

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (2,0 điểm)

$$A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

Cho biểu thức

- Tìm ĐKXĐ và rút gọn A
- Tìm các số nguyên x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Bài 2. (2,0 điểm)

Giải các phương trình và bất phương trình sau:

- $x + \frac{x-1}{m} < \frac{x+1}{m} - (m-2)x$ (với m là tham số, $m \neq 0$)
- $8 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2 - 4 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2$
- $(2x+3)^3 + (3x-5)^3 = (5x-2)^3 - (5x-2)(17x^2 + 2016x - 2063)$

Bài 3. (2,0 điểm)

- Tìm các số tự nhiên n để $B = (n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố
- Trong lớp học bạn An khi đã hoàn thành bài tập mà giáo viên giao cho thì đã giết thời gian bằng cách liệt kê ra một bảng các số nguyên. Bạn ấy bắt đầu ghi ra một số nguyên nào đó; để có số tiếp theo, An đã cộng hoặc nhân các chữ số của số đứng liền trước. Cứ tiếp tục như thế, và rồi nhận ra rằng các số mình ghi đều là số lẻ. Hỏi có bao nhiêu số đầu tiên An có thể chọn, biết rằng nó không quá 6 chữ số.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

- Tính tổng $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}$
- Chứng minh: $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$
- Chứng minh: Điểm H cách đều ba cạnh của tam giác DEF
- Trên các đoạn HB, HC lấy tương ứng các điểm M, N tùy ý sao cho $HM = CN$. Chứng minh: Đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số dương.

Chứng minh: $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXD:
$$\begin{cases} 2x^2 + 8 \neq 0 \\ 8 - 4x + 2x^2 - x^3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ thì:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left[\frac{x(x-2)}{2(x^2+4)} + \frac{2x^2}{(x^2+4)(x-2)} \right] \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \frac{x(x-2)^2 + 2x^2 \cdot 2}{2(x^2+4)(x-2)} \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \\ &= \frac{(x^2 - 4x + 4) + 4x^2}{2(x^2+4)} \cdot \frac{x+1}{x} \\ &= \frac{x^2 + 4}{2(x^2+4)} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{2x} \end{aligned}$$

Vậy, với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ thì $A = \frac{x+1}{2x}$

b) Xét với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} (*)$

Giả sử biểu thức A nhận giá trị nguyên thì biểu thức 2A cũng nhận giá trị nguyên

$$2A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2x+2}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$$

$x = -1; x = 1$ đều thỏa mãn $(*)$

Với $x = -1$ thì $A = \frac{-1+1}{2(-1)} = 0$ (thỏa mãn $A \in \mathbb{Z}$)

Với $x=1$ thì $A = \frac{1+1}{2 \cdot 1} = 2$ (thỏa mãn $A \in \mathbb{Z}$)

Vậy để biểu thức A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{-1; 1\}$

Câu 2.

$$a) \quad x + \frac{x-1}{m} < \frac{x+1}{m} - (m-2)x \Leftrightarrow (m-1)x < \frac{2}{m} \quad (2a)$$

+) Nếu $m < 1$ và $m \neq 0$ thì $m-1 < 0 \Rightarrow (2a) \Leftrightarrow x > \frac{2}{m(m-1)}$

+) Nếu $m > 1$ thì $m-1 > 0 \Rightarrow (2a) \Leftrightarrow x < \frac{2}{m(m-1)}$

+) Nếu $m = 1$ thì $m-1 = 0 \Rightarrow (2a) \Leftrightarrow 0x < 2$ (luôn đúng)

Kết luận:

+ Với $m < 1$ và $m \neq 0$ thì tập nghiệm BPT là $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{2}{m(m-1)} \right\}$

+ Với $m = 1$ thì tập nghiệm của BPT là $S = \mathbb{R}$

+ Với $m > 1$ thì tập nghiệm của BPT là: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x < \frac{2}{m(m-1)} \right\}$

$$b) \quad 8 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = (x+4)^2 - 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 \quad (2b)$$

Điều kiện $x \neq 0$, Khi đó:

$$(2b) \Leftrightarrow 8 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 - 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 \right] = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 8 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$$

Vì $x \neq 0$ nên $S = \{-8\}$

c) Trước hết chứng minh được rằng:

Nếu có 3 số a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$ (2c)

Ta có:

$$(2x+3)^3 + (3x-5)^3 = (5x-2)^3 - (5x-2)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)^3 + (3x-5)^3 + (2-5x)^3 = (2-5x)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

Áp dụng đẳng thức (2c) và vì $(2x+3) + (3x-5) + (2-5x) = 0$ nên phương trình đã cho tương đương với :

$$3(2x+3)(3x-5)(2-5x) = (2-5x)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

$$\Leftrightarrow (2-5x)[3(6x^2 - x - 15) - (17x^2 + 2016x - 2063)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-5x)(x^2 - 2019x + 2018) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-5x)(x-1)(x-2018) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ x = 1 \\ x = 2018 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{2}{5}; 1; 2018 \right\}$

Câu 3.

a) Ta có:

$$B = (n^2 - 8)^2 + 36 = n^4 - 16n^2 + 64 + 36$$

$$= n^4 + 20n^2 + 100 - 36n^2$$

$$= (n^2 + 10)^2 - (6n)^2$$

$$= (n^2 - 6n + 10)(n^2 + 6n + 10)$$

Với $n \in \mathbb{N}$ thì $0 < n^2 - 6n + 10 \leq n^2 + 6n + 10$

Nên để B là số nguyên tố thì trước hết $n^2 - 6n + 10 = 1$

Hay $(n-3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 3$

Thử lại, với $n = 3$ thì $B = (3^2 - 8)^2 + 36 = 37$

37 là số nguyên tố nên $n = 3$ là giá trị cần tìm

b) Ta gọi số đầu tiên thỏa mãn đề bài là số chấp nhận được. Các chữ số của số chấp nhận đều phải là số lẻ, vì nếu không tích của chúng sẽ chẵn

Như vậy có 5 số chấp nhận được có 1 chữ số

Không thể có số chấp nhận được gồm 2 chữ số vì thế thì tổng hoặc tích các chữ số của chúng sẽ là số chẵn. Tương tự như vậy số chấp nhận được cũng không thể có 4 hoặc 6 chữ số.

Ta xét các số chấp nhận được gồm ba chữ số (tổng và tích các chữ số của các số chấp nhận được gồm ba chữ số này phải là số lẻ, và chúng không thể có hai chữ số, nên và tổng và tích các chữ số không thể vượt quá 9. Như vậy số chấp nhận được gồm 3 chữ số có thể:

Hoặc là gồm 3 chữ số 1,

Hoặc là gồm hai chữ số 1, số còn lại là 1 trong 3 chữ số 3,5,7

Hoặc gồm 1 chữ số 1 và 2 chữ số 3

Do đó có $1 + 9 + 3 = 13$ số chấp nhận được có 3 chữ số.

Tương tự như thế, ta tính được số chấp nhận được gồm 5 chữ số. Tổng các chữ số không vượt quá 45 và là số chấp nhận được nên tích không vượt quá 9, khả năng xảy ra là :

Hoặc gồm 5 chữ số 1

Hoặc gồm 4 chữ số 1 và một chữ số 3

Hoặc gồm 4 chữ số 1 và một chữ số 5

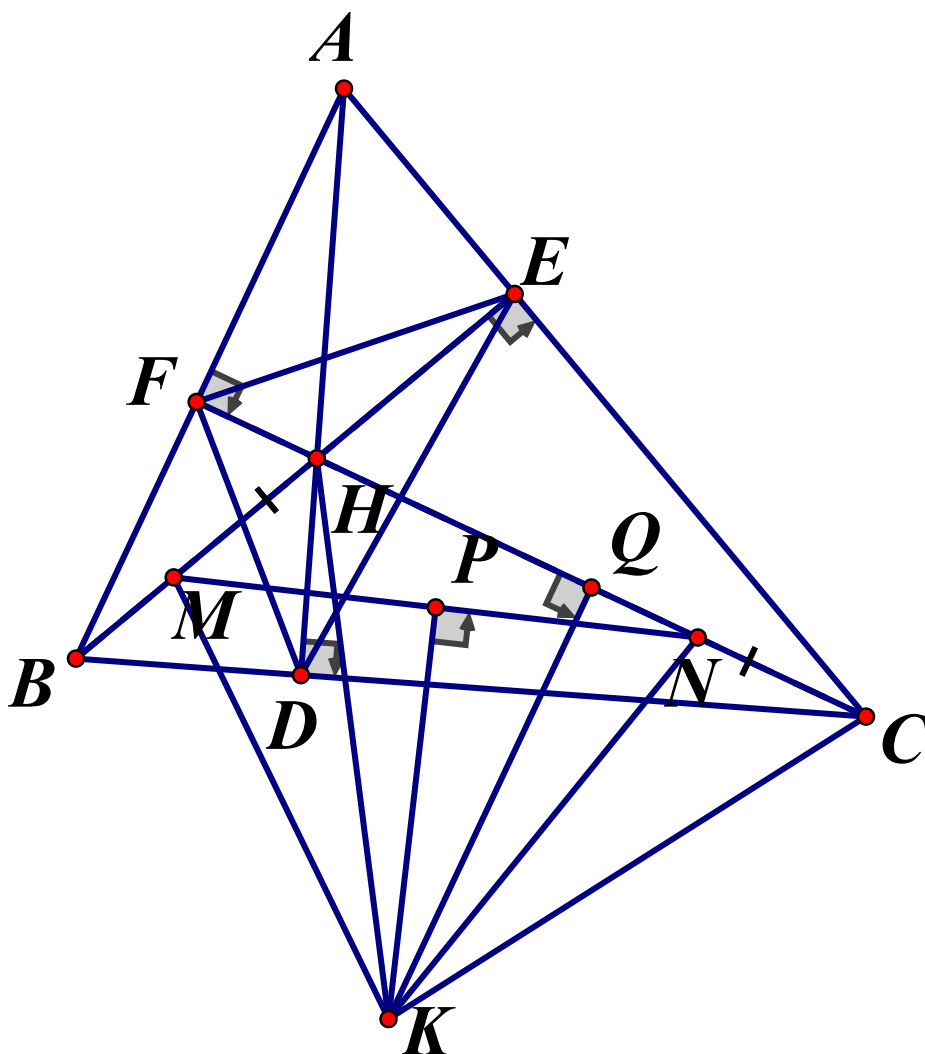
Hoặc gồm ba chữ số 1 và hai chữ số 3

Do đó số các số chấp nhận được gồm 5 chữ số:

$1 + 5 + 5 + 10 = 21$ số

Vậy số các số thỏa mãn đề bài là: $5 + 13 + 21 = 39$ số

Câu 4.



a) Trước hết chứng minh : $\frac{HD}{AD} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự có: $\frac{HE}{BE} = \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}}, \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$$

Nên

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$$

Vậy

b) Trước hết chứng minh: $\triangle BDH \sim \triangle BEC \Rightarrow BH \cdot BE = BD \cdot BC$

Và $\Delta CDH \sim \Delta CFB \Rightarrow CH.CF = CD.BC$
 $\Rightarrow BH.BE + CH.CF = BC.(BD + CD) = BC^2$

c) Trước hết chứng minh $\Delta AEB \sim \Delta AFC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$. Mặt khác $\angle EAF = \angle BAC$
 Nên $\Delta AEF \sim \Delta ABC (c.g.c) \Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$

Chứng minh tương tự, ta có: $\Delta CDE \sim \Delta CAB \Rightarrow \angle CED = \angle CBA$
 $\Rightarrow \angle AEF = \angle CED$ mà $EB \perp AC$ nên EB là phân giác của góc DEF

Tương tự: DA, FC là phân giác của các góc $\angle EDF, \angle DFE$

Vậy H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

Nên H cách đều ba cạnh của tam giác DEF

d) Gọi K là giao điểm của các đường trung trực của hai đoạn MN và HC, ta có

$$\Delta KMH = \Delta KNC (c.c.c) \Rightarrow \angle KHM = \angle KNC \quad (1)$$

Mặt khác ta cũng có: ΔKCH cân tại K nên: $\angle KHC = \angle KCH \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\angle KHC = \angle KHB \Rightarrow HK$ là phân giác của góc BHC

Vậy K là giao điểm của trung trực đoạn HC và phân giác của góc BHC nên K là điểm cố định

Hay trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định là K

Câu 5.

Áp dụng BĐT Cô si cho ba số dương ta được:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}} \quad (*)$$

Cũng theo BĐT Cô si :

$$0 < 3^3 abc \leq (a+b+c)^3 \quad (1) \quad \text{và} \quad 0 < 3^3.(a+b)(b+c)(c+a) \leq 8(a+b+c)^3 \quad (2)$$

Nhân tương ứng hai vế các BĐT (1) và (2) được:

$$3^6 abc(a+b)(b+c)(c+a) \leq 8(a+b+c)^6$$

Hay $\frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2} \quad (**)$

Từ (*) và (**) suy ra $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$