

CHỦ ĐỀ 7. TÍNH CHẤT CỦA DẪY TỈ SỐ BẰNG NHAU

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1) Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$* \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$* \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

2) Chú ý:

Khi ta nói các số x, y, z tỉ lệ với các số a, b, c tức là: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ hoặc $x : y : z = a : b : c$.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm các số chưa biết trong dãy tỉ số bằng nhau

Phương pháp giải: Để tìm số chưa biết trong dãy tỉ số bằng nhau, ta thường làm như sau:

Cách 1. Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, biến đổi để xuất hiện điều kiện đã cho của đề bài. Từ đó tính được giá trị của dãy tỉ số bằng nhau.

Cách 2. Phương pháp "đặt k" theo 3 bước sau:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$$

- Bước 1. Đặt

- Bước 2. Rút $x = a.k$; $y = b.k$; $z = c.k$.

- Bước 3. Thay các giá trị trên của x, y, z vào điều kiện đã cho của đề bài, tìm được giá trị của k. Từ đó suy ra các giá trị của x, y, z.

1A. a) Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{6}$. Tìm x, y biết:

i) $x + y = 90$;

ii) $4x - y = 42$;

iii) $xy = 162$;

iv) $2x^2 - y^2 = -8$.

b) Cho $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$. Tìm x, y, z biết

i) $x + y + z = 30$;

ii) $x - 2y + 3z = 22$;

iii) $xyz = -240$;

iv) $x^2 + 3y^2 - z^2 = 150$.

1.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

c) Cho $2x - 3y + z = 42$. Tìm x, y, z biết:

i) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{13}$;

ii) $\frac{x}{-3} = \frac{y}{5}; \frac{y}{2} = \frac{z}{7}$;

iii) $6x = 4y = z$;

iv) $x = -2y; 7y = 2z$.

1B. a) Cho $\frac{x}{4} = \frac{y}{5}$. Tìm x, y biết:

i) $x + y = 54$;

ii) $3x - 2y = 8$;

iii) $xy = 80$;

iv) $x^2 - 3y^2 = -59$.

b) Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tìm x, y, z biết:

i) $x + y + z = 56$;

ii) $x - 2y + 3z = -33$;

iii) $xyz = 720$;

iv) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = -475$.

c) Cho $x - 2y + 3z = 56$. Tìm x, y, z biết:

i) $\frac{x-3}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{4}$;

ii) $\frac{x}{6} = \frac{y}{-7}; \frac{x}{3} = \frac{z}{8}$;

iii) $3x - 4y = 2z$;

iv) $2x = -3y; 7y = -10z$.

Dạng 2. Giải các bài toán chia theo tỉ lệ

Phương pháp giải: Để giải các bài toán chia theo tỉ lệ, ta thường làm như sau:

Bước 1. Gọi các đại lượng cần tìm là x, y, z (tùy đề bài yêu cầu).

Bước 2. Từ điều kiện bài toán cho, đưa về dãy tỉ số bằng nhau.

Bước 3. Sử dụng các phương pháp ở dạng 1 để tìm x, y, z rồi kết luận

2A. An và Chi có số bi lần lượt tỉ lệ với 4; 5. Biết rằng An có số bi ít hơn Chi là 4 viên. Tính số viên bi của mỗi bạn.

2B. Số sản phẩm của hai công nhân lần lượt tỉ lệ với 8;5. Biết rằng người thứ nhất làm nhiều hơn người thứ hai 60 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi người làm được.

3A. Các cạnh của một tam giác có số đo tỉ lệ với các số 3; 5; 7. Tính mỗi cạnh của tam giác đó biết chu vi của nó là 40,5cm.

3B. Chia số 48 thành 4 phần tỉ lệ với các số 3; 5; 7; 9.

4A. Ba lớp 7 có tất cả 135 học sinh. Số học sinh lớp 7A bằng $\frac{7}{8}$ số học sinh lớp 7B, số học sinh lớp 7B bằng $\frac{16}{5}$ số học sinh lớp 7C. Tính số học sinh mỗi lớp.

2.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

4B. Chia số 237 thành ba phần. Biết phần thứ nhất và phần thứ hai tỉ lệ với 5 và 3; phần thứ hai và phần thứ ba tỉ lệ với 8 và 5 . Tìm mỗi số.

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức từ tỉ lệ thức cho trước

Phương pháp giải: Để chứng minh đẳng thức từ tỉ lệ thức cho trước, ta thường làm như sau:

Cách 1. Sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau để biến đổi dẫn đến đẳng thức cần chứng minh,

Cách 2. Dùng tính chất của tỉ lệ thức, nếu $ad = bc$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \dots$

Cách 3. Dùng phương pháp "đặt k" theo các bước sau:

Bước 1. Đặt tỉ lệ thức ban đầu có giá trị bằng k .

Bước 2. Biểu diễn tử theo tích của k với các mẫu tương ứng.

Bước 3. Thay các giá trị vừa có vào đẳng thức cần chứng minh để dẫn đến một hệ thức đúng.

5A. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

Chứng minh:

i) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$;

ii) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$;

iii) $\frac{5a+2b}{5a-2b} = \frac{5c+2d}{5c-2d}$;

iv) $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{(a+c)^2}{(b+d)^2}$.

5B. Cho $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

Chứng minh:

i) $\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$;

ii) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$;

iii) $\frac{3a+4c}{3a-4c} = \frac{3b+4d}{3b-4d}$;

iv) $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

6. Tìm các số x, y, z biết

a) $\frac{x}{y} = \frac{6}{5}$ và $x + y = 121$;

b) $4x = 5y$ và $2x - 5y = 40$;

c) $\frac{x}{3} = \frac{y}{16}$ và $xy = 192$;

d) $\frac{x}{-3} = \frac{y}{7}$ và $x^2 - y^2 = -360$;

e) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$ và $x + y + z = 52$;

f) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và $x - 2y + 3z = 46$;

g) $\frac{x}{y} = \frac{7}{10}; \frac{y}{z} = \frac{5}{8}$ và $2x - y + 3z = 104$.

7. Tỉ số cạnh của hình chữ nhật bằng $\frac{2}{5}$. Chu vi hình chữ nhật là 42m. Tính diện tích của hình chữ nhật.

8. Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích $300m^2$. Hai cạnh tỉ lệ với 4 và 3. Tính chiều dài, chiều rộng của khu vườn.

9. Số học sinh của các lớp 7A, 7B, 7C, 7D tỉ lệ với các số 11; 12; 13 và 14. Biết hai lần số học sinh lớp 7B nhiều hơn số học sinh lớp 7A là 39 em. Tính số học sinh mỗi lớp.

10. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa). Chứng minh:

a) $\frac{a-2b}{b} = \frac{c-2d}{d}$;

b) $\frac{a-2c}{3a+b} = \frac{b-2d}{3b+d}$;

c) $\frac{a^2+2b^2}{(a+4b)^2} = \frac{c^2+2d^2}{(c+4d)^2}$;

d) $(a+4c)(2b-3d) = (b+4d)(2a-3c)$;

e) $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2-c^2}{b^2-d^2}$.

11*. Chứng minh rằng:

Nếu $a + c = 2b$ và $2bd = c(b+d)$ ($b \neq 0, d \neq 0$) thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

12*. Cho $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$. Với $ad = bc$. Chứng minh: $a^2 = bc$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

HƯỚNG DẪN

1A. a) i) Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau (DTSDN) ta có

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{x+y}{3+6} = \frac{90}{9} = 10, \text{ từ đó tìm được } x = 30; y = 60.$$

ii) Từ đề bài ta suy ra $\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{4x}{12}$. Áp dụng tính chất của DTSDN ta có

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{4x}{12} = \frac{4x-y}{12-6} = \frac{42}{6} = 7, \text{ từ đó tìm được } x = 21; y = 42$$

iii) Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = k \Rightarrow x = 3k; y = 6k$

Thay vào $xy = 162$ ta có $xy = 18k^2 = 162 \Rightarrow k = \pm 3$

Nếu $k = 3 \Rightarrow x = 9; y = 18$. Nếu $k = -3 \Rightarrow x = -9; y = -18$

iv) Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = k \Rightarrow x = 3k; y = 6k$

Suy ra $2x^2 - y^2 = 18k^2 - 36k^2 = -18 \Rightarrow x = \pm \frac{2}{3}$

Nếu $k = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 2; y = 4$. nếu $k = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = -2; y = -4$

b) i) Áp dụng tính chất của DTSDN ta có

$$\pm \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{30}{10} = 3 \Rightarrow x = 6; y = 9; z = 15$$

ii) ta tìm được $x = \frac{76}{11}; y = \frac{114}{11}; z = \frac{190}{11}$

iii) Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow x = 2k; y = 3k; z = 5k$

Do đó $xyz = 2k.3k.5k = -240 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow x = -4; y = -6; z = -10$

iv) Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow x = 2k; y = 3k; z = 5k \Rightarrow k = \pm 5$

Nếu $k = 5 \Rightarrow x = 10; y = 15; z = 25$

Nếu $k = -5 \Rightarrow x = -10; y = -15; z = -25$

c) i) ta có; theo tính chất của DTSDN ta có

$$x = \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{13} = \frac{2(x-1) - 39y - 2 + z - 1}{2.3 - 3.4 + 13} \Rightarrow x = 20; y = 30; z = 92$$

ii) Ta có $\frac{x}{3} = \frac{y}{-5} \Rightarrow \frac{x}{-6} = \frac{y}{10}$ và $\frac{y}{2} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{35}$

Do đó $\frac{x}{-6} = \frac{y}{10} = \frac{z}{35} = \frac{2x - 3y + z}{-12 - 30 + 35} = \frac{42}{-7} = -6 \Rightarrow x = 36; y = 60; z = -210$

iii) Ta có $6x = 4y = z \Rightarrow \frac{6x}{12} = \frac{4y}{12} = \frac{z}{12} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{12}$

Do đó $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{12} = \frac{2x - 3y + z}{4 - 9 + 12} = \frac{42}{7} = 6 \Rightarrow x = 12; y = 18; z = 72$

iv) Ta có $x = -2y \Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y}{1}$ và $7y = 2z \Rightarrow \frac{y}{2} = \frac{z}{7}$

Do đó $\frac{x}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{7} = \frac{2x - 3y + z}{-8 - 6 + 7} = \frac{42}{7} = -6 \Rightarrow x = 24; y = -12; z = -42$

1B. Tương tự 1A

a) i) $x = 24; y = 30$

ii) $x = 16; y = 20$

iii) $x = 8; y = 10$ hoặc $x = -8; y = -10$

iv) $x = 4; y = 5$ hoặc $x = -4; y = -5$

b) i) $x = 12; y = 20; z = 24$

ii) $x = -9; y = -15; z = -18$

iii) $x = 6; y = 10; z = 12$

iv) $x = 15; y = 25; z = 30$ hoặc $x = -15; y = -25; z = -30$

c) i) $x = 31; y = 7; z = 13$

ii) $x = -12; y = 14; z = 32$

iii) $x = 8; y = -6; z = 12$

iv) $x = 15; y = -10; z = 7$

2A. Gọi số bi của An và Chi lần lượt là x và y (viên bi $x, y \in \mathbb{N}^*$). Theo đề bài ta có

$\frac{x}{4} = \frac{y}{5}$ và $y - x = 4$. Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{y - x}{5 - 4} = 4 \Rightarrow x = 16; y = 20$

Vậy An có 16 viên bi, Chi có 20 viên bi

2B. Tương tự 2A. hai người làm được 160 và 100 sản phẩm

3A. các cạnh của tam giác là: 8,1cm; 13,5cm; 18,9cm

3B. Tương tự 3A. Các phần là 6; 10; 14; 10

4A. Gọi số học sinh các lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là $x; y; z$ 9 học sinh $x, y, z \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có $x + y + z = 135$; $x = \frac{7}{8}y$; $y = \frac{16}{15}z$. Áp dụng tính chất DTSDN, từ đó tìm được $x = 42$; $y = 48$; $z = 45$

Vậy số học sinh lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là 42; 48; 45

4B. Tương tự 4A

Số thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt 120; 72; 45

5A. i) Ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

ii) Ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}; \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

iii) Ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{5a}{5c} = \frac{2b}{2d} = \frac{5a+2b}{5c+2d} = \frac{5a-2b}{5c-2d}$

Do vậy $\frac{5a+2b}{5a-2b} = \frac{5c+2d}{5c-2d}$

iv) Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \left(\frac{a+c}{b+d}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+a}; \frac{a}{c} = \frac{4b}{4d} = \frac{a-4b}{c-4d}$

v) Ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+a}; \frac{a}{c} = \frac{4b}{4d} = \frac{a-4b}{c-4d}$

$\Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-4b}{c-4d} \Rightarrow (a-4b)(c+b)(c-4d)$

5B. Tương tự 5A

6. a) $x = 66$; $y = 55$

b) $x = -20$; $y = -16$

c) $x = 6$; $y = 32$ hoặc $x = -6$; $y = -32$

d) $x = -9$; $y = 21$ hoặc $x = 9$; $y = 021$

e) $x = 12$; $y = 16$; $z = 24$

f) $x = 9$; $y = 10$; $z = 19$

g) $x = 14$; $y = 20$; $z = 32$

7. Diện tích của hình chữ nhật là: $90m^2$

8. Chiều dài: 20m, Chiều rộng: 15cm

9. Lớp 7A, 7B, 7C, 7D lần lượt có 33; 36; 39; 42 học sinh

$$10. a) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{2b}{2d} = \frac{a-2b}{c-2d} \Rightarrow \frac{a-2b}{b} = \frac{c-2d}{d}$$

$$b) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2c}{2d} = \frac{a-20}{b-2d}; \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3a+b}{3b+d} \Rightarrow \frac{a-2c}{b-2d} = \frac{3a+b}{3b+d}$$

$$\text{Do vậy: } \frac{a-2c}{3a+b} = \frac{b-2d}{3b+d}$$

$$c) \text{ Ta có } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+4b}{c+4d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{(a+4b)^2}{(c+4d)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{(a+4b)^2}{(c+4d)^2} = \frac{a^2-2b^2}{c^2-2d^2} = \frac{(a+4b)^2}{(c+4d)^2}$$

$$\text{Do vậy } \frac{a^2-2b^2}{(a+4)^2} = \frac{c^2-2d^2}{(c+4d)^2}$$

$$d) \text{ Ta có } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2a-3c}{2b-3d}; \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+4c}{b+4d}$$

$$\Rightarrow \frac{2a-3c}{2b-3d} = \frac{a+4c}{b+4d} \Rightarrow (a+4c)(2b-3d) = (b+4d)(2a-3c)$$

$$e) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2-c^2}{b^2-d^2} \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2-c^2}{b^2-d^2}$$

11*. Ta có $a+c=2b \Rightarrow d(a+c)=2bd$. Mà $2bd=c(b+d)$ nên

$$d(a+c)=c(b+d) \Rightarrow ad+cd=bc+cd \Rightarrow ad=bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$12*. \text{ Cách 1: Ta có } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a} \Rightarrow (a+b)(c-a) = (c+a)(a-b)$$

$$\Rightarrow ac - a^2 + bc - ab = ac - bc + a^2 - ab \Rightarrow a^2 = bc$$

$$\text{Cách 2: Đặt } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a} = k; \text{ Với } \frac{a+b}{a-b} = k \Rightarrow a = b \cdot \frac{k+1}{k-1} (1)$$

$$\text{Tương tự } a = c \cdot \frac{k-1}{k+1} (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ĐPCM

.....

.....