frac{2S_{A'BC}}{BC} = 4$$

$$AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AI$$

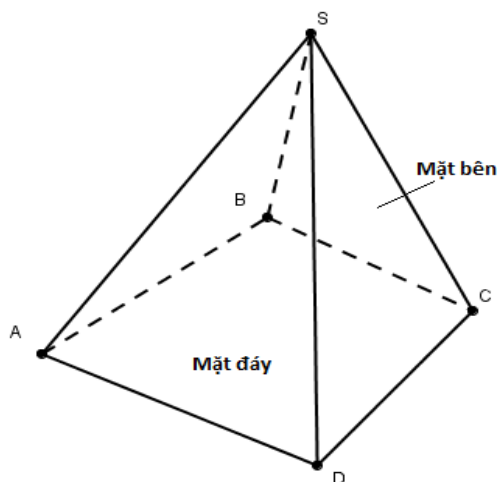
$$\Rightarrow AA' = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = 2$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = 8\sqrt{3}$$

Bài 3. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

A. CHUẨN KIẾN THỨC

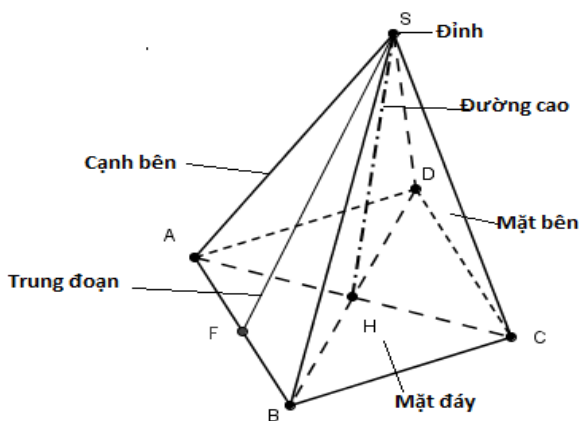
1) Hình chóp



Hình chóp có:

- Đáy là một đa giác, các mặt bên là những tam giác có chung một đỉnh.
- Đường thẳng đi qua đỉnh và vuông góc với mặt phẳng đáy gọi là đường cao.
- Trong hình trên: hình chóp S.ABCD có đỉnh là S, đáy là tứ giác ABCD, ta gọi đó là hình chóp tứ giác.

2) Hình chóp đều



Hình chóp S.ABCD trên có đáy là hình vuông ABCD, các mặt bên SAB, SBC, SCD và SDA là những tam giác cân bằng nhau. Ta gọi S.ABCD là hình chóp tứ giác đều

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều, các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.

- Chân đường cao của hình chóp đều trùng với tâm của đường tròn đi qua các đỉnh của mặt đáy.
- Đường cao vẽ từ đỉnh của mỗi mặt bên của hình chóp đều được gọi là **trung đoạn** của hình chóp đó.

Ví dụ 1: a) Hình chóp có đáy là một hình thoi, các mặt bên là tam giác cân bằng nhau và có chung đỉnh, có thể được gọi là hình chóp tứ giác đều không?

b) Hình chóp có đáy là một hình chữ nhật, các mặt bên là tam giác cân bằng nhau và có chung đỉnh, có thể được gọi là hình chóp tứ giác đều không?

Bài giải

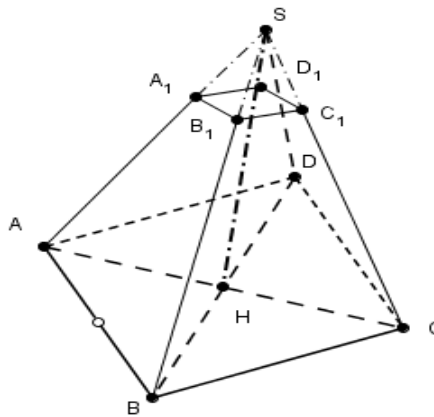
a) Hình thoi không phải là một đa giác đều nên hình chóp có mặt đáy là một hình thoi không phải là hình chóp đều. Vậy phát biểu trên sai

b) Sai vì hình chữ nhật không phải là đa giác đều.

3) Hình chóp cắt đều

Hình chóp cắt đều là phần hình chóp đều nằm giữa mặt phẳng đáy của hình chóp và mặt phẳng song song với đáy và cắt hình chóp.

- Mỗi mặt bên của hình chóp cắt đều là một hình thang cân.



4) Diện tích xung quanh của hình chóp đều.

- Diện tích xung quanh của hình chóp đều bằng nửa tích của chu vi đáy với trung đoạn.

$$S_{xq} = pd$$

(p là nửa chu vi đáy; d là trung đoạn của hình chóp)

- Diện tích toàn phần của hình chóp bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy.

$$V_{\text{v}} = V_{\text{t}} + V \quad (S: \text{diện tích đáy})$$

Ví dụ 2: Hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên bằng 25cm. Đáy là hình vuông ABCD cạnh 30cm. Tính diện tích toàn phần của hình chóp?

Bài giải

Gọi EI là một trung đoạn của hình chóp đều, ta có

$$EI^2 + IB^2 = EB^2$$

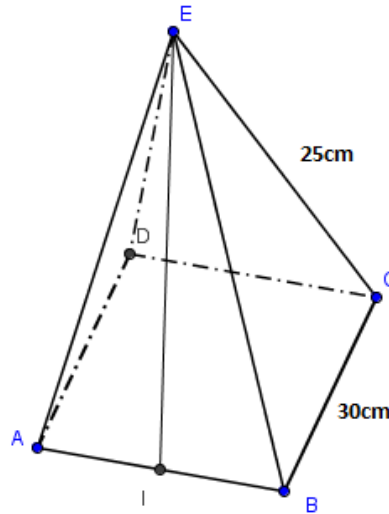
$$\Rightarrow EI^2 = EB^2 - IB^2 = EB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$EI^2 = 25^2 - 15^2$$

$$\Rightarrow EI = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20\text{cm}$$

Diện tích toàn phần của hình chóp đều

$$S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{d}} = (30 + 30)20 + 30.30 = 2100\text{cm}^2$$



5) Thể tích của hình chóp đều

– Thể tích của hình chóp bằng một phần ba của diện tích đáy nhân với chiều cao.

$$V = \frac{1}{3} S h \quad (S: \text{diện tích đáy}, h: \text{chiều cao})$$

Ví dụ 3: Tính thể tích hình chóp tam giác đều, biết đường cao 12cm, cạnh đáy 10cm.

Bài giải

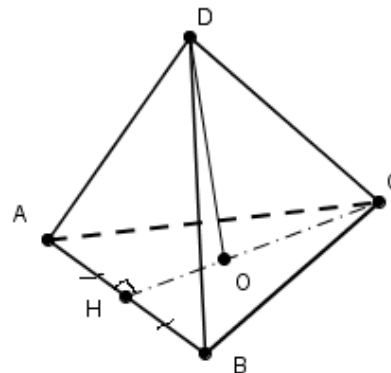
Hình chóp tam giác đều với cạnh đáy AB

= 10cm, đường cao OD = 12cm có

+ Đường cao của tam giác đáy CH=

$$\sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8,66\text{cm}$$

+ Diện tích đáy



$$S = \frac{1}{2} HC \cdot AB = \frac{1}{2} 8,66 \cdot 10 = 43,30\text{cm}^2$$

$$\text{Thể tích } V = \frac{1}{3} S.O D = \frac{1}{3} .43,3.12 = 173,20 \text{ cm}^3$$

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

Bài 35. Cho hình chóp tam giác đều A.BCD. Gọi H là trung điểm CD. Chứng minh: a) CD vuông góc với mặt phẳng (AHB)

b) $AC \perp BD$

Bài giải

a) Hình chóp A.BCD là hình chóp tam giác đều nên tam giác CBD là tam giác đều các tam ACB, ACD, ADB là các tam giác cân tại A. H là trung điểm CD suy ra $HB \perp CD$; $AH \perp CD$

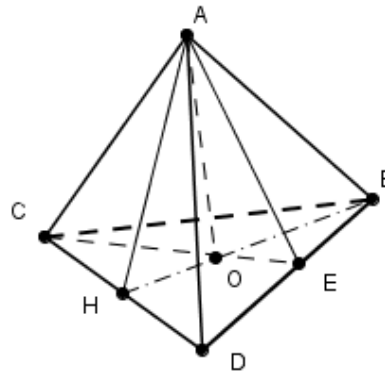
Vậy CD vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (AHB) nên

$CD \perp \text{mp(AHB)}$

b) Gọi E là trung điểm BD ta có $AE \perp BD$; $CE \perp BD$

Vậy BD vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (AEC) nên $CD \perp \text{mp(AEC)}$ suy ra CD vuông góc với mọi đường thẳng thuộc mp(AEC)

Hay $AC \perp BD$



Bài 36. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh

a) SO vuông góc với mp(ABCD)

b) mp(SAC) vuông góc với mp(ABCD)

Bài giải

a) Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nên có $ABCD$ là hình vuông, các cạnh bên bằng nhau.

Ta có $\triangle SBD$ là tam giác cân tại S có $OD = OB$ nên SO là đường cao của tam giác hay $SO \perp BD$

Tương tự, ta có $SO \perp AC$

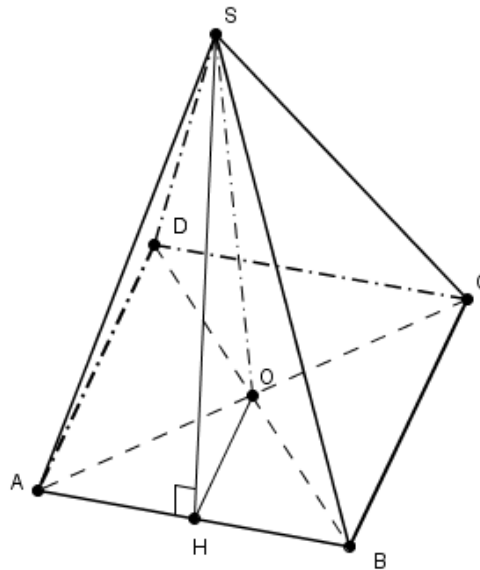
SO vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc $mp(ABCD)$ nên $SO \perp mp(ABCD)$

b) Ta có $AC \in mp(SAC)$

$$BD \in mp(SBD)$$

Mà $BD \perp AC$ nên

$$mp(SAC) \perp mp(SBD)$$



Bài 37. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = 2\text{cm}$, $SA = 4\text{cm}$. Tính độ dài trung đoạn và chiều cao của hình chóp đều này.

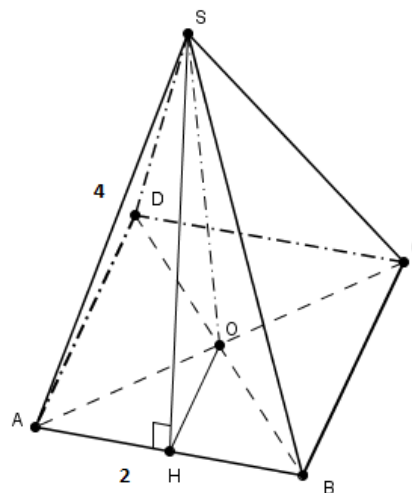
Bài giải

Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = 2\text{cm}$, $SA = 4\text{cm}$, nên $ABCD$ là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau.

Ta có

$$AC = BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AO = \frac{AC}{2} = \sqrt{2}$$



Trong tam giác vuông SOA vuông tại O , theo pytago ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

Vậy chiều cao hình chóp là $3\sqrt{2}cm$

Gọi H là trung điểm AB, ta có SH là trung đoạn của hình chóp

Trong tam giác SBH vuông tại H, theo pytago ta có

$$SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

Vậy độ dài trung đoạn là $\sqrt{15}cm$

Bài 38. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có AB = 3cm, cạnh bên SA = 4cm. Tính chiều cao của hình chóp.

Bài giải

Hình chóp tam giác đều S.ABC nên ABC là tam giác đều.

Gọi H là trung điểm AB, O là trọng tâm tam giác ABC

Ta có CH là đường cao tam giác ABC

Trong tam giác CHB vuông tại H ta có

$$HC = \sqrt{CB^2 - HB^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$OC = \frac{2}{3}CH = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Trong tam giác vuông SOC vuông tại O ta có

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$$

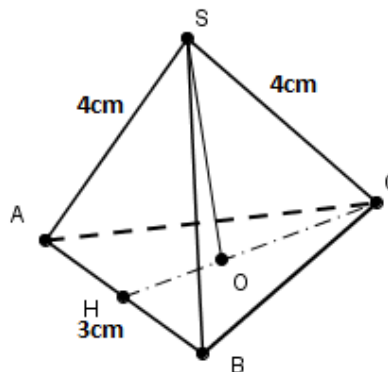
Vậy chiều cao của hình chóp là $\sqrt{13}cm$

Bài 39. Một hình chóp đều có 10 cạnh. Hỏi đáy của hình chóp đó là đa giác đều nào?

Bài giải

Hình chóp đều có 10 cạnh thì đáy của hình chóp đó là thập giác đều.

Bài 40. Một hình chóp cụt đều có đáy lớn bằng 12cm, đáy bé bằng 8cm và cạnh bên bằng $\sqrt{13}cm$. Tính độ dài trung đoạn và chiều cao của hình chóp cụt đó.



Bài giải

Hình chóp cắt đều ta thấy mặt bên là hình thang cân $AA'D'D$. Vẽ đường cao $A'E$ và $D'F$, ta có

$$A'E = D'F = \frac{AD - A'D'}{2} = \frac{12 - 8}{2} = 2$$

Vậy độ dài trung đoạn là 2 cm

Khai triển hình chóp cắt đều ta thấy

Trong hình thang vuông $OBB'O'$ vẽ đường cao $B'I$ ta có

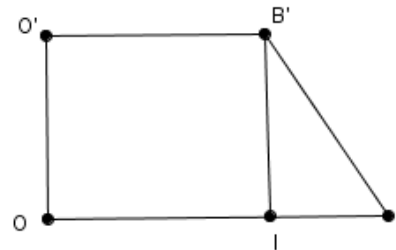
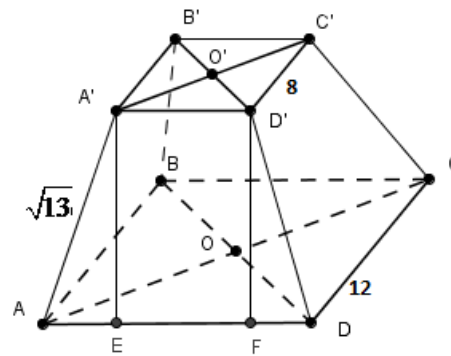
$$OB = \frac{BD}{2} = 6\sqrt{2}; O'B' = 4\sqrt{2}$$

$$BI = OB - O'B' = 2\sqrt{2}$$

Vậy đường cao hình chóp cắt đều là

$$B'I = \sqrt{B'B^2 - BI^2}$$

$$B'I = \sqrt{\sqrt{13}^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}$$



Bài 41. Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng 8cm và độ dài cạnh bên bằng 5cm. Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

Bài giải

Trong tam giác vuông SHB, theo pytago

$$\text{ta có } SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

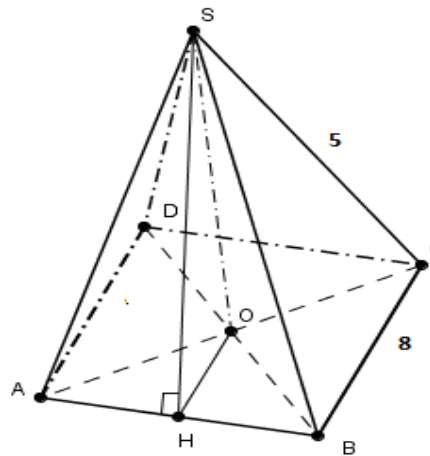
Diện tích đáy là $S_d = 8.8 = 64(cm^2)$

Diện tích xung quanh hình chóp là

$$S_{xq} = pd = (8 + 8).3 = 48(cm^2)$$

Diện tích toàn phần hình chóp

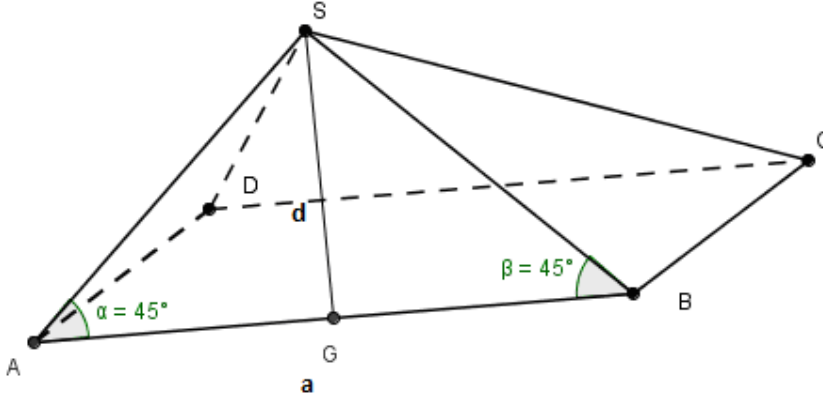
$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 64 + 48 = 112(cm^2)$$



Bài 42. Cho hình chóp tứ giác đều có diện tích xung quanh bằng $\frac{1}{2}$ diện tích toàn phần.

Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông cân.

Bài giải



Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông, các cạnh bên là các tam giác cân tại S (1)

Gọi a là độ dài cạnh đáy, d là trung đoạn của hình chóp

Ta có $S_{xq} = pd = 2ad$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 2ad + a^2$$

$$\text{Mặt khác } S_{xq} = \frac{1}{2} S_{tp} \Leftrightarrow 2ad = \frac{1}{2} (2ad + a^2) \Leftrightarrow ad - \frac{1}{2} a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a \left(d - \frac{1}{2} a \right) = 0 \Leftrightarrow d = \frac{1}{2} a$$

Gọi G là trung điểm AB suy ra $GB = \frac{1}{2} a$

Ta có SG là trung đoạn hình chóp $SG = \frac{1}{2} a$

Vậy trong tam giác SGB có $GB = SG = \frac{1}{2} a$ và $\hat{G} = 90^\circ$ nên $\triangle SGB$ là tam giác vuông

$$\text{cân tại G} \Rightarrow \hat{GSB} = 45^\circ \quad (2)$$

$$\text{Tương tự, ta có } \hat{GSA} = 45^\circ \quad (3)$$

$$\text{Từ (2), (3) suy ra } \hat{BSA} = 90^\circ \quad (4)$$

Từ (1), (4) suy ra ΔASB vuông cân tại S

Tương tự ta chứng minh được các cạnh bên của hình chóp là tam giác vuông cân.

Bài 43. Tính diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều S.ABCD biết

$$BD = 12\sqrt{2}cm, SC = 10cm$$

Bài giải

Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD

là hình vuông nên $AD = AB$, ta có

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = AB\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AB = 12$$

Trong tam giác vuông SHB, theo pytago ta có

$$SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

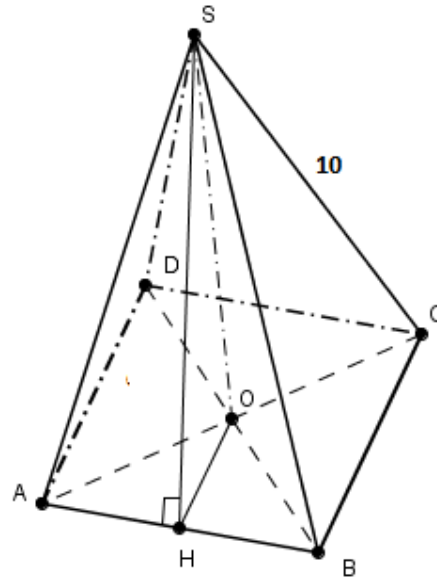
Trong tam giác SOB vuông tại O, theo pytago ta có

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{10^2 - (6\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7}$$

Diện tích đáy là $S_d = 12.12 = 144(cm^2)$

Diện tích xung quanh hình chóp là $S_{xq} = pd = (12 + 12).8 = 192(cm^2)$

Diện tích toàn phần hình chóp $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 144 + 192 = 336(cm^2)$



Bài 44. Tính diện tích toàn phần của hình chóp tam giác đều biết cạnh đáy bằng 10cm, cạnh bên bằng 13cm.

Bài giải

Tam giác BCA cân tại S có $SI \perp AB$ tại I, theo pytago ta có

$$SI = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

Tam giác ABC là tam giác đều có cạnh là $a = 10\text{cm}$ nên chiều cao tam giác đều là

$$h = CI = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

S.ABC là hình chóp đều nên chân đường cao H trùng với giao điểm ba đường trung tuyến của tam giác, ta có $SH \perp CI$ và

$$HC = \frac{2}{3}CI = \frac{2}{3} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Trong tam giác SHC vuông tại H, theo định lý Pytago ta có

$$HS = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 11,6$$

Diện tích đáy là $S = \frac{1}{2}CI \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10 = 25\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

$$S_{xq} = pd = \left(\frac{10 + 10 + 10}{2}\right) \cdot 12 = 180(\text{cm}^2)$$

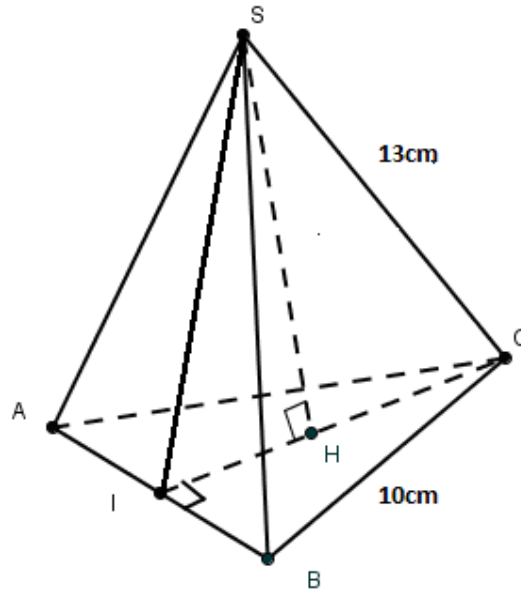
Vậy diện tích toàn phần của hình chóp là $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 11,6 + 180 = 191,6(\text{cm}^2)$

Bài 45. Tính diện tích toàn phần của hình chóp tam giác đều biết chiều cao bằng $\sqrt{13}\text{cm}$ và cạnh bên bằng 5cm.

Bài giải

S.ABC là hình chóp đều nên chân đường cao H trùng với giao điểm ba đường trung tuyến

của tam giác, ta có $SH \perp CI$ và $HC = \frac{2}{3}CI$



Trong tam giác SHC vuông tại H, theo định lý Pytago ta có

$$HC = \sqrt{SC^2 - SH^2} = \sqrt{5^2 - \sqrt{13}^2} = 2\sqrt{3}$$

Suy ra $CI = 3\sqrt{3}$ cm

Tam giác ABC là tam giác đều, giả sử có cạnh là a nên chiều cao tam giác

đều là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ mà CI là chiều cao tam

giác ABC nên cạnh tam giác đều là

$$\frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6 \text{ hay } AB = 6 \text{ cm}$$

Diện tích đáy là $S = \frac{1}{2} CI \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6 = 9\sqrt{3} (cm^2)$

Ta có SI là trung đoạn của hình chóp, ta có $SI = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$$S_{xq} = pd = \left(\frac{6+6+6}{2}\right) \cdot 4 = 36 (cm^2)$$

Vậy diện tích toàn phần của hình chóp là $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 36 + 9\sqrt{3} \approx 51,6 (cm^2)$

Bài 46. Cho hình chóp tứ giác đều có diện tích xung quanh bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần.

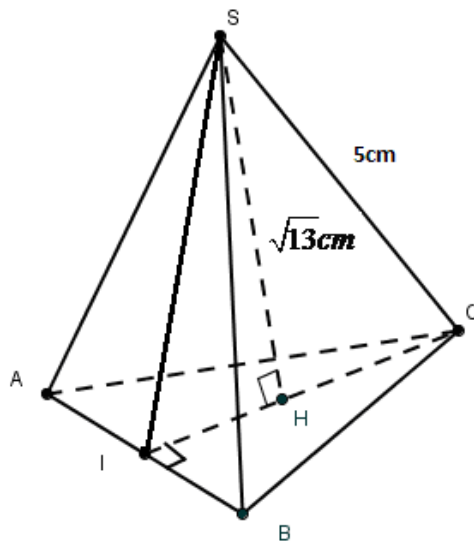
Tính diện tích xung quanh của hình chóp biết cạnh bên $\sqrt{5}$ cm

Bài giải

Gọi a là cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều, d là trung đoạn.

$$\text{Ta có } S_{xq} = \frac{2}{3} S_{tp}$$

$$\text{Mà } S_{xq} = pd = 2a \cdot d \quad \text{và } S_{tp} = S_{xq} + S_d = 2ad + a^2$$



$$\text{Vậy } 2ad = \frac{2}{3}(2ad + a^2)$$

$$\Rightarrow 2ad = \frac{4ad}{3} + \frac{2a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}ad - \frac{2}{3}a^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}a(d - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow d = a \text{ vì } a > 0$$

Ta có

$$d = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{5 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{20 - a^2}}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{\sqrt{20 - a^2}}{2} = a \Leftrightarrow 2a = \sqrt{20 - a^2} \Leftrightarrow 4a^2 = 20 - a^2$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 = 20 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$$

Diện tích xung quanh của hình chóp là $S_{xq} = pd = 2a.d = 2.2.2 = 8(\text{cm}^2)$

Bài 47. Tính diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều biết chiều cao bằng $\sqrt{28}\text{cm}$ và cạnh bên bằng 10cm.

Bài giải

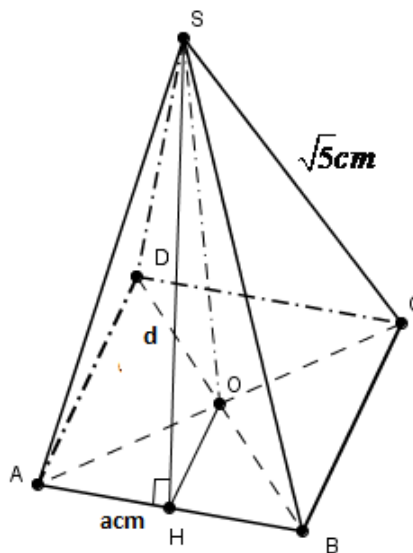
Áp dụng định lý pytago trong tam giác vuông EFC ta có

$$CF = \sqrt{EC^2 - FE^2} = \sqrt{10^2 - \sqrt{28}^2}$$

$$FC = \sqrt{100 - 28} = \sqrt{72}\text{cm}$$

$$\text{Suy ra } AC = 2\sqrt{72}\text{ cm}$$

Gọi a là độ dài cạnh đáy của hình chóp, ta có



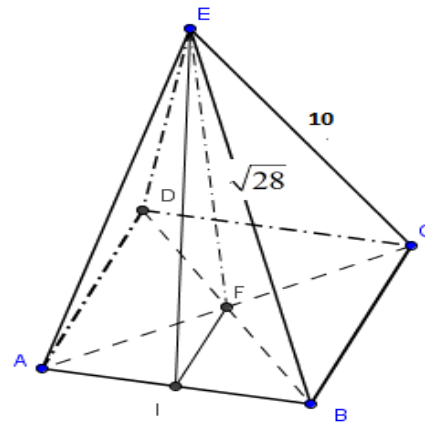
$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = 2\sqrt{72}$$

$$\Rightarrow a = 12cm$$

$$\text{Diện tích tứ giác đáy } S = 12.12 = 144cm^2$$

Thể tích hình chóp

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}144.\sqrt{28} \approx 253,9cm^3$$



Bài 48. Tính thể tích hình chóp tứ giác đều biết độ dài cạnh đáy bằng 6cm và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{43}cm$

Bài giải

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}cm$$

$$\text{Suy ra } FC = 3\sqrt{2}cm$$

Áp dụng định lý pytago trong tam giác vuông EFC ta có

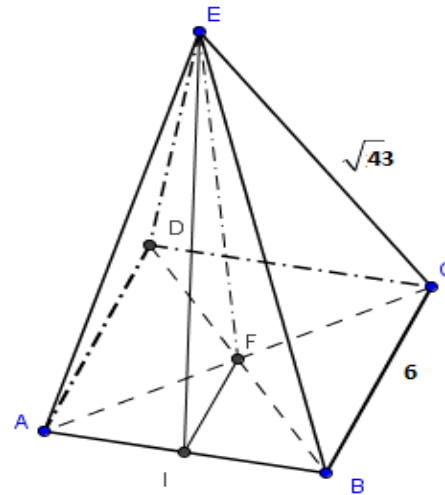
$$EF = \sqrt{EC^2 - FC^2} = \sqrt{(\sqrt{43})^2 - (3\sqrt{2})^2}$$

$$EF = \sqrt{43 - 18} = \sqrt{25} = 5cm$$

$$\text{Diện tích tứ giác đáy } S = 6.6 = 36cm^2$$

Thể tích hình chóp

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}36.5 = 60cm^3$$



Bài 49. Tính thể tích hình chóp tam giác đều biết chiều cao bằng $\sqrt{12}cm$ và cạnh bên bằng 4cm.

Bài giải

S.ABC là hình chóp đều nên chân đường cao H trùng với giao điểm ba đường trung

tuyến của tam giác, ta có $SH \perp CI$ và $HC = \frac{2}{3}CI$

Trong tam giác SHC vuông tại H, theo định lý pytago ta có

$$HC = \sqrt{SC^2 - SH^2} = \sqrt{4^2 - \sqrt{12}^2} = 2$$

Suy ra $CI = 3\text{cm}$

Tam giác ABC là tam giác đều, giả sử có cạnh là a nên chiều cao tam giác

đều là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ mà CI là chiều cao tam

giác ABC nên cạnh tam giác đều là

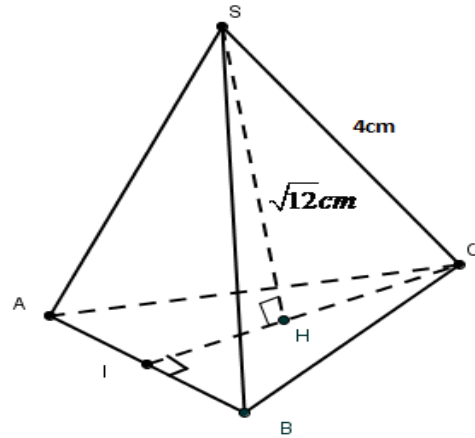
$$\frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2.3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ hay } AB = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Diện tích đáy là

$$S = \frac{1}{2} CI \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$

Thể tích hình chóp là

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = 6 (\text{cm}^3)$$



Bài 50. Tính thể tích hình chóp tứ giác đều biết độ dài cạnh đáy bằng 4cm và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{24}\text{cm}$

Bài giải

E.ABCD là hình chóp tứ giác đều có đáy ABCD là hình vuông, có cạnh $AB = 4\text{cm}$

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}\text{cm}$$

$$\text{Suy ra } FC = 2\sqrt{2}\text{cm}$$

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông EFC ta có

$$EF = \sqrt{EC^2 - FC^2} = \sqrt{\sqrt{24}^2 - (2\sqrt{2})^2}$$

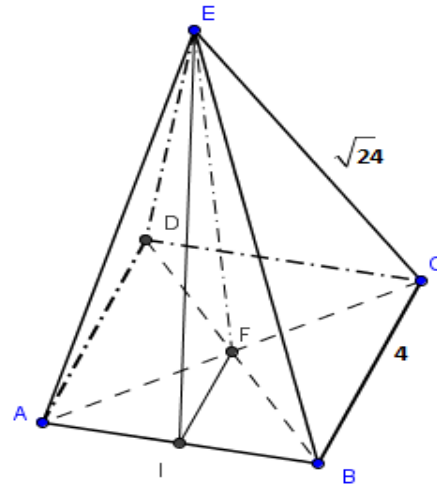
$$EF = \sqrt{24 - 8} = \sqrt{16} = 4\text{cm}$$

Chiều cao hình chóp là 4cm

Diện tích tứ giác đáy $S = 4.4 = 16\text{cm}^2$

Thể tích hình chóp

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}16.4 \approx 21,3\text{cm}^3$$



Bài 51. Tính thể tích hình chóp tam giác đều biết độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{6}\text{cm}$ và cạnh bên đáy 3cm.

Bài giải

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, HC cắt AB

tại D, ta có $AD = DB = \frac{3}{2}$

Tam giác CDB vuông tại D, theo định lý Pythagore, ta có

$$DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ và}$$

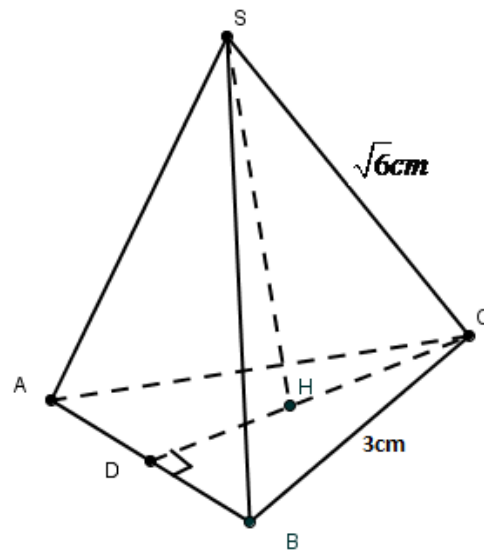
$$HC = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Tam giác SHC vuông tại H, ta có

$$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$$

Thể tích của hình chóp đều là

$$V = \frac{1}{3}S_d.h = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}DC.AB\right).SH = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3\right)\sqrt{3} = \frac{9}{4}\text{cm}^3$$



Bài 52. Tính thể tích hình chóp tứ giác đều có trung đoạn bằng 5cm và diện tích xung quanh bằng 80cm^2 .

Bài giải

Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a cm, trung đoạn là 5cm:

$$S_{xq} = p.d = 2a.5 = 80cm^2$$

Hay $a = 8$ cm

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}cm$$

$$\Rightarrow BF = 4\sqrt{2}cm$$

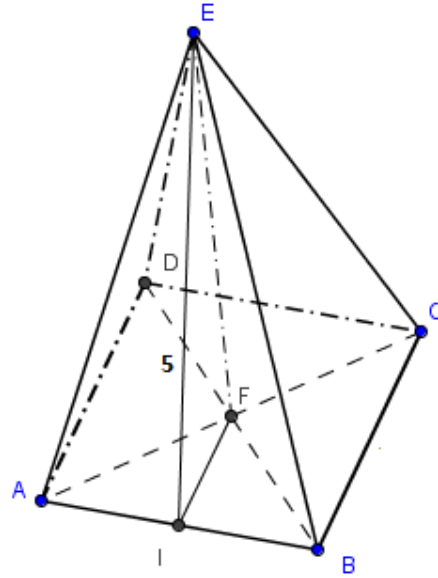
Ta có $FI = 4$ cm (vì FI là đường trung bình của tam giác ABC , tam giác ABC có cạnh $AB = a = 8$ cm)

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông EFI ta có

$$EF = \sqrt{EI^2 - FI^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3cm$$

Thể tích hình chóp

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}8^2.3 = 64cm^3$$



Bài 53. Tính thể tích hình chóp tứ giác đều có diện tích xung quanh bằng $80cm^2$ và diện tích toàn phần bằng $144cm^2$

Bài giải

Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a , trung đoạn là d

$$S_{xq} = p.d = 2a.d = 80cm^2 \quad (1)$$

Diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a , trung đoạn là d

$$S_{xq} + S_d = 2ad + a^2 = 144cm^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } a^2 = 144 - 80 = 64 \Rightarrow a = \sqrt{64} = 8cm$$

Thay $a = 8$ vào (1) ta được $d = 5$ cm

Ta có $AC = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}cm$

$$\Rightarrow BF = 4\sqrt{2}cm$$

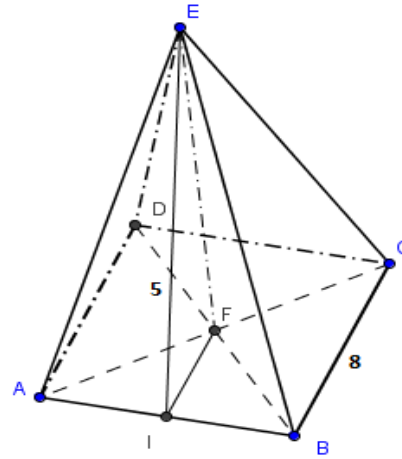
Ta có $FI = 4cm$

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông EFI ta có

$$EF = \sqrt{EI^2 - FI^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3cm$$

Vậy thể tích của hình chóp tứ giác đều đã cho là

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}8^2.3 = 64cm^3$$



Bài 54. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng a . Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính thể tích của hình chóp cắt đều $ABCD.MNPQ$ theo a .

Bài giải

Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng a và N là trung điểm SB nên

$$NB = \frac{a}{2}$$

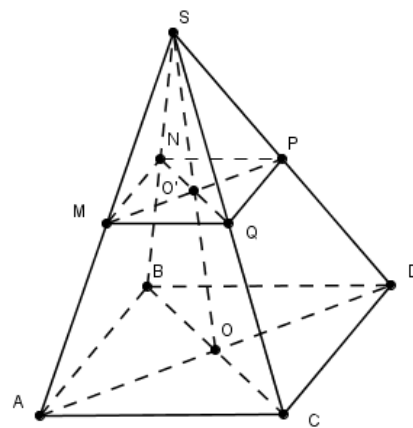
Trong hình thang vuông $OO'NB$ vẽ đường cao NI , ta có

$$OB = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$O'N = \frac{ON}{2} = \frac{\sqrt{MN^2 + MQ^2}}{2}$$

$$O'N = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$IB = OB - O'N = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$



$$NI = \sqrt{NB^2 - IB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow NI = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Vậy đường cao của hình chóp cắt là $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

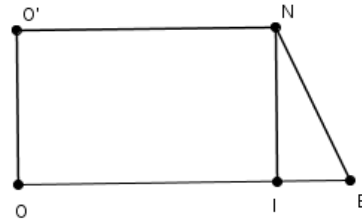
Diện tích đáy lớn $S_1 = a^2 (cm^2)$

Diện tích đáy nhỏ $S_2 = \frac{a^2}{4} (cm^2)$

Thể tích hình chóp cắt là

$$V = \frac{1}{3} \cdot h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \left(a^2 + \frac{a^2}{4} + \sqrt{a^2 \cdot \frac{a^2}{4}} \right)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{7}}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{24} (cm^3)$$



Bài 55. Một hình chóp cắt đều ABCD.A'B'C'D' có các cạnh đáy bằng a và 2a, đường cao của mặt bên bằng a.

- Tính diện tích xung quanh
- Tính cạnh bên, đường cao của hình chóp cắt đều.

Bài giải

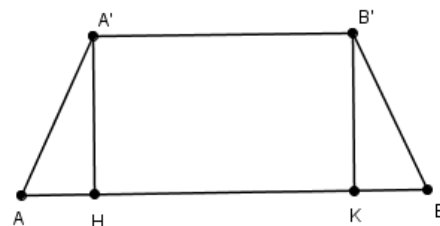
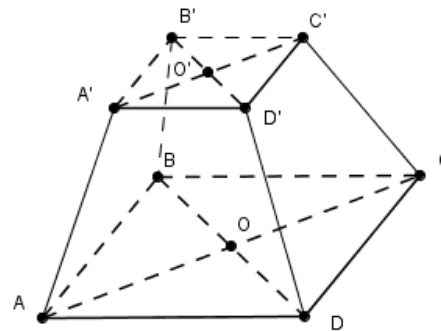
- Diện tích xung quanh của hình chóp cắt đều

$$S_{xq} = \frac{1}{2}(p + p') \cdot d = \frac{1}{2}(4 \cdot 2a + 4a)a = 6a^2$$

- Khai triển hình chóp cắt đều ta thấy mặt bên là hình thang cân ABA'B'. Vẽ đường cao A'H và B'K, ta có

$$AH = BK = \frac{AB - A'B'}{2} = \frac{a}{2}$$

Trong hình thang vuông OBB'O' vẽ đường cao B'I ta có



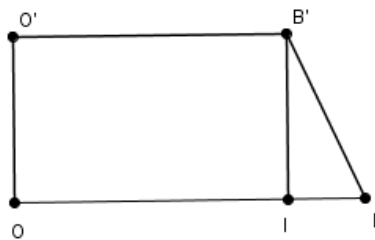
$$OB = \frac{BD}{2} = a\sqrt{2}; O'B' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$BI = OB - O'B' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy đường cao hình chóp cắt đều là

$$B'I = \sqrt{B'B^2 - BI^2}$$

$$B'I = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Bài 56. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC. Chứng minh ABC.MNP là hình chóp cắt tam giác đều.

Bài giải

Ta có $AB \parallel MN$; $BC \parallel NP$ nên

$mp(MNP) \parallel mp(ABC)$.

Mặt khác, S.ABC là hình chóp tam giác đều nên

$$SA = SB = SC$$

Suy ra $\widehat{SAB} = \widehat{SBC}$, do đó AMNB là hình thang cân.

Tương tự BNPC; AMPC là các hình thang cân

Vậy ABC.MNP là hình chóp cắt tam giác đều.

Bài 57. Cho khối chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh có độ dài bằng a .

a) Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều.

b) Tính thể tích khối chóp SABCD

Bài giải

? Dựng hình thoi ABCD và từ câu hỏi 1, dựng $SO \perp (ABCD)$. Tại sao ?

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

*) Hình thoi ABCD có nội tiếp trong đường tròn không? Suy ra gì từ giả thiết?

*) Phân tích $V = \frac{4}{6} B.h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào?

*) Tìm diện tích B của ABCD bằng công thức nào?

*) Tìm $h = SO$ qua tam giác nào bởi định lý gì?

Dựng $SO \perp (ABCD)$

Ta có $SA = SB = SC = SD$ nên

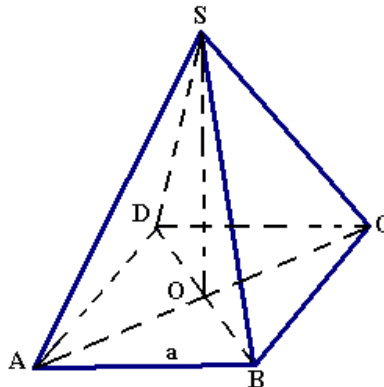
$OA = OB = OC = OD \Rightarrow ABCD$ là hình thoi có đường tròn ngoại tiếp nên $ABCD$ là hình vuông.

Ta có $SA^2 + SB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên $\triangle SAC$ vuông tại S

$$\Rightarrow OS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} a^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{Vậy } Y = \frac{a^3\sqrt{5}}{9}$$



Bài 58. Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng a , M là trung điểm DC.

a) Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD.

b) Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC). Suy ra thể tích hình chóp MABC

Bài giải

? Dựng tam giác đều ABC, từ tâm O dựng $DO \perp (ABC)$. Tại sao?

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

*) Phân tích $V = \frac{4}{3} B \cdot h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào?

*) Tìm diện tích B của ABC bằng công thức nào?

*) Tìm $h = DO$ qua tam giác nào bởi định lý gì?

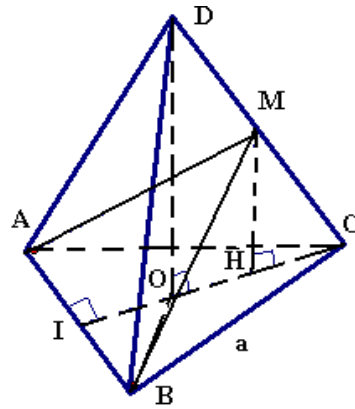
*) Mặt phẳng $(DCO) \perp (ABC)$? Dựng $MH \perp OC$ suy ra điều gì? Tính MH?

a) Gọi O là tâm của $\Delta ABC \Rightarrow DO \perp (ABC)$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad OC = \frac{2}{3} CI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} \Delta DOC \text{ vuông có : } DO &= \sqrt{DC^2 - OC^2} \\ &= \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$



b) Kẻ MH// DO, khoảng cách từ M đến mp(ABC)

là MH

$$MH = \frac{1}{2} DO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot MH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24} \text{ Vậy } Y = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$$

Bài 59. Cho chóp tam giác đều SABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Chứng minh rằng chân đường cao kẻ từ S của hình chóp là tâm của tam giác đều ABC. Tính thể tích chóp đều SABC

Bài giải

? Dựng tam giác đều ABC, từ tâm O dựng $SO \perp (ABC)$. Tại sao?

Phân tích yêu cầu của đề bài ra các yêu cầu nhỏ:

- *) So sánh SA, SB, SC suy ra OA, OB, OC bởi tính chất nào?
- *) Phân tích $V = \frac{1}{3} B \cdot h$ để tìm B và h trong hình là các đối tượng nào?
- *) Tìm diện tích B của ABC bằng công thức nào?
- *) Tìm h = SO qua tam giác nào bởi định lý gì?

Dựng $SO \perp (ABC)$ Ta có $SA = SB = SC$ suy ra $OA = OB = OC$

Vậy O là tâm của tam giác đều ABC .

Ta có tam giác ABC đều nên

$$AO = \frac{5}{6}DK = \frac{5}{6} \frac{d\sqrt{6}}{5} = \frac{d\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow VR^5 = VD^5 - RD^5 = \frac{44d^5}{6} \Rightarrow VR = \frac{d\sqrt{44}}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Vậy } Y = \frac{4}{6}V_{DEF} \quad \text{MR} = \frac{d^6\sqrt{44}}{45}$$

