

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT ĐỀ SỐ 17

Câu 1: Cho số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 2 + i| = |\bar{z} + 3 - 4i|$ và $z(2 + 3i) + 2y + 1 - (y + 1)i$ là số thuần ảo. Giá trị của $11x + 11y$ bằng

A. - 16.

B. 28.

C. 16.

D. - 28.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$z(2 + 3i) + 2y + 1 - (y + 1)i = 2x - y + 1 + (3x + y - 1)i$$

Do $z(2 + 3i) + 2y + 1 - (y + 1)i$ là số thuần ảo nên $2x - y + 1 = 0$

Mặt khác: $|z - 2 + i| = |\bar{z} + 3 - 4i| \Leftrightarrow 5x + 3y + 10 = 0$

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 5x + 3y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{11} \\ y = -\frac{25}{11} \end{cases}$$

Do đó, ta có hệ phương trình

Vậy $11x + 11y = -28$.

Câu 2: Cho hình hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{7}a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

A. $\frac{\sqrt{14}a}{3}$.

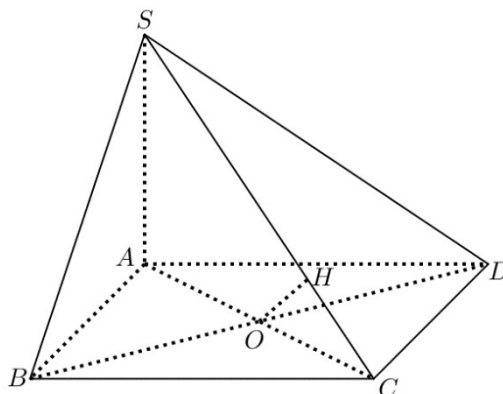
B. $\frac{\sqrt{14}a}{6}$.

C. $\sqrt{14}a$.

D. $\frac{\sqrt{14}a}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$ và H là hình chiếu của O lên SC , hay $OH \perp SC$.

Ta có $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OH$. Khi đó $d(BD, SC) = OH$.

Ta có $OH = OC \cdot \sin \angle SCA = OC \cdot \frac{SA}{SC} = \frac{OC \cdot SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{7}a}{\sqrt{7a^2 + 2a^2}} = \frac{\sqrt{14}a}{6}$

Câu 3: Cho hình nón có đường sinh bằng a và góc ở đỉnh bằng 90° . Cắt hình nón đó bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và tạo với mặt đáy của hình nón một góc 60° ta được một thiết diện có diện tích bằng

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$

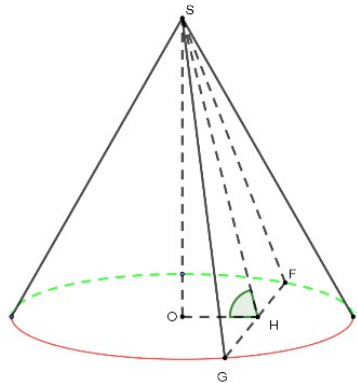
B. $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$

D. $\frac{a^2\sqrt{6}}{3}$

Lời giải

Chọn A



Gọi ΔSFG là thiết diện cần tìm và H là trung điểm FG .

Ta có: $SA = a$ và $\angle SOA = 45^\circ$ nên $OS = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔOSH có $\angle SHO = 60^\circ$ nên $OH = OS \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ và $SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Do ΔOHG vuông tại H nên $GH = \sqrt{OG^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy nên $GF = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ suy ra $S_{\Delta SFG} = \frac{1}{2} SH \cdot FG = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$, $B(7; -2; 2)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng Δ , khoảng cách từ A đến (P) gấp đôi khoảng cách từ B đến (P) và A, B nằm khác phía so với (P) . Biết rằng phương trình (P) có dạng $ax + by + cz - 28 = 0$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. -26

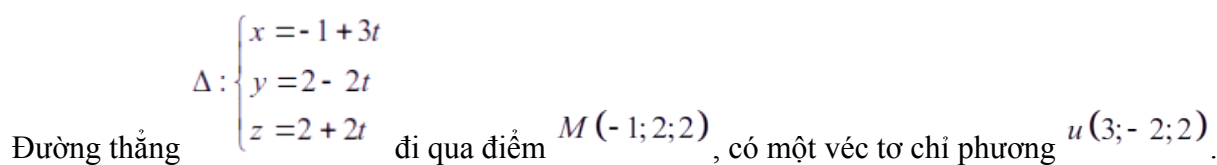
B. 26

C. -34

D. 34

Lời giải

Chọn B



+) Do mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ nên:
$$\begin{cases} M \in (P) \\ u \perp n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ u.n = 0 \end{cases}$$

+) Khoảng cách từ A đến $^{(P)}$ gấp đôi khoảng cách từ B đến $^{(P)}$, suy ra:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c-28=2(7a-2b+2c-28) \\ a+b-c-28=-2(7a-2b+2c-28) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a-5b+5c=28 & (2) \\ 15a-3b+3c=84 & (3) \end{cases}$$

A, B nằm cùng phía so với (P) .

khác phía so với (P) .

Câu 5: Bạn An được gia đình gửi vào sổ tiết kiệm 200 triệu đồng với lãi suất $0,5\%$ một tháng theo hình thức lãi kép. Nếu mỗi tháng An rút ra một số tiền như nhau vào ngày ngân hàng trả lãi thì hàng tháng An rút ra số tiền gần nhất với số nào sau đây để đúng sau 4 năm vừa hết số tiền trong sổ tiết kiệm?

- A. 4687000 đồng. B. 4697000 đồng. C. 4690000 đồng. D. 4700000 đồng.

Lời giải

Chọn B

Cuối tháng thứ nhất, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là $T_1 = A(1+r)$ và sau khi rút số tiền còn lại là:

$$S_1 = A(1+r) - X = A(1+r) - X \frac{(1+r) - 1}{r} \quad (X \text{ là số tiền rút hằng tháng})$$

Cuối tháng thứ hai, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là:

$$T_2 = [A(1+r) - X](1+r) = A(1+r)^2 - X(1+r)$$

Và sau khi rút, số tiền còn lại là:

$$S_2 = A(1+r)^2 - X(1+r) - X = A(1+r)^2 - X[(1+r) + 1] = A(1+r)^2 - X \frac{(1+r)^2 - 1}{r}$$

Do đó ta có công thức tổng quát số tiền còn lại n sau tháng là:

$$S_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} \Rightarrow X = [A(1+r)^n - S_n] \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1}$$

Áp dụng công thức. Ta có sau 4 năm rút hết tiền tiết kiệm nên $n=48, S_n=0$

$$X = [200 \cdot 10^6 (1+0.005)^{48} - 0] \cdot \frac{0.005}{(1+0.005)^{48} - 1} \approx 4697000$$

Suy ra: đồng.

Câu 6: Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 + i| = 1, |z_2 + 1 - i| = 2$ và $|z_1 - z_2 - 2 + 2i| = \sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của $|3z_1 + 2z_2 - 1 - 5i|$ bằng

- A. $6 + \sqrt{37}$ B. $5 + \sqrt{23}$ C. $6 + \sqrt{11}$ D. $6 + \sqrt{13}$

Lời giải

Chọn A.

Đặt $u = z_1 - 1 + i, v = z_2 + 1 - i$. Từ giả thiết ta có: $|u| = 1, |v| = 2, |u - v| = \sqrt{3}$

Khi đó, bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất $|3u + 2v - 6i|$.

Ta có: $|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - (u\bar{v} + \bar{u}v) \Leftrightarrow u\bar{v} + \bar{u}v = 2$

Suy ra: $|3u + 2v|^2 = 9|u|^2 + 4|v|^2 + 6(u\bar{v} + \bar{u}v) = 37 \Rightarrow |3u + 2v| = \sqrt{37}$

Khi đó: $|3u + 2v - 6i| \leq |3u + 2v| + |6i| = \sqrt{37} + 6$

Câu 7: Cho phương trình $\log_2(2x - m) = 4^x + m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-27; 27)$ sao cho phương trình trên có nghiệm?

- A. 10. B. 26. C. 1. D. 53.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = \log_2(2x - m) \Rightarrow 2^u = 2x - m$. Khi đó ta có hệ:
$$\begin{cases} u = 4^x + m \\ 2^u = 2x - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = u - 4^x \\ m = 2^u - 2x \end{cases}$$

Suy ra $u - 4^x = 2^u - 2x \Leftrightarrow 2^u + u = 2^{2x} + 2x \Leftrightarrow f(u) = f(2x) \quad (*)$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2^t + t$ với $t \in \mathbb{R}$. Ta có: $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$, mặt khác theo $(*) \Leftrightarrow u = 2x$

Do đó: $m = 2x - 4^x = g(x)$

Ta có: $g'(x) = 2 - 4^x \ln 4$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \log_4 \left(\frac{2}{\ln 4} \right) \approx 0,26$ và $g(x_0) \approx -0,91$

Lập bảng biến thiên, ta có:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$g(x_0)$	$-\infty$

Do đó để phương trình ban đầu có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq g(x_0) \approx -0,91$

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-27; 27) \end{cases} \Rightarrow m \in \{-26; -25; \dots; -1\}$ nên có 26 giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Xét hai số thực dương x, y thay đổi và thỏa mãn $\log_3 \left[(x^2 + 2)(y + 1) \right]^{y+1} = 9 - x^2(y + 1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + 2y$ bằng

- A. $-5 + 6\sqrt{3}$ B. $\frac{11}{2}$ C. $-4 + 6\sqrt{2}$ D. $\frac{27}{5}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_3 \left[(x^2 + 2)(y + 1) \right]^{y+1} = 9 - x^2(y + 1) \Leftrightarrow (y + 1) \log_3 \left[(x^2 + 2)(y + 1) \right] = 9 - x^2(y + 1)$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + 2) + \log_3(y + 1) = \frac{9}{y + 1} - x^2$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + 2) + (x^2 + 2) = \log_3 \frac{9}{y + 1} + \frac{9}{y + 1}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$, với $t > 0$

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$, với mọi $t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Mà
$$f(x^2 + 2) = f\left(\frac{9}{y+1}\right) \Rightarrow x^2 + 2 = \frac{9}{y+1}$$

Ta có
$$P = x^2 + 2y = \frac{9}{y+1} + 2(y+1) - 4 \geq 6\sqrt{2} - 4$$

Dấu “=” khi $y = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$ và $x = \sqrt{3\sqrt{2} - 2}$ (vì $x, y > 0$)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $6\sqrt{2} - 4$ khi $y = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$ và $x = \sqrt{3\sqrt{2} - 2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, AD (M, N không trùng với A) sao cho $\frac{AB}{AM} = x$ và $\frac{AD}{AN} = y$ thỏa mãn $x + 2y = 4$ và $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $x^2 + y^2 + \frac{V_{S.ABD}}{V_{S.AMN}}$ bằng

A. 9.

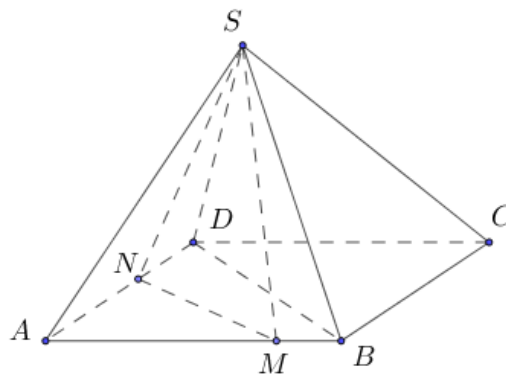
B. 7.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow V_{S.ABD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$

Ta cũng có $\frac{AB}{AM} = x$ và $\frac{AD}{AN} = y$ thỏa mãn $x + 2y = 4 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$

Mặt khác $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD} = \frac{1}{2xy} = \frac{1}{x(4-x)} \geq \frac{1}{4}$

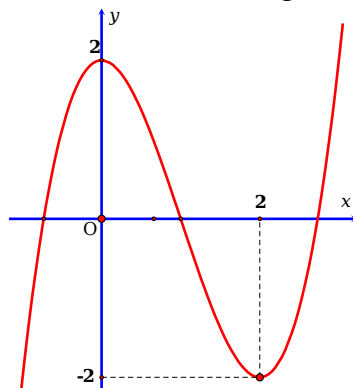
Dấu “=” xảy ra khi $x = 2 \Rightarrow y = 1$

Suy ra $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi $x = 2, y = 1$.

$\Rightarrow \frac{V_{S.ABD}}{V_{S.AMN}} = \frac{AB}{AM} \cdot \frac{AD}{AN} = xy = 2$

Vậy $x^2 + y^2 + \frac{V_{S.ABD}}{V_{S.AMN}} = 7$

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Số nghiệm của phương trình $\sqrt{f[f(x)] + 4} = f(x) + 1$ là

A. 7.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có $f'(x) = kx(x - 2) = k(x^2 - 2x)$, với $k > 0$.

$$\Rightarrow f(x) = k \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) + C. \quad \text{Từ đồ thị ta có} \quad \begin{cases} f(2) = -2 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ C = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.$$

Đặt $t = f(x)$ thì phương trình thành $\sqrt{f(t) + 4} = t + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + 1 \geq 0 \\ (t^3 - 3t^2 + 2) + 4 = (t + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ t = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \approx 4,19 \\ t = 1 \\ t = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \approx -1,19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt và $f(x) = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$ có đúng một nghiệm.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 4 nghiệm phân biệt.