

BỒI DƯỠNG VÀ PHÁT TRIỂN TƯ DUY  
ĐỘT PHÁ TRONG GIẢI  
TOÁN HỌC 8  
TẬP 1  
ĐẠI SỐ

THEO CHUẨN KIẾN THỨC KĨ NĂNG

- ☞ Tóm tắt lí thuyết căn bản
- ☞ Giải chi tiết, phân tích, bình luận, hướng dẫn làm bài dành cho học sinh lớp 8 và chuyên Toán.
- ☞ Tham khảo cho phụ huynh và giáo viên.

## LỜI NÓI ĐẦU

Sách giáo khoa Toán 8 hiện hành được biên soạn theo tinh thần đổi mới của chương trình và phương pháp dạy – học, nhằm nâng cao tính chủ động, tích cực của học sinh trong quá trình học tập.

Tác giả xin trân trọng giới thiệu cuốn sách “**BỒI DƯỠNG VÀ PHÁT TRIỂN TƯ DUY ĐỘT PHÁ TRONG GIẢI TOÁN HỌC 8**”, được viết với mong muốn gửi tới các thầy cô, phụ huynh và các em học sinh một tài liệu tham khảo hữu ích trong dạy và học môn Toán ở cấp THCS theo định hướng đổi mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Cuốn sách được cấu trúc gồm các phần:

- **Kiến thức căn bản cần nắm:** Nhắc lại những kiến thức cơ bản cần nắm, những công thức quan trọng trong bài học, có ví dụ cụ thể...

- **Bài tập sách giáo khoa, bài tập tham khảo:** Lời giải chi tiết cho các bài tập, bài tập được tuyển chọn từ nhiều nguồn của môn Toán được chia bài tập thành các dạng có phương pháp làm bài, các ví dụ minh họa có lời giải chi tiết...Có nhiều cách giải khác nhau cho một bài toán...

Cuốn sách này còn là tài liệu tham khảo bổ ích cho quý thầy cô giáo và các bậc phụ huynh học sinh để hướng dẫn, giúp đỡ các em học tập tốt bộ môn Toán.

Các tác giả

## MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU .....	Trang
<b>PHẦN 1. ĐẠI SỐ</b> .....	Trang
<b>CHƯƠNG I. PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC</b> .....	Trang
Bài 1. Nhân đơn thức với đa thức .....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập .....	Trang
Bài 2. Nhân đa thức với đa thức .....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập .....	Trang
Bài 3. Những hằng đẳng thức đáng nhớ .....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập .....	Trang
Bài 4. Những hằng đẳng thức đáng nhớ (tt) .....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
Bài 5. Những hằng đẳng thức đáng nhớ (tt) .....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập .....	Trang
Bài 6. Chuyên đề phân tích đa thức thành nhân tử .....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập .....	Trang
Bài 7. Chia đơn thức cho đơn thức .....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập .....	Trang
Bài 8. Chia đa thức cho đơn thức .....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kĩ năng giải bài tập .....	Trang
Bài 9. Chia đa thức một biến đã sắp xếp .....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang

B. Luyện kỹ năng giải bài tập .....	Trang
<b>CHƯƠNG 2. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ .....</b>	<b>Trang</b>
Bài 1. Chuyên đề kiến thức mở đầu về phân thức đại số.....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kỹ năng giải bài tập .....	Trang
Bài 2. Chuyên đề cộng trừ nhân chia phân thức đại số.....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kỹ năng giải bài tập .....	Trang
<b>CHƯƠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.....</b>	<b>Trang</b>
Bài 1. Mở đầu về phương trình. Phương trình bậc nhất một ẩn..	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kỹ năng giải bài tập .....	Trang
Bài 2. Phương trình đưa về dạng $ax + b = 0$ .....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kỹ năng giải bài tập .....	Trang
Bài 3. Phương trình tích.....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kỹ năng giải bài tập .....	Trang
Bài 4. Phương trình chứa ẩn ở mẫu. Bài tập tổng hợp.....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kỹ năng giải bài tập .....	Trang
Bài 5. Giải bài toán bằng cách lập phương trình.....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kỹ năng giải bài tập .....	Trang
<b>CHƯƠNG 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN ..</b>	<b>Trang</b>
Bài 1. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, giữa thứ tự và phép nhân....	Trang
A. Chuẩn kiến thức .....	Trang
B. Luyện kỹ năng giải bài tập .....	Trang
Bài 2. Bất phương trình bậc nhất một ẩn .....	Trang

A. Chuẩn kiến thức .....Trang

B. Luyện kỹ năng giải bài tập .....Trang

Bài 3. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối .....Trang

A. Chuẩn kiến thức .....Trang

B. Luyện kỹ năng giải bài tập .....Trang

# CHƯƠNG I. PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

## BÀI 1. NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

#### 1. Hãy làm theo các hướng dẫn sau:

- Viết một đơn thức bậc 3 gồm hai biến  $x, y$ ; một đa thức có ba hạng tử bậc 3 gồm hai biến  $x, y$ .

#### Ví dụ

Đơn thức bậc 3 gồm hai biến  $x, y$  là  $x^2y$

Đa thức có ba hạng tử bậc 3 gồm hai biến  $x, y$  là  $x^2y + xy + 1$

- Hãy nhân đơn thức đó với từng hạng tử của đa thức vừa viết.

$$x^2y \cdot x^2y = x^4y^2; \quad x^2y \cdot xy = x^3y^2; \quad x^2y \cdot 1 = x^2y$$

- Hãy cộng các tích tìm được

$$S = x^4y^2 + x^3y^2 + x^2y$$

**2. Quy tắc:** Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích lại với nhau.

$$A(B+C) = AB + AC$$

#### 3. Áp dụng: Làm tính nhân

$$\begin{aligned} \left( 3x^3y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}xy \right) 6xy^3 &= 3x^3y \cdot 6xy^3 - \frac{1}{2}x^2 \cdot 6xy^3 + \frac{1}{5}xy \cdot 6xy^3 \\ &= 18x^4y^4 - 3x^3y^3 + \frac{6}{5}x^2y^4 \end{aligned}$$

### B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

#### Bài 1. Thực hiện phép nhân:

a)  $(-5x^2)(3x^3 - 2x^2 + x - 1)$

b)  $\left( -4x^3 + \frac{2}{3}y - \frac{1}{4}yz \right) \left( -\frac{1}{2}xy \right)$

c)  $(-7mxy^2)(8m^2x - 3my + y^2 - 4ny)$

d)  $-3a^2b(4ax + 2xy - 4b^2y)$

#### Bài giải

$$a) (-5x^2)(3x^3 - 2x^2 + x - 1) = -15x^5 + 10x^4 - 5x^3 + 5x^2$$

$$b) \left( -4x^3 + \frac{2}{3}y - \frac{1}{4}yz \right) \left( -\frac{1}{2}xy \right) = 2x^4y - \frac{1}{3}xy^2 + \frac{1}{8}xy^2z$$

$$c) (-7mxy^2)(8m^2x - 3my + y^2 - 4ny) = -56m^3x^2y^2 + 21m^2xy^3 - 7mxy^4 + 28mnxy^3$$

$$d) -3a^2b(4ax + 2xy - 4b^2y) = -12a^3bx - 6a^2bxy + 12a^2b^3y$$

### Bài 2. Tính:

$$a) 3x^2y(2x^2 - y) - 2x^2(2x^2y - y^2)$$

$$b) 3x^2(2y - 1) - [2x^2(5y - 3) - 2x(x - 1)]$$

$$c) 2(x^{2n} + 2x^n y^n + y^{2n}) - y^n(4x^n + 2y^n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$d) 3x^{n-2}(x^{n+2} - y^{n+2}) + y^{n+2}(3x^{n-2} - y^{n-2}) \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

$$e) 4^{n+1} - 3 \cdot 4^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$f) 6^3 \cdot 3^8 \cdot 2^8 - 6^6(6^5 - 1)$$

### Bài giải

$$\begin{aligned} a) 3x^2y(2x^2 - y) - 2x^2(2x^2y - y^2) &= 6x^4y - 3x^2y^2 - 4x^4y + 2x^2y^2 \\ &= 2x^4y - x^2y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) 3x^2(2y - 1) - [2x^2(5y - 3) - 2x(x - 1)] &= 6x^2y - 3x^2 - 10x^2y + 6x^2 + 2x^2 - 2x \\ &= -4x^2y + 5x^2 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) 2(x^{2n} + 2x^n y^n + y^{2n}) - y^n(4x^n + 2y^n) &= 2x^{2n} + 4x^n y^n + 2y^{2n} - 4x^n y^n - 2y^{2n} \\ &= 2x^{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) 3x^{n-2}(x^{n+2} - y^{n+2}) + y^{n+2}(3x^{n-2} - y^{n-2}) &= 3x^{2n} - 3x^{n-2}y^{n+2} + 3x^{n-2}y^{n+2} - y^{2n} \\ &= 3x^{2n} - y^{2n} \end{aligned}$$

$$e) 4^{n+1} - 3 \cdot 4^n = 4 \cdot 4^n - 3 \cdot 4^n = 4^n$$

$$f) 6^3 \cdot 3^8 \cdot 2^8 - 6^6 \cdot (6^5 - 1) = 6^{11} - 6^{11} + 6^5 = 6^5$$

### Bài 3. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x và y:

$$a) 3x(x - 5y) + (y - 5x)(-3y) - 1 - 3(x^2 - y^2)$$

$$b) x(x^3 + 2x^2 - 3x + 2) - (x^2 + 2x)x^2 + 3x(x - 1) + x - 12$$

$$c) 3xy^2(4x^2 - 2y) - 6y(2x^3y + 1) + 6(xy^3 + y - 3)$$

$$d) 2(3x^{n+1} - y^{n-1}) + 4(x^{n+1} + y^{n-1}) - 2x(5x^n + 1) - 2(y^{n-1} - x + 3) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

**Bài giải**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & 3x(x - 5y) + (y - 5x)(-3y) - 1 - 3(x^2 - y^2) \\
 &= 3x^2 - 15xy - 3y^2 + 15xy - 1 - 3x^2 + 3y^2 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & x(x^3 + 2x^2 - 3x + 2) - (x^2 + 2x)x^2 + 3x(x - 1) + x - 12 \\
 &= x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + x - 12 \\
 &= -12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & 3xy^2(4x^2 - 2y) - 6y(2x^3y + 1) + 6(xy^3 + y - 3) \\
 &= 12x^3y^2 - 6xy^3 - 12x^3y^2 - 6y + 6xy^3 + 6y - 18 \\
 &= -18
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } & 2(3x^{n+1} - y^{n-1}) + 4(x^{n+1} + y^{n-1}) - 2x(5x^n + 1) - 2(y^{n-1} - x + 3) \\
 &= 6x^{n+1} - 2y^{n-1} + 4x^{n+1} + 4y^{n-1} - 10x^{n+1} - 2x - 2y^{n-1} + 2x - 6 \\
 &= -6
 \end{aligned}$$



## BÀI 2. NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

#### 1. Hãy làm theo các hướng dẫn sau

- Hãy viết một đa thức ba hạng tử bậc 3 một ẩn  $x$ ; một đa thức ba hạng tử bậc 4 một ẩn  $x$ .

#### Ví dụ

Đa thức ba hạng tử bậc 3 một ẩn  $x$  là  $x^3 + x + 1$

Đa thức ba hạng tử bậc 4 một ẩn  $x$  là  $x^4 + x^2 + 1$

- Hãy nhân mỗi hạng tử của đa thức này với đa thức kia.

$$x^3(x^4 + x^2 + 1) = x^7 + x^5 + x^3;$$

$$x(x^4 + x^2 + 1) = x^5 + x^3 + x;$$

$$1(x^4 + x^2 + 1) = x^4 + x^2 + 1;$$

- Hãy cộng các kết quả vừa tìm được.

$$S = x^7 + x^5 + x^3 + x^5 + x^3 + x + x^4 + x^2 + 1 = x^7 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$$

**2. Quy tắc:** Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích lại với nhau.

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

#### 3. Áp dụng: Làm tính nhân

$$(x + 3)(x^2 + 3x - 5) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3x^2 + 9x - 15 = x^3 + 6x^2 + 4x - 15$$

### B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

#### Bài 4. Thực hiện phép nhân:

a)  $(2x + 3y)(2x - 3xy + 4y)$

b)  $(2a - 1)(a^2 - 5 + 2a)$

c)  $(5y^2 - 11y + 8)(3 - 2y)$

d)  $(x + 1)(x - 2)(2x - 1)$

e)  $(x - 2)(3x + 1)(x + 1)$

f)  $(3x^2 + 11 - 5x)(8x - 6 + 2x^2)$

g)  $(x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$

h)  $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

i)  $(x^{2n} + x^n y^n + y^{2n})(x^n - y^n)(x^{3n} + y^{3n}) \quad (n \in \mathbb{N})$

j)  $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

k)\*  $(a + b + c + d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad - bc - bd - cd)$

**Bài giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } (2x + 3y)(2x - 3xy + 4y) &= 4x^2 - 6x^2y + 8xy + 6xy - 9xy^2 + 12y^2 \\ &= 4x^2 - 6x^2y + 14xy - 9xy^2 + 12y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (2a - 1)(a^2 - 5 + 2a) &= 2a^3 - 10a + 4a^2 - a^2 + 5 - 2a \\ &= 2a^3 + 3a^2 - 12a + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (5y^2 - 11y + 8)(3 - 2y) &= 15y^2 - 10y^3 - 33y + 22y^2 + 24 - 16y \\ &= -10y^3 + 37y^2 - 49y + 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (x + 1)(x - 2)(2x - 1) &= (x^2 - x - 2)(2x - 1) \\ &= 2x^3 - x^2 - 2x^2 + x - 4x + 2 \\ &= 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (x - 2)(3x + 1)(x + 1) &= (3x^2 - 5x - 2)(x + 1) \\ &= 3x^3 + 3x^2 - 5x^2 - 5x - 2x - 2 \\ &= 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } (3x^2 + 11 - 5x)(8x - 6 + 2x^2) \\ &= 24x^3 - 18x^2 + 6x^4 + 88x - 66 + 22x^2 - 40x^2 + 30x - 10x^3 \\ &= 6x^4 - 14x^3 - 36x^2 + 118x - 66 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1) \\ &= x^7 - x^6 + x^4 - x^3 + x^2 + x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + x + x^5 - x^4 + x^2 - x + 1 \\ &= x^7 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) &= x^5 - x^4 + x^2 + x^4 - x^3 + x + x^3 - x^2 + 1 \\ &= x^5 + x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } (x^{2n} + x^n y^n + y^{2n})(x^n - y^n)(x^{3n} + y^{3n}) &= (x^{3n} - y^{3n})(x^{3n} + y^{3n}) \\ &= x^{6n} - y^{6n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - abc - a^2c + a^2b + b^3 + bc^2 - ab^2 - b^2c - abc + a^2c + b^2c + c^3 \\ &\quad - abc - bc^2 - ac^2 \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

$$\text{k)* } (a + b + c + d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad - bc - bd - cd)$$

$$\begin{aligned}
&= a^3 + ab^2 + ac^2 + ad^2 - a^2b - a^2c - a^2d - abc - abd - acd + a^2b + b^3 + bc^2 + bd^2 - \\
&ab^2 - abc - abd - b^2c - b^2d - bcd + a^2c + b^2c + c^3 + cd^2 - abc - ac^2 - acd - bc^2 - \\
&bcd - c^2d + a^2d + b^2d + c^2d + d^3 - abd - acd - ad^2 - bcd - bd^2 - cd^2 \\
&= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3abc - 3abd - 3acd - 3bcd
\end{aligned}$$

**Bài 5. Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào x:**

a)  $x(x^3 + x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x + 3) + 4(x^2 - x - 2)$

b)  $(x - 3)(x + 2) + (x - 1)(x + 1) - (2x - 1)x$

c)  $(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$

d)  $(x + 5)(x + 4)(x - 2) - (x^2 + 11x - 9)(x + 1) + 5x^2$

**Bài giải**

a)  $x(x^3 + x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x + 3) + 4(x^2 - x - 2)$

$$= x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x^2 + 2x + 6 + 4x^2 - 4x - 8$$

$$= -8$$

b)  $(x - 3)(x + 2) + (x - 1)(x + 1) - (2x - 1)x$

$$= x^2 - x - 6 + x^2 - 1 - 2x^2 + x$$

$$= -7$$

c)  $(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$$= x^3 + 1 - x^3 + 1 = 2$$

d)  $(x + 5)(x + 4)(x - 2) - (x^2 + 11x - 9)(x + 1) + 5x^2$

$$= x^3 + 7x^2 + 2x - 40 - x^3 - x^2 - 11x^2 - 11x + 9x + 9 + 5x^2$$

$$= 9$$

**Bài 6. Xác định hệ số a, b, c biết:**

a)  $(x^2 + cx + 2)(ax + b) = x^3 - x^2 + 2$  với mọi x

b)  $(ay^2 + by + c)(y + 3) = y^3 + 2y^2 - 3y$  với mọi y

**Bài giải**

a) Ta có  $(x^2 + cx + 2)(ax + b) = ax^3 + bx^2 + acx^2 + bcx + 2ax + 2b$

$$= ax^3 + (b + ac)x^2 + (bc + 2a)x + 2b$$

$$= x^3 - x^2 + 2.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a=1 \\ b+ac=-1 \\ bc+2a=0 \\ 2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (ay^2 + by + c)(y + 3) &= ay^3 + 3ay^2 + by^2 + 3by + cy + 3c \\ &= ay^3 + (3a + b)y^2 + (3b + c)y + 3c \\ &= y^3 + 2y^2 - 3y. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a=1 \\ 3a+b=2 \\ 3b+c=-3 \\ 3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$$

### Bài 7. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\text{a) } (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$\text{b) } (x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$$

$$\text{c) } (x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$$

$$\text{d) } (x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx$$

$$\text{e) } (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = x^4 - y^4$$

$$\text{f) } (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = x^5 + y^5$$

$$\text{g) } (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$\text{h) } (x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

### Bài giải

$$\begin{aligned} \text{a) } (x + a)(x + b) &= x^2 + bx + ax + ab \\ &= x^2 + (a + b)x + ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x + a)(x + b)(x + c) &= (x^2 + bx + ax + ab)(x + c) \\ &= x^3 + cx^2 + bx^2 + bcx + ax^2 + acx + abx + abc \\ &= x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x + abc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (x - y - z)^2 &= (x - y)^2 - 2(x - y)z + z^2 \\ &= x^2 - 2xy + y^2 - 2xz + 2yz + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (x + y - z)^2 &= (x + y)^2 - 2(x + y)z + z^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 2xz - 2yz + z^2 \end{aligned}$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) &= x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 - x^3y - x^2y^2 - xy^3 - y^4 \\ &= x^4 - y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) \\ &= x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 + x^4y - x^3y^2 + x^2y^3 - xy^4 + y^5 \\ &= x^5 + y^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + zx^2 + y^2z + \\ & \quad z^3 - xyz - yz^2 - z^2x \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)* } (x + y + z)^3 &= (x + y)^3 + 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2 + z^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3zx^2 + 6xyz + 3y^2z + 3z^2x + 3yz^2 \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + (3x^2y + 3zx^2) + (3xyz + 3z^2x) + (3xy^2 + 3xyz) + (3yz^2 + 3y^2z) \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + (3x^2 + 3zx + 3xy + 3yz)(y + z) \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3[x(z + x) + y(z + x)](y + z) \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x) \end{aligned}$$

### Bài 8. Tìm x:

$$\text{a) } 3(1 - 4x)(x - 1) + 4(3x + 2)(x + 3) = 38$$

$$\text{b) } 5(2x + 3)(x + 2) - 2(5x - 4)(x - 1) = 75$$

$$\text{c) } 2x^2 + 3(x - 1)(x + 1) = 5x(x + 1)$$

$$\text{d) } (8 - 5x)(x + 2) + 4(x - 2)(x + 1) + 2(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$\text{e) } (x - 2)(x - 1) = x(2x + 1) + 2$$

$$\text{f) } (x + 2)(x + 2) - (x - 2)(x - 2) = 8x$$

$$\text{g) } (2x - 1)(x^2 - x + 1) = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

$$\text{h) } (x + 1)(x^2 + 2x + 4) - x^3 - 3x^2 + 16 = 0$$

$$\text{i) } (x + 1)(x + 2)(x + 5) - x^3 - 8x^2 = 27$$

### Bài giải

$$\text{a) } 3(1 - 4x)(x - 1) + 4(3x + 2)(x + 3) = 38$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3 - 12x^2 + 12x + 12x^2 + 36x + 8x + 24 = 28$$

$$\Leftrightarrow 59x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{59}$$

$$\text{b) } 5(2x + 3)(x + 2) - 2(5x - 4)(x - 1) = 75$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 + 20x + 15x + 30 - 10x^2 + 10x + 8x - 8 = 75$$

$$\Leftrightarrow 53x = 53 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{c) } 2x^2 + 3(x - 1)(x + 1) = 5x(x + 1) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x^2 - 3 = 5x^2 + 5x$$

$$\Leftrightarrow 5x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{5}$$

$$\text{d) } (8 - 5x)(x + 2) + 4(x - 2)(x + 1) + 2(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x + 16 - 10x^2 - 10x + 4x^2 + 4x - 8x - 8 + 2x^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow -2x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{e) } (x - 2)(x - 1) = x(2x + 1) + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x^2 + x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\text{f) } (x + 2)(x + 2) - (x - 2)(x - 2) = 8x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 = 8x$$

$$\Leftrightarrow 8x = 8x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\text{g) } (2x - 1)(x^2 - x + 1) = 2x^3 - 3x^2 + 2 \Leftrightarrow 2x^3 - 2x^2 + 2x - x^2 + x - 1 = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{h) } (x + 1)(x^2 + 2x + 4) - x^3 - 3x^2 + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 4x + x^2 + 2x + 4 - x^3 - 3x^2 + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$\text{i) } (x + 1)(x + 2)(x + 5) - x^3 - 8x^2 = 27 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x + 5) - x^3 - 8x^2 = 27$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + 3x^2 + 15x + 2x + 10 - x^3 - 8x^2 = 27$$

$$\Leftrightarrow 17x = 17 \Leftrightarrow x = 1$$

## BÀI 3. NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

1. **Thực hiện phép tính:**  $(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta cũng có

Bình phương của một tổng  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

3. **Áp dụng:**

a) Tính  $(a + 1)^2$

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

b) Viết biểu thức  $x^2 + 4x + 4$  dưới dạng bình phương của một tổng.

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

c) Tính nhanh:

$$51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 2.50.1 + 1^2 = 2601$$

$$301^2 = (300 + 1)^2 = 300^2 + 2.300.1 + 1^2 = 90601$$

4. **Thực hiện phép tính**

$$[a + (-b)]^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

5. Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta cũng có:

$$\text{Bình phương của một hiệu: } (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

6. **Áp dụng**

$$\text{a) Tính } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - 2x + \frac{1}{4}$$

$$\text{b) Tính } (2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

$$\text{c) Tính nhanh } 99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2.100.1 + 1^2 = 9801$$

7. **Thực hiện phép tính:**

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

8. Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta cũng có:

$$\text{Hiệu hai bình phương } A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

9. **Áp dụng**

$$\text{a) Tính } (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$$

$$\text{b) Tính } (x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2$$

c) Tính nhanh  $56.64 = (60 - 4)(60 + 4) = 60^2 - 4^2 = 3600 - 16 = 3584$

Hỏi  $(x - 5)^2$  có bằng  $(5 - x)^2$  ?

$$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25; \quad (5 - x)^2 = 25 - 10x + x^2$$

Vậy  $(x - 5)^2 = (5 - x)^2$

## B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

**Bài 9. Điền vào chỗ trống sau đây để có đẳng thức đúng:**

a)  $(\dots - \dots)^2 = a^2 - 6ab + \dots$

b)  $(\dots + \dots)^2 = \dots + m + \frac{1}{4}$

c)  $(\dots - \sqrt{2})^2 = 9x^2 - \dots + \dots$

d)  $\dots - 16y^4 = (x - \dots)(x + \dots)$

e)  $(x - \dots)(x + \dots) = \dots - 3$

**Bài giải**

a)  $(a - 3b)^2 = a^2 - 6ab + 9b^2$

b)  $(m + \frac{1}{2})^2 = m^2 + m + \frac{1}{4}$

c)  $(3x - \sqrt{2})^2 = 9x^2 - 6\sqrt{2}x + 2$

d)  $x^2 - 16y^4 = (x - 4y^2)(x + 4y^2)$

e)  $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = x^2 - 3$

**Bài 10. Điền vào chỗ trống để biểu thức sau trở thành bình phương của một tổng hoặc bình phương của một hiệu:**

a)  $4a^2x^2 + 4abx + \dots$

b)  $1 + 2x^2 - \dots$

c)  $25m^2 - 40mn + \dots$

d)  $\dots - 3px + p^2$

e)  $16x^2 + \dots - 24xy$

**Bài giải**

a)  $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$

b)  $1 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x = (1 - \sqrt{2}x)^2$

c)  $25m^2 - 40mn + 16n^2 = (5m - 4n)^2$

d)  $\frac{9}{4}x^2 - 3px + p^2 = (\frac{3}{2}x - p)^2$

e)  $16x^2 + 9y^2 - 24xy = (4x - 3y)^2$



## BÀI 4. NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ (tiếp theo)

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

#### 1. Thực hiện phép tính:

$$\begin{aligned}(a + b)(a + b)^2 &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

#### 2. Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta cũng có:

$$\text{Lập phương của một tổng: } (A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

#### 3. Áp dụng:

a) Tính  $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) Tính  $(2x + y)^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

#### 4. Thực hiện phép tính:

$$[a + (-b)]^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

#### 5. Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta cũng có:

$$\text{Lập phương của một hiệu: } (A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

#### 6. Áp dụng

a) Tính  $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot \frac{1}{3} + 3x \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$

b) Tính  $(x - 2y)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2y + 3x(2y)^2 - (2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

#### 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

a)  $(2x - 1)^2 = (1 - 2x)^2$ ;

b)  $(x - 1)^3 = (1 - x)^3$ ;

c)  $(x + 1)^3 = (1 + x)^3$ ;

d)  $x^2 - 1 = 1 - x^2$ ;

e)  $(x - 3)^2 = x^2 - 2x + 9$ ;

#### Bài giải:

a) Đúng

b) Sai

c) Đúng

d) Sai

e) Sai

## BÀI 5. NHỮNG HẲNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ (tiếp theo)

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

#### 1. Thực hiện phép tính

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

#### 2. Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta cũng có:

$$\text{Tổng hai lập phương: } A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

#### 3. Ta quy ước $A^2 - AB + B^2$ được gọi là bình phương thiếu của hiệu $A - B$

#### 4. Áp dụng:

a) Tính  $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

b) Viết  $(x + 1)(x^2 - x + 1)$  ở dạng tổng:  $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$

#### 5. Thực hiện phép tính:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

#### 6. Với A và B là các biểu thức tùy ý, ta cũng có:

$$\text{Hiệu hai lập phương } A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

#### 7. Ta quy ước $A^2 + AB + B^2$ được gọi là bình phương thiếu của tổng $A + B$

#### 8. Áp dụng:

a) Tính  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$

b) Viết  $8x^3 - y^3$  dưới dạng tích:

$$8x^3 - y^3 = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$$

\* Bổ sung đầy đủ bảy hằng đẳng thức đáng nhớ sau:

1)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

2)  $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

3)  $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

4)  $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

5)  $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

6)  $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

7)  $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

### B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

**Bài 11. Tính:**

a)  $(3 - xy^2)^2 - (2 + xy^2)^2$

c)  $(a - b^2)(a + b^2)$

e)  $(x - y + 6)(x + y - 6)$

g)  $(2y - 3)^3$

i)  $(2y - 5)(4y^2 + 10y + 25)$

k)  $(x - 3)^3 + (2 - x)^3$

b)  $9x^2 - (3x - 4)^2$

d)  $(a^2 + 2a + 3)(a^2 + 2a - 3)$

f)  $(y + 2z - 3)(y - 2z - 3)$

h)  $(2 - y)^3$

j)  $(3y + 4)(9y^2 - 12y + 16)$

l)  $(x + y)^3 - (x - y)^3$

**Bài giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } (3 - xy^2)^2 - (2 + xy^2)^2 &= 9 - 6xy^2 + x^2y^4 - 4 - 4xy^2 - x^2y^4 \\ &= 5 - 10xy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 9x^2 - (3x - 4)^2 &= (3x - 3x + 4)(3x + 3x - 4) \\ &= 4(6x - 4) = 24x - 16 \end{aligned}$$

c)  $(a - b^2)(a + b^2) = a^2 - b^4$

$$\begin{aligned} \text{d) } (a^2 + 2a + 3)(a^2 + 2a - 3) &= (a^2 + 2a)^2 - 9 \\ &= a^4 + 4a^3 + 4a^2 - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (x - y + 6)(x + y - 6) &= x^2 - (y - 6)^2 \\ &= x^2 - y^2 + 12y - 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } (y + 2z - 3)(y - 2z - 3) &= (y - 3)^2 - 4z^2 \\ &= y^2 - 6y - 4z^2 + 9 \end{aligned}$$

g)  $(2y - 3)^3 = 8y^3 - 36y^2 + 54y - 27$

h)  $(2 - y)^3 = 8 - 12y + 6y^2 - y^3$

i)  $(2y - 5)(4y^2 + 10y + 25) = 8y^3 - 125$

j)  $(3y + 4)(9y^2 - 12y + 16) = 27y^3 + 64$

$$\begin{aligned} \text{k) } (x - 3)^3 + (2 - x)^3 &= (x - 3 + 2 - x)[(x - 3)^2 - (x - 3)(2 - x) + (2 - x)^2] \\ &= -(x^2 - 6x + 9 - 2x + x^2 + 6 - 3x + 4 - 4x + x^2) \\ &= -3x^2 + 15x + 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l) } (x + y)^3 - (x - y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 \\ &= 6x^2y + 2y^3 \end{aligned}$$

**Bài 12. Rút gọn biểu thức:**

- a)  $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2)$   
 b)  $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 + 3x^2 - 3x(x + 1)(x - 1)$   
 c)  $(2x + 1)^2 + 2(4x^2 - 1) + (2x - 1)^2$   
 d)  $(m + n)^2 - (m - n)^2 + (m - n)(m + n)$   
 e)  $(3x + 1)^2 - 2(3x + 1)(3x + 5) + (3x + 5)^2$   
 f)  $(a - b + c)^2 - 2(a - b + c)(c - b) + (b - c)^2$   
 g)  $(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)(2x + 5)(4x^2 - 10x + 25) - 64x^4$   
 h)  $(a + b)^3 + (a - b)^3 - 2a^3$   
 i)  $(x + y + z)^2 + (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)$   
 j)  $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1$

### Bài giải

- a)  $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2) = [(x^2 + 2)^2 - 4x^2](x^4 - 4)$   
 $= (x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2)(x^4 - 4)$   
 $= (x^4 + 4)(x^4 - 4)$   
 $= x^8 - 16$
- b)  $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 + 3x^2 - 3x(x + 1)(x - 1)$   
 $= (x + 1 - x + 1)(x + 1 + x - 1) + 3x^2 - 3x(x^2 - 1)$   
 $= 4x + 3x^2 - 3x^3 + 3x = -3x^3 + 3x^2 + 7x$
- c)  $(2x + 1)^2 + 2(4x^2 - 1) + (2x - 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 + 8x^2 - 2 + 4x^2 - 4x + 1$   
 $= 16x^2$
- d)  $(m + n)^2 - (m - n)^2 + (m - n)(m + n)$   
 $= (m + n - m + n)(m + n + m - n) + m^2 - n^2$   
 $= 4mn + m^2 - n^2$
- e)  $(3x + 1)^2 - 2(3x + 1)(3x + 5) + (3x + 5)^2 = (3x + 1 - 3x - 5)^2$   
 $= 16$
- f)  $(a - b + c)^2 - 2(a - b + c)(c - b) + (b - c)^2 = (a - b + c + b - c)^2$   
 $= a^2$
- g)  $(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)(2x + 5)(4x^2 - 10x + 25) - 64x^4$   
 $= (8x^3 - 125)(8x^3 + 125) = 64x^6 - 125^2$

$$\begin{aligned} \text{h)} (a+b)^3 + (a-b)^3 - 2a^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 2a^3 \\ &= 6ab^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} (x+y+z)^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 - 3(x^2+y^2+z^2) \\ = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx + x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2zx + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 - 3x^2 \\ - 3y^2 - 3z^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1 \\ = (100-99)(100+99) + (98-97)(98+97) + \dots + (4-3)(4+3) + (2-1)(2+1) \\ = 100+99+98+97+\dots+2+1 \\ = (100+1) \cdot 100 : 2 = 5050 \end{aligned}$$

### Bài 13. Tìm x:

$$\text{a)} (x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 9(x+1)^2 = 15$$

$$\text{b)} 4x^2 - 81 = 0$$

$$\text{c)} x(x-5)(x+5) - (x-2)(x^2+2x+4) = 3$$

$$\text{d)} 25x^2 - 2 = 0$$

$$\text{e)} (x+2)^2 = (2x-1)^2$$

$$\text{f)} (x+2)^2 - x + 4 = 0$$

$$\text{g)} (x^2-2)^2 + 4(x-1)^2 - 4(x^2-2)(x-1) = 0$$

### Bài giải

$$\text{a)} (x-3)^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 9(x+1)^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 27 + 9x^2 + 18x + 9 = 15$$

$$\Leftrightarrow 45x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{2}{15}$$

$$\text{b)} 4x^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{81}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{9}{2}$$

$$\text{c)} x(x-5)(x+5) - (x-2)(x^2+2x+4) = 3 \Leftrightarrow x^3 - 25x - x^3 + 8 = 3$$

$$\Leftrightarrow 25x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$\text{d)} 25x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{25} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\text{e)} (x+2)^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=2x-1 \\ x+2=-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{f)} (x+2)^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{23}{4} = 0 \text{ (vô lí)} \Leftrightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

$$g) (x^2 - 2)^2 + 4(x - 1)^2 - 4(x^2 - 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2 - 2x + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

### Bài 14

a) Cho  $x - y = 7$ . Tính giá trị biểu thức  $A = x(x + 2) + y(y - 2) - 2xy$

$$B = x^3 - 3xy(x - y) - y^3 - x^2 + 2xy - y^2$$

b) Cho  $x + 2y = 5$ . Tính giá trị biểu thức sau:  $C = x^2 + 4y^2 - 2x + 10 + 4xy - 4y$

### Bài giải

$$\begin{aligned} a) A &= x(x + 2) + y(y - 2) - 2xy = x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2xy \\ &= (x - y)^2 + 2(x - y). \quad (1) \end{aligned}$$

Thay  $x - y = 7$  vào (1) ta được  $A = 7^2 + 2 \cdot 7 = 63$

$$B = x^3 - 3xy(x - y) - y^3 - x^2 + 2xy - y^2 = (x - y)^3 - (x - y)^2 \quad (2)$$

Thay  $x - y = 7$  vào (2) ta được  $B = 7^3 - 7^2 = 294$

$$b) C = x^2 + 4y^2 - 2x + 10 + 4xy - 4y = (x + 2y)^2 - 2(x + 2y) \quad (3)$$

Thay  $x + 2y = 5$  vào (3) ta được  $C = 5^2 - 2 \cdot 5 = 15$

### Bài 15. Chứng minh đẳng thức:

$$c) (a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

$$d) (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$e) (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$f) (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$g) (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$h) (a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$$

### Bài giải

$$\begin{aligned} c) (a + b)^2 - 2ab &= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) (a + b)^2 - (a - b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2 + 2ab \\ &= 4ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3 + (3a^2b + 3ab^2) \\ &= a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \end{aligned}$$

$$f) (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3 - (3a^2b - 3ab^2)$$

$$= a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$g) (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$= (a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd) + (a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd)$$

$$= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$h) (a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac + a^2 + b^2 + c^2$$

$$= (a^2 + b^2 + 2ab) + (b^2 + c^2 + 2bc) + (a^2 + c^2 + 2ac)$$

$$= (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$$

### Bài 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$a) x^2 - 2x + 1$$

$$b) x^2 + x + 1$$

$$c) 4x^2 + 4x - 5$$

$$d) (x - 3)(x + 5) + 4$$

$$e) x^2 - 4x + y^2 - 8y + 6$$

### Bài giải

$$a) x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$$

Vậy GTNN của biểu thức bằng 0 khi  $x = 1$

$$b) x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy GTNN của biểu thức bằng  $\frac{3}{4}$  khi  $x = -\frac{1}{2}$

$$c) 4x^2 + 4x - 5 = (2x + 1)^2 - 6 \geq -6$$

Vậy GTNN của biểu thức bằng  $-6$  khi  $x = -\frac{1}{2}$

$$d) (x - 3)(x + 5) + 4 = x^2 + 2x - 15 + 4 = (x + 1)^2 - 12 \geq -12$$

Vậy GTNN của biểu thức bằng  $-12$  khi  $x = -1$

$$e) x^2 - 4x + y^2 - 8y + 6 = (x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 14 \geq -14$$

Vậy GTNN của biểu thức bằng  $-14$  khi  $x = 2$  và  $y = 4$

### Bài 17. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$a) 2x - x^2 - 4$$

$$b) -x^2 - 4x$$

$$c) -9x^2 + 24x - 18$$

$$d) 4x - x^2 - 1$$

$$e) 5 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y$$

### Bài giải

$$a) 2x - x^2 - 4 = -3 - (x - 1)^2 \leq -3$$

Vậy GTLN của biểu thức bằng  $-3$  khi  $x = 1$

b)  $-x^2 - 4x = 4 - (x + 2)^2 \leq 4$

Vậy GTLN của biểu thức bằng 4 khi  $x = -2$

c)  $-9x^2 + 24x - 18 = -2 - (3x - 4)^2 \leq -2$

Vậy GTLN của biểu thức bằng  $-2$  khi  $x = \frac{4}{3}$

d)  $4x - x^2 - 1 = 3 - (x - 2)^2 \leq 3$

Vậy GTLN của biểu thức bằng 3 khi  $x = 2$

e)  $5 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y = 7 - (x - 1)^2 - (2y + 1)^2 \leq 7$

Vậy GTLN của biểu thức bằng 7 khi  $x = 1$  và  $y = -\frac{1}{2}$



## Bài 6. CHUYÊN ĐỀ PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

#### Định nghĩa:

Phân tích đa thức thành nhân tử là biến đổi đa thức đó thành tích của những đa thức

### B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

#### DẠNG 1

Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp đặt nhân tử chung

#### A. VÍ DỤ

**Phân tích các đa thức sau thành nhân tử**

a)  $14x^2y - 21xy^2 = 7xy(2x - 3y + 4y)$

b)  $5x^2(x - 2y) - 15x(2y - x) = 5x^2(x - 2y) + 15x(x - 2y) = 5x(x - 2y)(x + 3)$

#### B. BÀI TẬP

**Bài 18. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:**

a)  $5x^2y^2 + 20x^2y - 35xy^2$

b)  $3x(x - 2y) + 6y(2y - x)$

c)  $40a^3b^3c^3x + 12a^3b^4c^2 - 16a^4b^5cx$

d)  $(b - 2c)(a - b) - (a + b)(2c - b)$

#### **Bài giải**

a)  $5x^2y^2 + 20x^2y - 35xy^2 = 5xy(xy + 4x - 7y)$

b)  $3x(x - 2y) + 6y(2y - x) = 3x^2 - 6xy + 12y^2 - 6xy$

$$= 3x^2 - 12xy + 12y^2$$

$$= 3(x - 2y)^2$$

c)  $40a^3b^3c^3x + 12a^3b^4c^2 - 16a^4b^5cx = 4a^3b^3c(10c^2x + 3bc - 4ab^2x)$

d)  $(b - 2c)(a - b) - (a + b)(2c - b) = (b - 2c)(a - b + a + b)$

$$= 2a(b - 2c)$$

#### **Bài 19. Tìm x**

a)  $3x(x - 2) - x + 2 = 0$

b)  $x^2(x + 1) + 2x(x + 1) = 0$

c)  $x^4(x - 2) - 2 + x = 0$

d)  $x(2x - 3) - 2(3 - 2x) = 0$

$$e) 5(x+3) = 2x(3+x) \quad f) (x-2)(x^2+2x+5) + 2(x-2)(x+2) - 5(x-2) = 0$$

### Bài giải

$$a) 3x(x-2) - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(3x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$b) x^2(x+1) + 2x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c) x^4(x-2) - 2 + x = 0 &\Leftrightarrow (x-2)(x^4-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x-1=0 \\ x+1=0 \end{cases} \text{ (vì } x^2+1 \text{ luôn lớn hơn 0)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$d) x(2x-3) - 2(3-2x) = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=-2 \end{cases}$$

$$e) 5(x+3) = 2x(3+x) \Leftrightarrow (x+3)(2x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ 2x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$f) (x-2)(x^2+2x+5) + 2(x-2)(x+2) - 5(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2+5+2x+4-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ (vì } x^2+2x+6 = (x+1)^2+5 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

### DẠNG 2

Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức

## A. VÍ DỤ

**Phân tích các đa thức sau thành nhân tử**

$$a) (x + y)^2 - 9x^2 = (x + y - 3x)(x + y + 3x) = (y - 2x)(y + 4x)$$

$$b) 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 = (2x + y)^3$$

## B. BÀI TẬP

**Bài 20. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:**

$$a) a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy$$

$$b) 100 - (3x - y)^2$$

$$c) 27x^3 - a^3b^3$$

$$d) (a + b)^3 - (a - b)^3$$

$$e) (7x - 4)^2 - (2x + 1)^2$$

$$f) (x - y + 4)^2 - (2x + 3y - 1)^2$$

$$g) x^2 - 2xy + y^2 - 4$$

$$h) x^2 - y^2 - 2yz - z^2$$

$$i) 3a^2 - 6ab + 3b^2 - 12c^2$$

$$j) x^2 - 2xy + y^2 - m^2 + 2mn - n^2$$

$$k) a^2 - 10a + 25 - y^2 - 4yz - 4z^2$$

$$l) x^2 + 3cd(2 - 3cd) - 10xy - 1 + 25y^2$$

$$m) 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

$$n) (4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2$$

$$o) [4abcd + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)]^2 - 4[cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)]^2$$

## Bài giải

$$a) a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = (ay - bx)^2$$

$$b) 100 - (3x - y)^2 = (10 - 3x + y)(10 + 3x - y)$$

$$c) 27x^3 - a^3b^3 = (3x - ab)(9x^2 + 3abx + a^2b^2)$$

$$d) (a + b)^3 - (a - b)^3 = (a + b - a + b)[(a + b)^2 + (a + b)(a - b) + (a - b)^2]$$

$$= 2b(a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - b^2 + a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= 2b(3a^2 + b^2 + 4ab) = 2b[(2a + b)^2 - a^2]$$

$$= 2b(2a + b - a)(2a + b + a) = 2b(a + b)(3a + b)$$

$$e) (7x - 4)^2 - (2x + 1)^2 = (7x - 4 - 2x - 1)(7x - 4 + 2x + 1)$$

$$= (5x - 5)(9x - 3)$$

$$= 15(x - 1)(3x - 1)$$

$$f) (x - y + 4)^2 - (2x + 3y - 1)^2 = (x - y + 4)(2x + 3y - 1)$$

$$g) x^2 - 2xy + y^2 - 4 = (x - y)^2 - 4 = (x - y - 2)(x - y + 2)$$

$$h) x^2 - y^2 - 2yz - z^2 = x^2 - (y + z)^2 = (x - y - z)(x + y + z)$$

$$i) 3a^2 - 6ab + 3b^2 - 12c^2 = 3[(a - b)^2 - 4c^2] = 3(a - b - 2c)(a - b + 2c)$$

$$\begin{aligned}
 \text{j) } x^2 - 2xy + y^2 - m^2 + 2mn - n^2 &= (x - y)^2 - (m - n)^2 \\
 &= (x - y - m + n)(x - y + m - n) \\
 \text{k) } a^2 - 10a + 25 - y^2 - 4yz - 4z^2 &= (a - 5)^2 - (y + 2z)^2 \\
 &= (a - 5 - y - 2z)(a - 5 + y - 2z) \\
 \text{l) } x^2 + 3cd(2 - 3cd) - 10xy - 1 + 25y^2 &= (x^2 - 10xy + 25y^2) - (9c^2d^2 - 6cd + 1) \\
 &= (x - 5y)^2 - (3cd - 1)^2 \\
 &= (x - 5y - 3cd + 1)(x - 5y + 3cd - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{m) } 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 &= (2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2) \\
 &= [a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2] \\
 &= (a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{n) } (4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 \\
 &= (4x^2 - 3x - 18 - 4x^2 - 3x)(4x^2 - 3x - 18 + 4x^2 + 3x) \\
 &= (-6x - 18)(8x^2 - 18) \\
 &= -12(x + 3)(4x^2 - 9) \\
 &= -12(x + 3)(2x - 3)(2x + 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{o) } [4abcd + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)]^2 - 4[cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)]^2 \\
 &= (4abcd + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - 2a^2cd - 2b^2cd - 2abc^2 - 2abd^2)(4abcd + a^2c^2 \\
 &\quad + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 2a^2cd + 2b^2cd + 2abc^2 + 2abd^2) \\
 &= [(a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd) + (a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd) - 2ad(ac + bd) - 2bc(bd + \\
 &\quad ac)][(a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd) + (a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd) + 2ac(ad + bc) + 2bd(bc + ad)] \\
 &= [(ac + bd)^2 + (ad + bc)^2 - 2(ac + bd)(ad + bc)][(ac + bd)^2 + (ad + bc)^2 + 2(ac + \\
 &\quad bd)(ad + bc)] \\
 &= (ac + bd - ad - bc)^2(ac + bd + ad + bc)^2
 \end{aligned}$$

**Bài 21. Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào các biến:**

$$(x + y - z - t)^2 - (z + t - x - y)^2$$

**Bài giải**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } (x + y - z - t)^2 - (z + t - x - y)^2 &= (x + y - z - t - z - t + x + y)(x + y - z - t + z \\
 &\quad + t - x - y) \\
 &= 2(x + y - z - t).0 = 0.
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị biểu thức đã cho không phụ thuộc vào các biến.

### DẠNG 3

Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử

#### A. VÍ DỤ

**Phân tích các đa thức sau thành nhân tử**

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 3x + xy - 3y &= (x^2 - 3x) + (xy - 3y) \\ &= x(x - 3) + y(x - 3) = (x - 3)(x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^4 - 9x^3 + x^2 - 9x &= (x^4 - 9x^3) + (x^2 - 9x) \\ &= x^3(x - 9) + x(x - 9) = x(x - 9)(x^2 + 1) \end{aligned}$$

#### B. BÀI TẬP

**Bài 22. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:**

- |                                       |                                    |
|---------------------------------------|------------------------------------|
| a) $x^2 - y^2 - 2x - 2y$              | b) $3x^2 - 3y^2 - 2(x - y)^2$      |
| c) $x^2(x + 2y) - x - 2y$             | d) $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$          |
| e) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$             | f) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$           |
| g) $x^4 + 2x^3 - 4x - 4$              | h) $x^3 - 4x^2 + 12x - 27$         |
| i) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$              | j) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$       |
| k) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$         | l) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$    |
| m) $x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + 2xyz$ | n) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ |

#### Bài giải

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - y^2 - 2x - 2y &= (x - y)(x + y) - 2(x + y) \\ &= (x + y)(x - y - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3x^2 - 3y^2 - 2(x - y)^2 &= 3(x - y)(x + y) - 2(x - y)^2 \\ &= (x - y)(3x + 3y - 2x + 2y) \\ &= (x - y)(x + 5y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x^2(x + 2y) - x - 2y &= (x + 2y)(x^2 - 1) \\ &= (x + 2y)(x - 1)(x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^2 - 2x - 4y^2 - 4y &= (x^2 - 4y^2) - (2x + 4y) \\ &= (x - 2y)(x + 2y) - 2(x + 2y) \end{aligned}$$

$$= (x + 2y)(x - 2y - 2)$$

$$\text{e) } x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = (x^3 - 9x) - (4x^2 - 36)$$

$$= x(x^2 - 9) - 4(x^2 - 9)$$

$$= (x - 4)(x - 3)(x + 3)$$

$$\text{f) } x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^3 + 1) + (2x^2 + 2x) = (x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1 + x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 + 2)$$

$$\text{g) } x^4 + 2x^3 - 4x - 4 = (x^4 - 4) + (2x^3 - 4x)$$

$$= (x^2 - 2)(x^2 + 2) + 2x(x^2 - 2)$$

$$= (x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)$$

$$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2x + 2)$$

$$\text{h) } x^3 - 4x^2 + 12x - 27 = (x^3 - 27) - (4x^2 - 12x)$$

$$= (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 4x(x - 3)$$

$$= (x - 3)(x^2 + 3x + 9 - 4x)$$

$$= (x - 3)(x^2 - x + 9)$$

$$\text{i) } x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = (x^4 - 1) - (2x^3 - 2x)$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 + 1 - 2x)$$

$$= (x - 1)(x + 1)(x - 1)^2 = (x + 1)(x - 1)^3$$

$$\text{j) } a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 = a^4(a - 1)(a + 1) + 2a^2(a + 1)$$

$$= a^2(a + 1)(a^3 - a^2 + 2) = a^2(a + 1)(a^3 + a^2 - 2a^2 + 2)$$

$$= a^2(a + 1)[a^2(a + 1) - 2(a + 1)(a - 1)]$$

$$= a^2(a + 1)^2(a^2 - 2a + 2)$$

$$\text{k) } x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) + (x^3 + x)$$

$$= (x^2 + 1)^2 + x(x^2 + 1)$$

$$= (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\text{l) } x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) + (2x^3 + 2x)$$

$$= (x^2 + 1)^2 + 2x(x^2 + 1)$$

$$= (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 1)$$

$$= (x^2 + 1)(x + 1)^2$$

$$\begin{aligned} \text{m) } x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + 2xyz &= (x^2y + xy^2) + (x^2z + xyz) + (y^2z + xyz) \\ &= xy(x + y) + xz(x + y) + yz(x + y) \\ &= (x + y)(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{n) } x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= x^4(x + 1) + x^2(x + 1) + (x + 1) \\ &= (x + 1)(x^4 + x^2 + 1) \end{aligned}$$

#### DẠNG 4:

Phân tích đa thức thành nhân tử bằng các phương pháp khác (tách hạng tử, thêm bớt hạng tử, đặt ẩn phụ)

#### A. VÍ DỤ

**Phân tích các đa thức sau thành nhân tử**

$$\text{a) } x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2)$$

$$\text{b) } x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$$

$$\text{c) } A = (x^2 + 10x + 5)(x^2 + 10x + 13) + 16$$

Đặt  $y = x^2 + 10x + 9$ . Khi đó:

$$A = (y - 4)(y + 4) + 16 = y^2 - 16 + 16 = y^2$$

$$= (x^2 + 10x + 9)^2$$

$$= (x^2 + x + 9x + 9)^2$$

$$= [x(x + 1) + 9(x + 1)]^2 = (x + 1)^2(x + 9)^2$$

#### B. BÀI TẬP

**Bài 23. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:**

$$\text{a) } x^2 - 6x + 5$$

$$\text{b) } x^2 - x - 12$$

$$\text{c) } x^2 + 8x + 15$$

$$\text{d) } x^2 + 7x + 12$$

$$\text{e) } x^2 - 13x + 36$$

$$\text{f) } x^2 - 5x - 24$$

$$\text{g) } 3x^2 + 13x - 10$$

$$\text{h) } 2x^2 - 7x + 3$$

$$\text{i) } 3x^2 - 16x + 5$$

$$\text{j) } 2x^2 - 5x - 12$$

$$\text{k) } x^4 - 7x^2 + 6$$

$$\text{l) } x^4 + 2x^2 - 3$$

$$\text{m) } 4x^2 - 12x^2 - 16$$

$$\text{n) } x^4 + x^2 + 1$$

$$\text{o) } x^3 + 2x - 3$$

$$\text{p) } x^3 - 7x + 6$$

$$\text{q) } x^3 - 2x^2 + 5x - 4$$

$$\text{r) } x^3 - x^2 + x + 3$$

$$\text{s) } 2x^3 - 35x + 75$$

$$\text{t) } 3x^3 - 4x^2 + 13x - 4$$

$$\text{u) } 6x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\text{v) } 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$\text{w) } x^6 - 9x^3 + 8$$

**Bài giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 6x + 5 &= x^2 - x - 5x + 5 = x(x - 1) - 5(x - 1) \\ &= (x - 5)(x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^2 - x - 12 &= x^2 + 3x - 4x - 12 = x(x + 3) - 4(x + 3) \\ &= (x - 4)(x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x^2 + 8x + 15 &= x^2 + 3x + 5x + 15 = x(x + 3) + 5(x + 3) \\ &= (x + 5)(x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x^2 + 7x + 12 &= x^2 + 3x + 4x + 12 = x(x + 3) + 4(x + 3) \\ &= (x + 4)(x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^2 - 13x + 36 &= x^2 - 4x - 9x + 36 = x(x - 4) - 9(x - 4) \\ &= (x - 4)(x - 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } x^2 - 5x - 24 &= x^2 + 3x - 8x - 24 = x(x + 3) - 8(x + 3) \\ &= (x - 8)(x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } 3x^2 + 13x - 10 &= 3x^2 - 2x + 15x - 10 = x(3x - 2) + 5(3x - 2) \\ &= (x + 5)(3x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } 2x^2 - 7x + 3 &= 2x^2 - 6x - x + 3 = 2x(x - 3) - (x - 3) \\ &= (2x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } 3x^2 - 16x + 5 &= 3x^2 - x - 15x + 5 = x(3x - 1) - 5(3x - 1) \\ &= (x - 5)(3x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } 2x^2 - 5x - 12 &= 2x^2 - 8x + 3x - 12 = 2x(x - 4) + 3(x - 4) \\ &= (2x + 3)(x - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } x^4 - 7x^2 + 6 &= x^4 - x^2 - 6x^2 + 6 = x^2(x^2 - 1) - 6(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 6) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l) } x^4 + 2x^2 - 3 &= x^4 - x^2 + 3x^2 - 3 = x^2(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 3) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{m) } 4x^2 - 12x - 16 &= 4(x^2 - 3x - 4) = 4(x^2 + x - 4x - 4) \\ &= 4[x(x + 1) - 4(x + 1)] \end{aligned}$$



$$= 4(x - 4)(x + 1)$$

$$n) x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\begin{aligned} q) x^3 - 2x^2 + 5x - 4 &= x^3 - x^2 - x^2 + x + 4x - 4 \\ &= x^2(x - 1) - x(x - 1) + 4(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 - x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r) x^3 - x^2 + x + 3 &= x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x + 3x + 3 \\ &= x^2(x + 1) - 2x(x + 1) + 3(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 - 2x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s) 2x^3 - 35x + 75 &= 2x^3 - 50x + 15x + 75 \\ &= 2x(x^2 - 25) + 15(x + 5) \\ &= 2x(x - 5)(x + 5) + 15(x + 5) \\ &= (x + 5)(2x^2 - 10x + 15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t) 3x^3 - 4x^2 + 13x - 4 &= 3x^3 - x^2 - 3x^2 + x + 12x - 4 \\ &= x^2(3x - 1) - x(3x - 1) + 4(3x - 1) \\ &= (3x - 1)(x^2 - x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u) 6x^3 + x^2 + x + 1 &= 6x^3 + 3x^2 - 2x^2 - x + 2x + 1 \\ &= 3x^2(2x + 1) - x(2x + 1) + (2x + 1) \\ &= (2x + 1)(3x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v) 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 &= 4x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 2x + 2x + 1 \\ &= 2x^2(2x + 1) + 2x(2x + 1) + (2x + 1) \\ &= (2x^2 + 2x + 1)(2x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w) x^6 - 9x^3 + 8 &= x^6 - x^3 - 8x^3 + 8 = x^3(x^3 - 1) - 8(x^3 - 1) \\ &= (x^3 - 8)(x^3 - 1) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x - 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

**Bài 24. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:**

$$a) 4x^4 + 81$$

$$b) x^4 + 1$$

$$c) 64x^4 + y^4$$

$$d) x^2 + x = 6$$

**Bài giải**

$$a) 4x^4 + 81 = (\sqrt{2}x + 3)(2\sqrt{2}x^3 - 6x^2 + 9\sqrt{2}x - 27)$$

$$b) x^4 + 1 = (x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$$

$$c) 64x^4 + y^4 = (2\sqrt{2}x + y)(16\sqrt{2}x^3 - 8x^2y + 2\sqrt{2}xy^2 - y^3)$$

$$d) x^5 + x^4 + 1 = x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1$$

$$= x^3(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^3 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

**Bài 25. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:**

$$a) (x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$$

$$b) (x^2 + x)^2 + 9x^2 + 9x + 14$$

$$c) x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 15$$

$$d) x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$$

$$e) x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y - 35$$

$$f) (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$$

$$g) (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16$$

$$h) (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$$

$$i) x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$$

**Bài giải**

$$a) (x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15 = (x^2 + x - 1)^2 - 16$$

$$= (x^2 + x - 5)(x^2 + x + 4)$$

$$b) (x^2 + x)^2 + 9x^2 + 9x + 14 = (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) + 7(x^2 + x) + 14$$

$$= (x^2 + x)[(x^2 + x) + 2] + 7[(x^2 + x) + 2]$$

$$= (x^2 + x + 2)(x^2 + x + 7)$$

$$c) x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 15 = (x + y)^2 + 2(x + y) - 15$$

$$= (x + y)^2 - 3(x + y) + 5(x + y) - 15$$

$$= (x + y)(x + y - 3) + 5(x + y - 3)$$

$$= (x + y + 5)(x + y - 3)$$

$$d) x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12 = (x + y)^2 - (x + y) - 12$$

$$= (x + y)^2 + 3(x + y) - 4(x + y) - 12$$

$$= (x + y)(x + y + 3) - 4(x + y + 3)$$

$$= (x + y - 4)(x + y + 3)$$

$$e) x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y - 35 = (x - 2y)^2 - 2(x - 2y) - 35$$

$$= (x - 2y)^2 + 5(x - 2y) - 7(x - 2y) - 35$$

$$= (x - 2y)(x - 2y + 5) - 7(x - 2y + 5)$$

$$= (x - 2y - 7)(x - 2y + 5)$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 &= (x^2 + x + 1)^2 + (x^2 + x + 1) - 12 \\
 &= (x^2 + x + 1) + 4(x^2 + x + 1) - 3(x^2 + x + 1) - 12 \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 5) - 3(x^2 + x + 5) \\
 &= (x^2 + x + 5)(x^2 + x - 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16 &= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 16 \\
 &= (x^2 + 10x + 16)^2 + 8(x^2 + 10x + 16) + 16 \\
 &= (x^2 + 10x + 16)^2 + 4(x^2 + 10x + 16) + 4(x^2 + 10x + 16) + 16 \\
 &= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 20) + 4(x^2 + 10x + 20) \\
 &= (x^2 + 10x + 20)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24 &= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 20) - 24 \\
 &= (x^2 + 7x + 10)^2 + 10(x^2 + 7x + 10) - 24 \\
 &= (x^2 + 7x + 10)^2 - 2(x^2 + 7x + 10) + 12(x^2 + 7x + 10) - 24 \\
 &= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 8) + 12(x^2 + 7x + 8) \\
 &= (x^2 + 7x + 8)(x^2 + 7x + 22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{i) } x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 &= (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 24) + 128 \\
 &= (x^2 + 10x)^2 + 24(x^2 + 10x) + 128 \\
 &= (x^2 + 10x)^2 + 8(x^2 + 10x) + 16(x^2 + 10x) + 128 \\
 &= (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 8) + 16(x^2 + 10x + 8) \\
 &= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) \\
 &= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 2x + 8x + 16) \\
 &= (x^2 + 10x + 8)[x(x + 2) + 8(x + 2)] \\
 &= (x^2 + 10x + 8)(x + 2)(x + 8)
 \end{aligned}$$

### Bài 26. Tìm x

$$\text{a) } 3x^2 + 4x = 2x$$

$$\text{b) } 25x^2 - 0,64 = 0$$

$$\text{c) } x^4 - 16x^2 = 0$$

$$\text{d) } x^2 + x = 6$$

$$\text{e) } x^2 - 7x = -12$$

$$\text{f) } x^3 - x^2 = -x$$

$$\text{g) } x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x = 0$$

### Bài giải

$$\text{a) } 3x^2 + 4x = 2x \Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) } 25x^2 - 0,64 = 0 \Leftrightarrow (5x - 0,8)(5x + 0,8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 0,8 = 0 \\ 5x + 0,8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{25} \\ x = -\frac{4}{25} \end{cases}$$

$$\text{c) } x^4 - 16x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 4)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\text{d) } x^2 + x = 6 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{e) } x^2 - 7x = -12 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{f) } x^3 - x^2 = -x \Leftrightarrow x(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (vì } x^2 - x + 1 > 0 \text{ với mọi } x)$$

$$\text{g) } x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 4x^2 + x - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x - 4)(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \text{ (vì } x^2 + 1 > 0 \text{ với mọi } x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

## BÀI 7. CHIA ĐƠN THỨC CHO ĐƠN THỨC

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

Cho A và B là hai đa thức, ta nói đa thức A chia hết cho đa thức B nếu tìm được một đa thức Q sao cho  $A = B.Q$

A: đa thức bị chia

B: đa thức chia

Q: đa thức thương (gọi tắt là thương)

Kí hiệu:  $Q = A : B$  hoặc  $Q = \frac{A}{B}$

Trong bài này, ta xét trường hợp đơn giản nhất của phép chia hai đa thức, đó là phép chia đơn thức cho đơn thức.

#### Nhận xét:

Đơn thức A chia hết cho đơn thức B khi mỗi biến của B đều là biến của A với số mũ không lớn hơn số mũ của A.

#### Quy tắc:

Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B) ta làm như sau:

- \* Chia hệ số của đơn thức A cho đơn thức B.
- \* Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B.
- \* Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau.

#### VÍ DỤ

Tính a)  $\frac{5x^3y^4}{10x^2y} = \frac{xy^3}{2}$

b)  $\frac{3}{4}x^3y^3z : \left(-\frac{1}{2}x^2y\right) = -\frac{3}{2}xy^2z$

### B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

#### Bài 27. Thực hiện phép tính:

a)  $12x^3y^3z : (15xy^3)$

b)  $(-12x^{15}) : (3x^{10})$

c)  $20x^5y^4 : (-5x^2y^3)$

d)  $-99x^4y^2z^2 : (-11x^2y^2z^2)$

e)  $\frac{(3a^2b)^3(-2ab^3)^2}{(a^2b^2)^4}$

f)  $\frac{(2xy^2)^3 \cdot (3x^2y)^2}{(-2x^3y^2)^2}$

**Bài giải**

$$\text{a) } 12x^3y^3z : (15xy^3) = \frac{12x^3y^3z}{15xy^3} = \frac{4}{5}x^2z$$

$$\text{b) } (-12x^{15}) : (3x^{10}) = \frac{-12x^{15}}{3x^{10}} = -4x^5$$

$$\text{c) } 20x^5y^4 : (-5x^2y^3) = \frac{20x^5y^4}{-5x^2y^3} = -4x^3y$$

$$\text{d) } -99x^4y^2z^2 : (-11x^2y^2z^2) = \frac{-99x^4y^2z^2}{-11x^2y^2z^2} = 9x^2$$

$$\text{e) } \frac{(3a^2b)^3(-2ab^3)^2}{(a^2b^2)^4} = \frac{-6a^8b^9}{a^8b^8} = -6b$$

$$\text{f) } \frac{(2xy^2)^3 \cdot (3x^2y)^2}{(-2x^3y^2)^2} = \frac{6x^7y^8}{4x^6y^4} = \frac{3}{2}xy^4$$

## BÀI 8. CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

#### Quy tắc

Muốn chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp các hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B), ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả với nhau.

#### VÍ DỤ

Tính  $(20x^4y - 35x^2y^2 - 3x^2y) : (5x^2y)$

#### Giải

$$(20x^4y - 35x^2y^2 - 3x^2y) : (5x^2y) = \frac{20x^4y}{5x^2y} + \frac{-25x^2y^2}{5x^2y} + \frac{-3x^2y}{5x^2y} = 4x^2 - 5y - \frac{3}{5}$$

### B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

#### Bài 28. Thực hiện phép tính:

a)  $(21a^4b^2x^3 - 6a^2b^3x^5 + 9a^3b^4x^4) : (3a^2b^2x^2)$

b)  $(81a^4x^4y^3 - 36x^5y^4 - 18ax^5y^4 - 18ax^5y^5) : (-9x^3y^3)$

c)  $(10x^3y^2 + 12x^4y^3 - 6x^5y^4) : \left(-\frac{1}{2}x^3y^2\right)$

d)  $\left(-\frac{10}{3}x^2yz^3 + \frac{15}{2}xy^3z^4 - 5xyz^2\right) : \left(\frac{5}{3}xyz^2\right)$

e)  $[(x+y)^4 - 3(x+y)^2 + x+y] : (x+y)$

#### Bài giải

$$\begin{aligned} \text{a) } (21a^4b^2x^3 - 6a^2b^3x^5 + 9a^3b^4x^4) : (3a^2b^2x^2) &= \frac{21a^4b^2x^3}{3a^2b^2x^2} - \frac{6a^2b^3x^5}{3a^2b^2x^2} + \frac{9a^3b^4x^4}{3a^2b^2x^2} \\ &= 7a^2x - 2bx^3 + 3ab^2x^2 \end{aligned}$$

b)  $(81a^4x^4y^3 - 36x^5y^4 - 18ax^5y^4 - 18ax^5y^5) : (-9x^3y^3)$

$$= \frac{81a^4x^4y^3}{-9x^3y^3} - \frac{36x^5y^4}{-9x^3y^3} - \frac{18ax^5y^4}{-9x^3y^3} - \frac{18ax^5y^5}{-9x^3y^3}$$

$$= -9a^4x + 4x^2y + 2ax^2y + 2ax^2y^2$$

$$\text{c) } (10x^3y^2 + 12x^4y^3 - 6x^5y^4) : \left(-\frac{1}{2}x^3y^2\right) = \frac{10x^3y^2}{-\frac{1}{2}x^3y^2} + \frac{12x^4y^3}{-\frac{1}{2}x^3y^2} - \frac{6x^5y^4}{-\frac{1}{2}x^3y^2}$$

$$= -20 - 24xy + 12x^2y^2$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left( -\frac{10}{3}x^2yz^3 + \frac{15}{2}xy^3z^4 - 5xyz^2 \right) : \left( \frac{5}{3}xyz^2 \right) &= \frac{-\frac{10}{3}x^2yz^3}{\frac{5}{3}xyz^2} + \frac{\frac{15}{2}xy^3z^4}{\frac{5}{3}xyz^2} - \frac{5xyz^2}{\frac{5}{3}xyz^2} \\ &= -2xz + \frac{9}{2}y^2z^2 - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } [(x+y)^4 - 3(x+y)^2 + x+y] : (x+y) &= \frac{(x+y)^4}{x+y} - \frac{3(x+y)^2}{x+y} + \frac{x+y}{x+y} \\ &= (x+y)^3 - 3(x+y) + 1 \end{aligned}$$

**Bài 29. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến:**

$$K = \frac{2}{3}x^2y^3 : \left( -\frac{1}{3}xy \right) + 2x(y-1)(y+1) + 2(x-2) \quad (x, y \neq 0)$$

**Bài giải**

$$\begin{aligned} K &= \frac{2}{3}x^2y^3 : \left( -\frac{1}{3}xy \right) + 2x(y-1)(y+1) + 2(x-2) = \frac{\frac{2}{3}x^2y^3}{-\frac{1}{3}xy} + 2x(y-1)(y+1) + 2(x-2) \\ &= -2xy^2 + 2xy^2 - 2x + 2x - 2 = -2 \end{aligned}$$

Vậy giá trị biểu thức đã cho không phụ thuộc vào các biến.

**Bài 30. Thực hiện phép tính rồi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:**

$$A = (9xy^2 - 6x^2y) : (-3xy) + (6x^2y + 2x^4) : (2x^2)$$

**Bài giải**

$$\begin{aligned} A &= (9xy^2 - 6x^2y) : (-3xy) + (6x^2y + 2x^4) : (2x^2) = \frac{9xy^2}{-3xy} - \frac{6x^2y}{-3xy} + \frac{6x^2y}{2x^2} + \frac{2x^4}{2x^2} \\ &= -3y + 2x + 3y + x^2 = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1. \end{aligned}$$

Vậy GTNN của A là -1 khi  $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

**Bài 31. Tìm số tự nhiên n để đa thức A chia hết cho đa thức B:**

$$\text{a) } A = 4x^{n+1}y^2; B = 3x^3y^{n-1}$$

$$\text{b) } A = 7x^{n-1}y^5 - 5x^3y^4; B = 5x^2y^n$$

$$\text{c) } A = x^4y^3 + 3x^3y^3 + x^2y^n; B = 4x^ny^2$$

**Bài giải**



$$a) \frac{A}{B} = \frac{4x^{n+1}y^2}{3x^3y^{n-1}}$$

$$\text{Đa thức A chia hết cho đa thức B} \Leftrightarrow \begin{cases} n+1 \geq 3 \\ 2 \geq n-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$b) \frac{A}{B} = \frac{7x^{n-1}y^5 - 5x^3y^4}{5x^2y^n} = \frac{7x^{n-1}y^5}{5x^2y^n} - \frac{5x^3y^4}{5x^2y^n}$$

$$\text{Đa thức A chia hết cho đa thức B} \Leftrightarrow \begin{cases} n-1 \geq 2 \\ n \leq 5 \\ n \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3 \\ n \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = 4 \end{cases}$$

$$c) \frac{A}{B} = \frac{x^4y^3}{4x^ny^2} + \frac{3x^3y^3}{4x^ny^2} + \frac{x^2y^n}{4x^ny^2}$$

$$\text{Đa thức A chia hết cho đa thức B} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq 4 \\ n \leq 3 \\ n \leq 2 \\ n \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq 2 \\ n \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow n = 2$$

## BÀI 9. CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN ĐÃ SẮP XẾP

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

Người ta chứng minh được rằng đối với hai đa thức tùy ý A và B của cùng một biến ( $B \neq 0$ ), tồn tại duy nhất một cặp đa thức Q và R sao cho:

$$A = B.Q + R$$

Trong đó,  $R = 0$  hoặc bậc của R nhỏ hơn bậc của B (R được gọi là dư trong phép chia A cho B)

### VÍ DỤ

**Thực hiện phép chia:**

a)  $(2x^4 - 13x^3 + 15x^2 + 11x - 3) : (x^2 - 4x - 3)$

b)  $(5x^3 - 3x^2 + 7) : (x^2 + 1)$

### B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

**Bài 32. Thực hiện phép chia:**

a)  $(x^3 - x^2 + x + 3) : (x + 1)$

b)  $(x^3 - 6x^2 - 9x + 14) : (x - 7)$

**Bài giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^3 - x^2 + x + 3}{x + 1} &= \frac{(x^3 + x^2) - (2x^2 + 2x) + (3x + 3)}{x + 1} = \frac{x^2(x + 1) - 2x(x + 1) + 3(x + 1)}{x + 1} \\ &= x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^3 - 6x^2 - 9x + 14}{x - 7} &= \frac{x^3 - 7x^2 + x^2 - 7x - 2x + 14}{x - 7} = \frac{x^2(x - 7) + x(x - 7) - 2(x - 7)}{x - 7} \\ &= x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

**Bài 33. Tính:**

a)  $(4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4) : (2x^2 + 3y^2)$

b)  $(64a^2b^2 - 49m^4n^2) : (8ab + 7m^2n)$

c)  $(27x^3 - 8y^6) : (3x - 2y^2)$

d)  $(27x^3 + 8y^6) : (9x^2 - 6xy^2 + 4y^4)$

**Bài giải**

$$\text{a) } \frac{4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4}{2x^2 + 3y^2} = \frac{(2x^2 + 3y^2)^2}{2x^2 + 3y^2} = 2x^2 + 3y^2$$

$$\text{b) } \frac{64a^2b^2 - 49m^4n^2}{8ab + 7m^2n} = \frac{(8ab - 7m^2n)(8ab + 7m^2n)}{8ab + 7m^2n} = 8ab - 7m^2n$$

$$c) \frac{27x^3 - 8y^6}{3x - 2y^2} = \frac{(3x - 2y^2)(9x^2 + 6xy^2 + 4y^4)}{3x - 2y^2} = 9x^2 + 6xy^2 + 4y^4$$

$$d) \frac{27x^3 + 8y^6}{9x^2 - 6xy^2 + 4y^4} = \frac{(3x + 2y^2)(9x^2 - 6xy^2 + 4y^2)}{9x^2 - 6xy^2 + 4y^4} = 3x + 2y^2$$

### Bài 34. Xác định số hữu tỉ sao cho:

a) Đa thức  $4x^2 - 6x + a$  chia hết cho đa thức  $x - 3$

b) Đa thức  $2x^2 + x + a$  chia hết cho đa thức  $x + 3$

c) Đa thức  $3x^2 + ax - 4$  chia hết cho đa thức  $x - a$

### Bài giải

$$a) \frac{4x^2 - 6x + a}{x - 3} = \frac{4x^2 - 12x + 6x - 18 + a + 18}{x - 3} = \frac{4x(x - 3) + 6(x - 3) + a + 18}{x - 3}$$

$$= 4x + 6 + \frac{a + 18}{x - 3}$$

Để đa thức  $4x^2 - 6x + a$  chia hết cho đa thức  $x - 3$  thì  $\frac{a + 18}{x - 3} = 0$

$$\Leftrightarrow a + 18 = 0 \Leftrightarrow a = -18$$

$$b) \frac{2x^2 + x + a}{x + 3} = \frac{2x^2 + 6x - 5x - 15 + a + 15}{x + 3} = \frac{2x(x + 3) - 5(x + 3) + a + 15}{x + 3}$$

$$= 2x - 5 + \frac{a + 15}{x + 3}$$

Đa thức  $2x^2 + x + a$  chia hết cho đa thức  $x + 3 \Leftrightarrow \frac{a + 15}{x + 3} = 0$

$$\Leftrightarrow a + 15 = 0 \Leftrightarrow a = -15$$

$$c) \frac{3x^2 + ax - 4}{x - a} = \frac{3x^2 - 3ax + 4ax - 4a^2 + 4a^2 - 4}{x - a} = \frac{3x(x - a) + 4a(x - a) + 4a^2 - 4}{x - a}$$

$$= 3x + 4a + \frac{4a^2 - 4}{x - a}$$

Đa thức  $3x^2 + ax - 4$  chia hết cho đa thức  $x - a \Leftrightarrow \frac{4a^2 - 4}{x - a} = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (2a$

$$- 2)(2a + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2 = 0 \\ 2a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

**Bài 35.** Xác định các hệ số  $a$  và  $b$  sao cho đa thức  $x^4 + ax^3 + bx + b$  chia hết cho đa thức  $x^2 - 1$

**Bài giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + ax^3 + bx + b}{x^2 - 1} &= \frac{x^4 - 1 + ax^3 - ax + ax + bx + b + 1}{x^2 - 1} \\ &= \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1) + ax(x^2 - 1) + (a + b)x + b + 1}{x^2 - 1} \\ &= x^2 + 1 + ax + \frac{(a + b)x + b + 1}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Để đa thức  $x^4 + ax^3 + bx + b$  chia hết cho đa thức  $x^2 - 1$  thì  $\frac{(a + b)x + b + 1}{x^2 - 1} = 0$

$$\Leftrightarrow (a + b)x + b + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

## CHƯƠNG II. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

### Bài 1. CHUYÊN ĐỀ KIẾN THỨC MỞ ĐẦU VỀ PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

#### A. CHUẨN KIẾN THỨC

##### 1. Định nghĩa:

Một phân thức đại số là một biểu thức có dạng  $\frac{A}{B}$ , trong đó A, B là những đa thức và B khác 0.

##### 2. Hai phân thức bằng nhau:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ nếu } A.D = B.C$$

##### 3. Tính chất:

$$\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M} \quad (M \text{ khác } 0)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N} \quad (N \text{ là nhân tử chung})$$

##### 4. Rút gọn phân thức:

\* Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung.

\* Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

##### 5. Quy đồng mẫu thức:

\* Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung

\* Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức.

\* Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

#### B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

##### Bài 36. Rút gọn phân thức:

a)  $\frac{x^8 - 1}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}$

b)  $\frac{4x^2 + 12x + 9}{2x^2 - x - 6}$

c)  $\frac{2xy - x^2 + z^2 - y^2}{x^2 + z^2 - y^2 + 2xz}$

d)  $\frac{3|x - 4|}{x^2 - x - 12}$

e)  $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}$

f)  $\frac{2x^2 + 5x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$

g)  $\frac{x^4 + 4}{3x^2 + 6x + 6}$

h)  $\frac{a^2x^2y^2 - y^2 - a^2x^2 + 1}{a^2x^2y^2 - y^2 + a^2x^2y - y}$

$$i) \frac{x^3 - 7x - 6}{x^2(x-3)^2 + 4x(x-3)^2 + 4(x-3)^2}$$

### Bài giải

$$a) \frac{x^8 - 1}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{(x^4 + 1)(x^4 - 1)}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)} = x^2 + 1$$

$$b) \frac{4x^2 + 12x + 9}{2x^2 - x - 6} = \frac{(2x + 3)^2}{(2x + 3)(x - 2)} = \frac{2x + 3}{x - 2}$$

$$c) \frac{2xy - x^2 + z^2 - y^2}{x^2 + z^2 - y^2 + 2xz} = \frac{z^2 - (x - y)^2}{(x + z)^2 - y^2} = \frac{(z - x + y)(z + x - y)}{(x - y + z)(x + y + z)} = \frac{z - x + y}{x + y + z}$$

$$d) \frac{3|x - 4|}{x^2 - x - 12} = \frac{3|x - 4|}{(x - 4)(x + 3)} = \frac{3}{x + 3}, \text{ với } x \geq 4$$

$$\text{hoặc } \frac{3|x - 4|}{x^2 - x - 12} = \frac{3|x - 4|}{(x - 4)(x + 3)} = \frac{-3}{x + 3}, \text{ với } x < 4$$

$$e) \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{(x^2 - 1)(x^2 - 9)} = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$$

$$f) \frac{2x^2 + 5x + 2}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(2x + 1)(x + 2)}{(2x + 1)(x - 2)} = \frac{x + 2}{x - 2}$$

$$g) \frac{x^4 + 4}{3x^2 + 6x + 6} = \frac{(x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2}{3(x^2 + 2x + 2)} = \frac{(x^2 + 2)^2 - 4x^2}{3(x^2 + 2x + 2)}$$

$$= \frac{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}{3(x^2 + 2x + 2)} = \frac{x^2 - 2x + 2}{3}$$

$$h) \frac{a^2x^2y^2 - y^2 - a^2x^2 + 1}{a^2x^2y^2 - y^2 + a^2x^2y - y} = \frac{(y^2 - 1)(a^2x^2 - 1)}{(y^2 + y)(a^2x^2 - 1)} = \frac{(y - 1)(y + 1)}{y(y + 1)} = \frac{y - 1}{y}$$

$$i) \frac{x^3 - 7x - 6}{x^2(x-3)^2 + 4x(x-3)^2 + 4(x-3)^2} = \frac{x(x^2 - 1) - 6(x + 1)}{(x - 3)^2(x^2 + 4x + 4)} = \frac{(x + 1)(x^2 - x - 6)}{(x - 3)^2(x + 2)^2}$$

$$= \frac{(x + 1)(x + 2)(x - 3)}{(x - 3)^2(x + 2)^2} = \frac{x + 1}{(x + 2)(x - 3)}$$

### Bài 37. Chứng minh đẳng thức:

$$a) \frac{x^3 - 7x - 6}{x^2(x-3)^2 + 4x(x-3)^2 + 4(x-3)^2} = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} = \frac{a + 1}{a - 2}$$

**Bài giải**

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} &= \frac{a^2(a-4) - (a-4)}{(a^3-8) - 7a(a-2)} = \frac{(a-4)(a-1)(a+1)}{(a-2)(a^2+2a+4-7a)} \\
 &= \frac{(a-4)(a-1)(a+1)}{(a-2)(a^2-5a+4)} = \frac{(a-4)(a-1)(a+1)}{(a-2)(a-1)(a-4)} = \frac{a+1}{a-2}
 \end{aligned}$$

**Bài 38. Tìm các giá trị nguyên x để phân thức sau có giá trị nguyên**

a)  $\frac{3}{2x-1}$

b)  $\frac{5}{x^2+1}$

c)  $\frac{7}{x^2-x+1}$

**Bài giải**

a) Vì x nguyên nên  $2x-1$  nguyên.

$$\text{Do đó } \frac{3}{2x-1} \text{ nguyên} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \\ 2x-1=3 \\ 2x-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

b) Vì x nguyên nên  $x^2+1$  nguyên. Do đó  $\frac{5}{x^2+1}$  nguyên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=1 \\ x^2+1=5 \end{cases} \quad (\text{vì } x^2+1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

c) Vì x nguyên nên  $x^2-x+1$  nguyên. Do đó  $\frac{7}{x^2-x+1}$  nguyên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1=1 \\ x^2-x+1=7 \end{cases} \quad (\text{vì } x^2-x+1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)=0 \\ (x-3)(x+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \\ x+2=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

**Bài 39. Tính giá trị biểu thức**  $A = \frac{3x-2y}{3x+2y}$ 

biết  $9x^2 + 4y^2 = 20xy$  và  $2y < 3x < 0$

**Bài giải**

Vì  $2y < 3x < 0$  nên  $3x - 2y > 0$  và  $3x + 2y < 0$ , suy ra  $A < 0$ .

$$\text{Ta có } A^2 = \frac{(3x - 2y)^2}{(3x + 2y)^2} = \frac{9x^2 + 4y^2 - 12xy}{9x^2 + 4y^2 + 12xy} = \frac{20xy - 12xy}{20xy + 12xy} = \frac{8xy}{32xy} = \frac{1}{4}$$

Suy ra  $A = -\frac{1}{2}$  (vì  $A < 0$ )

**Bài 40.** Cho  $0 < x < y$  và  $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{10}{3}$  Tính  $N = \frac{x - y}{x + y}$

**Bài giải**

Ta có  $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3(x^2 + y^2) = 10xy$ .

$$N^2 = \frac{(x - y)^2}{(x + y)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{x^2 + y^2 + 2xy} = \frac{3(x^2 + y^2) - 6xy}{3(x^2 + y^2) + 6xy} = \frac{10xy - 6xy}{10xy + 6xy} = \frac{4xy}{16xy} = \frac{1}{4}$$

Vì  $0 < x < y$  nên  $x - y < 0$  và  $x + y > 0$ . Suy ra  $N = \frac{x - y}{x + y} < 0$ . Do đó  $N = -\frac{1}{2}$

**Bài 41. Quy đồng mẫu các phân thức**

$$\begin{aligned} a) & \frac{2}{36a^2b^2 - 1}; \frac{1}{(6ab + 1)^2}; \frac{1}{(6ab - 1)^2} & b) & \frac{x}{x^3 - 27}; \frac{2x}{x^2 - 6x + 9}; \frac{1}{x^2 + 3x + 9} \\ c) & \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}; \frac{3x}{x^3 + 2x^2 + x}; 2x & d) & \frac{2}{x^2 + 5x + 6}; \frac{x}{x^2 + 7x + 10} \end{aligned}$$

**Bài giải**

$$\begin{aligned} a) & \frac{2}{36a^2b^2 - 1} = \frac{2(36a^2b^2 - 1)}{(36a^2b^2 - 1)^2}; \\ & \frac{1}{(6ab + 1)^2} = \frac{(6ab - 1)^2}{(6ab + 1)^2(6ab - 1)^2} = \frac{(6ab - 1)^2}{(36a^2b^2 - 1)^2}; \\ & \frac{1}{(6ab - 1)^2} = \frac{(6ab + 1)^2}{(6ab - 1)^2(6ab + 1)^2} = \frac{(6ab + 1)^2}{(36a^2b^2 - 1)^2} \\ b) & \frac{x}{x^3 - 27} = \frac{x}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x(x - 3)}{(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)}; \\ & \frac{2x}{x^2 - 6x + 9} = \frac{2x}{(x - 3)^2} = \frac{2x(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)}; \\ & \frac{1}{x^2 + 3x + 9} = \frac{(x - 3)^2}{(x - 3)^2(x^2 + 3x + 9)} \end{aligned}$$



$$\text{c) } \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x+1} = \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} ; \quad \frac{3x}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{3}{(x+1)^2} ; \quad 2x = \frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^2} ;$$

$$\text{d) } \frac{2}{x^2 + 5x + 6} = \frac{2}{(x+2)(x+3)} = \frac{2(x+5)}{(x+2)(x+3)(x+5)} ;$$

$$\frac{x}{x^2 + 7x + 10} = \frac{x}{(x+2)(x+5)} = \frac{x(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+5)} ;$$

## Bài 2. CHUYÊN ĐỀ CỘNG TRỪ NHÂN CHIA PHÂN THỨC

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

#### 1. Phép cộng phân thức

\* Muốn cộng hai phân thức có cùng mẫu, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.

\* Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

\* Tính chất:

$$\text{Giao hoán} \quad \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{C}{D} + \frac{A}{B}$$

$$\text{Kết hợp} \quad \left( \frac{A}{B} + \frac{C}{D} \right) + \frac{E}{F} = \frac{A}{B} + \left( \frac{C}{D} + \frac{E}{F} \right)$$

#### 2. Phép trừ phân thức:

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD - BC}{BD}$$

#### 3. Phép nhân phân thức:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

$$\text{*Giao hoán} \quad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{C}{D} \cdot \frac{A}{B}$$

$$\text{* Kết hợp} \quad \left( \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \right) \cdot \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \left( \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F} \right)$$

\* Phân phối với phép cộng

#### 4. Phép chia phân thức:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \quad \left( \frac{C}{D} \neq 0 \right)$$

### B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP:

#### Bài 42. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{x^3}{x+1} + \frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \qquad b) \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(1-x)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$c) \frac{2x}{x^2 + 2xy} - \frac{y}{2y^2 - xy} + \frac{4}{x^2 - 4y^2} \qquad d) \frac{1}{a-b} + \frac{3ab}{a^3 - b^3} + \frac{a-b}{a^2 + ab + b^2}$$

$$e) \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{2}{(2-x)(3-x)} + \frac{3}{(1-x)(x-3)}$$

$$f) \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+9)(x+10)}$$

$$g) \frac{2}{x^2 + 2x} + \frac{2}{x^2 + 6x + 8} + \frac{2}{x^2 + 10x + 24} + \frac{2}{x^2 + 14x + 48}$$

$$h) \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$i) \frac{1}{x^2 + 3x + 2} - \frac{2x}{x^3 + 4x^2 + 4x} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$$

### Bài giải

$$\begin{aligned} a) \frac{x^3}{x+1} + \frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} &= \frac{x^3+1}{x+1} + \frac{x^2+1}{x-1} = x^2 - x + 1 + \frac{x^2+1}{x-1} \\ &= \frac{(x-1)(x^2-x+1) + x^2+1}{x-1} \\ &= \frac{x^3 - x^2 + x - x^2 + x - 1 + x^2 + 1}{x-1} \\ &= \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x-1} = \frac{x(x^2 - x + 2)}{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(1-x)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x^2 - 5x + 6 + x - 3 + x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \frac{2x}{x^2 + 2xy} - \frac{y}{2y^2 - xy} + \frac{4}{x^2 - 4y^2} &= \frac{2}{x+2y} + \frac{1}{x-2y} + \frac{4}{(x+2y)(x-2y)} \\ &= \frac{2x - 4y + x + 2y + 4}{(x+2y)(x-2y)} \\ &= \frac{3x - 2y + 4}{(x+2y)(x-2y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \frac{1}{a-b} + \frac{3ab}{a^3-b^3} + \frac{a-b}{a^2+ab+b^2} &= \frac{a^2+ab+b^2+3ab+(a-b)^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \\
 &= \frac{2a^2+2b^2+2ab}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{2}{a-b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e) \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{2}{(2-x)(3-x)} + \frac{3}{(1-x)(x-3)} \\
 = \frac{x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{2(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} - \frac{3(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
 = \frac{x-3+2x-2-3x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f) \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+9)(x+10)} \\
 = \frac{(x+1)-x}{x(x+1)} + \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} + \frac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{(x+10)-(x+9)}{(x+9)(x+10)} \\
 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \dots + \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10} \\
 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} = \frac{x+10-x}{x(x+10)} = \frac{10}{x(x+10)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) \frac{2}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2+6x+8} + \frac{2}{x^2+10x+24} + \frac{2}{x^2+14x+48} \\
 = \frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} + \frac{2}{(x+6)(x+8)} \\
 = \frac{(x+2)-x}{x(x+2)} + \frac{(x+4)-(x+2)}{(x+2)(x+4)} + \frac{(x+6)-(x+4)}{(x+4)(x+6)} + \frac{(x+8)-(x+6)}{(x+6)(x+8)} \\
 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \\
 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+8} = \frac{x+8-x}{x(x+8)} = \frac{8}{x(x+8)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h) \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \\
 = \frac{b-c}{(a-b)(b-c)(a-c)} - \frac{a-c}{(a-b)(b-c)(a-c)} + \frac{a-b}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\
 = \frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i) & \frac{1}{x^2 + 3x + 2} - \frac{2x}{x^3 + 4x^2 + 4x} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)^2(x+3)} - \frac{2(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)^2(x+3)} + \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)^2(x+3)} \\
 &= \frac{x^2 + 5x + 6 - 2x^2 - 8x - 6 + x^2 + 3x + 2}{(x+1)(x+2)^2(x+3)} = \frac{2}{(x+1)(x+2)^2(x+3)}
 \end{aligned}$$

### Bài 43. Chứng minh đẳng thức:

$$a) \frac{4x^2 - (x-3)^2}{9(x^2 - 1)} - \frac{x^2 - 9}{(2x+3)^2 - x^2} + \frac{(2x-3)^2 - x^2}{4x^2 - (x+3)^2} = 1$$

$$b) \frac{y-z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z-x}{(y-z)(y-x)} + \frac{x-y}{(z-x)(z-y)} = \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x}$$

### Bài giải

$$\begin{aligned}
 a) & \frac{4x^2 - (x-3)^2}{9(x^2 - 1)} - \frac{x^2 - 9}{(2x+3)^2 - x^2} + \frac{(2x-3)^2 - x^2}{4x^2 - (x+3)^2} \\
 &= \frac{(2x-x+3)(2x+x-3)}{9(x-1)(x+1)} - \frac{(x-3)(x+3)}{(2x+3-x)(2x+3+x)} + \frac{(2x-3-x)(2x-3+x)}{(2x-x-3)(2x+x+3)} \\
 &= \frac{3(x+3)(x-1)}{9(x-1)(x+1)} - \frac{(x-3)(x+3)}{3(x+3)(x+1)} + \frac{3(x-3)(x-1)}{3(x-3)(x+1)} \\
 &= \frac{x+3}{3(x+1)} - \frac{x-3}{3(x+1)} + \frac{3(x-1)}{3(x+1)} = \frac{x+3-x+3+3x-3}{3(x+1)} = \frac{3x+3}{3x+3} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) & \frac{y-z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z-x}{(y-z)(y-x)} + \frac{x-y}{(z-x)(z-y)} \\
 &= \frac{(x-z) - (x-y)}{(x-y)(x-z)} + \frac{(y-x) - (y-z)}{(y-z)(y-x)} + \frac{(z-y) - (z-x)}{(z-x)(z-y)} \\
 &= \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-z} + \frac{1}{y-z} - \frac{1}{y-x} + \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y} \\
 &= \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{y-z} \\
 &= \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x}
 \end{aligned}$$

$$\text{Bài 44. Tính tổng } A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} - \frac{16}{1-x^{16}}$$

**Bài giải**

$$A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} - \frac{16}{1-x^{16}}$$

$$A = \frac{1+x+1-x}{1-x^2} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} - \frac{16}{1-x^{16}}$$

$$A = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} - \frac{16}{1-x^{16}}$$

$$A = \frac{2+2x^2+2-2x^2}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} - \frac{16}{1-x^{16}}$$

$$A = \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} - \frac{16}{1-x^{16}}$$

$$A = \frac{4+4x^4+4-4x^4}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} - \frac{16}{1-x^{16}}$$

$$A = \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} - \frac{16}{1-x^{16}}$$

$$A = \frac{8+8x^8+8-8x^8}{1-x^{16}} - \frac{16}{1-x^{16}}$$

$$A = \frac{16}{1-x^{16}} - \frac{16}{1-x^{16}} = 0$$

**Bài 45. Xác định các số hữu tỉ a, b, c, d sao cho:**

$$a) \frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$$

$$b) \frac{x^3}{x^4 - 1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

**Bài giải**

$$a) \frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} = \frac{a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{ax^2 - 3ax + 2a + bx^2 - 2bx + cx^2 - cx}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(a+b+c)x^2 - (3a+2b+c)x + 2a}{x(x-1)(x-2)}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a+b+c=9 \\ 3a+2b+c=16 \\ 2a=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b+c+2=9 \\ 2b+c+6=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 b) \frac{x^3}{x^4-1} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1} \\
 &= \frac{a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) + (cx+d)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\
 &= \frac{ax^3 + ax + ax^2 + a + bx^3 + bx - bx^2 - b + cx^3 - cx + dx^2 - d}{x^4-1} \\
 &= \frac{(a+b+c)x^3 + (a-b+d)x^2 + (a+b-c)x + (a-b-d)}{x^4-1}
 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a+b+c=1 & (1) \\ a-b+d=0 & (2) \\ a+b-c=0 & (3) \\ a-b-d=0 & (4) \end{cases}$$

Lấy (1) – (3) theo vế, ta được  $2c = 1$ , suy ra  $c = \frac{1}{2}$  và  $a+b = \frac{1}{2}$

Lấy (2) + (4) theo vế, ta được  $2a - 2b = 0$ , suy ra  $a = b = \frac{1}{4}$

Lấy (2) – (4) theo vế, ta được  $2d = 0$ , suy ra  $d = 0$

Vậy ta có  $a = b = \frac{1}{4}$ ,  $c = \frac{1}{2}$ ,  $d = 0$

#### Bài 46. Thực hiện phép tính:

$$a) \frac{ab+a^2}{b^2-5b+5a-a^2} \cdot \frac{a^2-10a+25-b^2}{a^2-b^2}$$

$$b) \frac{x^2+xy}{5x^2+5xy+5y^2} \cdot \frac{3x^3-3y^3}{xy+y^2}$$

$$c) \frac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-4x+4}$$

$$d) \left( \frac{x+y}{x} - \frac{2x}{x-y} \right) \cdot \frac{y-x}{x^2+y^2}$$

$$e) \frac{x^5+x^3+1}{2x^2+1} \cdot \frac{2x^2+1}{x^2-x-12} \cdot \frac{x^2-4x}{x^5+x^3+1}$$

$$f) \frac{x-5}{x^2-4x+3} \cdot \frac{x^2-3x}{x^2-10x+25} \cdot \frac{(x-1)(x-5)}{2x}$$

$$g) \frac{2x+9}{x-5} \cdot \frac{5x-8}{x+1945} - \frac{2x+9}{x-5} \cdot \frac{4x-3}{x+1945}$$

#### Bài giải

$$\begin{aligned}
 a) \frac{ab+a^2}{b^2-5b+5a-a^2} \cdot \frac{a^2-10a+25-b^2}{a^2-b^2} &= \frac{a(a+b)}{(b-a)(b+a)-5(b-a)} \cdot \frac{(a-5)^2-b^2}{(a-b)(a+b)} \\
 &= \frac{a(a-5-b)(a-5+b)}{(b-a)(b+a-5)(a-b)} = -\frac{a(a-b-5)}{(a-b)^2}
 \end{aligned}$$

$$b) \frac{x^2 + xy}{5x^2 + 5xy + 5y^2} \cdot \frac{3x^3 - 3y^3}{xy + y^2} = \frac{x(x+y)}{5(x^2 + xy + y^2)} \cdot \frac{3(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{y(x+y)} \\ = \frac{3x(x-y)}{5y}$$

$$c) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 7x + 12} \cdot \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x+4)} \cdot \frac{x(x+3)}{(x-2)^2} = \frac{x(x-3)}{(x+2)(x+4)}$$

$$d) \left( \frac{x+y}{x} - \frac{2x}{x-y} \right) \frac{y-x}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2x^2}{x(x-y)} \cdot \frac{y-x}{x^2 + y^2} = \frac{-(x^2 + y^2)}{x} \cdot \frac{-1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x}$$

$$e) \frac{x^5 + x^3 + 1}{2x^2 + 1} \cdot \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x - 12} \cdot \frac{x^2 - 4x}{x^5 + x^3 + 1} = \frac{1}{x^2 - x - 12} \cdot \frac{x^2 - 4x}{1} = \frac{x(x-4)}{(x-4)(x+3)} = \frac{x}{x+3}$$

$$f) \frac{x-5}{x^2 - 4x + 3} \cdot \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 10x + 25} \cdot \frac{(x-1)(x-5)}{2x} = \frac{x-5}{(x-1)(x-3)} \cdot \frac{x(x-3)}{(x-5)^2} \cdot \frac{(x-1)(x-5)}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$g) \frac{2x+9}{x-5} \cdot \frac{5x-8}{x+1945} - \frac{2x+9}{x-5} \cdot \frac{4x-3}{x+1945} = \frac{2x+9}{x-5} \cdot \left( \frac{5x-8}{x+1945} - \frac{4x-3}{x+1945} \right) \\ = \frac{2x+9}{x-5} \cdot \frac{x-5}{x+1945} = \frac{2x+9}{x+1945}$$

**Bài 47.** Cho  $a, b, c$  là các số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị nguyên:

$$M = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

### Bài giải

Vì  $a, b, c$  đôi một khác nhau nên  $a-b, b-c, c-a \neq 0$ . Ta có:

$$M = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = \frac{-a^3(b-c) - b^3(c-a) - c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ = \frac{-a^3b + a^3c - b^3c + ab^3 - ac^3 + bc^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{-ab(a^2 - b^2) + c(a^3 - b^3) - c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Vì  $a, b, c$  là các số nguyên nên  $a+b+c$  nguyên, suy ra  $M$  nguyên.

**Bài 48.** Tìm giá trị của  $x$  để mỗi biểu thức sau là số nguyên:



$$a) M = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x - 3}$$

$$b) N = \frac{3x^2 - x + 3}{3x + 2}$$

### Bài giải

$$a) M = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x - 3} = \frac{(2x^3 - 6x^2) + (x - 3) - 5}{x - 3} = 2x^2 + 1 - \frac{5}{x - 3}$$

$$M \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{5}{x-3} \text{ nguyên} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=5 \\ x-3=-5 \\ x-3=1 \\ x-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=-2 \\ x=4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$b) N = \frac{3x^2 - x + 3}{3x + 2} = \frac{(3x^2 + 2x) - (3x + 2) + 5}{3x + 2} = x - 1 + \frac{5}{3x + 2}$$

$$N \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{5}{3x+2} \text{ nguyên} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2=5 \\ 3x+2=-5 \\ 3x+2=1 \\ 3x+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=3 \\ 3x=-7 \\ 3x=-1 \\ 3x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{7}{3} \\ x=-\frac{1}{3} \\ x=-1 \end{cases}$$

### Bài 49. Tính giá trị biểu thức:

$$a) P = \frac{5a - b}{3a + 7} - \frac{3b - 2a}{2b - 7} \text{ với } a \neq -\frac{7}{3}; b \neq \frac{7}{2}; 2a - b = 7$$

$$b) Q = \frac{2a - b}{3a - b} + \frac{5b - a}{3a + b} \text{ với } b \neq \pm 3a; 6a^2 - 15ab + 5b^2 = 0$$

$$c) M = x + y + xy \text{ với } x = \frac{b^2 + c^3 - a^2}{2bc}; y = \frac{a^2 - (b - c)^2}{(b + c)^2 - a^2}$$

### Bài 50. Rút gọn biểu thức:

$$a) \frac{\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a^2-b^2}}$$

$$b) \frac{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}{\frac{b}{a-b} + \frac{a}{a+b}}$$

$$c) \frac{\frac{c(a+c) - a(a-c)}{c} - \frac{a}{a+c}}{a-c}$$

$$d) \frac{\frac{x^2 - y^2}{x} - \frac{x}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

$$e)x: \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)(x^2+4x+1)}{2x^2+2x} \cdot \frac{-4x}{(x-1)^2} - \frac{4x^2}{x^2-1}$$

### Bài giải

$$a) \frac{\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a^2-b^2}} = \frac{a^2-b^2}{a+b} = a-b$$

$$b) \frac{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}{\frac{b}{a-b} + \frac{a}{a+b}} = \frac{\frac{a^2+ab-ab+b^2}{(a-b)(a+b)}}{\frac{ab+b^2+a^2-ab}{(a-b)(a+b)}} = 1$$

$$c) \frac{\frac{c(a+c)-a(a-c)}{c} - \frac{a}{a+c}}{\frac{c(a+c)-a(a-c)}{(a-c)(a+c)}} = \frac{[c(a+c)-a(a-c)](a-c)(a+c)}{c(a+c)-a(a-c)} = (a-c)(a+c) = a^2 - c^2$$

$$d) \frac{\frac{x^2-y^2}{x} - \frac{x^2-y^2}{y}}{\frac{x}{y-x}} = \frac{\frac{x^2-y^2}{xy}}{\frac{x}{y-x}} = \frac{(x^2-y^2)xy}{x(y-x)} = \frac{(x-y)(x+y)y}{y-x} = -y(x+y)$$

$$\begin{aligned} e)x: & \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)(x^2+4x+1)}{2x^2+2x} \cdot \frac{-4x}{(x-1)^2} - \frac{4x^2}{x^2-1} \\ &= \frac{2x}{x-1} - \frac{(x-1)(x^2+4x+1)}{2x(x+1)} \cdot \frac{-4x}{(x-1)^2} - \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2x(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{2(x^2+4x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2x^2+2x+2x^2+8x+2-4x^2}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{10x+2}{(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

**Bài 51. Cho phân thức**  $M = \left[ \frac{(x-1)^2}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$

a) Tìm điều kiện để giá trị của biểu thức xác định.

b) Tìm giá trị của x để biểu thức bằng 0

c) Tìm giá trị của  $x$  để  $|M| = 1$

### Bài giải

a) Điều kiện để giá trị của biểu thức xác định

$$\begin{cases} 3x + (x-1)^2 \neq 0 \\ x^3 - 1 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ x^2 + x \neq 0 \\ x^3 + x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 \neq 0 \\ (x-1)(x^2 + x + 1) \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ x(x+1) \neq 0 \\ x(x^2 + 1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x \neq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{vì } x^2 + x + 1 > 0 \text{ và } x^2 + 1 > 0 \quad \forall x) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

**Bài 52. Tìm giá trị nhỏ nhất của**  $A = \frac{2x^2 - 8x + 9}{x^2 - 4x + 5}$

### Bài giải

$$A = \frac{2x^2 - 8x + 9}{x^2 - 4x + 5} = \frac{2(x^2 - 4x + 5) - 1}{x^2 - 4x + 5} = 2 - \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$$

Suy ra  $A$  đạt GTNN khi  $\frac{1}{x^2 - 4x + 5}$  đạt GTLN, hay  $x^2 - 4x + 5$  đạt GTNN.

$$\text{Ta có } x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 1$$

Biểu thức  $x^2 - 4x + 5$  đạt GTNN bằng 1  $\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .

$$\text{Khi đó, } A = 2 - \frac{1}{x^2 - 4x + 5} = 2 - 1 = 1.$$

Vậy GTNN của  $A$  bằng 1 khi  $x = 2$ .

**Bài 53. Tìm giá trị lớn nhất của**  $B = \frac{2x^2 + 6x + 7}{x^2 + 3x + 3}$

### Bài giải

$$B = \frac{2x^2 + 6x + 7}{x^2 + 3x + 3} = \frac{2(x^2 + 3x + 3) + 1}{x^2 + 3x + 3} = 2 + \frac{1}{x^2 + 3x + 3}$$

Suy ra  $B$  đạt GTLN khi  $\frac{1}{x^2 + 3x + 3}$  đạt GTLN, hay  $x^2 + 3x + 3$  đạt GTNN.

$$\text{Ta có } x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Biểu thức  $x^2 + 3x + 3$  đạt GTNN bằng  $\frac{3}{4}$  khi  $x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ .

$$\text{Khi đó, } B = 2 + \frac{1}{x^2 + 3x + 3} = 2 + \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{10}{3}.$$

Vậy GTLN của B là  $\frac{10}{3}$  khi  $x = -\frac{3}{2}$

## Chương 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

### Bài 1. MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

#### A. CHUẨN KIẾN THỨC

##### 1) Phương trình một ẩn

- Phương trình ẩn  $x$  có dạng  $A(x) = B(x)$  (1), trong đó  $A(x)$ ,  $B(x)$  là các biểu thức của cùng biến  $x$ .

**Ví dụ 1.**  $3(x-1) + 5 = 2x$  là phương trình ẩn  $x$

$t + 5t = 2t$  là phương trình ẩn  $t$

$x^2 - 1 = 2x + 2$  là phương trình ẩn  $x$

- Nếu với  $x = x_0$  ta có  $A(x_0) = B(x_0)$  thì  $x = x_0$  là nghiệm của đa thức  $A(x) = B(x)$  (ta còn nói  $x_0$  thỏa mãn hay nghiệm đúng phương trình đã cho).
- Một phương trình có thể có một, hai, ba, ... nghiệm hoặc không có nghiệm nào, hoặc có vô số nghiệm.
- Phương trình không có nghiệm gọi là phương trình vô nghiệm.

##### 2) Giải phương trình

- Giải phương trình là tìm tập nghiệm của phương trình đó
- Tập hợp các nghiệm của phương trình được gọi là tập nghiệm của phương trình đó, ký hiệu là  $S$ .

**Ví dụ 2.** Phương trình  $x = 2$  có tập nghiệm  $S = \{2\}$

Phương trình  $x^2 = -3$  có tập nghiệm  $S = \emptyset$

Phương trình  $x^2 + 1 = 1 + x^2$  có tập nghiệm  $S = \mathbb{R}$

##### 3) Phương trình tương đương

- Hai phương trình tương đương là hai phương trình có cùng tập nghiệm. Dùng kí hiệu " $\Leftrightarrow$ " để chỉ hai phương trình tương đương

**Ví dụ 3.**  $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$3x + 2 = 4x - 1 \Leftrightarrow x - 3 = 0$

**4) Định nghĩa phương trình bậc nhất một ẩn**

- Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng  $ax + b = 0$ , trong đó  $a, b$  là hai hằng số và  $a \neq 0$ .

**Ví dụ 4.**  $2x + 1 = 0$  là phương trình bậc nhất một ẩn có:  $a = 2; b = 1$

**5) Hai quy tắc biến đổi phương trình**

- Quy tắc chuyển vế: Trong một phương trình ta có thể chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.
- Quy tắc nhân một số: Trong một phương trình ta có thể nhân (hoặc chia) hai vế với cùng một số khác 0.

**6) Cách giải phương trình bậc nhất một ẩn**

Dùng quy tắc chuyển vế hay quy tắc nhân với một số. Tổng quát phương trình  $ax + b = 0 (a \neq 0)$  được giải như sau:

$$ax + b = 0 (a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow ax = -b$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

$$\text{Vậy: } S = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$$

**Nhận xét:** Phương trình  $ax + b = 0 (a \neq 0)$  luôn có một nghiệm duy nhất  $x = \frac{-b}{a}$

**Ví dụ 5.** Giải phương trình  $3x - 1 = 0$

$$\text{Ta có } 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

**B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP****Bài 1. Giải các phương trình sau**

a)  $12 - 6x = 0$

b)  $2x + x + 120 = 0$

c)  $x - 5 = 3 - x$

d)  $7 - 3x = 9 - x$

e)  $\frac{-5}{9}x + 1 = \frac{2}{3}x - 10$

f)  $2(x + 1) = 3 + 2x$

**Bài giải:**

$$\text{a) Ta có } 12 - 6x = 0 \Leftrightarrow -6x = -12 \Leftrightarrow x = \frac{-12}{-6} \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Vậy } S = \{2\}$$

$$\text{b) Ta có } 2x + x + 120 = 0 \Leftrightarrow 3x + 120 = 0 \Leftrightarrow 3x = -120$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-120}{3} \Leftrightarrow x = -40$$

$$\text{Vậy } S = \{-40\}$$

$$\text{c) Ta có } x - 5 = 3 - x \Leftrightarrow x + x = 3 + 5 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{Vậy } S = \{4\}$$

$$\text{d) Ta có } 7 - 3x = 9 - x \Leftrightarrow -3x + x = 9 - 7 \Leftrightarrow -2x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{Vậy } S = \{-1\}$$

$$\text{e) Ta có } \frac{-5}{9}x + 1 = \frac{2}{3}x - 10 \Leftrightarrow \frac{-5}{9}x - \frac{2}{3}x = -10 - 1 \Leftrightarrow \frac{-11}{9}x = -11$$

$$\Leftrightarrow x = 9$$

$$\text{Vậy } S = \{9\}$$

$$\text{f) Ta có } 2(x + 1) = 3 + 2x \Leftrightarrow 2x + 2 = 3 + 2x \Leftrightarrow 2x - 2x = 3 - 2 \Leftrightarrow 0x = 1$$

$$\text{Vậy } S = \{\emptyset\}$$

**Bài 2. Tìm m sao cho phương trình**

$$\text{a) } 2x - 3m = x + 9 \text{ nhận } x = -5 \text{ là nghiệm}$$

$$\text{b) } 4x + m^2 = 22 \text{ nhận } x = 5 \text{ là nghiệm}$$

**Bài giải:**

$$\text{a) } x = -5 \text{ là nghiệm phương trình } 2x - 3m = x + 9$$

$$\text{nên ta có } 2.(-5) - 3m = (-5) + 9$$

$$\Leftrightarrow -10 - 3m = 4$$

$$\Leftrightarrow -3m = 4 + 10$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{14}{-3}$$

Vậy với  $x = -5$  là nghiệm phương trình  $2x - 3m = x + 9$  thì  $m = \frac{-14}{3}$

b)  $x = 5$  là nghiệm phương trình  $4x + m^2 = 22$

$$\text{nên ta có } 4.5 + m^2 = 22$$

$$\Leftrightarrow 20 + m^2 = 22$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 22 - 20$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Vậy với  $x = 5$  là nghiệm phương trình  $4x + m^2 = 22$  thì  $m = \pm\sqrt{2}$

**Bài 3.** Chứng minh hai phương trình sau là tương đương

$$x = -3 \text{ và } \frac{x}{3} + 1 = 0$$

**Bài giải:**

Ta thấy  $x = -3$  là nghiệm của phương trình  $\frac{x}{3} + 1 = 0$ . Vậy hai phương trình trên là tương đương.

**Bài 4.** Xét xem hai phương trình sau có tương đương không?

a)  $x^2 - 2x = x^3 + 3x - 1$  và  $x = -1$

b)  $(x - 3)(x^2 + 1) = 2x - 5$  và  $x = 2$

**Bài giải**

a) Ta có  $(-1)^2 - 2(-1) = 3 \neq (-1)^3 + 3(-1) - 1 = -5$  nên  $x = -1$  không là nghiệm của phương trình  $x^2 - 2x = x^3 + 3x - 1$ . Vậy hai phương trình trên không tương đương.

b) Ta có  $(2 - 3)(2^2 + 1) = -5 \neq 2.2 - 5 = -1$  nên  $x = 2$  không là nghiệm của phương trình  $(x - 3)(x^2 + 1) = 2x - 5$ . Vậy hai phương trình trên không tương đương.



## **Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ DẠNG $AX + B = 0$**

### **A. CHUẨN KIẾN THỨC**

#### **Cách giải**

Bước 1: Quy đồng mẫu rồi khử mẫu hai vế.

Bước 2: Bỏ ngoặc bằng cách nhân đa thức; hoặc dùng quy tắc dấu ngoặc.

Bước 3: Chuyển vế: Chuyển các hạng tử chứa ẩn qua vế trái; các hạng tử tự do qua vế phải. (**Chú ý:** Khi chuyển vế hạng tử thì phải đổi dấu hạng tử đó)

Bước 4: Thu gọn bằng cách cộng trừ các hạng tử đồng dạng

Bước 5: Chia hai vế cho hệ số của ẩn

**Ví dụ 6: Giải phương trình**  $\frac{x+2}{2} - \frac{2x+1}{6} = \frac{5}{3}$

Mẫu chung: 6

Ta có  $\frac{x+2}{2} - \frac{2x+1}{6} = \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow 3(x+2) - (2x+1) = 5 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 6x + 6 - 2x - 1 = 10$$

$$\Leftrightarrow 6x + 2x = 10 - 6 + 1$$

$$\Leftrightarrow 8x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{8}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{5}{8}$

**Ví dụ 7. Giải phương trình**  $(x+2)^2 - x = x^2 - 4x - 10$

Ta có  $(x+2)^2 - x = x^2 - 4x - 10$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - x = x^2 - 4x - 10$$

$$\Leftrightarrow 7x + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = -2$

## B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

**Bài 5. Giải các phương trình sau**

a)  $\frac{x+4}{4} - \frac{x-3}{6} = \frac{x}{3}$

b)  $\frac{x-1}{2} - \frac{1-x}{4} = 1 - \frac{2(x-1)}{3}$

c)  $\frac{3x-2}{6} - 5 = \frac{3-2(x+7)}{4}$

$$d) \frac{4x+1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{x-3}{6} = x$$

$$e) \frac{x+1}{3} + \frac{2x-9}{-8} = \frac{x}{6} + 1$$

$$f) \frac{3x-2}{5} + \frac{x-1}{9} = \frac{14x-3}{15} - \frac{2x+1}{9}$$

$$g) \frac{x}{2000} + \frac{x+1}{2001} + \frac{x+2}{2002} + \frac{x+3}{2003} = 4$$

$$h) \frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

$$i) \frac{x+14}{86} + \frac{x+15}{85} + \frac{x+16}{84} + \frac{x+17}{83} + \frac{x+116}{4} = 0$$

$$j) \frac{x-90}{10} + \frac{x-76}{12} + \frac{x-58}{14} + \frac{x-36}{16} + \frac{x-15}{17} = 15$$

$$k) (2x-1)^2 - (2x-3)^2 = 4(x+3)$$

$$l) (x+5)(2x-1) = (2x-3)(x+1)$$

### Bài giải:

$$\begin{aligned} a) \frac{x+4}{4} - \frac{x-3}{6} &= \frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{3(x+4)}{4 \cdot 3} - \frac{2(x-3)}{6 \cdot 2} = \frac{4x}{3 \cdot 4} \\ &\Leftrightarrow 3(x+4) - 2(x-3) = 4x \\ &\Leftrightarrow 3x+12-2x+6 = 4x \\ &\Leftrightarrow 3x-2x-4x = -6-12 \\ &\Leftrightarrow -3x = -18 \\ &\Leftrightarrow x = 6 \end{aligned}$$

Vậy  $S = \{6\}$

$$\begin{aligned} b) \frac{x-1}{2} - \frac{1-x}{4} &= 1 - \frac{2(x-1)}{3} \Leftrightarrow \frac{6(x-1)}{2 \cdot 6} - \frac{3(1-x)}{4 \cdot 3} = \frac{12}{12} - \frac{2 \cdot 4(x-1)}{3 \cdot 4} \\ &\Leftrightarrow 6(x-1) - 3(1-x) = 12 - 2 \cdot 4(x-1) \\ &\Leftrightarrow 6x-6-3+3x = 12-8x+8 \\ &\Leftrightarrow 6x+3x+8x = 12+8+6+3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 17x = 29 \Leftrightarrow x = \frac{29}{17}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{29}{17} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{3x-2}{6} - 5 &= \frac{3-2(x+7)}{4} \Leftrightarrow \frac{2(3x-2)}{6} - \frac{5.12}{12} = \frac{3(3-2(x+7))}{4.3} \\ &\Leftrightarrow 2(3x-2) - 5.12 = 3(3-2(x+7)) \\ &\Leftrightarrow 6x - 4 - 60 = 9 - 6(x+7) \\ &\Leftrightarrow 6x - 64 = 9 - 6x - 42 \\ &\Leftrightarrow 6x + 6x = 9 - 42 + 64 \\ &\Leftrightarrow 12x = 31 \Leftrightarrow x = \frac{31}{12} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{31}{12} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{4x+1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{x-3}{6} &= x \Leftrightarrow \frac{2(4x+1)}{3.2} - \frac{2.2}{3.2} - \frac{x-3}{6} = \frac{6x}{6} \\ &\Leftrightarrow 2(4x+1) - 2.2 - (x-3) = 6x \\ &\Leftrightarrow 8x + 2 - 4 - x + 3 = 6x \\ &\Leftrightarrow 8x - x - 6x = -3 + 4 - 2 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \{-1\}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{x+1}{3} + \frac{2x-9}{-8} &= \frac{x}{6} + 1 \Leftrightarrow \frac{8(x+1)}{3.8} + \frac{-3(2x-9)}{8.3} = \frac{4x}{6.4} + \frac{24}{24} \\ &\Leftrightarrow 8(x+1) - 3(2x-9) = 4x + 24 \\ &\Leftrightarrow 8x + 8 - 6x + 27 = 4x + 24 \\ &\Leftrightarrow 8x - 6x - 4x = 24 - 27 - 8 \\ &\Leftrightarrow -2x = -11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{11}{2} \right\}$$

$$\text{f) } \frac{3x-2}{5} + \frac{x-1}{9} = \frac{14x-3}{15} - \frac{2x+1}{9} \Leftrightarrow \frac{9(3x-2)}{5.9} + \frac{5(x-1)}{9.5} = \frac{3(14x-3)}{15.3} - \frac{5(2x+1)}{9.5}$$

$$\Leftrightarrow 9(3x - 2) + 5(x - 1) = 3(14x - 3) - 5(2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 27x - 18 + 5x - 5 = 42x - 9 - 10x - 5$$

$$\Leftrightarrow 27x + 5x - 42x + 10x = -9 - 5 + 5 + 18$$

$$\Leftrightarrow 0x = 9$$

Vậy  $S = \{\emptyset\}$

$$g) \frac{x}{2000} + \frac{x+1}{2001} + \frac{x+2}{2002} + \frac{x+3}{2003} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2000} - 1 + \frac{x+1}{2001} - 1 + \frac{x+2}{2002} - 1 + \frac{x+3}{2003} - 1 = 4 - 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2000}{2000} + \frac{x+1-2001}{2001} + \frac{x+2-2002}{2002} + \frac{x+3-2003}{2003} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2000}{2000} + \frac{x-2000}{2001} + \frac{x-2000}{2002} + \frac{x-2000}{2003} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2000) \cdot \left( \frac{1}{2000} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \frac{1}{2003} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2000=0 \text{ vì } \frac{1}{2000} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \frac{1}{2003} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2000$$

Vậy  $S = \{2000\}$

$$h) \frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

$$\Leftrightarrow \frac{59-x}{41} + 1 + \frac{57-x}{43} + 1 + \frac{55-x}{45} + 1 + \frac{53-x}{47} + 1 + \frac{51-x}{49} + 1 = -5 + 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{59-x+41}{41} + \frac{57-x+43}{43} + \frac{55-x+45}{45} + \frac{53-x+47}{47} + \frac{51-x+49}{49} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{100-x}{41} + \frac{100-x}{43} + \frac{100-x}{45} + \frac{100-x}{47} + \frac{100-x}{49} = 0$$

$$\Leftrightarrow (100-x) \cdot \left( \frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{45} + \frac{1}{47} + \frac{1}{49} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (100-x) = 0 \text{ vì } \left( \frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{45} + \frac{1}{47} + \frac{1}{49} \right) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 100$$

Vậy  $S = \{100\}$

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & \frac{x+14}{86} + \frac{x+15}{85} + \frac{x+16}{84} + \frac{x+17}{83} + \frac{x+116}{4} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x+14}{86} + 1 + \frac{x+15}{85} + 1 + \frac{x+16}{84} + 1 + \frac{x+17}{83} + 1 + \frac{x+116}{4} - 4 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x+14+86}{86} + \frac{x+15+85}{85} + \frac{x+16+84}{84} + \frac{x+17+83}{83} + \frac{x+116-16}{4} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x+100}{86} + \frac{x+100}{85} + \frac{x+100}{84} + \frac{x+100}{83} + \frac{x+100}{4} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x+100) \cdot \left( \frac{1}{86} + \frac{1}{85} + \frac{1}{84} + \frac{1}{83} + \frac{1}{4} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x+100) = 0 \text{ vì } \left( \frac{1}{86} + \frac{1}{85} + \frac{1}{84} + \frac{1}{83} + \frac{1}{4} \right) \neq 0 \\
 \Leftrightarrow & x = -100
 \end{aligned}$$

Vậy  $S = \{-100\}$

$$\begin{aligned}
 \text{j)} \quad & \frac{x-90}{10} + \frac{x-76}{12} + \frac{x-58}{14} + \frac{x-36}{16} + \frac{x-15}{17} = 15 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x-90}{10} - 1 + \frac{x-76}{12} - 2 + \frac{x-58}{14} - 3 + \frac{x-36}{16} - 4 + \frac{x-15}{17} - 5 = 15 - 15 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x-90-10}{10} + \frac{x-76-2.12}{12} + \frac{x-58-3.14}{14} + \frac{x-36-4.16}{16} + \frac{x-15-5.17}{17} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x-100}{10} + \frac{x-100}{12} + \frac{x-100}{14} + \frac{x-100}{16} + \frac{x-100}{17} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x-100) \cdot \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x-100) = 0 \text{ vì } \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} \right) \neq 0 \\
 \Leftrightarrow & x = 100
 \end{aligned}$$

Vậy  $S = \{100\}$

$$\begin{aligned}
 \text{k)} \quad & (2x-1)^2 - (2x-3)^2 = 4(x+3) \\
 \Leftrightarrow & 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 12x - 9 = 4x + 12
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4x = 20$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{Vậy } S = \{5\}$$

$$1) (x+5)(2x-1) = (2x-3)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 9x - 5 = 2x^2 - x - 3$$

$$\Leftrightarrow 10x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{5} \right\}$$

## Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

#### 1. Phương trình tích

Phương trình tích là phương trình có dạng:  $A(x).B(x)C(x).D(x) = 0$ , trong đó  $A(x).B(x)C(x).D(x)$  là các nhân tử

$$\text{Cách giải: } A(x).B(x)C(x).D(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \\ C(x) = 0 \\ D(x) = 0 \end{cases}$$

**Ví dụ 8.** Giải phương trình  $(2x-3)(3x+4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ 3x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S = \left\{ -\frac{4}{3}; \frac{3}{2} \right\}$

## 2. Phương trình đưa về phương trình tích

- Để đưa phương trình về dạng phương trình tích, ta áp dụng phương pháp phân tích một đa thức thành nhân tử.

**Ví dụ 9.** Giải phương trình  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)(x + 1)$  (1)

$$(1) \Leftrightarrow (x - 1)^3 - (x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)x(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình (1) là  $S = \{0; 1; 3\}$

**Ví dụ 10.** Giải phương trình  $x^2 + x = 2x + 2$  (2)

$$(2) \Leftrightarrow x(x + 1) = 2(x + 1)$$



$$a) (x-1)^2 = 2(x^2 - 1) \Leftrightarrow (x-1)^2 - 2(x-1)(x+1) = 0$$

73

Website: tailieumontoan.com

$$\Leftrightarrow (x-1)[x-1-2(x+1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-1-2x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(-x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ -x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy  $S = \{-3; 1\}$

$$b) 2(x+2)^2 - x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2(x+2)^2 - (x^3 + 2^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+2)^2 - (x^3 + 2^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+2)^2 - (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(2(x+2) - (x^2 - 2x + 4)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(2x+4 - x^2 + 2x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(4x - x^2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)x(4-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x=0 \\ 4-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy  $S = \{-2; 0; 4\}$

$$c) (x-1)(x^2 + 5x - 2) - x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 5x - 2) - (x^3 - 1^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 5x - 2) - (x-1)(x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 5x - 2 - x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)3(x-1) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Vậy  $S = \{1\}$

$$d) (x-3)^2 = (2x+7)^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 - (2x+7)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3+2x+7)(x-3-2x-7)=0$$

$$\Leftrightarrow (3x+4)(-x-10)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4=0 \\ -x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{4}{3} \\ x=-10 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{-10; -\frac{4}{3}\right\}$$

$$\text{e) } \frac{3}{7}x-1=\frac{1}{7}x(3x-7) \Leftrightarrow \frac{3}{7}x-\frac{7}{7}=\frac{1}{7}x(3x-7)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{7}(3x-7)-\frac{1}{7}x(3x-7)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{7}(3x-7)(1-x)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-7=0 \\ 1-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ x=1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{1; \frac{7}{3}\right\}$$

$$\text{f) } (x^2-2)(4x-3)=(x^2-2)(x-12) \Leftrightarrow (x^2-2)(4x-3)-(x^2-2)(x-12)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2)(4x-3-x+12)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2)(3x+9)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2=0 \\ 3x+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -3\}$$

$$\text{g) } (x+2)(3-4x)=x^2+4x+4 \Leftrightarrow (x+2)(3-4x)=(x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(3-4x)-(x+2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(3-4x-x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(1-5x)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ 1-5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{-2; \frac{1}{5}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } x^2 - 3x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - x - 2x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x) - (2x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1) - 2(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \{1; 2\}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } x^2 + 7x + 12 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 3x + 4x + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x+3) + 4(x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=-4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \{-3; -4\}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } x^2 - 3x - 10 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5x - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x+2) - 5(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x-5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \{-2; 5\}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } x^2 + 2x - 15 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 5x - 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-3) + 5(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x+5) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-5; 3\}$$

$$\begin{aligned} \text{l) } 2x^2 - 5x + 3 &= 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x-1) - 3(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(2x-3) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{m) } 3x^2 - 5x - 2 &= 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x(x-2) + (x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(3x+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{2; -\frac{1}{3}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{n) } x^3 + 1 &= x(x+1) \Leftrightarrow x^3 + 1^3 - x(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) - x(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1 - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \{-1; 1\}$$

$$\begin{aligned} \text{o) } x^3 + x^2 + x + 1 &= 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) + (x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \text{ vì } x^2+1>0 \forall x$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

$$\text{Vậy } S = \{-1\}$$

$$\text{p) } x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) - 3(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-3)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-3; 3\}$$

$$\text{q) } x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{2; 3\}$$

$$\text{r) } x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^3 - 2x^2 + 5x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x^2 - x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x-1=0 \end{cases} \text{ vì } x^2 - x + 4 > 0 \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-2; 1\}$$

$$\text{t) } x^4 + x^3 + 6x^2 = -5(x+1) \Leftrightarrow x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + x + 1) + 5(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 + 5) = 0$$

$$\text{Vì với mọi } x \text{ ta có } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ và } x^2 + 5 > 0.$$

Do đó phương trình đã cho vô nghiệm hay tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S = \emptyset$

$$\Leftrightarrow x(x+1) - 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là  $S = \{-1; 2\}$

## B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

**Bài 6: Giải các phương trình sau:**

a)  $(x-1)^2 = 2(x^2 - 1)$

b)  $2(x+2)^2 - x^3 - 8 = 0$

c)  $(x-1)(x^2 + 5x - 2) - x^3 + 1 = 0$

d)  $(x-3)^2 = (2x+7)^2$

e)  $\frac{3}{7}x - 1 = \frac{1}{7}x(3x - 7)$

f)  $(x^2 - 2)(4x - 3) = (x^2 - 2)(x - 12)$

g)  $(x+2)(3-4x) = x^2 + 4x + 4$

h)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

i)  $x^2 + 7x + 12 = 0$

j)  $x^2 - 3x - 10 = 0$

k)  $x^2 + 2x - 15 = 0$

l)  $2x^2 - 5x + 3 = 0$

m)  $3x^2 - 5x - 2 = 0$

n)  $x^3 + 1 = x(x+1)$

o)  $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

p)  $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$

q)  $x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0$

r)  $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$

t)  $x^4 + x^3 + 6x^2 = -5(x+1)$

**Bài giải:**

## Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU. BÀI TẬP TỔNG HỢP

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

- Tìm điều kiện xác định của phương trình
- Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.
- Giải phương trình vừa nhận được.
- Kiểm tra điều kiện và kết luận tập nghiệm.

### B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

**Bài 7: Giải các phương trình sau:**

$$a) \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-2} = -3$$

$$b) 3x - \frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{2-x}$$

$$c) \frac{x+4}{x^2-3x+2} + \frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2x+5}{x^2-4x+3}$$

$$d) \frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0$$

$$e) \frac{4x}{x^2+4x+3} - 1 = 6 \left( \frac{1}{x+3} - \frac{1}{2x+2} \right)$$

$$f) \frac{3}{4(x-5)} + \frac{15}{50-2x^2} = \frac{7}{6x+30}$$

$$g) \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$$

$$h) \frac{12x+1}{6x-2} - \frac{9x-5}{3x+1} = \frac{108x-36x^2-9}{4(9x^2-1)}$$

$$i) x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$j) \frac{1}{x} + 2 = \left( \frac{1}{x} + 2 \right) (x^2 + 2)$$

$$k) \left( x + 1 + \frac{1}{x} \right)^2 = \left( x - 1 - \frac{1}{x} \right)^2$$

**Bài giải:**

$$a) \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-2} = -3 \quad (1) \quad \text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Mẫu chung:  $(x-1)(x-2)$

Phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned}
& \frac{4(x-2)}{(x-1)(x-2)} - \frac{5(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{-3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \\
& \Rightarrow 4(x-2) - 5(x-1) = -3(x-1)(x-2) \\
& \Leftrightarrow 4x - 8 - 5x + 5 = -3(x^2 - 3x + 2) \\
& \Leftrightarrow -x - 3 = -3x^2 + 9x - 6 \\
& \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\
& \Leftrightarrow 3x^2 - 9x - x + 3 = 0 \\
& \Leftrightarrow 3x(x-3) - (x-3) = 0 \\
& \Leftrightarrow (x-3)(3x-1) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ 3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases} \quad (\text{nhận})
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{3}; 3 \right\}$$

$$\text{b) } 3x - \frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{2-x} \quad (2) \text{ Điều kiện: } x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Mẫu chung:  $x-2$

Phương trình (2) trở thành

$$\begin{aligned}
& \frac{3x(x-2)}{x-2} - \frac{1}{x-2} = \frac{-(x-1)}{x-2} \\
& \Rightarrow 3x(x-2) - 1 = -(x-1) \\
& \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 1 + x - 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \\
& \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + x - 2 = 0 \\
& \Leftrightarrow 3x(x-2) + (x-2) = 0 \\
& \Leftrightarrow (x-2)(3x+1) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} (\text{loại}) \\ (\text{nhận}) \end{matrix}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$



$$c) \frac{x+4}{x^2-3x+2} + \frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2x+5}{x^2-4x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{(x-1)(x-2)} + \frac{x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{2x+5}{(x-1)(x-3)} \quad (3)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Phương trình (3) trở thành

$$\frac{(x+4)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-3)(x-2)} = \frac{(2x+5)(x-2)}{(x-1)(x-3)(x-2)}$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-3) + (x+1)(x-2) = (2x+5)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 + x^2 - x - 2 = 2x^2 + x - 10$$

$$\Leftrightarrow -x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \quad (\text{nhận})$$

$$\text{Vậy } S = \{-4\}$$

$$d) \frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0 \quad (4)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -2 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Mẫu chung:  $x(x+2)(x-2)$

Phương trình (4) trở thành

$$\frac{2x}{(x-2)(x+2)x} - \frac{1(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{(x-4)(x-2)}{x(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow 2x - (x+2) + (x-4)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - x - 2 + x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) - 3(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 & (\text{loại}) \\ x=3 & (\text{nhận}) \end{cases}$$

Vậy  $S = \{3\}$

$$\text{e) } \frac{4x}{x^2 + 4x + 3} - 1 = 6 \left( \frac{1}{x+3} - \frac{1}{2x+2} \right) \Leftrightarrow \frac{4x}{(x+1)(x+3)} - 1 = 6 \left( \frac{1}{x+3} - \frac{1}{2(x+1)} \right) \quad (5)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

Mẫu chung:  $2(x+1)(x+3)$

Phương trình (5) trở thành

$$\begin{aligned} \frac{4.2x}{2(x+1)(x+3)} - \frac{2(x+1)(x+3)}{2(x+1)(x+3)} &= 6 \left( \frac{1(x+1).2}{(x+3)(x+1).2} - \frac{1(x+3)}{2(x+1)(x+3)} \right) \\ \Rightarrow 4.2x - 2(x+1)(x+3) &= 6(2(x+1) - (x+3)) \\ \Leftrightarrow 8x - 2(x^2 + 4x + 3) &= 6(2x + 2 - x - 3) \\ \Leftrightarrow 8x - 2x^2 - 8x - 6 &= 6(x - 1) \\ \Leftrightarrow -2x^2 - 6x &= 0 \\ \Leftrightarrow -2x(x+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (\text{nhận}) \\ x=-3 & (\text{loại}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $S = \{0\}$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{3}{4(x-5)} + \frac{15}{50-2x^2} &= \frac{7}{6x+30} \Leftrightarrow \frac{3}{4(x-5)} - \frac{15}{2(x^2-25)} = \frac{7}{6(x+5)} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{4(x-5)} - \frac{15}{2(x-5)(x+5)} = \frac{7}{6(x+5)} \quad (6) \end{aligned}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+5 \neq 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

Mẫu chung:  $12(x+5)(x-5)$

Phương trình (6) trở thành

$$\frac{3.3(x+5)}{4.3(x+5)(x-5)} - \frac{15.6}{2(x-5)(x+5)} = \frac{7.2(x-5)}{6(x+5).2(x-5)}$$

$$\Rightarrow 9(x+5) - 15.6 = 14(x-5)$$

$$\Leftrightarrow 9x + 45 - 90 = 14x - 70$$

$$\Leftrightarrow -5x = -25$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ (loại)}$$

Vậy  $S = \{\emptyset\}$

$$g) \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{4}{x^2+x+1} \quad (7)$$

Điều kiện:  $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$  vì  $x^2+x+1 > 0 \forall x$

Mẫu chung:  $(x-1)(x^2+x+1)$

Phương trình (7) trở thành

$$\frac{1(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{2x^2-5}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{4(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)}$$

$$\Rightarrow x^2+x+1+2x^2-5=4x-4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-3x=0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(nhận)} \\ \text{(loại)} \end{matrix}$$

Vậy  $S = \{0\}$

$$h) \frac{12x+1}{6x-2} - \frac{9x-5}{3x+1} = \frac{108x-36x^2-9}{4(9x^2-1)} \Leftrightarrow \frac{12x+1}{2(3x-1)} - \frac{9x-5}{3x+1} = \frac{108x-36x^2-9}{4(3x-1)(3x+1)} \quad (8)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3x-1 \neq 0 \\ 3x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ x \neq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Mẫu chung:  $4(3x+1)(3x-1)$

Phương trình (8) trở thành

$$\frac{2(12x+1)(3x+1)}{2.2(3x+1)(3x-1)} - \frac{4(9x-5)(3x-1)}{4(3x+1)(3x-1)} = \frac{108x-36x^2-9}{4(3x-1)(3x+1)}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2(12x+1)(3x+1) - 4(9x-5)(3x-1) = 108x - 36x^2 - 9 \\
&\Leftrightarrow 2(36x^2 + 15x + 1) - 4(27x^2 - 24x + 5) - 108x + 36x^2 + 9 = 0 \\
&\Leftrightarrow 72x^2 + 30x + 2 - 108x^2 + 96x - 20 - 108x + 36x^2 + 9 = 0 \\
&\Leftrightarrow 18x - 9 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{9}{18} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (nhận)}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{i) } x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0 \quad (9)$$

Điều kiện:  $x \neq 0$

Đặt  $x + \frac{1}{x} = t$ , phương trình (9) trở thành

$$\begin{aligned}
&t^2 - t - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow t^2 + t - 2t - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow t(t+1) - 2(t+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (t-2)(t+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} t-2=0 \\ t+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{Với } t = 2, \text{ ta có } x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ (nhận)}$$

$$\text{Với } t = -1, \text{ ta có } x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + 1 = -x \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{vì } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$$

$$\text{Vậy } S = \{1\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{j) } \frac{1}{x} + 2 &= \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 2) \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 2 - \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 2) = 0 \text{ Điều kiện: } x \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + 2\right) - \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + 2\right)(1 - x^2 - 2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + 2\right)(-x^2 - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 2 = 0 \text{ vì } (x^2 + 1) > 0 \forall x \\
 &\Rightarrow 1 + 2x = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{k) } \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 &= \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0 \text{ Điều kiện: } x \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(x + 1 + \frac{1}{x} + x - 1 - \frac{1}{x}\right)\left(x + 1 + \frac{1}{x} - x + 1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2x\left(2 + \frac{2}{x}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 + \frac{2}{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{loại}) \\ x = -1 & (\text{nhận}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \{-1\}$$

**Bài 8. Giải các phương trình sau:**

$$\text{a) } \frac{x^2 + 1}{x + 1} + \frac{x^2 + 2}{x - 2} = -2$$

$$\text{b) } \frac{x}{x + 1} + \frac{x + 1}{x + 2} + \frac{x + 2}{x} = \frac{25}{6}$$

$$c) x^2 + \frac{2x}{x-1} = 8$$

$$d) \frac{2}{x-14} - \frac{5}{x-13} = \frac{2}{x-9} - \frac{5}{x-11}$$

$$e) \frac{x^2}{x^2+2x+2} + \frac{x^2}{x^2-2x+2} - \frac{4x^2-20}{x^4+4} = \frac{322}{65}$$

$$f) \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} + \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} = \frac{1}{8}$$

$$g) \frac{2}{x^2+4x+3} + \frac{5}{x^2+11x+24} + \frac{2}{x^2+18x+80} = \frac{9}{52}$$

$$h) \frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} = \frac{x+8}{x-2} + \frac{x-8}{x+2} + 6$$

### Bài giải

$$a) \frac{x^2+1}{x+1} + \frac{x^2+2}{x-2} = -2 \quad (1) \quad \text{Điều kiện} \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(x^2+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{(x^2+2)(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{-2(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow (x^2+1)(x-2) + (x^2+2)(x+1) = -2(x+1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x - 2 + x^3 + x^2 + 2x + 2 = -2x^2 + 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 + x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 3x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) = 0 \text{ vì } 2x^2 + 3x + 4 > 0 \forall x$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } S = \{1\}$$

$$b) \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x} = \frac{25}{6} \quad (2) \quad \text{Điều kiện} \begin{cases} x \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} - 1 + \frac{x+1}{x+2} - 1 + \frac{x+2}{x} - 1 = \frac{25}{6} - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-x-1}{x+1} + \frac{x+1-x-2}{x+2} + \frac{x+2-x}{x} = \frac{7}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{7}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6x(x+2)}{6x(x+1)(x+2)} + \frac{-6x(x+1)}{6x(x+2)(x+1)} + \frac{2.6(x+1)(x+2)}{6x(x+2)(x+1)} = \frac{7x(x+1)(x+2)}{6x(x+1)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow -6x^2 - 12x - 6x^2 - 6x + 12(x^2 + 3x + 2) = 7x(x^2 + 3x + 2)$$

$$\Leftrightarrow -12x^2 - 18x + 12x^2 + 36x + 24 = 7x^3 + 21x^2 + 14x$$

$$\Leftrightarrow 7x^3 + 21x^2 - 4x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(7x^2 + 28x + 24) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ vì } 7x^2 + 28x + 24 > 0 \forall x$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ (nhận)}$$

Vậy  $S = \{1\}$

c)  $x^2 + \frac{2x}{x-1} = 8$  (3) Điều kiện  $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)}{x-1} + \frac{2x}{x-1} = \frac{8(x-1)}{x-1}$$

$$\Rightarrow x^2(x-1) + 2x = 8(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x - 8x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left( \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{17}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{17}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{17}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x + \begin{cases} x = 2 \\ x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2} \\ x + \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \quad (\text{nhận}) \\ x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \quad (\text{nhận}) \\ x = \frac{-\sqrt{17}-1}{2} \quad (\text{nhận}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 2; \frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{-\sqrt{17}-1}{2} \right\}$$

$$\text{d) } \frac{2}{x-14} - \frac{5}{x-13} = \frac{2}{x-9} - \frac{5}{x-11} \quad (4)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x-14 \neq 0 \\ x-13 \neq 0 \\ x-9 \neq 0 \\ x-11 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 14 \\ x \neq 13 \\ x \neq 9 \\ x \neq 11 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow \frac{5}{x-13} - \frac{5}{x-11} = \frac{2}{x-14} - \frac{2}{x-9} \\ &\Leftrightarrow 5 \left( \frac{1}{x-13} - \frac{1}{x-11} \right) = 2 \left( \frac{1}{x-14} - \frac{1}{x-9} \right) \\ &\Leftrightarrow 5 \left( \frac{2}{(x-13)(x-11)} \right) = 2 \left( \frac{5}{(x-14)(x-9)} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{10}{(x-13)(x-11)} = \frac{10}{(x-14)(x-9)} \\ &\Rightarrow (x-13)(x-11) = (x-14)(x-9) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 24x + 143 = x^2 - 23x + 126 \\ &\Leftrightarrow -x = -17 \\ &\Leftrightarrow x = 17 \quad (\text{nhận}) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \{17\}$$

$$\text{e) } \frac{x^2}{x^2+2x+2} + \frac{x^2}{x^2-2x+2} - \frac{4x^2-20}{x^4+4} = \frac{322}{65} \quad (5)$$

Điều kiện với mọi  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2^2 = (x^2 + 2)^2 - 2 \cdot 2x^2$$



$$= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

$$(5) \Leftrightarrow \frac{65x^2(x^2 - 2x + 2)}{65(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)} + \frac{65x^2(x^2 + 2x + 2)}{65(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)} - \frac{65(4x^2 - 20)}{65(x^4 + 4)}$$

$$= \frac{322(x^4 + 4)}{65(x^4 + 4)}$$

$$\Rightarrow 65x^4 - 130x^3 + 130x^2 + 65x^4 + 130x^3 + 130x^2 - 260x^2 + 1300$$

$$= 322x^4 + 1288$$

$$\Leftrightarrow 130x^4 + 1300 = 322x^4 + 1288$$

$$\Leftrightarrow 192x^4 = 12$$

$$\Leftrightarrow x^4 = \frac{12}{192} = \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$$

$$f) \frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{8} \quad (6)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x+6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -6 \end{cases}$$

$$(6) \Leftrightarrow \frac{8(x+6)}{8(x+2)(x+6)} - \frac{8(x+2)}{8(x+6)(x+2)} = \frac{(x+6)(x+2)}{8(x+6)(x+2)}$$

$$\Rightarrow 8x + 48 - 8x - 16 = x^2 + 8x + 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 10x - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 2) + 10(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -10 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } S = \{2; -10\}$$

$$g) \frac{2}{x^2 + 4x + 3} + \frac{5}{x^2 + 11x + 24} + \frac{2}{x^2 + 18x + 80} = \frac{9}{52}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(x + 3)(x + 1)} + \frac{5}{(x + 8)(x + 3)} + \frac{2}{(x + 8)(x + 10)} = \frac{9}{52}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x + 8} + \frac{1}{x + 8} - \frac{1}{x + 10} = \frac{9}{52}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 10} = \frac{9}{52} \quad (7)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x + 1 \neq 0 \\ x + 10 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -10 \end{cases}$$

$$(7) \Leftrightarrow \frac{52(x + 10)}{52(x + 1)(x + 10)} - \frac{52(x + 1)}{52(x + 10)(x + 1)} = \frac{9(x + 10)(x + 1)}{52(x + 10)(x + 1)}$$

$$\Rightarrow 52(x + 10) - 52(x + 1) = 9(x + 10)(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 52x + 520 - 52x - 52 = 9x^2 + 99x + 90$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 99x - 378 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 11x - 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 14) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -14 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } S = \{3; -14\}$$

$$h) \frac{x + 4}{x - 1} + \frac{x - 4}{x + 1} = \frac{x + 8}{x - 2} + \frac{x - 8}{x + 2} + 6 \text{ Điều kiện } x \neq \pm 1; x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{5}{x-1} + 1 + \frac{-5}{x+1} = 1 + \frac{10}{x-2} + 1 + \frac{-10}{x+2} + 6$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}\right) - 10\left(\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+2}\right) = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{5.2}{(x-1)(x+1)} - \frac{10.4}{(x-2)(x+2)} = 6$$

$$\Rightarrow 10(x^2 - 4) - 40(x^2 - 1) = 6(x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 - 40 - 40x^2 + 40 = 6(x^4 - 5x^2 + 4)$$

$$\Leftrightarrow 6x^4 + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(x^4 + 4) = 0 \text{ (vô nghiệm) vì } x^4 + 4 > 0 \forall x$$

Vậy  $S = \{\emptyset\}$

### Bài 9. Giải các phương trình sau:

a)  $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$

b)  $(x^2 + x + 6)(x^2 + x + 3) = 4$

c)  $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$

d)  $(2 - x^2)^2 + 3(2 - x^2) + 2 = 0$

e)  $x(x+1)(x+2)(x-1) = 24$

f)  $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680$

g)  $(x+1)(x+2)(x+5)(x-2) = -20$

### Bài giải

a)  $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12 \quad (1)$

Đặt  $x^2 + x + 1 = t$

Phương trình (1) trở thành

$$t(t+1) = 12 \Leftrightarrow t(t+1) - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(t+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-3=0 \\ t+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=-4 \end{cases}$$

Với  $t = 3$  ta có  $x^2 + x + 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Với  $t = -4$  ta có  $x^2 + x + 1 = -4 \Leftrightarrow x^2 + x + 5 = 0$  (vô nghiệm)

$$\text{Vì } x^2 + x + 5 > 0 \forall x$$

Vậy  $S = \{-2; 1\}$

$$\text{b) } (x^2 + x + 6)(x^2 + x + 3) = 4 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } x^2 + x + 3 = t$$

Phương trình (2) trở thành  $t(t+3) = 4 \Leftrightarrow t(t+3) - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-1=0 \\ t+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-4 \end{cases}$$

Với  $t = 1$  ta có  $x^2 + x + 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0$  (vô nghiệm)

$$\text{Vì } x^2 + x + 2 > 0 \forall x$$

Với  $t = -4$  ta có  $x^2 + x + 3 = -4 \Leftrightarrow x^2 + x + 7 = 0$  (vô nghiệm)

$$\text{Vì } x^2 + x + 7 > 0 \forall x$$

Vậy  $S = \{\emptyset\}$

$$\text{c) } (x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0 \quad (3)$$

$$\text{Đặt } x^2 + 5x = t$$

Phương trình (3) trở thành

$$t^2 - 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 6t - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+4)(t-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t+4=0 \\ t-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-4 \\ t=6 \end{cases}$$

Với  $t = -4$  ta được  $x^2 + 5x = -4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-4 \end{cases}$$

Với  $t = 6$  ta được  $x^2 + 5x = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+6)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-6 \end{cases}$$

Vậy  $S = \{-1; -4; -6; 1\}$

d)  $(2-x^2)^2 + 3(2-x^2) + 2 = 0 \quad (4)$

Đặt  $2-x^2 = t$

Phương trình (4) trở thành

$$t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t+1=0 \\ t+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-2 \end{cases}$$

Với  $t = -1$  ta được  $2-x^2 = -1 \Leftrightarrow 2-x^2 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 3-x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Với  $t = -2$  ta được  $2-x^2 = -2 \Leftrightarrow 2-x^2 + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4-x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2$$

Vậy  $S = \{-\sqrt{3}; -2; \sqrt{3}; 2\}$

e)  $x(x+1)(x+2)(x-1) = 24 \Leftrightarrow (x(x+1))((x+2)(x-1)) - 24 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2+x)(x^2+x-2) - 24 = 0 \quad (5)$$

Đặt  $x^2 + x = t$

Phương trình (5) trở thành

$$t(t-2) - 24 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+4)(t-6)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t+4=0 \\ t-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-4 \\ t=6 \end{cases}$$

Với  $t = -4$  ta được  $x^2 + x = -4 \Leftrightarrow x^2 + x + 4 = 0$  (vô nghiệm)

$$\text{Vì } x^2 + x + 4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} > 0 \forall x$$

Với  $t = 6$  ta được  $x^2 + x = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy  $S = \{-3; 2\}$

$$\text{f) } (x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$$

$$\Leftrightarrow ((x-4)(x-7))((x-5)(x-6))-1680=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-11x+28)(x^2-11x+30)-1680=0 \quad (6)$$

$$\text{Đặt } x^2-11x+28=t$$

Phương trình (6) trở thành

$$t(t+2)-1680=0 \Leftrightarrow t^2+2t-1680=0$$

$$\Leftrightarrow (t-40)(t+42)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t+42=0 \\ t-40=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-42 \\ t=40 \end{cases}$$

Với  $t = -42$  ta được  $x^2 - 11x + 28 = -42 \Leftrightarrow x^2 + x + 70 = 0$  (vô nghiệm)

$$\text{Vì } x^2 + x + 70 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{279}{4} > 0 \forall x$$

Với  $t = 40$  ta được  $x^2 - 11x + 28 = 40 \Leftrightarrow x^2 - 11x - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-12)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-12=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vậy  $S = \{-1; 12\}$

$$g) (x+1)(x+2)(x+5)(x-2) = -20$$

$$\Leftrightarrow ((x+1)(x+2))((x+5)(x-2)) + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 10) + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 2 - 12) + 20 = 0 \quad (7)$$

$$\text{Đặt } x^2 + 3x + 2 = t$$

Phương trình (7) trở thành

$$t(t-12) + 20 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-10)(t-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-10=0 \\ t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=10 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t=10 \text{ ta được } x^2 + 3x + 2 = 10 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{41}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{41}-3}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{41}-3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } t=2 \text{ ta được } x^2 + 3x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{\sqrt{41}-3}{2}; \frac{-\sqrt{41}-3}{2}; 0; -3 \right\}$$

**Bài 10. Giải các phương trình sau:**

$$a) \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1$$

$$b) \frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2$$

$$c) \frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1$$

$$d) 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$$

$$e) \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6}$$

### Bài giải

$$a) \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } x^2 - x = t$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành } \frac{t}{t+1} - \frac{t+2}{t-2} = 1 \quad (*)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} t+1 \neq 0 \\ t-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq -1 \\ t \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{Mẫu chung } (t+1)(t-2)$$

Phương trình (\*) trở thành

$$t(t-2) - (t+2)(t+1) = (t+1)(t-2)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t - t^2 - 3t - 2 = t^2 - t - 2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 4t = 0$$

$$\Leftrightarrow t(t+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -4 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Với } t = 0, \text{ ta được } x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -4, \text{ ta được } x^2 - x = -4 \Leftrightarrow x^2 - x + 4 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{Vì } x^2 - x + 4 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \forall x$$

$$\text{Vậy } S = \{0; 1\}$$



$$b) \frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2 \quad (2)$$

Đặt  $x^2 + 2x = t$

Phương trình (2) trở thành

$$\begin{aligned} \frac{24}{t-8} - \frac{15}{t-3} &= 2 \text{ Điều kiện } t \neq 8; t \neq 3 \\ \Leftrightarrow \frac{24(t-3)}{(t-8)(t-3)} - \frac{15(t-8)}{(t-8)(t-3)} &= \frac{2(t-8)(t-3)}{(t-8)(t-3)} \\ \Rightarrow 24t - 72 - 15t + 120 &= 2t^2 - 22t + 48 \\ \Leftrightarrow 2t^2 - 31t &= 0 \\ \Leftrightarrow t(2t - 31) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{31}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $t = 0$ , ta có  $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Với  $t = \frac{31}{2}$  ta có  $x^2 + 2x = \frac{31}{2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = \frac{31}{2} + 1$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{33}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{33}{2}} - 1 \\ x = -\sqrt{\frac{33}{2}} - 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ -2; -\left(\sqrt{\frac{33}{2}} + 1\right); 0; \sqrt{\frac{33}{2}} - 1 \right\}$$

$$c) \frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1 \Leftrightarrow \frac{6}{x^2 + 3x + 2} + \frac{8}{x^2 + 3x - 4} = 1 \quad (3)$$

Đặt  $x^2 + 3x = t$

Phương trình (3) trở thành

$$\frac{6}{t+2} + \frac{8}{t-4} = 1 \text{ Điều kiện } t \neq 4; t \neq -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(t-4)}{(t+2)(t-4)} + \frac{8(t+2)}{(t+2)(t-4)} = \frac{(t+2)(t-4)}{(t+2)(t-4)}$$

$$\Rightarrow 6t - 24 + 8t + 16 = t^2 - 2t - 8$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 16t = 0 \Leftrightarrow t(t-16) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 16 \end{cases}$$

Với  $t = 0$  ta có  $x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Với  $t = 16$  ta có  $x^2 + 3x = 16 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 16 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{73}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{73}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{73}}{2} + \frac{3}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{73}}{2} + \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy  $S = \left\{-3; \frac{1}{2}(3 - \sqrt{73}); 0; \frac{1}{2}(3 + \sqrt{73})\right\}$

d)  $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9 \Leftrightarrow 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2}\right) = 9$

$$\Leftrightarrow 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5 = 0 \quad (4)$$

Đặt  $\left(x + \frac{1}{x}\right) = t$

Phương trình (4) trở thành

$$7t - 2t^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Với  $t = 1$ , ta được  $x + \frac{1}{x} = 1$  (\*\*). Điều kiện  $x \neq 0$

Phương trình (\*\*) trở thành  $x^2 - x + 1 = 0$  (vô nghiệm)

$$\forall x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$$

Với  $t = \frac{5}{2}$ , ta được  $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$  (\*\*\*) Điều kiện  $x \neq 0$

Phương trình (\*\*\*) trở thành

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$$

$$\text{e) } \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} \quad (5)$$

$$\text{Đặt } x^2 + 2x + 2 = t$$

Phương trình (5) trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{t-1}{t} + \frac{t}{t+1} = \frac{7}{6} \quad \text{Điều kiện } \begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \frac{6(t-1)(t+1)}{6t(t+1)} + \frac{6t \cdot t}{6t(t+1)} = \frac{7t(t+1)}{6t(t+1)} \\ \Rightarrow & 6t^2 - 6 + 6t^2 = 7t^2 + 7t \\ \Leftrightarrow & 5t^2 - 7t - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & 5t^2 - 10t + 3t - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & 5t(t-2) + 3(t-2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (t-2)(5t+3) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{3}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $t = 2$ , ta được  $x^2 + 2x + 2 = 2 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Với  $t = \frac{-3}{5}$ , ta được  $x^2 + 2x + 2 = \frac{-3}{5} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 + \frac{3}{5} = 0$  (vô nghiệm)

$$\forall x \quad x^2 + 2x + 2 + \frac{3}{5} = (x+1)^2 + \frac{8}{5} > 0 \forall x$$

Vậy  $S = \{0; -2\}$

### Bài 11. Giải các phương trình sau:

a)  $(x^2 + 4x - 21)^2 = (x + 3)^4$

b)  $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$

c)  $27x^3 = (x - 3)^3 + (2x + 3)^3$

### Bài giải

a)  $(x^2 + 4x - 21)^2 = (x + 3)^4$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 21)^2 = ((x + 3)^2)^2 \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 21)^2 = (x^2 + 6x + 9)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 21)^2 - (x^2 + 6x + 9)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 21 + x^2 + 6x + 9)(x^2 + 4x - 21 - x^2 - 6x - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 10x - 12)(-2x - 30) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1)(x + 6)(-2)(x + 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 6 = 0 \\ x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \\ x = -15 \end{cases}$$

Vậy  $S = \{1; -6; -15\}$

b)  $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$

$$\Leftrightarrow (x-1+2x+3)\left((x-1)^2 - (x-1)(2x+3) + (2x+3)^2\right) = (3x)^3 + 2^3$$

$$\Leftrightarrow (3x+2)\left(x^2 - 2x + 1 - 2x^2 - x + 3 + 4x^2 + 12x + 9\right) = (3x+2)(9x^2 - 6x + 4)$$

$$\Leftrightarrow (3x+2)\left((3x^2 + 9x + 13) - (9x^2 - 6x + 4)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+2)(-6x^2 + 15x + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(3x+2)(x-3)(2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2=0 \\ x-3=0 \\ 2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-2}{3} \\ x=3 \\ x=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\frac{-1}{2}; \frac{-2}{3}; 3\right\}$$

$$\text{c) } 27x^3 = (x-3)^3 + (2x+3)^3$$

$$\Leftrightarrow (3x)^3 = (x-3+2x+3)\left((x-3)^2 - (x-3)(2x+3) + (2x+3)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 = 3x(x^2 - 6x + 9 - 2x^2 + 3x + 9 + 4x^2 + 12x + 9)$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 = 3x(3x^2 + 9x + 27)$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 = 9x(x^2 + 3x + 9)$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 9x^3 - 27x^2 - 81x = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x(2x^2 - 3x - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x(x-3)(2x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \\ 2x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ x=\frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\frac{-3}{2}; 0; 3\right\}$$

## Bài 5. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình:

- Lập phương trình
  - Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
  - Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
  - Lập phương trình biểu thị mối liên hệ giữa các đại lượng.
- Giải phương trình
- Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

### B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

**Bài 12.** Thùng thứ nhất chứa 60 gói kẹo, thùng thứ hai chứa 80 gói kẹo.

Người ta lấy ra từ thùng thứ hai số gói kẹo nhiều gấp 3 lần số gói kẹo lấy ra từ thùng thứ nhất. Hỏi có bao nhiêu gói kẹo được lấy ra từ thùng thứ nhất, biết rằng số gói kẹo còn lại trong thùng thứ nhất gấp 2 lần số gói kẹo còn lại trong thùng thứ hai?

#### Bài giải

Gọi  $x$  là số gói kẹo lấy ra từ thùng thứ nhất

$3x$  là số gói kẹo lấy ra từ thùng thứ hai.

Số gói kẹo còn lại ở thùng thứ nhất :  $60 - x$

Số gói kẹo còn lại ở thùng thứ hai :  $80 - 3x$

Giả thiết: số gói kẹo còn lại ở thùng thứ nhất gấp hai lần số gói kẹo còn lại ở thùng thứ hai:  $60 - x = 2(80 - 3x)$  (1)

Giải phương trình (1)  $\Leftrightarrow 60 - x = 160 - 6x$

$$\Leftrightarrow 5x = 100$$

$$\Leftrightarrow x = 20$$

Vậy số gói kẹo lấy ra từ thùng thứ nhất là 20

**Bài 13.** Ông của Bình hơn Bình 58 tuổi. Nếu cộng tuổi của bố Bình và hai lần tuổi của Bình thì bằng tuổi của ông và tổng số tuổi của ba người 130. Hãy tính tuổi của Bình.

### Bài giải

Gọi X là tuổi Bình.

Y là tuổi bố Bình.

Z là tuổi của ông Bình.

Theo đề: Ông hơn Bình 58 tuổi :  $Z - X = 58$  (1)

Tuổi bố và hai lần tuổi Bình bằng tuổi ông :  $Y + 2X = Z$  (2)

Tổng tuổi của cả ba người là 130 :  $X + Y + Z = 130$  (3)

Giải hệ phương trình: (1), (2), (3)

Lấy (2) trừ (3) ta được :  $Y + 2X - Z - (X + Y + Z - 130) = 0$

$$\Leftrightarrow X - 2Z + 130 = 0 \quad (4)$$

Giải hệ (1), (4) :  $Z - X - 58 - (X - 2Z + 130) = 0$

$$\Leftrightarrow Z = 72$$

Khi đó  $X = Z - 58 = 72 - 58 = 14$ . Vậy tuổi của Bình là 14.

**Bài 14.** Một phân số có tử số nhỏ hơn mẫu số 11 đơn vị. Nếu tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 4 đơn vị thì được một phân số bằng  $\frac{3}{4}$ . Tìm phân số ban đầu.

### Bài giải

Gọi a là mẫu số ( $a \neq 0$ ). Khi đó tử số là  $a - 11$

Tăng tử số 3 đơn vị và giảm mẫu số 4 đơn vị thì bằng phân số  $\frac{3}{4}$ :

$$\frac{a-11+3}{a-4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{a-8}{a-4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(a-8) = 3(a-4) \Leftrightarrow 4a-32 = 3a-12$$

$$\Leftrightarrow a = 20 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy phân số ban đầu là :  $\frac{a-11}{a} = \frac{9}{20}$

**Bài 15.** Một ô tô đi từ Hà Nội đến Thanh Hóa với vận tốc 40km/h. Sau 2 giờ nghỉ lại ở Thanh Hóa, ô tô đi từ Thanh Hóa về Hà Nội với vận tốc 30km/h.

Tổng thời gian cả đi lẫn về là 10 giờ 45 phút (kể cả thời gian nghỉ lại ở Thanh Hóa). Tính quãng đường từ Hà Nội – Thanh Hóa.

### Bài giải

Ta có 45 phút =  $\frac{3}{4}$  giờ

Gọi  $t_1$  (h) là thời gian ô tô đi từ Hà Nội đến Thanh Hóa,

$t_2$  (h) là thời gian ô tô đi từ Thanh Hóa về Hà Nội.

Tổng thời gian ô tô đi, về và nghỉ là :  $t_1 + t_2 + 2 = 10 + \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow t_1 + t_2 = \frac{35}{4}$$

Từ giả thiết ta có phương trình sau:  $40t_1 = 30t_2 \Leftrightarrow 4t_1 - 3t_2 = 0$

$$\text{Giải hệ pt} \quad \begin{cases} t_1 + t_2 = \frac{35}{4} \\ 4t_1 - 3t_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(t_1 + t_2) = 35 \\ 4t_1 - 3t_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Lấy (1) – (2) ta được:  $7t_2 = 35 \Leftrightarrow t_2 = 5 \Rightarrow t_1 = \frac{15}{4} = 3,75$  (giờ)

$$(0,75 \text{ giờ} = \frac{45}{60} \text{ giờ})$$

Quãng đường từ Hà Nội đến Thanh Hóa là:  $S = v.t = 40.3,75 = 150$  (km).

**Bài 16.** Một ô tô đi từ Hà Nội lúc 8 giờ sáng và dự kiến đến Hải Phòng lúc 10 giờ 30 phút. Nhưng mỗi giờ ô tô đi chậm hơn so với dự kiến là 10km nên đến 11 giờ 20 phút xe mới tới Hải Phòng. Tính quãng đường Hà Nội – Hải Phòng.

### Bài giải

Ta có  $10\text{h}30\text{p} - 8\text{h} = 2\text{h}30\text{p} = \frac{5}{2}\text{h}$ ,  $11\text{h}20\text{p} - 8\text{h} = 3\text{h}20\text{p} = \frac{10}{3}\text{h}$

Thời gian dự kiến từ Hà Nội đến Hải Phòng là :  $\frac{5}{2}$  ( giờ).

Thời gian thực tế từ Hà Nội đến Hải Phòng là :  $\frac{10}{3}$  (giờ).

Gọi x(km) là quãng đường từ Hà Nội đến Hải Phòng



Dự kiến 1 giờ ô tô đi được quãng đường:  $\frac{2x}{5}$  (km)

Thực tế 1 giờ ô tô đi được quãng đường:  $\frac{3x}{10}$  (km)

1 giờ ô tô đi chậm hơn so với dự kiến là 10km, ta có:  $\frac{2x}{5} = \frac{3x}{10} + 10$

$$\Leftrightarrow 4x = 3x + 100$$

$$\Leftrightarrow x = 100$$

Vậy quãng đường từ Hà Nội đến Hải Phòng là 100km.

**Bài 17.** Hai xe ô tô cùng khởi hành từ Lạng Sơn về Hà Nội, quãng đường dài 163km. Trong 43km đầu, hai xe có cùng vận tốc. Nhưng sau đó xe thứ nhất tăng vận tốc lên gấp 1,2 lần vận tốc ban đầu, trong khi đó xe thứ hai vẫn duy trì vận tốc cũ. Do đó xe thứ nhất đến Hà Nội sớm hơn xe thứ hai 40 phút. Tính vận tốc ban đầu của mỗi xe.

### Bài giải

Ta có 40ph =  $\frac{2}{3}$  Giờ

Gọi  $v$  (km/h) là vận tốc hai xe đi được trong 43km đầu.

Vì suốt quãng đường xe thứ hai vẫn duy trì tốc độ cũ nên thời gian xe thứ hai đi được là  $\frac{163}{v}$  (giờ).

Trong 43km đầu xe thứ nhất đi được với thời gian là  $\frac{43}{v}$  (giờ).

Thời gian xe thứ nhất đi được ở 120km sau là  $\frac{163-43}{1,2v} = \frac{100}{v}$  (giờ).

Theo đề xe thứ nhất về sớm hơn xe thứ hai 40phút:  $\frac{43}{v} + \frac{100}{v} + \frac{2}{3} = \frac{163}{v}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{163-100-43}{v} = \frac{20}{v} \Leftrightarrow 2v = 60 \Leftrightarrow v = 30(\text{km})$$

Vậy vận tốc ban đầu của mỗi xe là 30(km/h).

**Bài 18.** Một tàu hỏa từ Hà Nội đi TP HCM. 1 giờ 48 phút sau, một tàu hỏa khác khởi hành từ Nam Định cũng đi TP HCM với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của tàu thứ nhất 5km/h. Hai tàu gặp nhau tại một nhà ga sau 4 giờ 48 phút kể

từ khi tàu thứ nhất khởi hành. Tính vận tốc của mỗi tàu, biết rằng ga Nam Định nằm trên đường từ Hà Nội đi TP HCM và cách ga Hà Nội 87km.

### **Bài giải**

Ta có  $4\text{h}48\text{ph} = 4 + \frac{48}{60} = \frac{24}{5} \text{ h}$ ,  $4\text{h}48\text{ph} - 1\text{h}48\text{ph} = 3\text{h}$

Gọi  $v$  (km/h) là vận tốc tàu đi từ Hà Nội đến TP HCM

$v - 5$  (km/h) là vận tốc tàu khác đi từ Nam Định đến TP HCM.

Quảng đường tàu đi từ Hà Nội đến ga là  $\frac{24}{5}v$

Quảng đường tàu khác đi từ Nam Định đến ga là :  $3(v - 5)$

Vì quảng đường từ Hà Nội đến Nam Định là 87km nên ta có

$$\frac{24}{5}v - 3(v - 5) = 87$$

$$\Leftrightarrow 9v = 72.5$$

$$\Leftrightarrow v = 40$$

Vậy vận tốc của tàu đi từ Hà Nội đến TP HCM là 40(km/h)

Vận tốc của tàu đi từ Nam Định đến TP HCM là  $40 - 5 = 35$ (km/h).

**Bài 19.** Lúc 7 giờ sáng, một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B cách nhau 36km, rồi ngay lập tức trở về và đến bến A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng biết vận tốc dòng nước là 6km/h.

### **Bài giải**

Ta có  $11\text{h}30\text{ph} - 7\text{h} = 4\text{h}30\text{ph} = 4,5\text{h}$

Thời gian ca nô đi từ bến A đến bến B rồi về lại bến A là 4,5(giờ)

Gọi  $v$ (km/h) là vận tốc của ca nô ( $v > 6$ )

Vận tốc ca nô xuôi dòng là  $v_{\text{canô}} + 6$

Vận tốc ca nô ngược dòng là  $v_{\text{canô}} - 6$

Thời gian ca nô lúc xuôi và ngược dòng là :  $4,5 = \frac{36}{v_{\text{canô}} + 6} + \frac{36}{v_{\text{canô}} - 6}$

Giải phương trình  $4,5v^2 - 72v - 36.4,5 = 0$

$v_1 = 18$  ( nhận )

$v_2 = -2$  ( loại )

Ta có  $v_{\text{xuôi dòng}} = v_{\text{dòng nước}} + v_{\text{canô}} = 18 + 6 = 24 \text{ (km/h)}$

Vậy vận tốc ca nô xuôi dòng là 24 km/h.

**Bài 20.** Một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B mất 4 giờ và ngược dòng từ bến B về bến A mất 5 giờ. Tính khoảng cách giữa hai bến A và bến B, biết vận tốc dòng nước là 2km/h.

### **Bài giải**

Gọi  $v \text{ (km/h)}$  là vận tốc ca nô ( $v > 2$ )

Vận tốc ca nô xuôi dòng là  $v_{\text{canô}} + 2$

Vận tốc ca nô ngược dòng là  $v_{\text{canô}} - 2$

Ta có phương trình quãng đường sau:  $(v_{\text{canô}} + 2).4 = (v_{\text{canô}} - 2).5$

$$\Leftrightarrow v_{\text{canô}} = 18 \text{ (TM)}$$

Khoảng cách giữa hai bến A và bến B là :  $(18 + 2).4 = 80 \text{ (km)}$ .

**Bài 21.** Một đội thợ mỏ lập kế hoạch khai thác than, theo đó mỗi ngày phải khai thác được 50 tấn than. Khi thực hiện, mỗi ngày đội khai thác được 57 tấn than. Do đó, đội đã hoàn thành kế hoạch trước 1 ngày và còn vượt mức 13 tấn than. Hỏi theo kế hoạch, đội phải khai thác bao nhiêu tấn than?

### **Bài giải**

Gọi  $x$  là số ngày khai thác than, ( $x > 0$ )

Theo dự kiến số tấn than được khai thác là  $50x$ ,

Trên thực tế số tấn than được khai thác là  $57x$ .

Vì đội hoàn thành kế hoạch trước một ngày và vượt mức 13 tấn than so với kế hoạch nên ta có:

$$50x = 57(x - 1) - 13 \Leftrightarrow 7x = 70 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (TM)}$$

Vậy theo kế hoạch đội phải khai thác  $50.10 = 500$  tấn than.

**Bài 22.** Một xí nghiệp kí hợp đồng dệt một số tấm thảm len trong 20 ngày. Do cải tiến kĩ thuật, năng suất dệt của xí nghiệp đã tăng 20%. Bởi vậy, chỉ trong 18 ngày, không những xí nghiệp đã hoàn thành số thảm cần dệt mà còn dệt thêm được 24 tấm nữa. Tính số tấm thảm len mà xí nghiệp phải dệt theo hợp đồng.

**Bài giải**

Gọi  $x$  là số tấm thảm len mà xí nghiệp dệt theo hợp đồng,  $x > 0$

Số tấm thảm len dệt trong 1 ngày theo hợp đồng là  $\frac{x}{20}$  (tấm)

Số tấm thảm len được dệt trên thực tế là  $x + 24$  (tấm).

Số tấm thảm len dệt trong 1 ngày trên thực tế là  $\frac{x+24}{18}$  (tấm).

Vì năng suất dệt của xí nghiệp tăng 20% nên trong 1 ngày xí nghiệp dệt 120% so với hợp đồng, ta có :

$$\frac{x+24}{18} = \frac{120x}{100 \cdot 20} \Leftrightarrow \frac{x+24}{9} = \frac{6x}{50} \Leftrightarrow 50x + 1200 = 54x \Leftrightarrow x = 300 \text{ (TM)}$$

Vậy số tấm thảm len mà xí nghiệp phải dệt theo hợp đồng là 300 tấm.

**Bài 23.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn nước, sau  $4\frac{4}{9}$  giờ thì đầy bể.

Mỗi giờ lượng nước vòi 1 chảy được bằng  $1\frac{1}{4}$  lượng nước vòi 2 chảy. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu đầy bể.

**Bài giải**

$$\text{Ta có : } 4\frac{4}{9} \text{ h} = \frac{40}{9} \text{ h, } 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ h}$$

Gọi  $x$  ( $x > 0$ ) là thời gian vòi 1 chảy một mình đầy bể

$\frac{5}{4}x$  là thời gian vòi 2 chảy một mình đầy bể

Trong 1 giờ lượng nước vòi 1 chảy một mình được  $\frac{1}{x}$  bể

Trong 1 giờ lượng nước vòi 2 chảy một mình được  $\frac{4}{5x}$  bể

Trong 1 giờ lượng nước cả hai vòi cùng chảy được  $\frac{9}{40}$  bể

$$\text{Ta có pt : } \frac{1}{x} + \frac{4}{5x} = \frac{9}{40} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 8 \text{ (TM)}$$

Nếu chảy riêng vòi 1 chảy trong 8 giờ đầy bể, vòi 2 chảy riêng trong  $\frac{5}{4} \cdot 8 = 10$  giờ đầy bể.

## Chương 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

### Bài 1. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG, GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN

#### A. CHUẨN KIẾN THỨC

##### 1) Bất đẳng thức

Là hệ thức có dạng  $a < b$  (hoặc  $a \leq b$ , hoặc  $a > b$ , hoặc  $a \geq b$ ) trong đó  $a$  là vế trái và  $b$  là vế phải của bất đẳng thức.

##### 2) Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Tính chất. Với ba số  $a, b, c$  ta có:

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- $a > b \Rightarrow a + c > b + c$
- $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- $a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$

##### 3) Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

Tính chất 1: Với ba số  $a, b, c$  mà  $c > 0$ , ta có:

- $a < b \Rightarrow ac < bc$
- $a > b \Rightarrow ac > bc$
- $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$
- $a \geq b \Rightarrow ac \geq bc$

Tính chất 2: Với ba số  $a, b, c$  mà  $c < 0$ , ta có:

##### 4) Tính chất bất đẳng thức

Với ba số  $a, b, c$  ta có nếu  $a < b$  và  $b < c$  thì  $a < c$ .

- $a < b \Rightarrow ac > bc$
- $a > b \Rightarrow ac < bc$
- $a \leq b \Rightarrow ac \geq bc$
- $a \geq b \Rightarrow ac \leq bc$

#### B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

## Một số phương pháp để chứng minh bất đẳng thức

- 1) Để chứng minh  $A > B$ , ta xét hiệu  $A - B$  và chứng minh  $A - B > 0$
- 2) Để chứng minh  $A > B$ , ta dùng các phép biến đổi tương đương để đưa bất đẳng thức cần chứng minh về một bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
- 3) Dùng các bất đẳng thức trung gian đã biết và các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.
- 4) Dùng phương pháp phản chứng

### Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau

- |   |  |
|---|--|
| a) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$                    | b) $x^2 + 2y^2 + z^2 \geq 2xy - 2yz$                               |
| c) $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$             | d) $x^2 + y^2 + z^2 + 14 \geq 2x - 4y + 6z$                        |
| e) $a^2 - 4a + 5 > 0$   | f) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$   |
| g) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$                                    | h) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$                       |
| i) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$                     | j) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$         |
| k) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 (a, b > 0)$              | l) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} (a, b > 0)$       |
| m) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 (a, b > 0)$                    | n) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ |
| o) $a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc$           | p) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$                 |
| q) $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ | r) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$             |
| s) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$                        |  |

### Bài giải

a)  $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

Ta xét hiệu

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 \end{aligned}$$

$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } x; y; z \in R$$

$$\text{Vậy } x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$$

Dấu(=) xảy ra khi  $x = y = z = 1$

$$\text{b) } x^2 + 2y^2 + z^2 \geq 2xy - 2yz$$

Ta xét hiệu

$$\begin{aligned} & x^2 + 2y^2 + z^2 - (2xy - 2yz) \\ &= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 \\ &= (x - y)^2 + (y + z)^2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } x; y; z \in R \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x^2 + 2y^2 + z^2 \geq 2xy - 2yz$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = y = -z$

$$\text{c) } a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$$

Ta xét hiệu

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} - (a + b + c) \\ &= \left( a^2 - 2a\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + \left( b^2 - 2b\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + \left( c^2 - 2c\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( b - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( c - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } a; b; c \in R \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a = b = c = \frac{1}{2}$

$$\text{d) } x^2 + y^2 + z^2 + 14 \geq 2x - 4y + 6z$$

Ta xét hiệu

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 + 14 - (2x - 4y + 6z) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 14 - 2x + 4y - 6z \\ &= (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) - 14 + 14 \end{aligned}$$

$$= (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } x; y; z \in R$$

$$\text{Vậy } x^2 + y^2 + z^2 + 14 \geq 2x - 4y + 6z$$

$$\text{e) } a^2 - 4a + 5 > 0$$

$$\text{Ta có } a^2 - 4a + 5 = (a^2 - 2.a.2 + 4) + 1$$

$$= (a-2)^2 + 1 > 0 \forall x \text{ vì } (a-2)^2 \geq 0 \forall x$$

$$\text{Vậy } a^2 - 4a + 5 > 0$$

$$\text{f) } a^2 + ab + b^2 \geq 0$$

$$\text{Ta có } a^2 + ab + b^2 = \left( a^2 + 2a \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} \right) - \frac{b^2}{4} + b^2$$

$$= \left( a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

$$\text{Vậy } a^2 + ab + b^2 \geq 0$$

$$\text{g) } a^2 - ab + b^2 \geq 0$$

$$\text{Ta có } a^2 - ab + b^2 = \left( a^2 - 2a \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} \right) - \frac{b^2}{4} + b^2$$

$$= \left( a - \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

$$\text{Vậy } a^2 - ab + b^2 \geq 0$$

$$\text{h) } (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$\text{Ta xét hiệu } (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$$

$$= a^2 x^2 + a^2 y^2 + b^2 x^2 + b^2 y^2 - a^2 x^2 - 2abxy - b^2 y^2$$

$$= a^2 y^2 - 2abxy + b^2 x^2$$

$$= (ay - bx)^2 \geq 0 \forall x, y$$

$$\text{Vậy } (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$$



$$\text{i) } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Ta xét hiệu } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab &= \frac{(a+b)^2 - 4ab}{4} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0 \forall x \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\text{j) } \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Ta xét hiệu

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{2a^2 + 2b^2}{4} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0 \forall x \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\text{k) } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 (a, b > 0)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si với hai số dương  $\frac{a}{b}; \frac{b}{a}$  ta được

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

$$\text{l) } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (a, b > 0)$$

Với  $a, b > 0$ , ta có  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

Ta có  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

Nhân vế theo vế hai bất phương trình ta được  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

(đpcm)

**m)**  $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 (a, b > 0)$

Ta xét hiệu

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - (a^2b + ab^2) &= (a+b)(a^2 + ab + b^2) - ab(a+b) \\ &= (a+b)(a^2 + ab + b^2 - ab) \\ &= (a+b)(a^2 + b^2) \geq 0 \forall a, b > 0 \end{aligned}$$

Vậy  $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 (a, b > 0)$

$$\begin{aligned} \text{n) } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} &\geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \frac{(a+b+c)^2}{9} \\ &\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \end{aligned}$$

Ta xét hiệu

$$\begin{aligned} &3(a^2 + b^2 + c^2) - (a+b+c)^2 \\ &= 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - a^2 - 2a(b+c) - (b+c)^2 \\ &= 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - a^2 - 2ba - 2ac - b^2 - 2bc - c^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 \\ &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } a; b; c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a = b = c$

$$\text{o) } a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc$$

$$\begin{aligned} \text{Ta xét hiệu } & a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) - 6abc \\ &= a^2 + a^2b^2 + b^2 + c^2b^2 + c^2 + a^2c^2 - 6abc \\ &= a^2 - 2abc + c^2b^2 + b^2 - 2abc + a^2c^2 + c^2 - 2abc + a^2b^2 \\ &= (a-bc)^2 + (b-ac)^2 + (c-ab)^2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } a; b; c \in R \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a = b = c = 1$

$$\text{p) } a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$$

Ta xét hiệu

$$\begin{aligned} & a^4 + b^4 + c^2 + 1 - 2a(ab^2 - a + c + 1) \\ &= (a^2)^2 + (b^2)^2 + c^2 + 1 - 2a^2b^2 + 2a^2 - 2ac - 2a \\ &= (a^2)^2 - 2a^2b^2 + (b^2)^2 + c^2 - 2ac + a^2 + a^2 - 2a + 1 \\ &= (a^2 - b^2)^2 + (c-a)^2 + (a-1)^2 \geq 0 \quad \text{đúng với mọi } a; b; c \in R \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a = b = c = 1$

$$\text{q) } (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

Ta xét hiệu

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 \\ &= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 \\ &\quad - a^2x^2 - 2ax(by + cz) - (by + cz)^2 \\ &= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a^2x^2 - 2abxy - 2acxz - b^2y^2 - 2bcyz - c^2z^2 \\
& = a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 - 2abxy - 2acxz - 2bcyz \\
& = a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 + a^2z^2 - 2acxz + c^2x^2 + b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2 \\
& = (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } a; b; c; x; y; z
\end{aligned}$$

$\in R$

Vậy  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

Dấu “=” xảy ra khi  $a = b = c = x = y = z$

**r)**  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Ta xét hiệu

$$\begin{aligned}
& a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - ab - ac - ad - ae \\
& = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2}b + b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2}c + c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2}d + d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2}e + e^2 \\
& = \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } a; b; c; d; e
\end{aligned}$$

$\in R$

Vậy  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Dấu “=” xảy ra khi  $a = 2b = 2c = 2d = 2e$

**s)**  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

Ta xét hiệu  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\
& = \frac{1}{2} [(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2] \geq 0 \text{ đúng với mọi } x; y; z \in R
\end{aligned}$$

Vì  $(x - y)^2 \geq 0$  với  $\forall x; y$  Dấu bằng xảy ra khi  $x = y$

$(x - z)^2 \geq 0$  với  $\forall x; z$  Dấu bằng xảy ra khi  $x = z$

$(y - z)^2 \geq 0$  với  $\forall z; y$  Dấu bằng xảy ra khi  $z = y$

Vậy  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

Dấu bằng xảy ra khi  $x = y = z$

## Bài 2. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a)  $a^4 + 3 \geq 4a$

b)  $a^4 - 2a^3 + 2a^2 - 2a + 1 \geq 0$

c)  $a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 2a + 1 \geq 0$

d)  $a^4 + 2a^3 + 5a^2 - 2a + 3 > 0$

e)  $a^4 - 2a^3 + 5a^2 + 2a + 3 > 0$

f)  $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

**Bài giải**

a)  $a^4 + 3 \geq 4a$

Ta xét hiệu

$$\begin{aligned}
 a^4 + 3 - 4a &= a^4 - a - 3a + 3 \\
 &= a(a^3 - 1^3) - 3(a - 1) \\
 &= a(a - 1)(a^2 + a + 1) - 3(a - 1) \\
 &= (a - 1)(a(a^2 + a + 1) - 3) \\
 &= (a - 1)(a^3 + a^2 + a - 3) \\
 &= (a - 1)((a^3 - 1) + (a^2 - 2a + 1) + 3a - 3) \\
 &= (a - 1)((a - 1)(a^2 + a + 1) + (a - 1)^2 + 3(a - 1)) \\
 &= (a - 1)^2(a^2 + 2a + 3) \geq 0 \forall a
 \end{aligned}$$

Vậy  $a^4 + 3 \geq 4a$ 

b)  $a^4 - 2a^3 + 2a^2 - 2a + 1 \geq 0$

Ta có  $a^4 - 2a^3 + 2a^2 - 2a + 1$

$$\begin{aligned}
 &= (a^2)^2 - 2a^2 \cdot a + a^2 + a^2 - 2a + 1 \\
 &= (a^2 - a)^2 + (a - 1)^2 \geq 0 \forall a \text{ vì } (a^2 - a)^2 \geq 0 \forall a \text{ và } (a - 1)^2 \geq 0 \forall a
 \end{aligned}$$

Vậy  $a^4 - 2a^3 + 2a^2 - 2a + 1 \geq 0$

c)  $a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 2a + 1 \geq 0$

Ta có  $a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 2a + 1$

$$= (a^2)^2 - 2a^2 \cdot 2a + 4a^2 + a^2 - 2a + 1$$

$$= (a^2 - 2a)^2 + (a - 1)^2 \geq 0 \forall a \quad \text{vì } (a^2 - 2a)^2 \geq 0 \forall a \quad \text{và } (a - 1)^2 \geq 0 \forall a$$

Vậy  $a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 2a + 1 \geq 0$

d)  $a^4 + 2a^3 + 5a^2 - 2a + 3 > 0$

Ta có  $a^4 + 2a^3 + 5a^2 - 2a + 3$

$$= (a^2)^2 + 2a^2 \cdot a + a^2 + 4a^2 - 2 \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 3$$

$$= (a^2 + a)^2 + \left(2a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq 0 \forall a \quad \text{vì } (a^2 + a)^2 \geq 0 \forall a \quad \text{và}$$

$$\left(2a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \forall a$$

Vậy  $a^4 + 2a^3 + 5a^2 - 2a + 3 > 0$

e)  $a^4 - 2a^3 + 5a^2 + 2a + 3 > 0$

Ta có  $a^4 - 2a^3 + 5a^2 + 2a + 3$

$$= (a^2)^2 - 2a^2 \cdot a + a^2 + 4a^2 + 2 \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 3$$

$$= (a^2 - a)^2 + \left(2a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq 0 \forall a \quad \text{vì } (a^2 - a)^2 \geq 0 \forall a \quad \text{và}$$

$$\left(2a + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \forall a$$

f)  $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

Ta xét hiệu

$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - (ab - ac + 2bc) = \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab + ac - 2bc$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a(b-c) + (b^2 - 2bc + c^2) \\
&= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a(b-c) + (b-c)^2 \\
&= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2}(b-c) + (b-c)^2 \\
&= \left(\frac{a}{2} - (b-c)\right)^2 \geq 0 \quad \forall a, b, c
\end{aligned}$$

Vậy  $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

**Bài 3. Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:**

a)  $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

b)  $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq abc$

**Bài giải**

a)  $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Sử dụng BĐT tam giác, ta có:  $a > |b-c| \Rightarrow a^2 > b^2 - 2bc + c^2$

$$b > |a-c| \Rightarrow b^2 > a^2 - 2ac + c^2$$

$$c > |b-a| \Rightarrow c^2 > b^2 - 2ba + a^2$$

Cộng vế theo vế các bất phương trình ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 > 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2(ab + bc + ac)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca) \quad (\text{đpcm})$$

b)  $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq abc$

Ta có:  $a^2 \geq a^2 - (b-c)^2 \Rightarrow a^2 \geq (a+b-c)(a-b+c)$

$$b^2 \geq b^2 - (a-c)^2 \Rightarrow b^2 \geq (a+b-c)(b-a+c)$$

$$c^2 \geq c^2 - (a-b)^2 \Rightarrow c^2 \geq (c+a-b)(c-a+b)$$

Nhân vế theo vế các bất phương trình ta được

$$a^2b^2c^2 \geq (a+b-c)^2(a-b+c)^2(c-a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

$$\text{Vậy } (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq abc$$

#### Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a)  $A = 4x^2 - 4x - 3$

b)  $B = x^2 - 5x + 1$

c)  $C = 4x^2 + 5x + 3$

d)  $D = (x+3)^2 + (x+5)^2$

e)  $E = (x^2 - 3x)(x^2 - 11x + 28)$

f)  $F = x^2 + y^2 - xy - 3y + 6$

h)  $H = 2x^2 + 5y^2 + 4xy - 6 + 5y - 9$

i)  $I = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 2003$

j)  $N = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5$

k)  $O = x^2 - 6x + y^2 - 2y + 17$

#### Bài giải

a) Ta có  $A = 4x^2 - 4x - 3$

$$= (2x)^2 - 2 \cdot 2x + 1 - 4$$

$$= (2x - 1)^2 - 4$$

Vì  $(2x - 1)^2 \geq 0$  nên  $(2x - 1)^2 - 4 \geq -4$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là  $-4$  khi  $x = \frac{1}{2}$

b) Ta có  $B = x^2 - 5x + 1$

$$= \left[ x^2 - 2 \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 7$$

$$\text{Vì } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ nên } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 7 \geq -7$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức B là  $-7$  khi  $x = \frac{5}{2}$

c) Ta có  $C = 4x^2 + 5x + 3$

$$= \left[ (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \right] - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 3$$



$$= \left(2x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{23}{16}$$

Vì  $\left(2x + \frac{5}{4}\right)^2 \geq 0$  nên  $\left(2x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{23}{16} \geq -\frac{23}{16}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức C là  $-\frac{23}{16}$

d)  $D = (x+3)^2 + (x+5)^2$

Ta thấy  $\begin{cases} (x+3)^2 \geq 0 \\ (x+5)^2 \geq 0 \end{cases}$  Nên  $(x+3)^2 + (x+5)^2 \geq 0$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức D là 0

e)  $E = (x^2 - 3x)(x^2 - 11x + 28)$

$$(x^2 - 3x) = \left[ x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) \left(x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} (x^2 - 11x + 28) &= \left[ x^2 - 2x \cdot \frac{11}{2} + \left(\frac{11}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 28 \\ &= \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\right) \left(x - \frac{11}{2} + \frac{3}{2}\right) = (x-7)(x-4) \end{aligned}$$

Vậy  $E = 0$ .  $(x-7)(x-4) = 0$

f) Ta có  $F = x^2 + y^2 - xy - 3y + 6$

$$F = x^2 - 2x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{3}y + \sqrt{3}^2 - \sqrt{3}^2 + 6$$

$$F = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{2} - \sqrt{3}\right)^2 + 3 \geq 3$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức F là 3 vì  $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq 0; \left(\frac{\sqrt{3}y}{2} - \sqrt{3}\right)^2 \geq 0 \forall xy$

h)  $H = 2x^2 + 5y^2 + 4xy - 6 + 5y - 9$

$$H = (x^2 + 4xy + 4y^2) + \left( y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} \right) + (x^2 - 6x + 9) - 9 - \frac{25}{4} - 9$$

$$H = (x + 2y)^2 + \left( y + \frac{5}{2} \right)^2 + (x - 3)^2 - \frac{97}{4} \geq \frac{-97}{4}$$

$$\text{Vì } (x + 2y)^2 \geq 0; \left( y + \frac{5}{2} \right)^2 \geq 0; (x - 3)^2 \geq 0$$

Vậy GTNN của H là  $\frac{-97}{4}$

i) Ta có  $I = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 2003$

$$2I = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 6y + 4006$$

$$2I = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2 \cdot 3x + 9 + y^2 - 2 \cdot 3y + 9 + 4006 - 9 - 9$$

$$2I = (x + y)^2 + (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + 3988$$

$$I = \frac{(x + y)^2}{2} + \frac{(x - 3)^2}{2} + \frac{(y - 3)^2}{2} + 1994 \geq 1994$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức I là 1994

$$\text{vì } \frac{(x + y)^2}{2} \geq 0; \frac{(x - 3)^2}{2} \geq 0; \frac{(y - 3)^2}{2} \geq 0 \forall xy$$

j)  $N = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5$

$$= (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4)$$

$$= (x - 1)^2 + (y + 2)^2$$

Vì  $\begin{cases} (x - 1)^2 \geq 0 \\ (y + 2)^2 \geq 0 \end{cases}$  nên  $N = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \geq 0$  Vậy GTNN của biểu thức là 0

k) Ta có  $O = x^2 - 6x + y^2 - 2y + 17$

$$O = x^2 - 2 \cdot 3x + 9 + y^2 - 2y + 1 + 17 - 1 - 9$$

$$O = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + 7 \geq 7$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức O là 7 vì  $(x - 3)^2 \geq 0; (y - 1)^2 \geq 0 \forall xy$

**Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau**

a)  $A = 6 - x^2 - 6x$

b)  $B = 1 - x^2 + 3x$

c)  $C = -x^2 + x + 1$

d)  $D = -x^2 - 4y - 3x + 5y - 7$

e)  $E = (x^2 + x + 8)(-x^2 - x + 20)$

f)  $F = -2x^2 - 10y^2 + 6xy + 4x - 3y + 2$

**Bài giải**

a) Ta có  $A = 6 - x^2 - 6x$

$$= -(x^2 + 6x - 6)$$

$$= -(x^2 + 6x + 9 - 15)$$

$$= -((x+3)^2 - 15)$$

$$\text{Ta có } (x+3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow ((x+3)^2 - 15) \geq -15 \Leftrightarrow -((x+3)^2 - 15) \leq 15$$

Vậy GTLN của A là 15

b) Ta có  $B = 1 - x^2 + 3x$

$$= -(x^2 - 3x - 1)$$

$$= -\left(x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 1\right)$$

$$= -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}\right]$$

$$\text{Ta thấy } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}\right] \geq -\frac{13}{4} \Leftrightarrow -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}\right] \leq \frac{13}{4}$$

Vậy GTLN của B là  $\frac{13}{4}$

c) Ta có  $C = -x^2 + x + 1$

$$= -(x^2 - x - 1)$$

$$= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1\right)$$

$$= -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right]$$

$$\text{Ta thấy } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] \geq -\frac{5}{4} \Leftrightarrow -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] \leq \frac{5}{4}$$

Vậy GTLN của C là  $\frac{5}{4}$

d)  $D = -x^2 - 4y - 3x + 5y - 7$

$$D = -\left(\left(x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + \left((2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2\right) - \frac{9}{4} - \frac{25}{16} + 7\right)$$

$$D = -\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(2y - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{51}{16}\right)$$

Ta thấy  $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0; \left(2y - \frac{5}{4}\right)^2 \geq 0 \forall xy$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(2y - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{51}{16} \geq \frac{51}{16}$$

$$\Rightarrow -\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(2y - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{51}{16}\right) \leq -\frac{51}{16}$$

Vậy GTLN của D là  $-\frac{51}{16}$

e)  $E = (x^2 + x + 8)(-x^2 - x + 20)$

$$E = \left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 8 - \frac{1}{4}\right) \left(-\left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 20 - \frac{1}{4}\right)\right)$$

$$E = \left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}\right) \left(-\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}\right)\right)$$

$$\forall x \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} > 0 \quad \text{và} \quad -\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}\right) \leq \frac{81}{4} \quad \forall x$$

Nên GTLN của E là  $\frac{81}{4}$

f)  $F = -2x^2 - 10y^2 + 6xy + 4x - 3y + 2$

$$F = -\left(y^2 + 2y \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - (9y^2 - 6xy + x^2) - (x^2 - 4x + 4) + \frac{9}{4} + 4 + 2$$

$$F = -\left(\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (3y - x)^2 + (x - 2)^2 - \frac{33}{4}\right)$$

Ta thấy  $\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (3y - x)^2 + (x - 2)^2 - \frac{33}{4} \geq \frac{-33}{4}$

$$\text{Vì } \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0; (3y - x)^2 \geq 0; (x - 2)^2 \geq 0 \quad \forall xy$$

Suy ra  $F = -\left(\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (3y - x)^2 + (x - 2)^2 - \frac{33}{4}\right) \leq \frac{33}{4}$

Vậy GTLN của F là  $\frac{33}{4}$

## Bài 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

#### 1) Định nghĩa

- Bất phương trình bậc nhất một ẩn có dạng  $ax + b < 0$  ( $ax + b \leq 0$ ;  $ax + b > 0$ ;  $ax + b \geq 0$ ), trong đó  $a, b$  là hai số đã cho và  $a \neq 0$

#### 2) Hai quy tắc biến đổi bất phương trình

##### a) Quy tắc chuyển vế

- Khi chuyển một hạng tử của bất phương trình từ vế này sang vế kia ta phải đổi dấu của hạng tử đó.

Ví dụ:  $2x < x + 3 \Leftrightarrow 2x - x < 3$

##### b) Quy tắc nhân với một số

- Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải:

- Giữ nguyên chiều của bất đẳng thức nếu số đó dương
- Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.

Ví dụ:  $x - 1 < 3 \Leftrightarrow 4(x - 1) < 4.3$

$$3 - x < 1 \Leftrightarrow -2(3 - x) > -2.1$$

- Khi thực hiện hai quy tắc biến đổi bất phương trình trên đây trên một bất phương trình ta nhận được một bất phương trình mới tương đương với bất phương trình đã cho.

#### 3) Giải bất phương trình

- Nghiệm của bất phương trình là các giá trị của  $x$  mà khi thay vào bất phương trình ta được một bất đẳng thức đúng.

Ví dụ: Cho bất phương trình  $2x^2 + 1 = 3x + 2$  (1)

$x = 2$  là nghiệm của (1) vì  $2.2^2 + 1 > 3.2 + 2$  đúng

$x = 1$  không là nghiệm của (1) vì  $2.1^2 + 1 > 3.1 + 2$  sai

- Tập hợp tất cả các nghiệm của một bất phương trình được gọi là tập nghiệm của bất phương trình.

**Ví dụ:** Cho bất phương trình  $x \geq 3$

Tập hợp chứa các số thực lớn hơn hoặc bằng 3 là tập nghiệm S của bất phương trình.  $S = \{x | x \geq 3\}$

- Giải bất phương trình là tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.
- Hai bất phương trình có cùng tập nghiệm gọi là hai bất phương trình tương đương và dùng kí hiệu " $\Leftrightarrow$ " để chỉ sự tương đương đó.

**Ví dụ:** Giải bất phương trình sau  $2x + 1 < x + 5$

Ta có  $2x + 1 < x + 5 \Leftrightarrow 2x - x < 5 - 1$

$$\Leftrightarrow x < 4$$

Vậy nghiệm bất phương trình là  $x < 4$

## B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

### Bài 6. Giải các bất phương trình sau:

a)  $-2 - 7x > (3 + 2x) - (5 - 6x)$

b)  $(x + 2)^2 < 2x(x + 2) + 4$

c)  $\frac{2-x}{3} < \frac{3-2x}{5}$

d)  $\frac{x-1}{4} - 1 \geq \frac{x+1}{3} + 8$

e)  $\frac{2x+15}{9} \geq \frac{x-1}{5} + \frac{x}{3}$

f)  $\frac{x+1}{99} + \frac{x+4}{96} + \frac{x+5}{95} \geq -3$

g)  $2x^2 + 5x + 7 < 0$

### Bài giải

a)  $-2 - 7x > (3 + 2x) - (5 - 6x) \Leftrightarrow -2 - 7x > 3 + 2x - 5 + 6x$

$$\Leftrightarrow -7x - 2x - 6x > 3 - 5 + 2$$

$$\Leftrightarrow -15x > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

Vậy  $S = \{x | x < 0\}$

b)  $(x + 2)^2 < 2x(x + 2) + 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 < 2x^2 + 4x + 4$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 2x < 0$$

$$\Leftrightarrow -x(x + 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \end{cases}$$

Vậy  $x > 0$  hoặc  $x < -2$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{2-x}{3} < \frac{3-2x}{5} &\Leftrightarrow \frac{5(2-x)}{3 \cdot 5} < \frac{3(3-2x)}{5 \cdot 3} \\ &\Leftrightarrow 10 - 5x < 9 - 6x \\ &\Leftrightarrow x < -1 \end{aligned}$$

Vậy  $S = \{x | x < -1\}$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{x-1}{4} - 1 &\geq \frac{x+1}{3} + 8 \Leftrightarrow \frac{3(x-1)}{4 \cdot 3} - \frac{12}{12} \geq \frac{4(x+1)}{3 \cdot 4} + \frac{8 \cdot 12}{12} \\ &\Leftrightarrow 3x - 3 - 12 \geq 4x + 4 + 96 \\ &\Leftrightarrow -x \geq 115 \\ &\Leftrightarrow x \leq -115 \end{aligned}$$

Vậy  $S = \{x | x \leq -115\}$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{2x+15}{9} &\geq \frac{x-1}{5} + \frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{5(2x+15)}{9 \cdot 5} \geq \frac{9(x-1)}{5 \cdot 9} + \frac{15x}{3 \cdot 15} \\ &\Leftrightarrow 10x + 75 \geq 9x - 9 + 15x \\ &\Leftrightarrow -14x \geq -84 \\ &\Leftrightarrow x \leq 6 \end{aligned}$$

Vậy  $S = \{x | x \leq 6\}$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{x+1}{99} + \frac{x+4}{96} + \frac{x+5}{95} &\geq -3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{99} + 1 + \frac{x+4}{96} + 1 + \frac{x+5}{95} + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+100}{99} + \frac{x+100}{96} + \frac{x+100}{95} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+100) \left( \frac{1}{99} + \frac{1}{96} + \frac{1}{95} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x+100 \geq 0 \text{ vì } \frac{1}{99} + \frac{1}{96} + \frac{1}{95} > 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq -100 \end{aligned}$$



Vậy  $S = \{x | x \geq -100\}$

$$\begin{aligned} \text{g) } 2x^2 + 5x + 7 < 0 &\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{8} < 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Ta thấy vế trái của  $(*) 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{8} > 0 \quad \forall x$ , nên không có giá trị nào của  $x$  thỏa mãn bất phương trình.

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

**Bài 7.** Tìm giá trị của  $x$  thỏa mãn cả hai bất phương trình sau

$$\frac{2x}{5} + \frac{3-2x}{3} \geq \frac{3x+2}{2} \quad \text{và} \quad \frac{x}{2} + \frac{3-2x}{5} \geq \frac{3x-5}{6}$$

**Bài giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{2x}{5} + \frac{3-2x}{3} \geq \frac{3x+2}{2} &\Leftrightarrow \frac{2.6x}{5.6} + \frac{10(3-2x)}{3.10} \geq \frac{15(3x+2)}{2.15} \\ &\Leftrightarrow 18x + 30 - 20x \geq 45x + 30 \\ &\Leftrightarrow -47x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{x}{2} + \frac{3-2x}{5} \geq \frac{3x-5}{6} &\Leftrightarrow \frac{15x}{2.15} + \frac{6(3-2x)}{5.6} \geq \frac{5(3x-5)}{6.5} \\ &\Leftrightarrow 15x + 18 - 12x \geq 15x - 25 \\ &\Leftrightarrow -12x \geq -43 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{43}{12} \quad (2) \end{aligned}$$

Kết hợp (1) và (2) ta được  $x \leq 0$

Vậy  $x \leq 0$  thì thỏa mãn cả hai bất phương trình

$$\frac{2x}{5} + \frac{3-2x}{3} \geq \frac{3x+2}{2} \quad \text{và} \quad \frac{x}{2} + \frac{3-2x}{5} \geq \frac{3x-5}{6}$$

**Bài 8:** Tìm tất cả các số nguyên  $x$  thỏa mãn cả hai bất phương trình sau

$$a) \begin{cases} \frac{3x-2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0,3 \\ 1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2(3x-4) < 3(4x-3) + 16 \\ 4(1+x) < 3(x+5) \end{cases}$$

### Bài giải

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có } \begin{cases} \frac{3x-2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0,3 \\ 1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(3x-2)}{5 \cdot 2} \geq \frac{5x}{2 \cdot 5} + \frac{3}{10} \\ \frac{12}{12} - \frac{2(2x-5)}{6 \cdot 2} > \frac{3(3-x)}{4 \cdot 3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-4 \geq 5x+3 \\ 12-4x+10 > 9-3x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ -x > -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x < 13 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì x là các số nguyên thỏa  $7 \leq x < 13$  nên x là 7; 8; 9; 10; 11; 12

$$\begin{aligned} b) \text{ Ta có } \begin{cases} 2(3x-4) < 3(4x-3) + 16 \\ 4(1+x) < 3(x+5) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8 < 12x-9+16 \\ 4+4x < 3x+15 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -6x < 15 \\ x < 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{-5}{2} \\ x < 11 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-5}{2} < x < 11 \end{aligned}$$

Vì x là các số nguyên thỏa  $\frac{-5}{2} < x < 11$  nên x là -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10

**Bài 9.** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn A

b) Tìm x để  $A > 0$

### Bài giải

$$a) \text{ Điều kiện } \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 1+x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } A = \left( \frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$$

$$A = \left( \frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{(1-x)(x+1)} \right) : \frac{2x-1}{1-x^2}$$

$$A = \left( \frac{x+1}{(1-x)(1+x)} + \frac{2(1-x)}{(x+1)(1-x)} - \frac{5-x}{(1-x)(x+1)} \right) : \frac{2x-1}{(1-x)(1+x)}$$

$$A = \left( \frac{x+1+2-2x-5+x}{(1-x)(1+x)} \right) \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{2x-1}$$

$$A = \left( \frac{-2}{(1-x)(1+x)} \right) \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{2x-1} = \frac{-2}{2x-1}$$

b) Để  $A > 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow 2x-1 < 0$  vì  $-2 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$  (nhận)

Vậy  $x < \frac{1}{2}$  thì  $A > 0$

**Bài 10.** Cho biểu thức  $B = \left( \frac{1}{3} + \frac{3}{x^2 - 3x} \right) : \left( \frac{x^2}{27 - 3x^2} + \frac{1}{x+3} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn B

b) Tìm x để  $B < -1$

**Bài giải**

a) Điều kiện  $\begin{cases} x \neq 0 \\ 3-x \neq 0 \\ 3+x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases}$

Ta có  $B = \left( \frac{1}{3} + \frac{3}{x^2 - 3x} \right) : \left( \frac{x^2}{27 - 3x^2} + \frac{1}{x+3} \right)$

$$B = \left( \frac{1}{3} + \frac{3}{x(x-3)} \right) : \left( \frac{x^2}{3(9-x^2)} + \frac{1}{x+3} \right)$$

$$B = \left( \frac{x(x-3)}{3x(x-3)} + \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot x(x-3)} \right) : \left( \frac{x^2}{3(3-x)(3+x)} + \frac{1}{x+3} \right)$$

$$B = \left( \frac{x^2 - 3x + 9}{3x(x-3)} \right) : \left( \frac{x^2}{3(3-x)(3+x)} + \frac{3(3-x)}{3(x+3)(3-x)} \right)$$

$$B = \left( \frac{-(x^2 - 3x + 9)}{3x(3 - x)} \right) : \left( \frac{x^2 + 9 - 3x}{3(3 - x)(3 + x)} \right)$$

$$B = \left( \frac{-(x^2 - 3x + 9)}{3x(3 - x)} \right) \cdot \left( \frac{3(3 - x)(3 + x)}{x^2 - 3x - 9} \right) = \frac{-(3 + x)}{x}$$

b) Để  $B < -1 \Leftrightarrow \frac{-3 - x}{x} < -1 \Leftrightarrow \frac{-3 - x}{x} + 1 < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-3 - x}{x} + \frac{x}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{x} < 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ (nhận)}$$

Vậy  $x > 0$  thì  $B < -1$

## Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

### A. CHUẨN KIẾN THỨC

1. Giá trị tuyệt đối của số  $a$  kí hiệu là  $|a|$ , được định nghĩa như sau:

$$\begin{cases} |a| = a & \text{khí } a \geq 0 \\ |a| = -a & \text{khí } a < 0 \end{cases}$$

2. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

$$|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$$

3. **Nâng cao:** Bảng xét dấu nhị thức bậc nhất  $ax + b$

$x$	$\frac{-b}{a}$
$ax + b$	Khác dấu với $a$ 0      cùng dấu với $a$

### B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP

**Bài 11. Giải các phương trình sau:**

a)  $|x - 9| = 2x + 13$

b)  $|x + 8| = 4x - 10$

c)  $x^2 - 2|x| - 3 = 0$

d)  $x^2 - 2x + 3 - 3|x - 1| = 0$

e)  $|2x - 5| = |x + 3|$

f)  $|2x^2 - 5x + 5| = |x^2 + 6x - 5|$

g)  $|2x - 3| = 3 - 2x$

h)  $|3 - x| = 3 - x$

**Bài giải**

a)  $|x - 9| = 2x + 13$

Ta xét  $|x - 9| = x - 9$  khi  $x - 9 \geq 0$  hay  $x \geq 9$

$|x - 9| = 9 - x$  khi  $x - 9 < 0$  hay  $x < 9$

Với  $x \geq 9$ :  $x - 9 = 2x + 13 \Leftrightarrow x = -22$  (loại)

Với  $x < 9$ :  $9 - x = 2x + 13 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{3}$  (nhận)

Vậy  $S = \left\{ \frac{-4}{3} \right\}$

b)  $|x + 8| = 4x - 10$

Ta xét  $|x + 8| = x + 8$  khi  $x + 8 \geq 0$  hay  $x \geq -8$

$|x + 8| = -x - 8$  khi  $x + 8 < 0$  hay  $x < -8$

Với  $x \geq -8$ :  $x + 8 = 4x - 10 \Leftrightarrow x = 6$  (nhận)

Với  $x < -8$ :  $-x - 8 = 4x - 10 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$  (loại)

Vậy  $S = \{6\}$

c)  $x^2 - 2|x| - 3 = 0$

Ta xét  $|x| = x$  khi  $x \geq 0$

$|x| = x$  khi  $x < 0$

Với  $x \geq 0$ :  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$  (loại),  $x = 3$  (nhận).

Với  $x < 0$ :  $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (loại),  $x = -3$  (nhận).

Vậy  $S = \{3, -3\}$

d)  $x^2 - 2x + 3 - 3|x - 1| = 0$

Ta xét  $|x - 1| = x - 1$  khi  $x - 1 \geq 0$  hay  $x \geq 1$

$|x - 1| = 1 - x$  khi  $x - 1 < 0$  hay  $x < 1$

Với  $x \geq 1$ , ta được  $x^2 - 2x + 3 - 3(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$  (nhận),  $x = 2$  (nhận)

Với  $x < 1$ :  $x^2 - 2x + 3 + 3(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$  (nhận),  $x = -1$  (nhận).

Vậy  $S = \{-1, 0, 2, 3\}$

e)  $|2x - 5| = |x + 3|$

Ta có  $2x - 5 = x + 3 \Leftrightarrow x = 8$

$2x - 5 = -x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{-8}{3}$

Vậy  $S = \{\frac{-8}{3}, 8\}$

f)  $|2x^2 - 5x + 5| = |x^2 + 6x - 5|$

Ta có  $2x^2 - 5x + 5 = x^2 + 6x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 10$

$2x^2 - 5x + 5 = -(x^2 + 6x - 5) \Leftrightarrow 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3$

Vậy  $S = \{0, 1, 3, 10\}$

g)  $|2x - 3| = 3 - 2x$

$|2x - 3| = 2x - 3$  khi  $2x - 3 \geq 0$  hay  $x \geq \frac{3}{2}$

Với  $x \geq \frac{3}{2}$ :  $2x - 3 = 3 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$  (nhận)

$|2x - 3| = 3 - 2x$  khi  $2x - 3 < 0$  hay  $x < \frac{3}{2}$

Với  $x < \frac{3}{2}$ :  $3 - 2x = 3 - 2x$ , phương trình có nghiệm  $x < \frac{3}{2}$

Kết hợp điều kiện  $S = \{x \leq \frac{3}{2}, x \in \mathbb{R}\}$

h)  $|3 - x| = 3 - x$

$|3 - x| = 3 - x$  khi  $3 - x \geq 0$  hay  $x \leq 3$

$|3 - x| = x - 3$  khi  $3 - x < 0$  hay  $x > 3$

Với  $x \leq 3$ :  $3 - x = 3 - x \Leftrightarrow x \leq 3$

Với  $x > 3$ :  $x - 3 = 3 - x \Leftrightarrow x = 3$  (loại)

Vậy  $S = \{x \leq 3\}$

## Bài 12. Giải các phương trình sau:

a)  $|x - 1| - 2|x| = -2$

b)  $|x - 2| + |x + 1| + x^2 - 5 = 0$

c)  $\frac{7}{|x - 1| - 3} = |x + 2|$

## Bài giải

a)  $|x - 1| - 2|x| = -2$

Ta lập bảng xét dấu các nhị thức bậc nhất  $x - 1$ ;  $x$

$x$	0					
$x - 1$	-		-	-	0	+
$x$	-	0	+	+		+

Xét các trường hợp

$$* x < 0 \text{ thì } |x-1| - 2|x| = -2 \Leftrightarrow -x+1+2x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ (nhận)}$$

$$* 0 \leq x \leq 1 \text{ thì } |x-1| - 2|x| = -2 \Leftrightarrow -x+1-2x = -2$$

$$\Leftrightarrow -3x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (nhận)}$$

$$* x > 1 \text{ thì } |x-1| - 2|x| = -2 \Leftrightarrow x-1-2x = -2$$

$$\Leftrightarrow -x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } S = \{-3; 1\}$$

$$\text{b) } |x-2| + |x+1| + x^2 - 5 = 0$$

Ta lập bảng xét dấu các nhị thức bậc nhất  $x-2$ ;  $x+1$

x	-1	2
x-2	-   - - 0 +	
x+1	- 0 + +   +	

Xét các trường hợp

$$* x < -1 \text{ thì } |x-2| + |x+1| + x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow -x+2-x-1+x^2-5=0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 4 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} + 1 & \text{(loại)} \\ x = -\sqrt{5} + 1 & \text{(Nhận)} \end{cases}$$

$$* -1 \leq x < 2 \text{ thì } |x-2| + |x+1| + x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow -x+2+x+1+x^2-5=0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} & \text{(nhận)} \\ x = -\sqrt{2} & \text{(loại)} \end{cases}$$

$$* x \geq 2 \text{ thì } |x-2| + |x+1| + x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x-2+x+1+x^2-5=0$$



$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 6 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{7} - 1 & (\text{loại}) \\ x = -\sqrt{7} - 1 & (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{5} + 1\}$$

$$\text{c) } \frac{7}{|x-1|-3} = |x+2|$$

Ta lập bảng xét dấu các nhị thức bậc nhất  $x-2$ ;  $x+1$

x	-2						1
x+2	-	0	+	+		+	
x-1	-		-	-	0	+	

Xét các trường hợp

$$* x < -2 \text{ thì } \frac{7}{|x-1|-3} = |x+2| \Leftrightarrow \frac{7}{-x+1-3} + (x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{-(x+2)} + (x+2) = 0$$

$$\Rightarrow -7 + (x+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{7} - 2 & (\text{nhận}) \\ x = \sqrt{7} - 2 & (\text{loại}) \end{cases}$$

$$* -2 \leq x < 1 \text{ thì } \frac{7}{|x-1|-3} = |x+2| \Leftrightarrow \frac{7}{-x+1-3} - (x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{-(x+2)} - (x+2) = 0$$

$$\Rightarrow -7 - (x+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 4x - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x+2)^2 - 5 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\forall x \quad -(x+2)^2 - 5 < 0 \quad \forall x$$

$$* \quad x \geq 1 \text{ thì } \frac{7}{|x-1|-3} = |x+2| \Leftrightarrow \frac{7}{x-1-3} - (x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{x-4} - (x+2) = 0 \text{ điều kiện } x \neq 4$$

$$\Rightarrow 7 - (x-4)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 14 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{15} + 1 & \text{(nhận)} \\ x = -\sqrt{15} + 1 & \text{(loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-\sqrt{7} - 2; \sqrt{15} + 1\}$$