

CHỦ ĐỀ 4

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

DẠNG 1

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

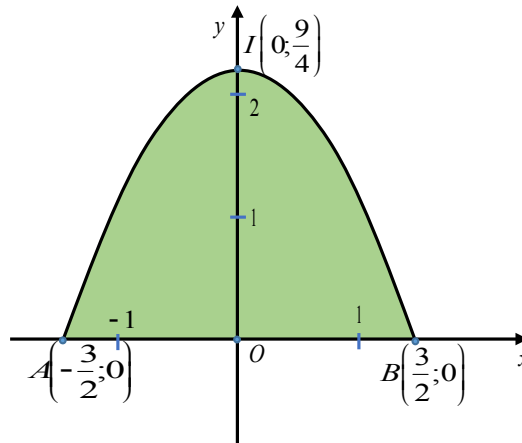
Câu 1. Trường Nguyễn Văn Trỗi muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền nhà trường phải trả là:

- A. 33750000 đồng. B. 3750000 đồng. C. 12750000 đồng. D. 6750000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



$$\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình:

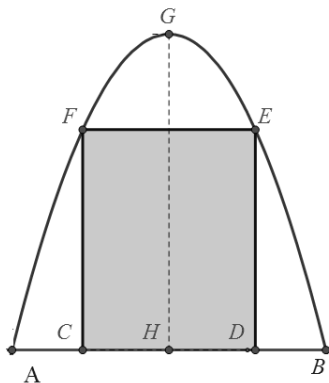
Vậy $(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ m}^2$$

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000$ đồng.

Câu 2. Chị Minh Hiền muốn làm một cái cổng hình Parabol như hình vẽ bên dưới. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chị Minh Hiền làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/ m^2 , còn các phần để trồng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 . Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

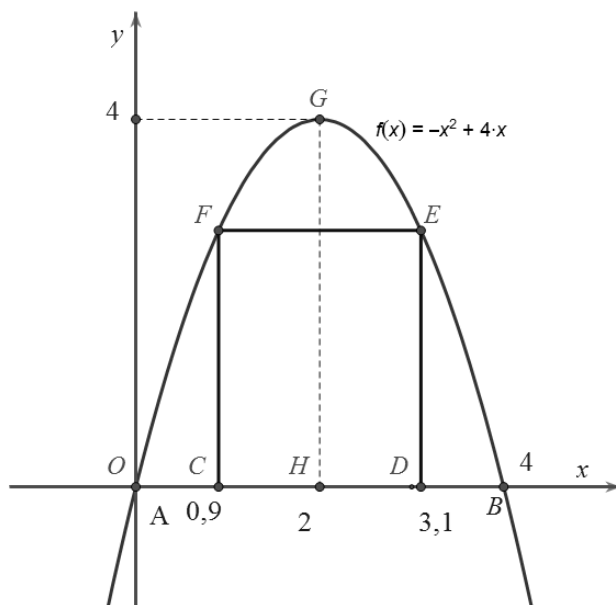


- A. 11445000 đồng. B. 4077000 đồng. C. 7368000 đồng. D. 11370000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox , A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có
$$\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

$$S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích của cả công là

Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79 \text{ (m)}$, $CD = 4 - 2 \cdot 0,9 = 2,2 \text{ (m)}$

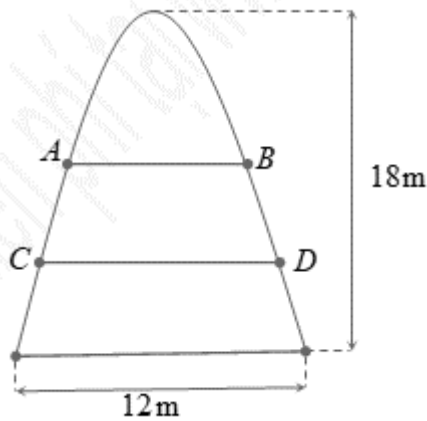
Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF} = CD \cdot CF = 6,138 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,14 = \frac{6793}{1500} \text{ (m}^2\text{)}$

Vậy tổng số tiền để làm công là $6,138 \cdot 1200000 + \frac{6793}{1500} \cdot 900000 = 11441400$ đồng.

Câu 3. Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB , CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có

diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $\frac{4}{5}$

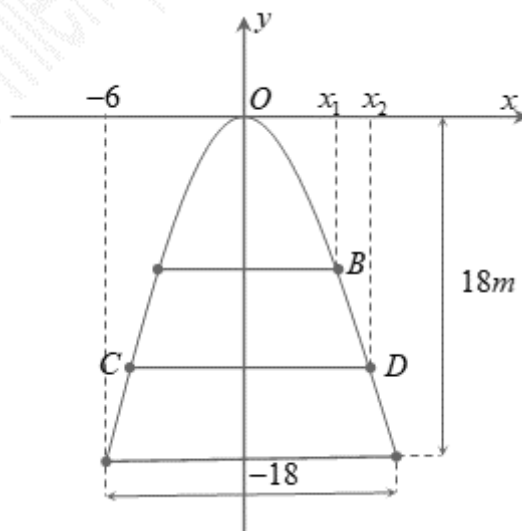
C. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

D. $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = a.x^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6; -18)$ suy ra: $-18 = a.(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

$$S_1 = 2 \int_0^{x_1} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2 \right) \right] dx = 2 \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x \right]_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3$$

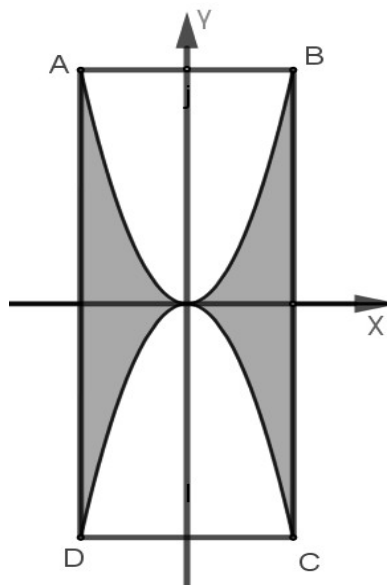
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $CD: y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2 \int_0^{x_2} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2 \right) \right] dx = 2 \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x \right]_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3$$

Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 4. Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được đánh giá với giá thành $500.000đ/m^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$.

Cho $AB = 4dm; BC = 8dm$. Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

- A. 105660667đ. B. 106666667đ. C. 107665667đ. D. 108665667đ.

Lời giải

Chọn B

Vì $AB = 4dm; BC = 8dm. \Rightarrow A(-2; 4), B(2; 4), C(2; -4), D(-2; -4)$.

parabol là: $y = x^2$ hoặc $y = -x^2$

$$S_1 = 4 \int_0^2 x^2 dx = \frac{32}{3} \text{ (dm}^2\text{)}$$

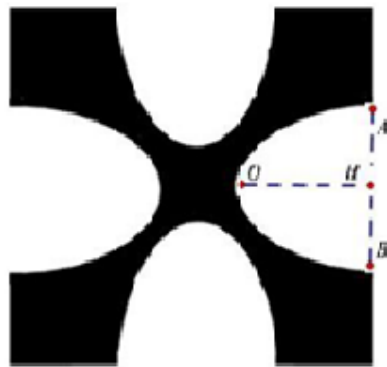
Diện tích phần tô đậm là

Diện tích hình chữ nhật là $S = 4.8 = 32 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \text{ (dm}^2\text{)}$

Tổng chi phí trang trí là: $T = \left(\frac{32}{3} \cdot 5000 + \frac{64}{3} \cdot 2500 \right) \cdot 1000 \approx 106666667đ$

Câu 5. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5 \text{ cm}$, $OH = 4 \text{ cm}$. Biết giá trang trí hoa văn 1cm^2 là 50.000 đồng, tính số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó.



A. 2553333 đồng.

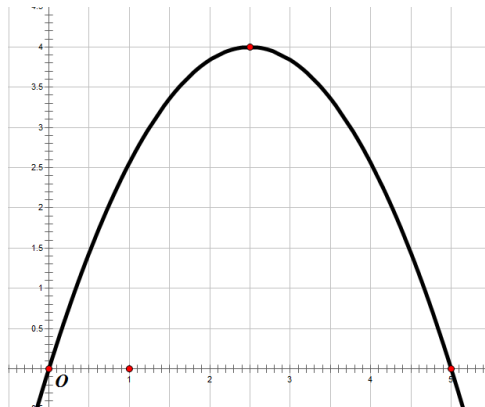
B. 2333333 đồng.

C. 2780333 đồng.

D. 2123333 đồng.

Lời giải

Chọn B



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là: $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=5$

là: $S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x \right) dx = \frac{40}{3}$

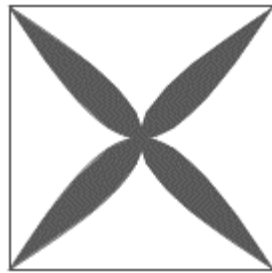
Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3} \text{ cm}^2$

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv} = 100 \text{ cm}^2$

diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3} \text{ cm}^2$

Vậy số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó là: $\frac{140}{3} \cdot 50000 \approx 2333333$ đồng

Câu 6. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm . Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới).

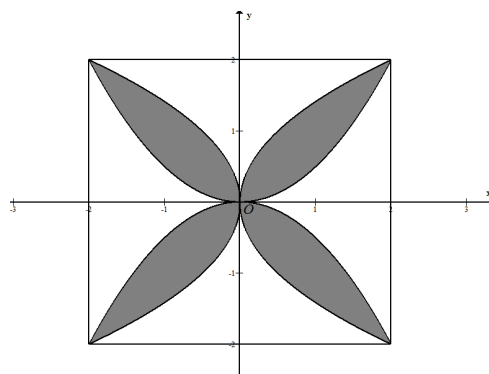


Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

- A. 800cm^2 . B. $\frac{800}{3}\text{cm}^2$. C. $\frac{400}{3}\text{cm}^2$. D. 250cm^2 .

Lời giải

Chọn C



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10\text{cm} = 1\text{dm}$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol

có phương trình $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2}$, $x = \frac{y^2}{2}$, $x = -\frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị

hàm số $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$.

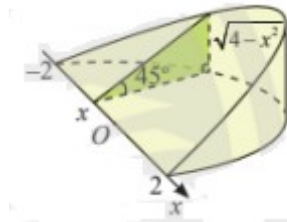
Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{(2x)^3} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3} (\text{dm}^2) = \frac{400}{3} (\text{cm}^2) = \frac{4}{3} (\text{dm}^2) = \frac{400}{3} (\text{cm}^2)$$

DẠNG 2

ỨNG DỤNG THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Câu 7. Khi cắt một vật thể hình chếc niêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-2 \leq x \leq 2$), mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{14 - 3x^2}$ (như hình vẽ). Tính thể tích vật thể hình chếc niêm trên.



A. $V = 20$

B. $V = 20\pi$

C. $V = 10$

D. $V = 10\pi$

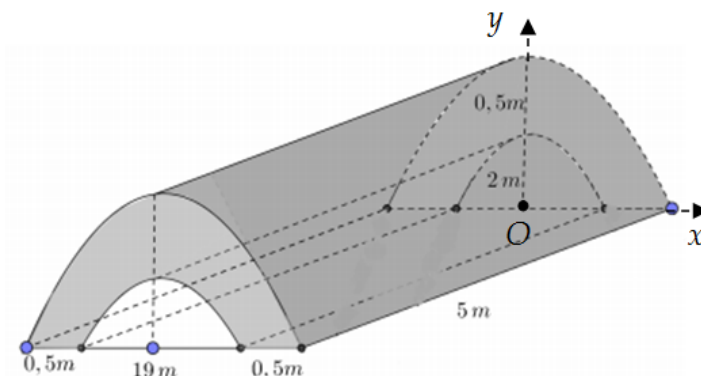
Lời giải

Chọn A.

Diện tích tam giác vuông cân là: $S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{14 - 3x^2} \cdot \sqrt{14 - 3x^2} = \frac{1}{2} (14 - 3x^2)$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} (14 - 3x^2) dx = 20$

Câu 8. Trong chương trình nông thôn mới của tỉnh Phú Yên, tại xã Hòa Mỹ Tây có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ (đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol). Biết 1 m^3 khối bê tông để đổ cây cầu có giá 5 triệu đồng. Tính số tiền mà tỉnh Phú Yên cần bỏ ra để xây cây cầu trên.



A. 110 triệu đồng.

B. 250 triệu đồng.

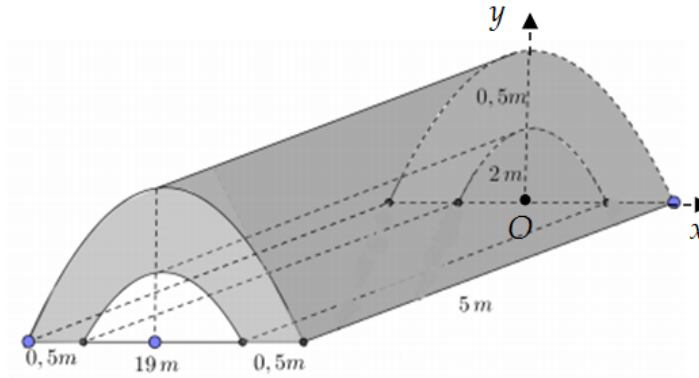
C. 180 triệu đồng.

D. 200 triệu đồng.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a_1 \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$$

Gọi $(P_2): y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a_2 \cdot (10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$$

Ta có thể tích của bê tông là:
$$V = 5.2 \left[\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2 \right) dx \right] = 40 m^3$$

Số tiền mà tỉnh Phú Yên cần bỏ ra để xây cây cầu là: $5.40 = 200$ triệu đồng

Câu 9. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

- A. $30 m^3$ B. $36 m^3$ C. $40 m^3$ D. $41 m^3$

Lời giải

Chọn B

Giả sử nền trại là hình chữ nhật ABCD có $AB = 3$ mét, $BC = 6$ mét, đỉnh của parabol là I. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB, A, B và I, phương trình của parabol có dạng

$y = ax^2 + b, a \neq 0$. Do I, A, B thuộc nên ta có
$$y = -\frac{4}{3}x^2 + 3$$

Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là

$$V = 6.2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{4}{3}x^2 + 3 \right) dx = 36$$

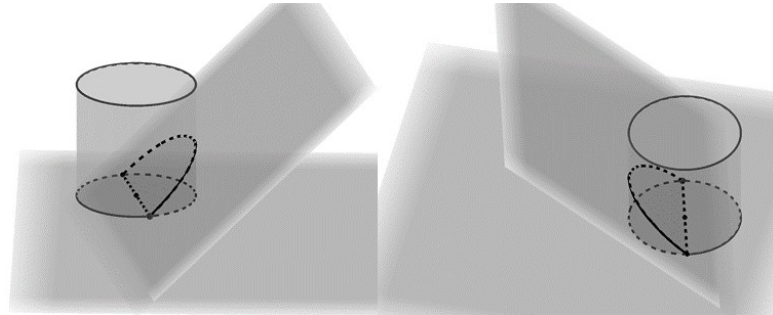
Câu 10. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R . Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2 , với $V_1 < V_2$. Thể tích V_1 bằng?

A. $V_1 = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$

B. $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$

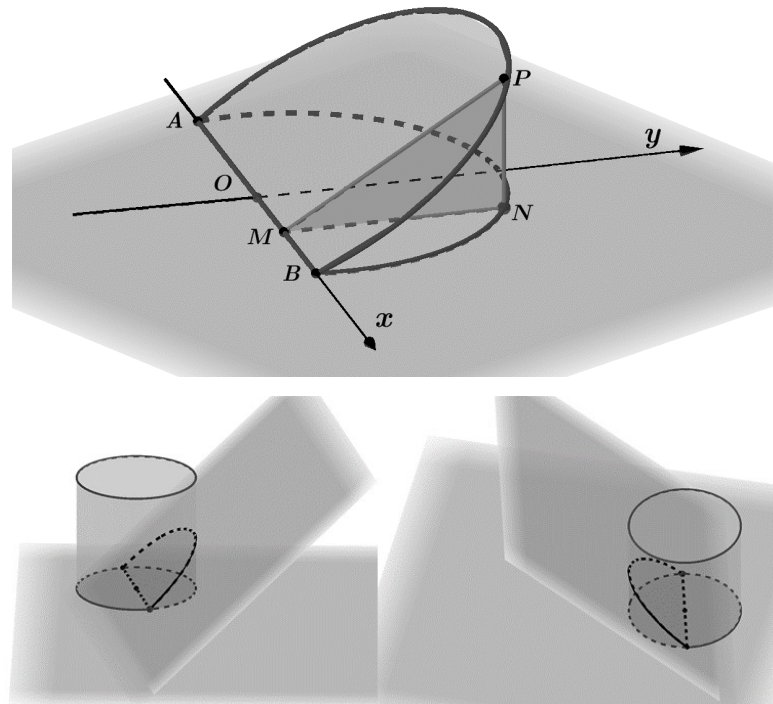
C. $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$

D. $V_1 = \frac{\sqrt{3}R^3}{27}$



Lời giải

Chọn A



Khi cắt khối gỗ hình trụ ta được một hình nêm có thể tích V_1 như hình vẽ.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Nửa đường tròn đường kính AB có phương trình là $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R; R]$.

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x , cắt hình nêm theo thiết diện là

$\triangle MNP$ vuông tại N và có $\angle PMN = 30^\circ$.

$$NM = y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow NP = MN \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{3}}$$

Ta có

$$\Delta MNP \text{ có diện tích } S(x) = \frac{1}{2} NM \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}}$$

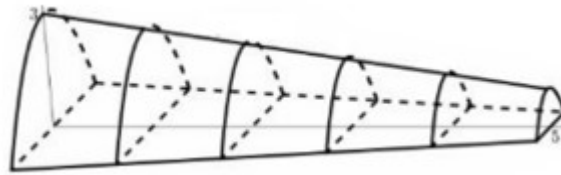
Thể tích hình nêm là

$$V_1 = \int_{-R}^R S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-R}^R = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$$

* **Chú ý:** Có thể ghi nhớ công thức tính thể tích hình nêm:

$$V_1 = \frac{2}{3} R^2 h = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha, \text{ trong đó } R = \frac{AB}{2}, \alpha = \angle PMN.$$

Câu 11. Cho một mô hình 3- D mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5(cm); khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



A. 29.

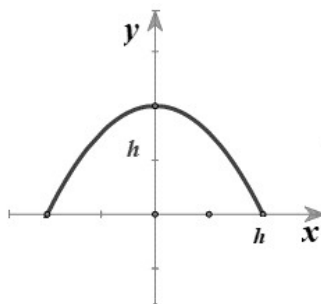
B. 27.

C. 31.

D. 33.

Lời giải

Chọn A



Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ trên.

Parabol (P) có phương trình $(P): y = ax^2 + h, (a < 0)$

$$\text{Có } B(h, 0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = ah^2 + h \Leftrightarrow a = -\frac{1}{h} \text{ (do } h > 0)$$

$$\text{Diện tích } S \text{ của thiết diện: } S = \int_{-h}^h \left(-\frac{1}{h}x^2 + h \right) dx = \frac{4h^2}{3}, \quad h = 3 - \frac{2}{5}x$$

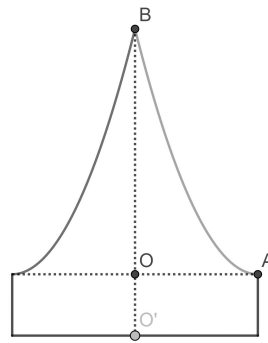
$$\Rightarrow S(x) = \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2$$

Suy ra thể tích không gian bên trong của đường hàm mô hình:

$$\Rightarrow V = \int_0^5 S(x) dx = \int_0^5 \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2 dx \approx 28,888$$

$$\Rightarrow V \approx 29 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Câu 12. Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Minh Hiền đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5 \text{ cm}$, $OA = 10 \text{ cm}$, $OB = 20 \text{ cm}$, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A . Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\frac{2750\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

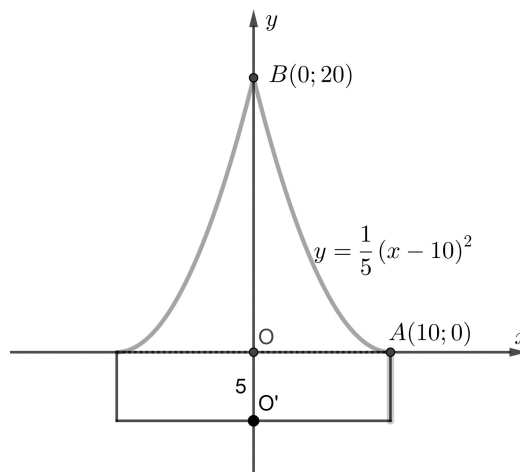
B. $\frac{2500\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

C. $\frac{2050\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

D. $\frac{2250\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

Lời giải

Chọn B



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V .

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10 \text{ cm}$ và đường cao $OO' = 5 \text{ cm}$ là V_1 .

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2 .

Ta có $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = 5 \cdot 10^2 \pi = 500\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x - 10)^2$.

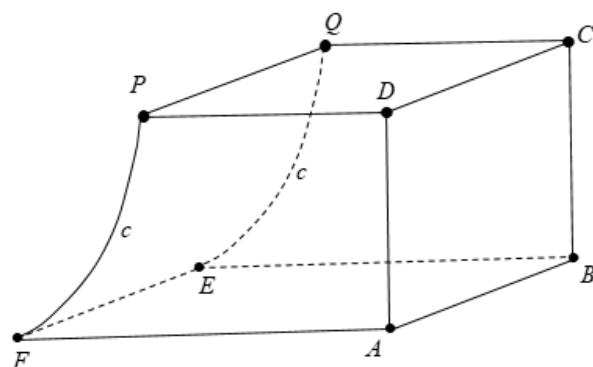
Vì (P) qua điểm $B(0; 20)$ nên $a = \frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \frac{1}{5}(x - 10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

$$\text{Suy ra } V_2 = \pi \int_0^{20} (10 - \sqrt{5y})^2 dy = \pi \left(3000 - \frac{8000}{3} \right) = \frac{1000}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{Do đó } V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3} \pi + 500\pi = \frac{2500}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Câu 13. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.



Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5 \text{ cm}$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5 \text{ cm}$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF . Thể tích của chi tiết máy bằng

A. $\frac{395}{24} \text{ cm}^3$

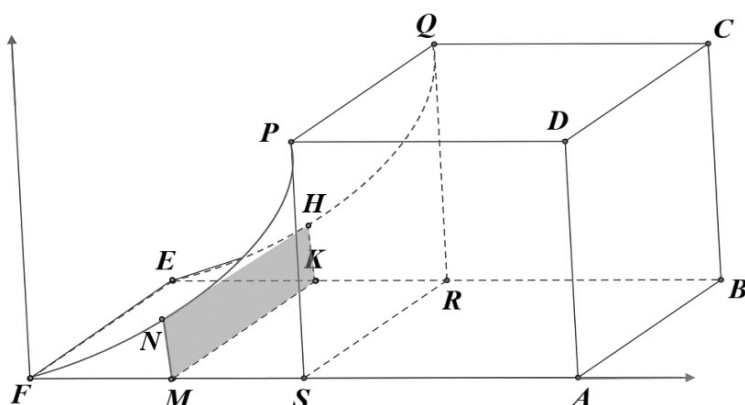
B. $\frac{50}{3} \text{ cm}^3$

C. $\frac{125}{8} \text{ cm}^3$

D. $\frac{425}{24} \text{ cm}^3$

Lời giải

Chọn D



Gọi hình chiếu của P, Q trên AF và BE là R và S .

Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh $2,5\text{ cm}$, thể tích $V_1 = \frac{125}{8}\text{ cm}^3$ và phần

còn lại có thể tích V_2 . Khi đó thể tích vật thể $V = V_1 + V_2 = \frac{125}{8} + V_2$.

Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho O trùng với F , Ox trùng với FA , Oy trùng với tia Fy song song với AD .

Khi đó Parabol (P) có phương trình dạng $y = ax^2$, đi qua điểm $P\left(1; \frac{5}{2}\right)$ do đó $a = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x^2$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox và đi qua điểm $M(x; 0; 0), 0 \leq x \leq 1$ ta được thiết diện là

hình chữ nhật $MNPK$ có cạnh là $MN = \frac{5}{2}x^2$ và $MK = \frac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x) = \frac{25}{4}x^2$

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2 = \int_0^1 \frac{25}{4}x^2 dx = \frac{25}{12}$

Từ đó $V = \frac{125}{8} + \frac{25}{12} = \frac{425}{24}\text{ cm}^3$

Câu 14. Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28 cm , trục nhỏ 25 cm . Biết cứ 1000 cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 183000 đồng.

B. 180000 đồng.

C. 185000 đồng.

D. 190000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Đường elip có trục lớn 28 cm , trục nhỏ 25 cm có phương trình
$$\frac{\left(\frac{25}{2}\right)^2}{y^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right)$$

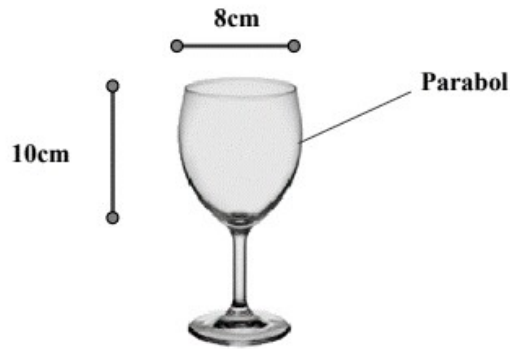
$$\Leftrightarrow y = \pm \frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}$$

Do đó thể tích quả dưa là
$$V = \pi \int_{-14}^{14} \left(\frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \int_{-14}^{14} \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 14^2}\right) \Big|_{-14}^{14} = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \frac{56}{3} = \frac{8750\pi}{3}\text{ cm}^3$$

Do đó tiền bán nước thu được là
$$\frac{8750\pi \cdot 20000}{3 \cdot 1000} \approx 183259 \text{ đồng.}$$

Câu 15. Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bỏ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân)



A. $V \approx 320cm^3$

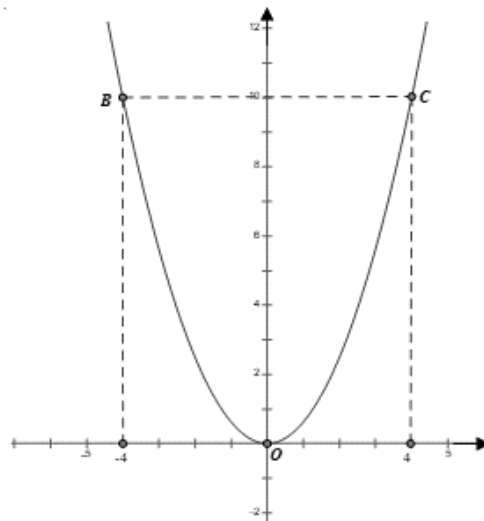
B. $V \approx 1005,31cm^3$

C. $V \approx 251,33cm^3$

D. $V \approx 502,65cm^3$

Lời giải

Chọn C



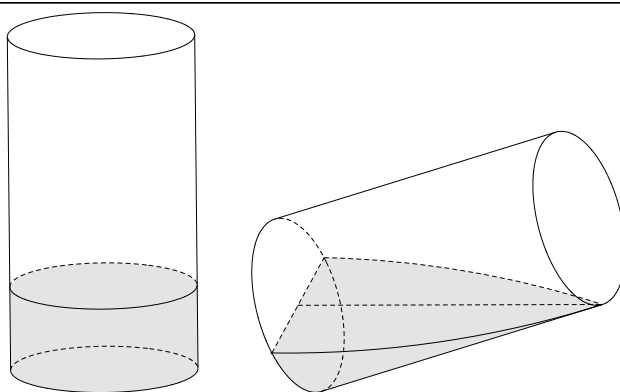
$$y = \frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}y$$

Parabol có phương trình

Thể tích tối đa cốc:

$$V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{8}{5}y \right) dy \approx 251,33$$

Câu 16. Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $6cm$, chiều cao lòng cốc là $10cm$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. 240 cm^3

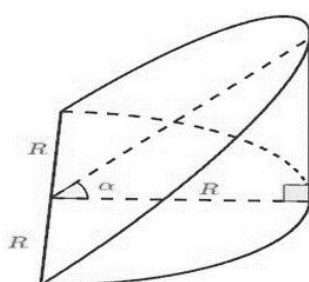
B. $240\pi \text{ cm}^3$

C. 120 cm^3

D. $120\pi \text{ cm}^3$

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có:

$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha$$

$$V = \frac{1}{2} \tan \alpha \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$$

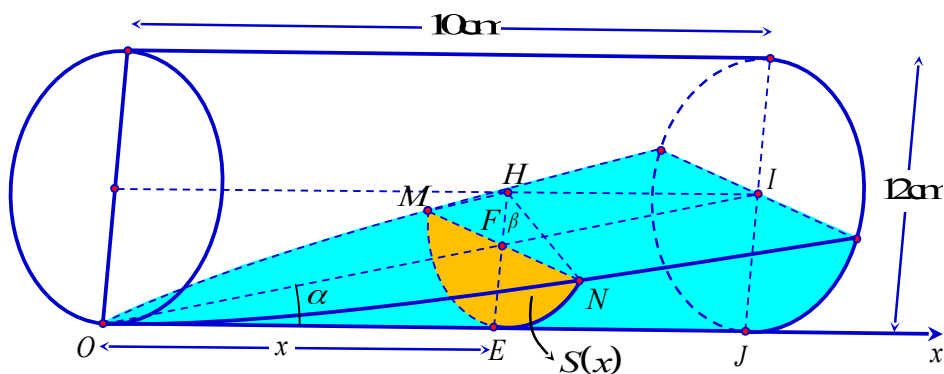
Thể tích hình cái nôm là:

$$V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$$

Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nôm nên

$$\Rightarrow V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{h}{R} = 240 \text{ cm}^3$$

Cách 2. Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$



Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện do mặt phẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h \geq x \geq 0$.

Gọi $\angle IOJ = \alpha, \angle PHN = \beta, OE = x$

$$\tan \alpha = \frac{IJ}{OJ} = \frac{6}{10} = \frac{EF}{OE} \Rightarrow EF = \frac{6x}{10} \Rightarrow HF = 6 - \frac{6x}{10}$$

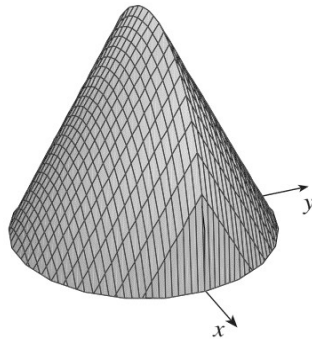
$$\cos \beta = \frac{HF}{HN} = \frac{6 - \frac{6x}{10}}{6} = 1 - \frac{x}{10}; \quad \beta = \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right)$$

$$S(x) = S_{(hình quạt)} - S_{HMN} = \frac{1}{2}HN^2 \cdot 2\beta - \frac{1}{2}HM \cdot HN \cdot \sin 2\beta$$

$$\Rightarrow S(x) = 6^2 \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \left(1 - \frac{x}{10}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{10}\right)^2}$$

$$\Rightarrow V = \int_0^{10} S(x) dx = \int_0^{10} \left[36 \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right) - 36 \left(1 - \frac{x}{10}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{10}\right)^2} \right] dx = 240$$

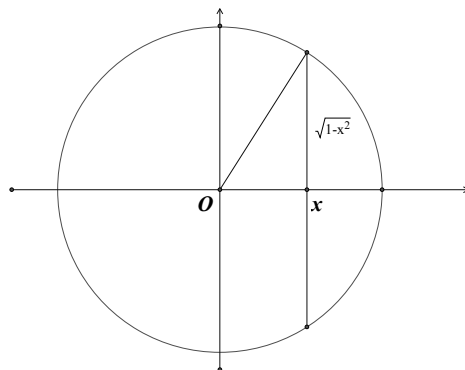
Câu 17. Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là



- A. $V = \sqrt{3}$. B. $V = 3\sqrt{3}$. C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \pi$.

Lời giải

Chọn C



Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O .

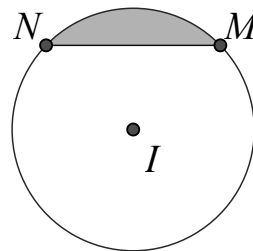
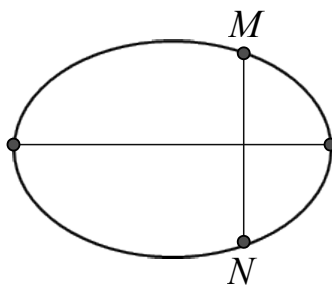
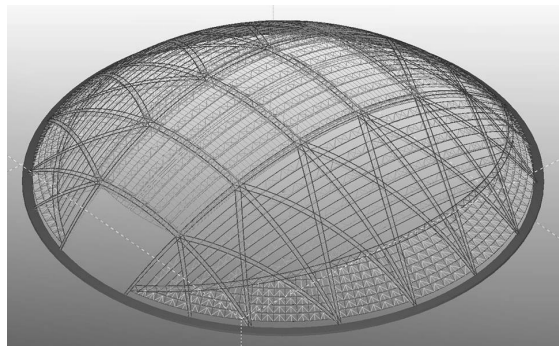
Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a = 2\sqrt{1 - x^2}$.

Diện tích tam giác thiết diện là: $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = (1 - x^2) \sqrt{3}$.

Thể tích khối cần tìm là:

$$V = 2 \int_0^1 S dx = 2 \int_0^1 \sqrt{3} (1 - x^2) dx = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Câu 18. Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\angle MIN = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?



A. $57793m^3$.

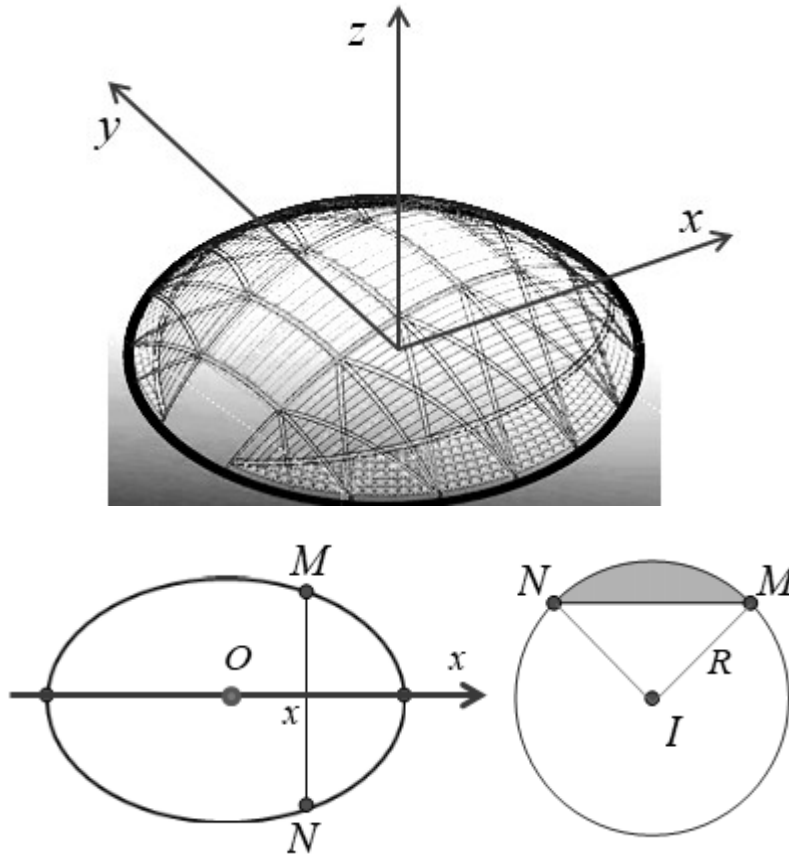
B. $115586m^3$.

C. $32162m^3$.

D. $101793m^3$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$ thiết diện.

Gọi $d(O, MN) = x$

$$(E): \frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1.$$

$$MN = 2y = 2\sqrt{45^2 \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$$

Lúc đó

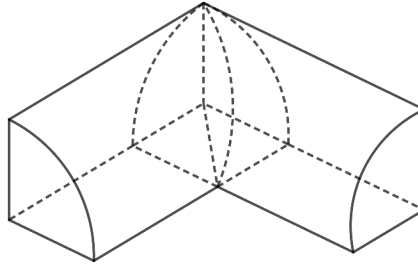
$$\Rightarrow R = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{90^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)$$

$$S(x) = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right)R^2 = (\pi - 2)\frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$$

Thể tích khoảng không cần tìm là

$$V = \int_{-75}^{75} (\pi - 2)\frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) dx \approx 115586 m^3.$$

Câu 19. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a , hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ sau. Tính thể tích của khối (H) .



A. $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$

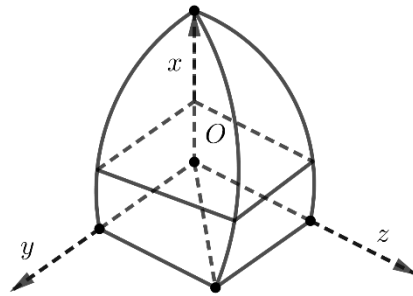
B. $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$

C. $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$

D. $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$

Lời giải

Chọn C



• Đặt hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ, xét mặt cắt song song với mp (Oyz) cắt trục Ox tại x : thiết diện mặt cắt luôn là hình vuông có cạnh $\sqrt{a^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq a$).

• Do đó thiết diện mặt cắt có diện tích: $S(x) = a^2 - x^2$.

• Vậy $V_{(H)} = \int_0^a S(x) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 20. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây.

Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

A. $1458m^3$

B. $600m^3$

C. $2200m^3$

D. $4200m^3$

Lời giải

Chọn A

$$\int_0^3 (6at^2 + 2bt) dt = 90 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90 \quad (1)$$

$$\int_0^6 (6at^2 + 2bt) dt = 504 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a + 36b = 504 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \end{cases}$. Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$$V = \int_0^9 (4t^2 + 12t) dt = \left(\frac{4}{3}t^3 + 6t^2 \right) \Big|_0^9 = 1458 (m^3)$$

Câu 21. Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280 cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của

chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

- A. 2 giờ 36 giây. B. 2 giờ 48 giây. C. 2 giờ 38 giây. D. 2 giờ 46 giây.

Lời giải

Chọn C

Gọi x là thời điểm bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của bể (x tính bằng giây).

Ta có:

$$\int_0^x \frac{1}{500} \sqrt[3]{t} dt = \frac{3}{4} \cdot 280$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} \Big|_0^x = 105000$$

$$\Rightarrow x^3 \sqrt[3]{x} = 140000$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^4} = 140000$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[4]{140000^3}$$

$$\Rightarrow x \approx 7237,6242 \text{ giây} \Rightarrow 2 \text{ giờ } 38 \text{ giây.}$$