

SỞ GD &amp; ĐT NGHỆ AN

**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI**  
**HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT**  
**NĂM HỌC 2010 - 2011**

**HƯỚNG DẪN VÀ BIỂU ĐIỂM CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC**

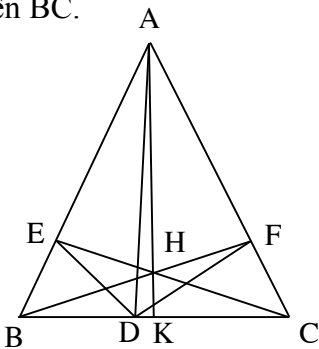
(Hướng dẫn và biểu điểm chấm gồm 04 trang)

**Môn: TOÁN (Ngày 07/10/2010)****I. Hướng dẫn chung**

1. Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
2. Việc chi tiết hoá thang điểm (nếu có) so với thang điểm trong Hướng dẫn chấm phải đảm bảo không sai lệch với Hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Hội đồng chấm thi.

**II. Đáp án và thang điểm**

| CÂU                     | ĐÁP ÁN                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | ĐIỂM |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>Câu 1</b><br>(4,0 đ) | Hệ phương trình đã cho tương đương với<br>$\begin{cases} 5x^2 + 5y^2 = 1 \\ 4x^2 + 3x + 3xy + y = \frac{57}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 5y^2 = 1 \\ 2x^2 - 2y^2 + 3xy + 3x + y = \frac{47}{25} \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                 | 1.0  |
|                         | $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 5y^2 = 1 \\ (2x - y)(x + 2y) + (x + 2y) + (2x - y) = \frac{47}{25} \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 1.0  |
|                         | Đặt $a = 2x - y$ ; $b = x + 2y$<br>Hệ đã cho trở thành<br>$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ab + a + b = \frac{47}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + b)^2 - 2ab = 1 \\ 2ab + 2(a + b) = \frac{94}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = (a + b)^2 - 1 \\ (a + b + 1)^2 = \frac{144}{25} \end{cases}$                                                                                                                    | 1.0  |
|                         | $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{7}{5} \\ ab = \frac{12}{25} \end{cases} \Leftrightarrow (a; b) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right) \text{ hoặc } \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -\frac{17}{5} \\ ab = \frac{132}{25} \end{cases} (VN)$<br>$\Rightarrow (x; y) = \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right) \text{ hoặc } \left(\frac{11}{25}; \frac{2}{25}\right) \text{ (thỏa mãn).}$ | 1.0  |
| <b>Câu 2</b><br>(4,0 đ) | Nếu $a < -1$ hoặc $a > 2$ , khi đó $2 < x_2 < x_3 < \dots$ . Giả sử tồn tại $\lim x_n = c$ , ta có:<br>$c = c^2 - c \Leftrightarrow c = 0$ hoặc $c = 2$ (mâu thuẫn). Suy ra $-1 \leq a \leq 2$ .                                                                                                                                                                                                                                                     | 1.0  |

|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |     |
|-------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|                         | <p>(*) Ta chứng minh nếu tồn tại <math>k</math> sao cho <math>0 \leq x_k \leq 1</math> thì dãy hội tụ. Thật vậy:</p> $0 \leq x_k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq x_{k+1} \leq 0, 0 \leq x_{k+2} \leq 1, -\frac{1}{4} \leq x_{k+3} \leq 0, 0 \leq x_{k+4} \leq 1, \dots$ <p>Dãy <math>(x_{k+2l})</math> đơn điệu giảm vì <math>x_{k+2l+2} - x_{k+2l} = x_{k+2l}^3 (x_{k+2l} - 2) \leq 0</math>. Vì vậy tồn tại <math>\lim x_{k+2l} = c</math>, ta có <math>c = c + c^3(c - 2) \Leftrightarrow c = 0</math> (vì <math>c \leq 1</math>).</p> <p>Mặt khác: <math>\lim x_{k+2l+1} = \lim [(x_{k+2l})^2 - x_{k+2l}] = 0</math>. Vậy tồn tại <math>\lim x_n = 0</math>.</p> | 1.0 |
|                         | <p>(**) Ta chứng minh nếu tồn tại <math>k</math> sao cho <math>0 \leq x_k \leq 2</math> thì dãy hội tụ. Thật vậy:</p> $0 \leq x_k \leq 2 \Rightarrow x_{k+1} \leq x_k \leq 2. \text{ Nếu } x_{k+2} \leq x_{k+1} \leq 2.$ <p>Nếu <math>x_{k+l} \geq 0, \forall l</math> thì dãy <math>(x_{k+l})</math> đơn điệu giảm và bị chặn dưới do đó hội tụ.</p> <p>Nếu <math>x_{k+l} &lt; 0</math> thì <math>0 &lt; x_{k+l-1} &lt; 1</math>. Theo chứng minh (*) dãy <math>(x_n)</math> hội tụ.</p>                                                                                                                                                                                 | 1.0 |
|                         | <p>Từ đó, <math>0 \leq a \leq 2</math> thì <math>0 \leq x_1 \leq 2</math> suy ra dãy có giới hạn.</p> <p>Nếu <math>-1 \leq a \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x_2 \leq 2</math>, suy ra dãy có giới hạn.</p> <p>Vậy điều kiện cần và đủ để dãy có giới hạn là <math>-1 \leq a \leq 2</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1.0 |
| <b>Câu 3</b><br>(4,0 đ) | <p>Gọi K là hình chiếu của A trên BC.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0.5 |
|                         | <p>Vì K, E, F theo thứ tự thuộc các đoạn BC, CA, AB nên:</p> $\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = -\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0.5 |
|                         | <p>Từ giả thiết ta có <math>EA = FA</math>; <math>ED = FD</math>, do đó:</p> $\frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = -\frac{\overline{KB}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{KA}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FD}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{EB}} = -\cot B \tan C \cot C \tan B = -1.$                                                                                                                                                                                                                                                          | 1.5 |
|                         | <p>Vậy theo định lý Ceva, với chú ý AK, BF, CE không thể đôi một song song, ta có AK, BF, CE đồng qui.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 1.0 |
|                         | <p>Điều đó có nghĩa là AK đi qua H. Vậy AH vuông góc với BC.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0.5 |

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Câu 4</b><br><b>(4,0 đ)</b> | <p>Trước hết ta chứng minh các bổ đề sau:</p> <p><b>Bổ đề 1:</b> Với <math>a, b, c</math> là ba cạnh của một tam giác có diện tích <math>S</math> thì:</p> $2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$ <p>Chứng minh: Vận dụng kết quả <math>(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)</math>. Ta có</p> $[(p - a)(p - b) + (p - b)(p - c) + (p - c)(p - a)]^2 \geq 3p(p - a)(p - b)(p - c)$ <p>(với <math>p = \frac{a + b + c}{2}</math>)</p> $\Rightarrow (p - a)(p - b) + (p - b)(p - c) + (p - c)(p - a) \geq S\sqrt{3}$ $\Rightarrow 2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2 \geq 4S\sqrt{3}$                                                                        | 1.0 |
|                                | <p><b>Bổ đề 2:</b> Với <math>a, b, c</math> là ba cạnh của một tam giác có diện tích <math>S</math> và <math>x, y, z</math> là các số thực dương. Ta luôn có</p> $\frac{xa^2}{y + z} + \frac{yb^2}{z + x} + \frac{zc^2}{x + y} \geq 2S\sqrt{3}.$ <p>Chứng minh:</p> <p>Ta có <math>\left( \frac{a^2}{y + z} + \frac{b^2}{z + x} + \frac{c^2}{x + y} \right) [(y + z) + (z + x) + (x + y)] \geq (a + b + c)^2</math></p> $\Rightarrow \frac{2xa^2}{y + z} + \frac{2yb^2}{z + x} + \frac{2zc^2}{x + y} \geq 2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2.$ <p>Áp dụng Bổ đề 1 ta có <math>\frac{xa^2}{y + z} + \frac{yb^2}{z + x} + \frac{zc^2}{x + y} \geq 2S\sqrt{3}.</math></p> | 1.0 |
|                                | <p>Trở lại bài toán:</p> <p>Gọi <math>A_1, B_1, C_1</math> lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp của các góc <math>A, B, C</math> của tam giác <math>ABC</math>.</p> <div data-bbox="719 1318 1258 1665" data-label="Image"> </div> <p>Ta có <math>\Delta A_1BC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \frac{dt(A_1BC)}{dt(A_1B_1C_1)} = \left( \frac{a}{x} \right)^2 \Rightarrow \frac{ar_a}{2S'} = \left( \frac{a}{x} \right)^2</math></p> <p>(trong đó <math>B_1C_1 = x, S' = dt(A_1B_1C_1)</math> và <math>r_a</math> là bán kính đường tròn bàng tiếp góc <math>A</math>).</p>                                                                                         | 1.0 |

|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|                         | $\Rightarrow \frac{(b+c-a)a^2}{b+c} = \frac{ar_a(b+c-a)x^2}{S'(b+c)} = \frac{r_a(p-a)ax^2}{S'(b+c)} \Rightarrow \frac{(b+c-a)a^2}{b+c} = \frac{S}{S'} \frac{ax^2}{b+c}$ <p>Tương tự <math>\frac{(c+a-b)b^2}{c+a} = \frac{S}{S'} \frac{by^2}{c+a}</math>, <math>\frac{(a+b-c)b^2}{a+b} = \frac{S}{S'} \frac{cz^2}{a+b}</math> với <math>C_1A_1=y</math>, <math>A_1B_1=z</math>.</p>                                                                                                                       |     |
|                         | $\Rightarrow \frac{(b+c-a)a^2}{b+c} + \frac{(c+a-b)b^2}{c+a} + \frac{(a+b-c)b^2}{a+b} = \frac{S}{S'} \left[ \frac{ax^2}{b+c} + \frac{by^2}{c+a} + \frac{cz^2}{a+b} \right].$ <p>Áp dụng Bổ đề 2, đối với tam giác <math>A_1B_1C_1</math> ta có</p> $\frac{ax^2}{b+c} + \frac{by^2}{c+a} + \frac{cz^2}{a+b} \geq 2S'\sqrt{3} \Rightarrow \frac{(b+c-a)a^2}{b+c} + \frac{(c+a-b)b^2}{a+c} + \frac{(a+b-c)c^2}{a+b} \geq 2S\sqrt{3}$ <p>(đpcm).</p> <p>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.</p> | 1.0 |
| <b>Câu 5</b><br>(4,0 đ) | <p>Với mỗi <math>1 \leq k \leq n</math>,</p> <p>đặt <math>E_k = \{A \subset M \mid  A =k\}</math> và <math>x_k = \sum_{A \in E_k} (\min A + \max A -  A )</math>.</p> <p>Khi đó <math>T = \sum_{k=1}^n x_k</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1.0 |
|                         | <p>Với mỗi <math>A = \{a_1; a_2; \dots; a_k\} \in E_k</math> đặt <math>A^* = \{n+1-a_1; n+1-a_2; \dots; n+1-a_k\}</math>.</p> <p>Ta có</p> $A^* \in E_k, (A^*)^* = A \Rightarrow E_k = \{A \subset M \mid  A =k\} = \{A^* \mid A \subset M,  A =k\}$ $\Rightarrow 2x_k = \sum_{A \in E_k} (\min A + \max A + \min A^* + \max A^* - 2 A )$                                                                                                                                                                | 1.0 |
|                         | <p>Giả sử <math>\min A = a_1</math>, <math>\max A = a_k</math>. Khi đó <math>\min A^* = n+1-a_k</math>, <math>\max A^* = n+1-a_1</math>.</p> <p>Do đó <math>\min A + \max A + \min A^* + \max A^* - 2 A  = 2(n+1) - 2k</math></p> $\Rightarrow 2x_k = \sum_{A \in E_k} 2(n+1-k) = 2(n+1-k)C_n^k \Rightarrow x_k = (n+1-k)C_n^k.$                                                                                                                                                                         | 1.0 |
|                         | $\Rightarrow T = \sum_{k=1}^n (n+1-k)C_n^k.$ <p>Ta có <math>x(x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n+1-k} \Rightarrow (x+1)^n + nx(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^n (n+1-k)C_n^k x^{n-k}.</math></p> <p>Thay <math>x=1</math>, ta có <math>2^n + n.2^{n-1} = \sum_{k=0}^n (n+1-k)C_n^k = n+1-T.</math></p> <p>Vậy <math>T = 2^n + n.2^{n-1} - n - 1.</math></p>                                                                                                                                                       | 1.0 |

--- Hết ---

**Chú ý:** Học sinh giải theo cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.