**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH**

 **HUYỆN GIA LÂM LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024**

 **MÔN THI: TOÁN**

 **ĐỀ CHÍNH THỨC**

**Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề**

 **(Đề thi có 1 trang)**

Câu 1: (5,0 điểm)

a) Cho  là các số thực thỏa mãn  và . Chứng minh rằng ít nhất một trong ba số  bằng 1.

b) Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng  là hợp số.

Bài 2: (5,0 điểm)

a) Giải phương trình: .

b) Giải hệ phương trình: .

Bài 3: (2,0 điểm)

Cho  thỏa mãn .

Tìm giá trị lớn nhất của: .

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác  nhọn nội tiếp đường tròn tâm . Các đường cao  của tam giác  đồng quy tại 

a) Chứng minh rằng: .

b)  là điểm thuộc cung nhỏ  của đường tròn . Gọi , I lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  và . Chứng minh rằng  vuông góc với .

Bài 5: (2,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên tố  sao cho  là lập phương của một số tự nhiên

b) Cho 5 số thực không âm  có tổng bằng 1 . Xếp 5 số này trên một đường tròn. Chứng minh rằng luôn tồn tại một cách xếp sao cho hai số bất kì cạnh nhau có diện tích không lớn hơn .

**ĐÁP ÁN**

Câu 1:

1) Ta có



Vậy có ít nhất một số bằng 1.

2) Ta có:



Do 

Mặt khác ta chứng minh được  nên  là hợp số.

Câu 2:

1) Do vế phải của phương trình luôn dương nên .

.

Dấu "=" xảy ra khi  nên phương trình có nghiệm duy nhất .

2) Thay phương trình (2) vào phương trình (1) được:

.

Thay  vào phương trình (2) ta được:  nên .

Vậy hệ có nghiệm .

Câu 3:

Ta có: 

Chứng minh tương tự ta được:

.

Đẳng thức xảy ra khi .

Câu 4:

Chứng minh: .

Chứng minh tương tự ta được:



a) Dựng đường kính . Dẫn đến  (góc nội tiếp chắn đường kính). Dẫn đến  vuông góc . Sau đó chứng minh tứ giác  là hình bình hành.  là trung điểm của . Suy ra  là đường trung bình của tam giác . Thành ra  song song với . Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5:

a) Từ giả thiết suy ra tồn tại số tự nhiên a sao cho , hay là . Nếu  thì  thoả mãn. Nếu  thì  lẻ. Từ giả thiết suy ra  là ước của  hoặc  là ước của . Giờ xét từng trường hợp. Nếu  là ước của  thì do  nên  thay vào phương trình  ta được phương trình , vô nghiệm.

Nếu  là ước của  thì ta có thể chọn được số nguyên dương  sao cho . Cũng thay trở lại phương trình  cho ta , hay .

Bây giờ thay vào phương trình  cho ta .

Coi đây là một phương trình bậc hai ẩn a, tính biệt thức cho ta .

Ta cần tìm  sao cho  là một số chính phương viết theo .

Chú ý bất đẳng thức: .

Từ đó, . Do đó,  và dẫn đến .

Vậy .

b) Giả sử năm số đó là .Ta phải có  vì nếu ngược lại  thì ta có  dẫn đến . Cái này dẫn đến điều vô lý . Vậy nên . Mặt khác . Thành ra, . Dẫn đến . Ta có thể xếp các số  trên đường tròn theo thứ tự thuận kim đồng hồ. Ta có , ea . Số  là số nhỏ nhất có thể.