# **BÀI 26: KHOẢNG CÁCH**

## **A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM**

**1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG**

**HĐ1.**

a) Cho điểm  và đường thẳng . Gọi  là hình chiếu của  trên . Với mỗi điểm  thuộc , giải thích vì sao .



b) Cho điểm  và mặt phẳng . Gọi  là hình chiếu của  trên . Với mỗi điểm  thuộc , giải thích vì sao .



** Lời giải**

* Khoảng cách từ một điểm  đến một đường thẳng , kí hiệu , là khoảng cách giữa  và hình chiếu  của  trên .
* Khoảng cách từ một điểm  đến một mặt phẳng , kí hiệu  ), là khoảng cách giữa  và hình chiếu  của  trên .

**Chú ý.**  khi và chỉ khi  khi và chỉ khi . khi và chỉ khi  khi và chỉ khi .
**Nhận xét.** Khoảng cách từ  đến đường thẳng (mặt phẳng  ) là khoảng cách nhỏ nhất giữa  và một điểm thuộc  (thuộc  ).

**Chú ý.** Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là chiều cao của hình chóp đó.

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp đều . Biết độ dài cạnh đáy, cạnh bên tương ứng bằng . Tính chiều cao của hình chóp.

** Lời giải**

**Luyện tập 1** Cho hình lăng trụ đứng  là tam giác vuông cân tại .
a) Tính khoảng cách từ  đến mặt phẳng .
b) Tam giác  là tam giác gì? Tính khoảng cách từ  đến .



** Lời giải**

**2. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG, GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG**

**HĐ2.** Cho đường thẳng  song song với mặt phẳng . Lấy hai điểm  bất kì thuộc  và gọi  tương ứng là các hình chiếu của chúng trên .
Giải thích vì sao  là một hình chữ nhật và  có cùng khoảng cách đến .



** Lời giải**

Khoảng cách giữa đường thẳng  và mặt phẳng  song song với , kí hiệu  ), là khoảng cách từ một điểm bất kì trên  đến .

**HĐ3.** a) Cho hai đường thẳng  và  song song với nhau. Khi một điểm  thay đổi trên  thì khoảng cách từ nó đến đường thẳng  có thay đổi hay không?
b) Cho hai mặt phẳng song song  và  và một điểm  thay đổi trên . Hỏi khoảng cách từ  đến (  ) thay đổi thế nào khi  thay đổi.



** Lời giải**

* Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song  và , kí hiệu , là khoảng cách từ một điềm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
* Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song  và , kí hiệu , là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

**Chú ý.** Khoảng cách giữa hai đáy của một hình lăng trụ được gọi là chiều cao của hình läng trụ đó.
**Ví dụ 2.** Cho một hình hộp đứng , đáy là các hình thoi có cạnh bằng .
Tính các khoảng cách giữa  và  và .

** Lời giải**

**Luyện tập 2.** Cho hình chóp  có . Gọi  tương ứng là trung điểm của .
a) Tính  và .
b) Giả sử tam giác  vuông tại  và .Tính .



** Lời giải**

**Vận dụng.** Ở một con dốc lên cầu, người ta đặt một khung khống chế chiều cao, hai cột của khung có phương thẳng đứng và có chiều dài bằng . Đường thẳng nối hai chân cột vuông góc với hai đường mép dốc. Thanh ngang được đặt trên đỉnh hai cột. Biết dốc nghiêng  so phương nằm ngang. Tính khoảng cách giữa thanh ngang của khung và mặt đường (theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai). Hỏi cầu này có cho phép xe cao 2,21 m đi qua hay không?



** Lời giải**

**3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU**

**HĐ4.** Cho hai đường thẳng chéo nhau  và . Gọi  là mặt phẳng chứa đường thẳng  và song song với . Hình chiếu  của  trên  cắt  tại . Gọi  là hình chiếu của  trên  (H.7.83).
a) Mặt phẳng chứa  và  có vuông góc với  hay không?
b) Đường thẳng  có vuông góc với cả hai đường thẳng  và  hay không?
c) Nêu mối quan hệ của khoảng cách giữa  và độ dài đoạn thẳng .



** Lời giải**

Đường thẳng  cắt hai đường thằng chéo nhau  và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là đường vuông góc chung của  và .
Nếu đường vuông góc chung  cắt  tương ứng tại ,  thì độ dài đoạn thẳng  được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau .



**Nhận xét**

* Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại .



* Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, tương ứng chứa hai đường thẳng đó (H.7.86).



**Ví dụ 3.** Cho hình chóp  có . Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  và .
** Lời giải**

**Khám phá.** Cho đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng  và cắt  tại . Cho đường thẳng  thuộc mặt phẳng . Hãy tìm mối quan hệ giữa khoảng cách giữa  và khoảng cách từ  đến .



** Lời giải**

**Luyện tập 3.** Cho hình chóp  có đáy là hình vuông cạnh .
a) Tính khoảng cách từ  đến .
b) Chứng minh rằng .
c) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa  và .

** Lời giải**

## **B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**

## **Dạng 1: Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng**

### **1. Phương pháp:**

|  |  |
| --- | --- |
|  **①.** Xác định hình chiếu H của A trên d **②.** Khi đó ta có: **③**. Tính độ dài AH bằng kiến thức hình học phẳng cơ bản, các định lý và hệ thức lượng trong tam giác. |  |

### **2. Các ví dụ**

**Ví dụ 1:** Cho hình chóp  có  vuông góc với mặt phẳng ,  là hình thang vuông có đáy lớn  gấp đôi đáy nhỏ , đồng thời đường cao . Biết . Tính khoảng cách từ đỉnh  đến đường thẳng 

** Lời giải**

**Ví dụ 2:** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh ,  và . Tính khoảng cách từ  đến đường thẳng .

** Lời giải**

**Ví dụ 3:** Cho hình chóp có đáy là tam giác vuông tại , cạnh bên vuông góc với đáy và ,. Gọi là điểm thuộc sao cho . Tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng .

** Lời giải**

##  **Dạng 2: Tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng**

### **1. Phương pháp:**

* Để tính được khoảng từ điểm đến mặt phẳng thì điều quan trọng nhất là ta phải xác định được hình chiếu của điểm  trên .

**①.** A là chân đường cao, tức là .



**🞟.** Dựng  và .

**🞟.** Dựng 

**②.** Dựng đường thẳng .



 **🞟.** Khi đó ta có: .

**③.**Đường thẳng AB cắt  tại I:



 **🞟.** Khi đó ta có: 

### **2. Các ví dụ**

**Ví dụ 1:** Cho hình chóp  có đáy  là tam giác đều cạnh . Cạnh bên  và vuông góc với mặt đáy . Tính khoảng cách  từ  đến mặt phẳng .

** Lời giải**

Ví dụ 2: Cho hình chóp  có đáy  là tam giác vuông tại , . Tam giác  đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách  từ  đến mặt phẳng .

** Lời giải**

**Ví dụ 3:** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh , các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng . Tính khoảng cách  từ  đến mặt phẳng .

** Lời giải**

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác *ABC* có . Biết .

a) Tính khoảng cách từ *C* đến mặt phẳng .

b) Tính khoảng cách từ *B* đến mặt phẳng .

** Lời giải**

**Ví dụ 5.** Cho hình *chóp S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật với . Tam giác *SAB* cân tại *S* và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *H* làtrung điểm của *AB*.

a) Tính khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng

b) Tính khoảng cách từ *D* đến mặt phẳng.

** Lời giải**

**Ví dụ 6.** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang vuông tại *A* và *B* có . Biết .

a) Tính khoảng cách từ *C* đến mặt phẳng .

b) Tính khoảng cách từ *D* đến mặt phẳng .

** Lời giải**

## **Dạng 3: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**

### **1. Phương pháp:**

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

• *Cách 1:* Dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và song song với b. Khoảng cách từ b đến (P) là khoảng cách cần tìm.

• *Cách 2:*Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm.

• *Cách 3:* Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó.

**Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:**

|  |  |
| --- | --- |
| • *Cách 1:* Khi +Dựng một  tại H.+ Trong (P) dựng  tại K.+ Đoạn HK là đoạn vuông góc chung của a và b.• *Cách 2:*+ Dựng .+ Dựng , bằng cách lấy  dựng đoạn , lúc đó a’ là đường thẳng đi qua N và song song a.+ Gọi , dựng HK là đoạn vuông góc chung.• *Cách 3:*+ Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với a tại điểm M.+ Dựng hình chiếu b’ của b trên (P).+ Dựng hình chiếu vuông góc H của M trên b’.+ Từ H dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại điểm B. |  |

+ Qua B dựng đường thẳng song song với MH, cắt a tại điểm A. Khi đó, AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

### **2. Các ví dụ**

**Ví dụ 1:** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông với . Cạnh bên  vuông góc với đáy,  hợp với đáy góc . Tính khoảng cách  giữa hai đường thẳng  và .

** Lời giải**

**Ví dụ 2:** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông tâm , cạnh . Cạnh bên  vuông góc với đáy, góc . Tính khoảng cách  giữa hai đường thẳng  và .

** Lời giải**

**Ví dụ 3:** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông tâm , cạnh bằng . Đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng đáy  và . Tính khoảng cách  giữa hai đường thẳng  và .

** Lời giải**

**Ví dụ 4:** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh , tâm . Cạnh bên  và vuông góc với mặt đáy . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của cạnh  và . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  và .

** Lời giải**

**Ví dụ 5:** Cho hình lăng trụ  có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng . Hình chiếu vuông góc của  lên mặt phẳng  trùng với trung điểm  của . Tính khoảng cách  giữa hai đường thẳng  và .

** Lời giải**

## **C. GIẢI BÀl TẬP SÁCH GIÁO KHOA**

**Bài 7.22.** Cho hình chóp  có đáy là một hình vuông cạnh , mặt bên  là một tam giác đều và .
a) Tính chiều cao của hình chóp.
b) Tính khoảng cách giữa  và .
c) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa  và .

** Lời giải**

**Bài 7.23.** Cho hình hộp chữ nhật  có .
a) Tính khoảng cách giữa  và .
b) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa  và .

** Lời giải**

**Bài 7.24.** Cho tứ diện  có các cạnh đều bằng . Gọi  tương ứng là trung điểm của các cạnh . Chứng minh rằng:
a)  là đường vuông góc chung của  và .
b) Các cặp cạnh đối diện trong tứ diện  đều vuông góc với nhau.

** Lời giải**

**Bài 7.25.** Cho hình lập phương  có cạnh a.
a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng  và  song song với nhau và  vuông góc với hai mặt phẳng đó.
b) Xác định các giao điềm  của  với . Tính .

** Lời giải**

**Bài 7.26.** Giá đỡ ba chân ở Hình 7.90 đang được mở sao cho ba gốc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 110cm . Tính chiều cao của giá đỡ, biết các chân của giá đỡ dài 129cm.

** Lời giải**

**Bài 7.27.** Một bể nước có đáy thuộc mặt phẳng nằm ngang. Trong trường hợp này, độ sâu của bể là khoảng cách giữa mặt nước và đáy bể. Giải thích vì sao để đo độ sâu của bể, ta có thể thả quả dọi chạm đáy bể và đo chiều dài của đoạn dây dọi nằm trong bể nước.

** Lời giải**

## **D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1:** Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật có . Cạnh bên  và vuông góc với mặt đáy . Tính khoảng cách  từ  đến mặt phẳng .

**A.** . **B.** . **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 2:** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh bằng . Tam giác  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy . Tính khoảng cách  từ  đến .

**A.** . **B.** . **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 3:** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông tâm  cạnh . Cạnh bên  và vuông góc với đáy . Tính khoảng cách  từ điểm  đến mặt phẳng .

**A.** . **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 4:** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông tâm , cạnh  Cạnh bên  và vuông góc với mặt đáy  Tính khoảng cách  từ  đến mặt phẳng 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 5:** Cho hình chóp tam giác đều  có cạnh đáy bằng  và cạnh bên bằng . Tính khoảng cách  từ đỉnh  đến mặt phẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 6:** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh bằng . Cạnh bên  vuông góc với đáy,  hợp với mặt đáy một góc . Tính khoảng cách  từ điểm  đến mặt phẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 7:** Cho hình chóp tứ giác đều  có cạnh đáy bằng , cạnh bên hợp với mặt đáy một góc . Tính khoảng cách  từ  đến mặt phẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 8:** Cho hình chóp  có đáy  là tam giác đều cạnh ,  vuông góc với mặt phẳng ; góc giữa đường thẳng  và mặt phẳng  bằng . Gọi  là trung điểm của cạnh . Tính khoảng cách  từ  đến mặt phẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 9:** Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật với . Đỉnh  cách đều các điểm . Tính khoảng cách  từ trung điểm  của  đến mặt phẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 10:** Cho hình chóp  có đáy  là hình thang vuông tại  và ,  . Đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng . Gọi  là trung điểm của cạnh . Tính khoảng cách  từ điểm  đến mặt phẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 11:** Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật với . Cạnh bên  vuông góc với đáy, góc giữa  với đáy bằng  Tính khoảng cách  từ điểm  đến mặt phẳng  theo .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 12:** Cho hình chóp  có đáy  là hình thang vuông tại  và . Cạnh bên  vuông góc với đáy, , . Tính khoảng cách  từ điểm  đến mặt phẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 13:** Cho hình chóp  có đáy  là hình thoi cạnh . Tam giác  đều, hình chiếu vuông góc  của đỉnh  trên mặt phẳng  trùng với trọng tâm của tam giác . Đường thẳng  hợp với mặt phẳng  góc . Tính khoảng cách  từ  đến mặt phẳng  theo .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 14:** Cho hình chóp  có đáy  là hình thang vuông tại  và  với . Cạnh bên  và vuông góc với mặt phẳng . Tính khoảng cách  từ điểm  đến mặt phẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 15:** Cho hình chóp  có đáy  là hình chữ nhật với . Cạnh bên  và vuông góc với đáy. Gọi  lần lượt là trung điểm của  và . Tính khoảng cách  từ  đến mặt phẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 16:** Cho hình lập phương  có cạnh bằng . Tính khoảng cách  từ điểm  đến mặt phẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 17:** Cho hình hộp chữ nhật  có đáy  là hình vuông cạnh , . Tính khoảng cách  giữa hai đường thẳng  và .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 18:** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông tâm , cạnh bằng . Cạnh bên . Hình chiếu vuông góc của đỉnh  trên mặt phẳng  là trung điểm của  của đoạn thẳng . Tính khoảng cách  giữa các đường thẳng  và .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 19:** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh bằng . Cạnh bện  vuông góc với mặt phẳng  và . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và . Tính khoảng cách  giữa  và .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 20:** Cho hình chóp  có đáy  là tam giác vuông tại , , . Cạnh bên  vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa  và đáy bằng . Gọi  là trung điểm của , tính khoảng cách  giữa hai đường thẳng  và .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 21:** Cho hình chóp  có đáy  là hình vuông cạnh , tam giác  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách  giữa hai đường thẳng  và .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 22:** Cho hình chóp  có đáy  là hình thang vuông tại  và  với , . Hai mặt phẳng  và  cùng vuông góc với đáy. Góc giữa  và mặt đáy bằng . Tính khoảng cách  giữa hai đường thẳng  và .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 23:** Tính khoảng cách  giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 24:** Cho hình lập phương  cạnh . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?

**A.** Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng  bằng 

**B.** Độ dài đoạn  bằng 

**C.** Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng  bằng 

**D.** Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng  bằng 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 25:** Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh  bằng:

**A. ** **B.**  **C.**  **D. **

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 26:** Cho hình chóp tam giác đều  có cạnh đáy bằng , cạnh bên bằng . Khoảng cách từ đỉnh  đến mặt phẳng đáy là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**

**Câu 27:** Cho hình hộp chữ nhật  có ba kích thước , , . Trong các kết quả sau đây, kết quả nào là sai?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Lời giải**

**🖎**