**BÀI TẬP CHƯƠNG I- HÌNH 8**

**BÀI 3 – ĐỐI XỨNG TRỤC, ĐỐI XỨNG TÂM. HÌNH BÌNH HÀNH**

**I, ĐỊNH NGHĨA:**

- Hai điểm  và  được gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng , nếu  là đường trung trực của đoạn thẳng . 

- Hai điểm  và  được gọi là đối xứng với nhau qua điểm , nếu  là trung điểm của . 



- Mọi điểm nằm trên đường thẳng  đều cách đều hai đầu mút  và .

**II. QUY ƯỚC:**

- Điểm nằm trên trục đối xứng  thì điểm đối xứng với nó qua  là chính nó.

- Điểm đối xứng với điểm  qua tâm  chính là điểm .

**III. HÌNH ĐỐI XỨNG QUA ĐƯỜNG THẲNG:**

- Hai hình  và  gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng  nếu lấy mỗi điểm thuộc hình  khi lấy đối xứng qua  đều thuộc hình .



- Hai hình  và  gọi là đối xứng với nhau qua điểm  nếu lấy mỗi điểm thuộc hình  khi lấy đối xứng qua  thì đều thuộc hình .



**IV, ĐỊNH NGHĨA:**

- Tứ giác có các cặp cạnh đối song song là hình bình hành. 

-  là hình bình hành 

**V, TÍNH CHẤT:**

- Trong hình bình hành các cạnh đối song song và bằng nhau.

- Trong hình bình hành các góc đối bằng nhau.

- Trong hình bình hành hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

**VI, DẤU HIỆU NHẬN BIẾT:**

- Tứ giác  là HBH nếu các cạnh đối song song.

- Tứ giác  là HBH nếu các cạnh đối bằng nhau.

- Tứ giác  là HBH nếu các góc đối bằng nhau.

- Tứ giác  là HBH nếu hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

- Tứ giác  là HBH nếu hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.

**VII, BÀI TẬP VẬN DỤNG:**

**Bài 1:** Cho hình thang có  và . Gọi  là trung điểm của .

a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

b) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

**Lời giải**

a) Vì  là trung điểm của nên  mà  nên. Do đó  

Mặt khác ta có nên 

Từ và suy ra tứ giác  là hình bình hành.

b) Xét tứ giác có:  (Chứng minh trên)

 ( vì)

Do đó tứ giác  là hình bình hành.

**Bài 2:** Cho có lần lượt là trung điểm các cạnh.

a) Chứng minh  và .

b) Chứng minh tứ giáclà hình bình hành.

**Lời giải**

1. Xét có ,lần lượt là trung điểm các cạnh,nên là đường trung bình. Do đó và .

Mà là trung điểm củanên 

Vậy  và .

b) Xét tứ giác có:  (Chứng minh trên)

 (Chứng minh trên)

Do đó tứ giác  là hình bình hành.

**Bài 3:** Cho  cân ở  có điểm  trên cạnh . Kẻ  và .

a) Chứng minh  là hình bình hành.

b)  là tam giác gì?

c) So sánh  với .

**Lời giải**

a) Xét tứ giác có:  ( vì , )

 (vì , )

Do đó tứ giác  là hình bình hành.

b) Vì  cân ở nên  mà nên (hai góc đồng vị).

Do đó  suy ra  là tam giác cân tại .

c) Ta có  ( vì tứ giác  là hình bình hành)

Mặt khác,  ( vì  là tam giác cân tại ).

Suy ra 

**Bài 4:** Cho  cân tại , lấy điểm trên . Lấy điểm  trên tia đối của tia sao cho . Kẻ  .

a) là tam giác gì?

b) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

**Lời giải**

a) Vì  cân ở nên  mà nên (hai góc đồng vị).

Do đó  suy ra  là tam giác cân tại .

b)Vì là tam giác cân tại  nên  mà do đó .

Mặt khác  (vì )

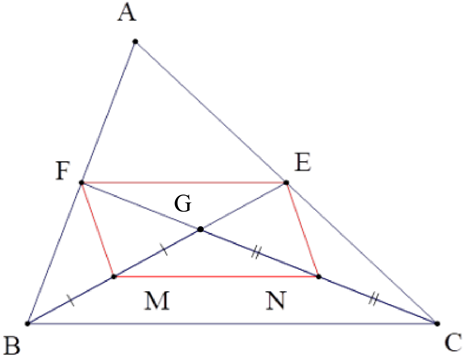
Vậy tứ giác  là hình bình hành.

**Bài 5:** Cho có các đường trung tuyến và trọng tâm . Gọi  lần lượt là trung điểm của  và .

a) Chứng minh và .

b) Chứng minh  là hình bình hành.

**Lời giải**



a) Vì có là các đường trung tuyến nên ,lần lượt là trung điểm các cạnh,nên  là đường trung bình. Do đó và . 

Vì  lần lượt là trung điểm của  và nên là đường trung bình của 

Do đó và . 

Từ và suy ra và .

b) Theo câu a) ta cóvà do đó là hình bình hành.

**Bài 6:** Cho hình bình hành  Kéo dài đường trung tuyến  của  và lấy điểm  sao cho .

a) Tứ giác  là hình gì?

b) Chứng minh , ,  thẳng hàng và suy ra  là trung điểm của 

**Lời giải**



a) Tứ giác  có  (gt) và   là trung tuyến của 

Suy ra tứ giác  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường)

b) Ta có: là hình bình hành  và  

Mặt khác  là hình bình hành nên  và  

Từ  và  suy ra , ,  thẳng hàng và 

Do đó , ,  thẳng hàng và  là trung điểm của 

**Bài 7:** Cho tứ giác  có , , ,  lần lượt là trung điểm của , , , .

a) Chứng minh  và 

b) Chứng minh và 

c) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

**Lời giải**



a) Ta có:  là trung điểm của  và  là trung điểm 

Do đó  là đường trung bình của tam giác 

 và  

b)  là trung điểm  và  là trung điểm của 

Do đó  là đường trung bình của tam giác 

 và  

Từ và  suy ra  và 

c) Xét từ giác  có  


Suy ra tứ giác  là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song và bằng nhau)

**Bài 8:** Cho hình bình hành  và lần lượt là hình chiếu của  và  trên đường chéo 

a) Chứng minh .

b) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

**Lời giải**



a) Ta có:  hình bình hành  (hai góc so le trong)

Xét hai tam giác vuông  và  có



  là hình bình hành)

 (cmt)

Do đó  (cạnh huyền – góc nhọn)

b) Vì  (cặp cạnh tương ứng)

Xét tứ giác  có:



 Tứ giác  là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song và bằng nhau)

**Bài 9:** Cho hình bình hành  có . Vẽ ,,  kéo dài cắt  tại  và  kéo dài cắt  tại  Chứng minh:

a)  là hình bình hành.

b) là hình bình hành.

**Lời giải**



a) Ta có:  hình bình hành   (hai góc so le trong)

Xét hai tam giác vuông  và  có



  là hình bình hành)

 (cmt)

Do đó  (cạnh huyền – góc nhọn)

 (cặp cạnh tương ứng)



Xét tứ giác  có:



 Tứ giác  là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song và bằng nhau)

b) Ta có:  hình bình hành  hay  (vì 

Xét tứ giác  có (cmt) và  (vì )

Suy ra tứ giác là hình bình hành.

**Bài 10:** Cho hình bình hành  Kẻ  và 

a) Tứ giác là hình gì? Vì sao?

b) cắt  tại cắt  tại  Chứng minh 

c) Chứng minh 

**Lời giải**



a) Ta có:  hình bình hành  (hai góc so le trong)

Xét hai tam giác vuông  và  có



  là hình bình hành)

 (cmt)

Do đó  (cạnh huyền – góc nhọn)

 (cặp cạnh tương ứng)



Xét tứ giác  có:



 Tứ giác  là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song và bằng nhau)

b) Ta có:  hình bình hành  hay  (vì , 

Xét tứ giác  có  (cmt) và  (vì 

Suy ra tứ giác là hình bình hành.



c) Từ câu a) ta có  (cặp cạnh tương ứng)

**Bài 11:** Cho hình bình hành  có . Tia phân giác góc  cắt  ở , tia phân giác góc  cắt  tại . Chứng minh:

a,  là tam giác cân.

b, So sánh  và .

c, Tứ giác là hình bình hành.

**Lời giải**



a) Vì tứ giác  là hình bình hành ; 

Vì  là tia phân giác của   

Vì    (so le trong) 

Từ và    cân tại .

b) Vì  là tia phân giác của    

Vì tứ giác  là hình bình hành   

Từ , ,   mà   

c) Vì  mà hai góc này ở vị trí đồng vị  mà 

 Tứ giác  là hình bình hành.

**Bài 12:** Cho hình bình hành  có  lần lượt là trung điểm của  và . Nối  và  cùng cắt  lần lượt ở  và . Chứng minh:

a,  và tứ giác  là hình bình hành.

b,  là trung điểm của  và  là trung điểm của .

**Lời giải**



a) Vì tứ giác  là hình bình hành ; ; ; .

Vì lần lượt là trung điểm của  và   ; 

mà  .

Xét tứ giác  có và  Tứ giác  là hình bình hành.

b) Vì tứ giác là hình bình hành  hay .

Xét  có:  là trung điểm của  và    là trung điểm của .

Xét  có:  là trung điểm của  và   là trung điểm của .

**Bài 13:** Cho hình bình hành , Trên cạnh  lấy điểm , trên cạnh  lấy điểm sao cho 

a, Chứng minh rằng: .

b, Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

c, Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

**Lời giải**



a) Vì tứ giác  là hình bình hành  và 

Xét  và  có: ; ; 

(c.g.c)  .

b) Xét tứ giác  có và  Tứ giác  là hình bình hành

c) Ta có và   

Xét tứ giác  có và 

 Tứ giác  là hình bình hành  .

**Bài 14:** Cho hình bình hành , trên cạnh  lấy điểm , trên cạnh  lấy điểm sao cho  Gọi  là giao điểm của  và .

a, Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

b, Chứng minh  là trung điểm của .

**Lời giải**



a) Vì tứ giác  là hình bình hành ; ; ; 

Xét tứ giác  có và  Tứ giác  là hình bình hành

b) Vì tứ giác  là hình bình hành có  cắt  tại    là trung điểm của .

Vì tứ giác  là hình bình hành   cắt  tại trung điểm của mỗi đường

Mà  là trung điểm của    là trung điểm của .

**Bài 15:** Cho hình bình hành . Gọi  và  lần lượt là hình chiếu của  và  trên đường chéo 

a, Chứng minh rằng: .

b, Chứng minh rằng tứ giác  là hình bình hành.

c, Gọi  là trung điểm của . Chứng minh rằng ba điểm ,  thẳng hàng.

**Lời giải**



a) Vì tứ giác  là hình bình hành  ; ; ; 

Vì  và K lần lượt là hình chiếu của  và  trên đường chéo   

  vuông tại  và vuông tại .

Vì    (so le trong).

Xét  và  có: ; ; 

  (cạnh huyền – góc nhọn)  .

b) Vì  (chứng minh trên)  .

Vì  và   .

Xét tứ giác  có  và   Tứ giác  là hình bình hành.

c) Vì tứ giác  là hình bình hành   đi qua trung điểm của .

Mà  là trung điểm của   đi qua  , ,  thẳng hàng.

**Bài 16:**

Cho hình bình hành  có . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và . Đoạn  cắt ,  và  lần lượt tại ,  và . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác  là hình bình hành.

b) Ba điểm , ,  thẳng hàng.

c) .

d) .

**Lời giải**



a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

\* Ta có:

 (vì  là trung điểm của ).

 (vì  là trung điểm của ).

 (vì  là hình bình hành).

.

\* Tứ giác  có:

 (vì  do  là hình bình hành).

 (c/m trên).

 là hình bình hành.

b) Chứng minh ba điểm , ,  thẳng hàng.

\* Ta có:  là hình bình hành (gt) có hai đường chéo ,  cắt nhau tại .

 là trung điểm của , .

\* Ta có:  là hình bình hành (c/m trên).

Mà  là trung điểm của .

 là trung điểm của .

, ,  thẳng hàng.

c) Chứng minh .

\*  có:

 là trung điểm của .

 (vì  do  là hình bình hành).

 là trung điểm của .

 .

\* C/m tương tự, ta có:  .

\* Từ  và , ta có .

d) Chứng minh .

\* Xét  và  có:

 (hai góc đối đỉnh).

 (vì  là trung điểm của .

 (vì hai góc so le trong, ).

 (g – c – g).

.

\*  có hai đường trung tuyến  và  cắt nhau tại N.

 là trọng tâm .

.

Mà  (c/m trên).

.

**Bài 17:**

Một hình bình hành  có hai đường chéo cắt nhau tại , Qua  vẽ đường thẳng song song với  lần lượt cắt  và  tại  và .

a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

b) Chứng minh  là trung điểm của .

c) Gọi  là trung điểm của . Chứng minh .

**Lời giải**



a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

\* Tứ giác  có:

 (gt).

 (vì  là hình bình hành).

 là hình bình hành.

b) Chứng minh  là trung điểm của .

\* Hình bình hành  có hai đường chéo cắt nhau tại .

 là trung điểm của , .

\*  có:

 là trung điểm của .

 (vì ).

 là trung điểm của .

c) Chứng minh .

\*  có:

 là trung điểm của  (gt).

 là trung điểm của  (c/m trên).

 là đường trung bình của .

.

Mà  (vì  là trung điểm của ).

.

.

**Bài 18:**

Cho hình bình hành  có tâm . Lấy  sao cho ,  cắt  tại . Từ  kẻ đường thẳng song song với  cắt  tại .

a)  là gì của .

b) Chứng minh .

c) Chứng minh  là trung điểm của .

**Lời giải**



a)  là gì của .

\*  có:

 là trung điểm của  (vì hình bình hành  có tâm ).

 (gt).

 là trung điểm của .

 .

\*  có:

 là trung điểm của  (vì hình bình hành  có tâm ).

 là trung điểm của  (c/m trên).

 là đường trung bình của .

b) Chứng minh .

\* Ta có:  ; mà .

 .

\* Từ  và , ta có: .

c) Chứng minh  là trung điểm của .

\*  có:

 là trung điểm của  (vì ).

 (vì ).

 là trung điểm của .

**Bài 19:**

Cho hình bình hành  có  là góc tù. Kẻ  và  vuông góc với đường chéo .

a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

b) Gọi  là trung điểm của . Chứng minh ba điểm , ,  thẳng hàng.

c) Tính diện tích hình bình hành  biết , .

**Lời giải**



a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

\* Xét  và  có:

.

 (hai cạnh đối của hình bình hành ).

 (hai góc so le trong, ).

 (ch – gn).



\* Tứ giác  có:

 (c/m trên).

 (vì cùng vuông góc với ).

 là hình bình hành.

b) Gọi  là trung điểm của . Chứng minh ba điểm , ,  thẳng hàng.

\* Hình bình hành  có  là trung điểm của .

 là trung điểm của .

, ,  thẳng hàng.

c) Tính diện tích hình bình hành  biết , .

\* .

\* Xét  và  có:

 (hai cạnh đối của hình bình hành ).

.

 là cạnh chung.

 (ch – gn).



\* 

**Bài 20:**

Cho hình bình hành ,  là giao điểm hai đường chéo. ,  lần lượt là trung điểm của  và .  là giao điểm của  và ,  là giao điểm của  và . Chứng minh:

a) Tứ giác  là hình bình hành.

b)  là hình bình hành.

c) ,  đối xứng với nhau qua .

d) .

**Lời giải**



a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

\* Ta có:  hình bình hành nên  là trung điểm của ; .

\* Ta có:

 (vì  là trung điểm của ).

 (vì  là trung điểm của ).

 (vì  là trung điểm của ).

.

\* Tứ giác  có:

 là trung điểm của  (c/m trên).

 là trung điểm của  (vì ).

 là hình bình hành.

b)  là hình bình hành.

\* Tứ giác  có:

 (vì  do  là hình bình hành).

 (vì  do  là hình bình hành).

 là hình bình hành.

c) Chứng minh ,  đối xứng với nhau qua .

\* Ta có:  là hình bình hành (c/m trên).

Mà  là trung điểm của  (c/m trên).

 là trung điểm của .

,  đối xứng với nhau qua .

d) Chứng minh .

\* Gọi  là trung điểm của   .

\* Ta có:  (vì ).

 là hình thang.

Mà  là trung điểm của ;  là trung điểm của .

 là đường trung bình của hình thang .

.

\*  có:

 là trung điểm của  (gt).

 (c/m trên).

 là trung điểm của .

 .

\* Từ  và  .

**Bài 21:**

Cho hình bình hành , và  lần lượt là chân đường cao hạ từ và đến .

a) Chứng minh  là hình bình hành.

b) Gọi  là giao điểm của  và ,  là giao điểm của và . Chứng minh .

c)  là trung điểm của . Chứng minh , ,  thẳng hàng.

**Lời giải**



a) Vì  (hai góc so le trong) 

Xét  và có



( là hình bình hành)

(cmt)

(cạnh huyền - góc nhọn)

(hai cạnh tương ứng)

Ta có: , 

Xét tứ giác  có: ,  suy ra tứ giác  là hình bình hành.

b) Vì  là hình bình hành 

Lại có:  là hình bình hành,  

Từ và suy ra  là hình bình hành .

c) Tứ giác  là hình bình hành có  và  là hai đường chéo, mà  là trung điểm của  nên O cũng là trung điểm của . Tứ giác  là hình bình hành, hai đường chéo ,  cắt nhau tại trung điểm  của  nên cũng là trung điểm của . Suy ra , ,  thẳng hàng.

**Bài 22:**

Cho hình bình hành . Trên đường chéo  lấy hai điểm  và  sao cho .

a) Chứng minh .

b) cắt  tại . Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

c)  cắt  tại . Chứng minh .

d)  cắt  tại . Chứng minh  và  đối xứng với nhau qua .

**Lời giải**



a) Vì  là hình bình hành nên ,  (hai góc so le trong).

Xét và có:  (cmt)

 (cmt)

 (gt)

(c.g.c) (hai cạnh tương ứng)

b) Xét  và có: (cmt)

(so le trong)



(c.g.c)  (hai cạnh tương ứng)

Từ  và  là hình bình hành.

c) Vì  là hình bình hành (là giao điểm của hai đường chéo).

Xét có suy ra  là trung tuyến.

Lại có:

,  suy ra  là trọng tâm 

, 

d) Vì  là hình bình hành. . 

và (cmt) 

Từ và suy ra  là hình bình hành. là trung điểm của  suy ra  là trung điểm  hay  và  đối xứng với nhau qua .

**Bài 23:**

Cho hình bình hành ,  là giao điểm của hai đường chéo. Lấy các điểm , , ,  lần lượt là trung điểm của , , , .

a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

b) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

**Lời giải**



a) Vì M là trung điểm của OA suy ra , . là đường trung bình của .

Tương tự xét  có ,, là đường trung bình của 

Mà ,  (tứ giác  là hình bình hành), 

 là hình bình hành.

b) Xét  và có:

(GT)

(so le trong, )

()

(c.g.c) ( hai cạnh tương ứng) 

Xét  và  có:

(GT)

 (so le trong, )

(  )

(c.g.c)(hai cạnh tương ứng) 

Từ  và  là hình bình hành.

**Bài 24:**

Cho  cân tại , đường cao . Gọi  là trung điểm của . Vẽ  đối xứng với  qua .

a) Tứ giác  là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

c) Gọi  là giao điểm của và, là trung điểm của . Chứng minh ba điểm , , thẳng hàng.

**Lời giải**



a) Xét tứ giác có , cắt nhau tại trung điểm  suy ra  là hình bình hành.

Lại có (gt)  là hình chữ nhật.

b) Vì  là hình chữ nhật nên 

Vì  cân tại ,  là đường cao đồng thời là trung tuyến 

Từ  và  suy ra 

Mặt khác:, 

Từ , suy ra  là hình bình hành.

c)  là hình bình hành ,  cắt nhau tại 

Vì ,  suy ra  là đường trung bình của 

Tương tự  là đường trung bình của 

Vì ,  suy ra , , thẳng hàng (theo tiên đề Ơllit).

**Bài 25:**

Cho  vuông tại  có , đường cao . Gọi  là trung điểm của . Trên tia đối của tia  lấy điểm  sao cho .

a) Chứng minh tứ giác  là hình chữ nhật.

b) Gọi  là điểm đối xứng của  qua . Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

**Lời giải**



a) Xét tứ giác  có ,  cắt nhau tại trung điểm , suy ra  là hình bình hành.

Lại có:  là hình chữ nhật.

b)  là hình chữ nhật nên: 

, (gt)

 là hình bình hành.

**Bài 26:** Cho hình thang  có  và . Kẻ .

a, Tứ giác  là hình gì?

b, Chứng minh rằng:  vuông ở  và .

**Lời giải**



a) Ta có (gt) suy ra. Lại có  (gt)

suy ra Tứ giác  là hình bình hành

b) Ta có  và (gt) suy ra  do đó  vuông tại .

Áp dụng định lý Pytago ta có  mà tứ giác  là hình bình hành (cmt) (cạnh đối) do đó 

**Bài 27:** Cho hình thanh vuông  . Gọi là hình chiếu của  trên . Gọi , là trung điểm của , . Chứng minh:

a, .

b, Tứ giác là hình bình hành.

**Lời giải**



a) Xét có ,  là trung điểm của ,  nên ; 

  là đường trung bình của suy ra; 

Lại có   

b) Do ;  suy ra 

lại có (cmt)  tứ giác  là hình bình hành.

**Bài 28:** Cho hình thang vuông   có .. Gọi  là hình chiếu của  trên . Gọi và là trung điểm của và .

a, Chứng minh  là hình bình hành.

b, Chứng minh  là trực tâm của .

c, Chứng minh .

**Lời giải**



1. Xét có và là trung điểm của và nên ; 

suy ra  là đường trung bình của 

 ; 

Lại có  (GT)

 .

Ta có  (GT) ;  (cmt) suy ra 

mà  tứ giác  là hình bình hành.

b) Ta có  (cmt)

và 

Lại có (gt) do đó  là trực tâm 

c) Ta có  là trực tâm   

mà tứ giác là hình bình hành (cmt) 

  hay .

**Bài 29:** Cho hình thang vuông   và . Kẻ . Gọi  là trung điểm của ,  là trung điểm của . Chứng minh:

a, .

b, Tứ giác  là hình bình hành.

c, .

**Lời giải**



a) Xét có  là trung điểm của ,  là trung điểm của nên ;  suy ra  là đường trung bình của 

khi đó ; 

Lại có  (GT)



b) Do ;  suy ra 

mà  (cmt) suy ra tứ giác là hình bình hành.

b) Ta có  (cmt)



Lại có (gt) do đó  là trực tâm 

Nên suy ra . 

Mặt khác, tứ giác  là hình bình hành (cmt) nên . 

Từ và suy ra  hay .

**Bài 30:** Cho  nhọn, các đường cao ,  cắt nhau tại . Đường vuông góc với  tại  và đường vuông góc với  tại  cắt nhau tại .

a, Chứng minh .

b, Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

c, Gọi  là trung điểm của ,  là trung điểm của . Chứng minh ba điểm , ,  thẳng hàng và .

**Lời giải:**



a) Xét  có hai đường cao  và cắt nhau tại  nên  là trực tâm của  suy ra .

b) Vì  và  (GT) nên . 

Chứng minh tương tự suy ra . 

Từ và suy ra tứ giác  là hình bình hành.

c) Vì tứ giác  là hình bình hành nên hai đường chéo

cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mà  là trung điểm của  (GT) nên  là trung điểm của

. Suy ra ba điểm ,  và thẳng hàng.

Xét có  là đường trung bình nên .

**Bài 31:** Cho  nhọn có . Các đường cao ,  cắt nhau tại , gọi  là trung điểm của , kẻ ,  lần lượt vuông góc với ,  chúng cắt nhau tại .

a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành và ,, **** thẳng hàng.

b) Gọi  là điểm đối xứng với  qua . Chứng minh tứ giác  là hình thang cân.

c) Gọi  là giao điểm của  và ,  phải có thêm điều kiện gì để tứ giác  là hình thang cân.

**Lời giải**



**a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành và **, , ** thẳng hàng.**

Vì ,  là các đường cao của  (GT).

Mặt khác   

Từ và  hay   Tứ giác  là hình bình hành

 2 đường chéo  và  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (tính chất).

Mà  là trung điểm của  (GT)  là trung điểm của 

, ,  thẳng hàng. (đpcm)

**b) Chứng minh tứ giác  là hình thang cân.**

Gọi  là giao điểm của  và .

Vì  đối xứng với  qua (GT)   là trung điểm của  và  tại .

Xét có:

 là trung điểm của 

 là trung điểm của 

 là đường trung bình

 hay  (vì ,  thuộc ).

Tứ giác **** là hình thang .

Lại có  (cmt) (2 góc so le trong).

Mà  là đường trung trực của  cân tại 

 là đường phân giác của 

 hay 

Từ và **** là hình thang cân.

Vậy tứ giác **** là hình thang cân.

**c)**  **phải có thêm điều kiện gì để tứ giác  là hình thang cân.**

Ta có:  (chứng minh trên) hay  tứ giác **** là hình thang.

Để hình thang **** là hình thang cân thì 

Lại có:  

Từ  và  là tia phân giác của 

Xét có  là đường cao  và  là tia phân giác của 

 là tam giác cân tại .

Vậy để tứ giác **** là hình thang cân thì  là tam giác cân tại .

**Bài 32:**

Cho  nhọn biết . Các đường cao và cắt nhau tại . Gọi  là trung điểm của . Trên tia đối của  lấy điểm  sao cho .

a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

b) Chứng minh  và .

c) Gọi  là điểm đối xứng với  qua . Chứng minh  là hình thang cân.

d)  cắt  tại .  cần có thêm điều kiện gì để tứ giác **** là hình thang cân.

**Lời giải**



**a) Chứng minh tứ giác**  **là hình bình hành.**

Theo bài ra ta có:

 là trung điểm của 

 là trung điểm của 

Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Tứ giác  là hình bình hành. (đpcm)

**b) Chứng minh**  **và** .

Theo phần a) tứ giác  là hình bình hành  (tính chất)

Mà  (GT) hay  

Vậy  và .

**c) Chứng minh tứ giác  là hình thang cân.**

Gọi  là giao điểm của  và .

Vì  đối xứng với  qua  (GT)   là trung điểm của  và  tại .

Xét có:

 là trung điểm của 

 là trung điểm của 

 là đường trung bình

 hay (vì ,thuộc ).

Tứ giác **** là hình thang. 

Lại có  (cmt)  (2 góc so le trong).

Mà  là đường trung trực của  cân tại 

 là đường phân giác của 

 hay  

Từ  và **** là hình thang cân.

Vậy tứ giác **** là hình thang cân.

**d)  phải có thêm điều kiện gì để tứ giác  là hình thang cân.**

Ta có: (chứng minh trên) hay tứ giác **** là hình thang.

Để hình thang **** là hình thang cân thì  

Lại có:  

Từ và  là tia phân giác của 

Xét  có  là đường cao (GT) và  là tia phân giác của 

 là tam giác cân tại .

Vậy để tứ giác  là hình thang cân thì  là tam giác cân tại .

**Bài 33:**

Cho  có trung tuyến , , . Từ  kẻ đường thẳng song song với  cắt  tại . Các đường thẳng kẻ từ  song song với  và từ  song song với  cắt nhau tại . Chứng minh:

a) Tứ giác  là hình bình hành.

b) Tứ giác  là hình thang.

c) , .

d) Tìm điều kiện của  để tứ giác  là hình thang cân.

**Lời giải**



**a) Chứng minh tứ giác**  **là hình bình hành.**

**-** Xét  có :

 là trung điểm của  (GT)

 là trung điểm của (GT)

  là đường trung bình của  hay 

Lại có  (GT)

Tứ giác  là hình bình hành  (tính chất) 

**- Ta lại có: (GT) **

**-** Xét tứ giác  có:

 (chứng minh trên)

 (GT)

 tứ giác  là hình bình hành ,  (tính chất) 

Từ và  tứ giác  là hình bình hành. (đpcm)

**b) Chứng minh tứ giác  là hình thang.**

**-** Xét  có :

**-** Xét  có :

 là trung điểm của  (GT)

 là trung điểm của (GT)

  là đường trung bình của  hay 

 tứ giác **** là hình thang. (đpcm)

**c) Chứng minh** **,** .

Vì  là đường trung bình của  (chứng minh trên).

 (tính chất) 

Theo phần a) tứ giác  là hình bình hành.

2 đường chéo  và  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mà  là trung điểm của  (GT)  là trung điểm của 

 thuộc  và  

Từ và

Lại có  là trung điểm của  (GT)

 (đpcm)

**d) Tìm điều kiện của**  **để tứ giác**  **là hình thang cân.**

Theo phần b) tứ giác  là hình thang

Nên để tứ giác  là hình thang cân thì  .

Lại có:

là đường trung bình của  (chứng minh trên)

là trung điểm của  (GT).

tứ giác  là hình bình hành 

Mặt khác: theo phần c)  và .

tứ giác  là hình bình hành 

Từ ,và  hay 

 cân tại .

Vậy để tứ giác  là hình thang cân thì  cân tại .

**Bài 34:**

Cho  gọi  và  lần lượt là trung điểm của , .

a) Chứng minh tứ giác  là hình thang.

b) Gọi  là giao điểm của hai đường cao  và . Qua  kẻ đường thẳng vuông góc với . Qua  kẻ đường thẳng vuông góc với . Hai đường thẳng này cắt nhau tại . Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

c) Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng vuông góc với tại  và vuông góc với  tại . Chứng minh , ,  thẳng hàng.

**Lời giải**



**a)** **Chứng minh tứ giác**  **là hình thang**.

Vì  có  và  lần lượt là trung điểm của , .

 là đường trung bình của 

 tứ giác  là hình thang.

**b)** **Chứng minh tứ giác**  **là hình bình hành**.

Xét tứ giác  có:

 (vì cùng vuông góc với )

(vì cùng vuông góc với )

 tứ giác  là hình bình hành.

**c) Chứng minh** , ,  **thẳng hàng.**

Gọi  là trung điểm của .

Xét  có  là trung điểm của  và  là trung điểm của 

 là đường trung bình của 

Mà  (GT)  trùng với  ( vì ) 

Xét  có  là trung điểm của  và  là trung điểm của 

 là đường trung bình của 

Mà  (GT)  trùng với  ( vì )

Lại có:  giao với  tại  (GT) 

Từ , và  trùng với  là trung điểm của .

Vậy , ,  thẳng hàng.

**Bài 35:**

Cho  nhọn, đường cao  và  cắt nhau tại . Lấy điểm  là trung điểm của  và  là điểm đối xứng của  qua .

a) Chứng minh rằng **** và ****.

b) Chứng minh rằng .

c) Vẽ **** tại . Chứng minh ****.

**Lời giải**



**a) Chứng minh rằng  và .**

Vì  là điểm đối xứng của  qua (GT)

 là trung điểm của .

Xét tứ giác  có hai đường chéo  và  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

 tứ giác  là hình bình hành

 và 

Mà  (GT)

 tại ****

Vậy **** và ****.

**b) Chứng minh rằng** **.**

Xét  có (vì )

 vuông tại 

Mà  là trung điểm của cạnh huyền (GT)

 (tính chất) 

Xét  có (vì )

 vuông tại 

Mà  là trung điểm của cạnh huyền (GT)

 (tính chất) 

Từ  và   cân tại 

 (đpcm).

**c) Chứng minh .**

Ta có  (chứng minh trên) mà 

Lại có  tại  (GT)  

Xét tứ giác  có:

 (chứng minh trên)

 (GT)

 (chứng minh trên)

 tứ giác  là hình chữ nhật.

2 đường chéo  và  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường (tính chất).

Mà  là trung điểm của  (GT)  là trung điểm của .

 mà  (chứng minh trên)  

Xét  có:

 là trung điểm của   là đường trung tuyến ứng với cạnh  

Từ  và   vuông tại  tại  (đpcm).

**Bài 36:** Cho  nhọn, các đường trung tuyến  và  cắt nhau tại . Trên tia  lấy điểm  sao cho  là trung điểm của .

a). Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

b). Trên tia  lấy điểm  (  khác ) sao cho .

Chứng minh rằng:  và .

c). Để tứ giác  là hình thang cân thì  cần điều kiện gì?

**Lời giải**



a). Xét tứ giác  có:  là trung điểm của  (giả thiết)

 là trung điểm của  (giả thiết)



Nên tứ giác  là hình bình hành.

b) Tứ giác  có:  nên  là trung điểm của  hay .

Lại có  là trung điểm của  (gt) và 

Nên tứ giác  là hình bình hành, suy ra  

Mặt khác tứ giác  là hình bình hành  

Từ  và  suy ra .

c) Tứ giác  là hình bình hành  là hình thang.

Để  là hình thang cân thì  cân tại 

Suy ra  

Mà  ( là hình bình hành)  và  

Từ ,  và  suy ra .

Mặt khác  là trọng tâm tam giác nên từ   cân tại  (Tính chất: Tam giác hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân)

Vậy để tứ giác  là hình thang cân thì cân tại 

**Bài 37:** Cho hình bình hành , Trên tia đối của tia  lấy điểm  sao cho . Gọi  là giao của  và 

a) Chứng minh  là trung điểm của 

b) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

c) Trên tia đối  lấy điểm  sao cho . Chứng minh ba điểm  thẳng hàng.

d) Gọi giao điểm của  và  là . Chứng minh ba điểm  thẳng hàng.

**Lời giải**

a) Vì  là hình bình hành nên .

Xét  có  là trung điểm của , nên  là trung điểm của 

b) Xét tứ giác  có (do ) và  ().

Do đó  là hình bình hành.

c) Xét tứ giác  có () và  ().

Nên  là hình bình hành   và  

Mặt khác là hình bình hành nên   và  

Theo Tiên đề Ơ Clit, qua điểm  chỉ kẻ kẻ được duy nhất 1 đường thẳng song song với .

Nên từ  và  suy raba điểm  thẳng hàng.

d) Từ  và  suy ra  hay  là trung điểm của .

Do đó  là đường trung tuyến của 

Xét tam giác  có là đường trung tuyến,

 là đường trung tuyến



Suy ra  là trọng tâm tam giác  

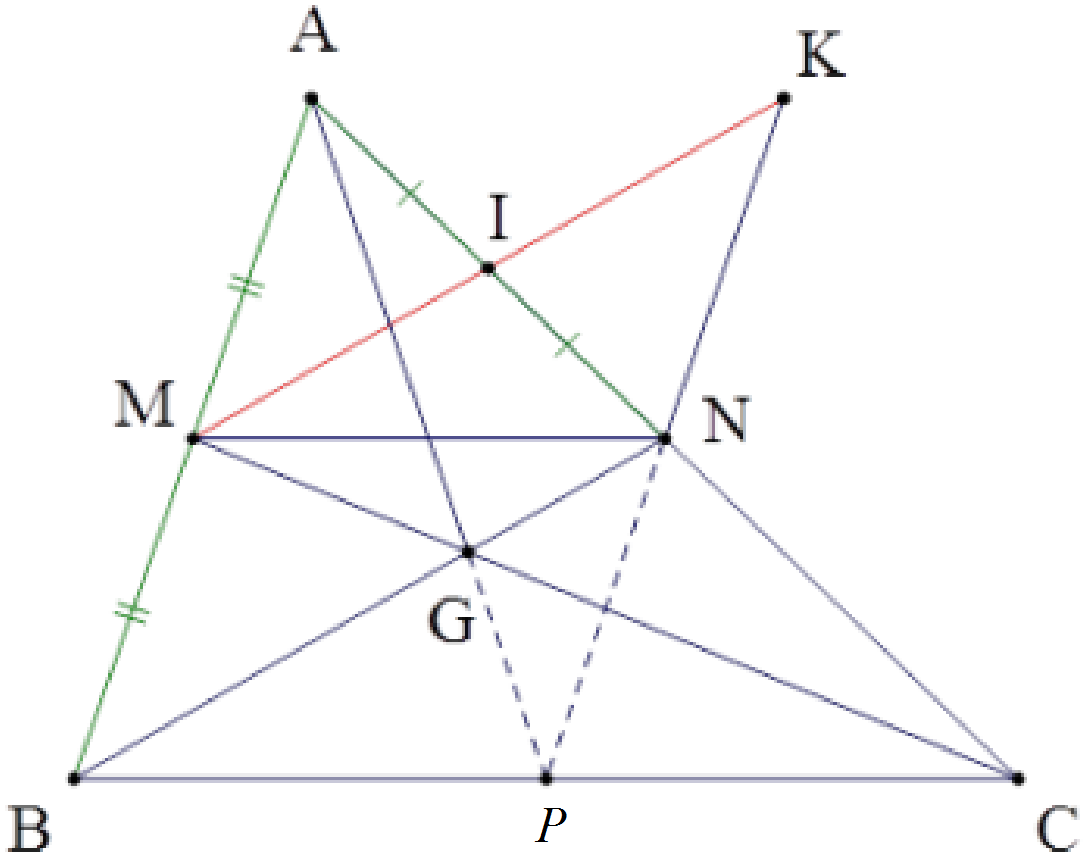
Từ  và  suy ra  hay ba điểm  thẳng hàng.

**Bài 38:** Cho. Gọi  theo thứ tự là trung điểm của 

a) Chứng minh tứ giác  là hình thang.

b) Gọi  là trung điểm ,  là điểm đối xứng với  qua . Chứng minh  là hình bình hành.

c) Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh ,  và  đồng quy.



**Lời giải**

a)có  theo thứ tự là trung điểm của  nên là đường trung bình cuả tam giác 

Suy ra  là hình thang.

b) Tứ giác  có  (giả thiết) nên  là hình bình hành.

Suy ra  và   và   là hình bình hành.

c) Xét tam giác  có  là trọng tâm tam giác.

Gọi  là trung điểm của  

Vì  là đường trung bình của  nên . 

Mặt khác  là hình bình hành (theo b) nên  

Theo Tiên đề Ơ Clit, qua điểm  chỉ kẻ kẻ được duy nhất 1 đường thẳng song song với , nên từ  và  suy raba điểm  thẳng hàng.

Do đó ,  và  đồng quy tại 

**Bài 39:** Cho  có  là trung điểm của . Trên tia  lấy điểm  sao cho .

a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

b) Trên cạnh  lấy các điểm  sao cho . Tia  cắt ,  lần lượt tại  và . Chứng minh  và 

**Lời giải**



a) Tứ giác  có: ,  (giả thiết) và 

Nên tứ giác  là hình bình hành.

b) Vì  là hình bình hành nên  (so le trong)

Xét và  có: 

Nên (g-c-g)  (cạnh tương ứng) 

Lại có  (giả thiết) 

Từ  và  suy ra  

Mặt khác  (do) 

Từ  và  suy ra  là hình bình hành . (Điều phải chứng minh)

**Bài 40:** Cho hình bình hành , gọi  là điểm đối xứng với  qua . Lấy  sao cho  là trung điểm của 

a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

b) Chứng minh  là trung điểm của đoạn 

c) Chứng minh ba đường thẳng    đồng quy.

d) Gọi  là giao điểm của  và ,  là giao điểm của và . Chứng minh .

**Lời giải**



a) Tứ giác  có  () và  (do ) nên  là hình bình hành.

b) Ta có  là hình bình hành nên   và  

Tứ giác  có  () và  (do ) nên  là hình bình hành.

Suy ra   và  

Từ  và  suy ra  

Từ  và  suy ra  thẳng hàng (Tiên đề Ơ Clit) 

Từ  và  suy ra  là trung điểm của đoạn 

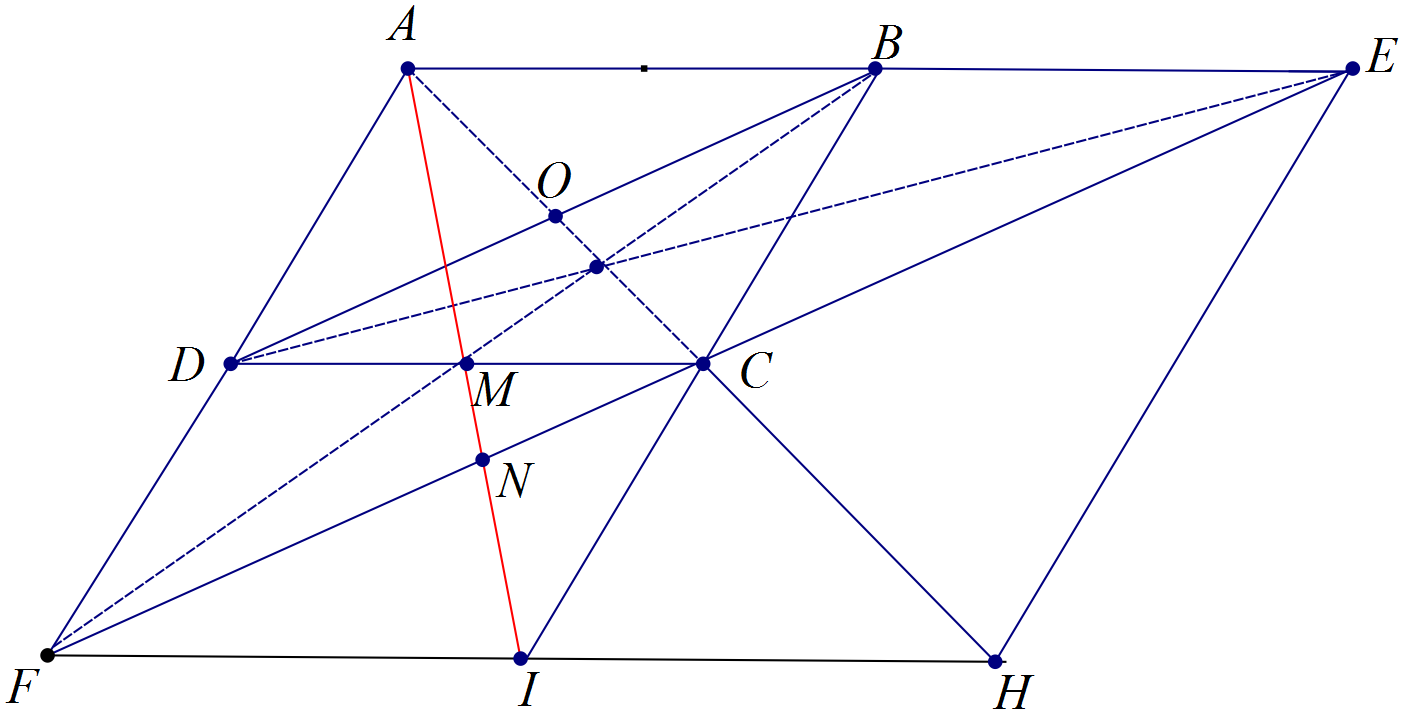
c)  có  là đường trng tuyến ứng với cạnh 

 là đường trng tuyến ứng với cạnh 

 là đường trng tuyến ứng với cạnh 

Nên ba đường thẳng    đồng quy tại trọng tâm của tam giác .

d) Vẽ hình bình hành , gọi  là trung điểm .



Xét tứ giác  có ,   nên  là hình bình hành.

Khi đó  và  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. 

Mà  là hình bình hành (theo phần b) nên  là trung điểm của  

Từ  và  nên là trung điểm của  Suy ra  thẳng hàng.

Tam giác  có hai đường trung tuyến  và  cắt nhau tại  nên  là trọng tâm tam giác .

 (điều phải chứng minh)

**Bài 41:** Cho hình bình hành  có . Lấy điểm  sao cho . Gọi  là điểm đối xứng của  qua .  là giao điểm của hai đường thẳng  và . Chứng minh:

a)  cân và tính  ( Lấy  là giao của  và ).

b) .

c)  đều.

d) .

**Lời giải**



a) Vì đối xứng với qua   (tính chất)  cân tại 

Vì  là hình bình hành có   (tính chất)

Xét  cân tại có là đường cao (tính chất)

đồng thời là đường phân giác 



b) Vì là hình bình hành  (tính chất)

 (đồng vị)

Ta có  (kề bù)



đều 

c) Ta có (giả thiết)

mà  (vì cân)

, lại có 

Xét  có và đều

d) Vì đều , lại có 

**Bài 42:** Cho hình chữ nhật  có , Có hai đường chéo cắt nhau tại . Gọi  vàlần lượt là điểm đối xứng của  qua  và 

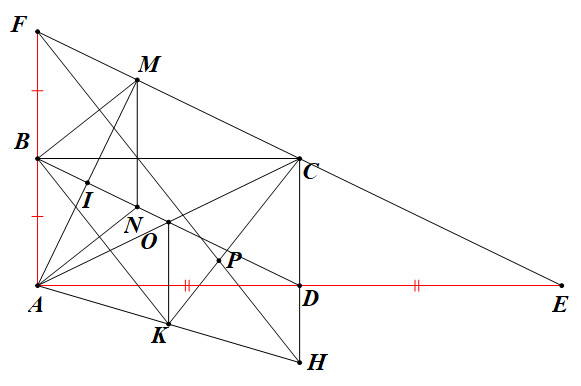
a) Chứng minh rằng  là đường trung bình của .

b) Chứng minh rằng  là trung điểm của .

c) Gọi là chân đường vuông góc hạ từ  đến . Đường thẳng qua  và song song với  cắt  tại . Tứ giác  là hình gì? Vì sao?

d) Trên tia đối của tia  lấy điểm  tùy ý. Gọi  là trung điểm của  và  là giao điểm của  với . Chứng minh  cân.

**Lời giải**



1. Xét có  (tính chất)

 (vì  đối xứng vớiqua )

là đường trung bình của tam giác 

b)Xét và  có chung





 (c.g.c)  và  (1)

Chứng minh tương tự và  (2)

Từ (1) và (2)  (3)

Và 

 thẳng hàng (4)

Từ (3) và (4) là trung điểm của 

c) Gọi  là giao điểm của và 

Vì  (gt)  (so le trong)

Xét có ;  (tính chất)

là đường trung bình của , mà 

Xét có (tính chất)





Xét và có 





**** (g.c.g) 

Xét tứ giác có 





Tứ giác là hình thoi

d) Xét hình thang vuông có  là trung điểm của và , là trung điểm

của  là đường trung trực của 

(tính chất)

 cân tại 

Mà 

Và 

 hay  (5)

Xét có 



là đường trung bình của  (6)

Vì  hay  (7)

Từ (5) (6) và (7) cân tại 

**Bài 43:** Cho  vuông cân tại . Trên đoạn thẳng  lấy điểm , Trên tia đối của tia  lấy điểm  sao cho . Vẽ hình bình hành . Gọi  là giao điểm của  và . Qua  kẻ đường thẳng vuông góc với  cắt  tại .

a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

b) Qua  kẻ đường thẳng vuông góc với  cắt  tại . Chứng minh .

c) Chứng minh  đối xứng với  qua .

d) Tìm vị trí của  trên  để  thẳng hàng.



**Lời giải**

1. Vì vuông cân tại   

Xét có 

vuông cân tại 

mà 



Lại có (cùng )

Xét tứ giác có và 

Tứ giác  là hình bình hành

1. Vì tứ giác  là hình bình hành là rung điểm của 

Xét  vuông tại có là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền 

 (1)

Xét hình bình hànhcóvà  (cùng )

là trung điểm của 

Mà 

 (2)

Từ (1) và (2) 

1. Ta có hay , mà 

hay

Ta có (tính chất), mà 

Xét có và 

vuông cân tại   

Ta có 



Xét có là đường là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền 

thuộc đường trung trực của (tính chất) (3)

Lại có  thuộc đường trung trực của  (tính chất) (4)

Từ (3) và (4) là đường trung trực của 

đối xứng với  qua 

1. Để thẳng hàng cần  là trung điểm của 

Mà  là trung điểm của 

Tứ giác là hình bình hành, mà 

 là trung điểm của 

Vậy khi  là trung điểm của  thì 3 điểm thẳng hàng