**BÀI TẬP CHƯƠNG I- HÌNH 8**

**TỨ GIÁC**

**HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG**

**Bài 1.** Cho  và tia phân giác. Lấy điểm trên. Kẻ .

Chứng minh  là hình vuông.



**Lời giải**

Xét tứ giác  có: 

 là hình chữ nhật.

Lại có:  là đường phân giác của  (gt)

 là hình vuông (ĐPCM)

**Bài 2.** Cho  vuông cân tại  Trên cạnh  lấy các điểm và  sao cho . Qua và  kẻ các đường thẳng vuông góc với  chúng cắt vàtheo thứ tự tạivà. Chứng minh rằng:

a)  và  là các tam giác vuông cân.

 b) .

**Lời giải**

a)Xét có:

(gt) (1)

(dovuông cân tại) (2)

 (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra vuông cân tại.

\*Chứng minh tương tự ta được vuông cân tại.

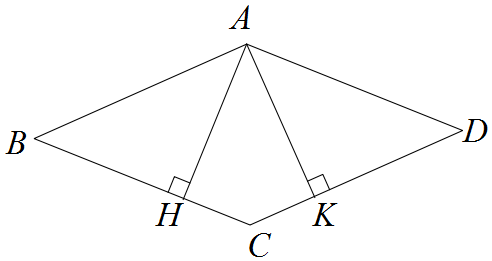
b) Ta có: vuông cân tại (4)

vuông cân tại  (5)

Mà (gt) (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra: 

**Bài 3.** Cho hình thoi. Kẻ hai đường caovà. Chứng minh .



**Lời giải**

Xét hai tam giác vuôngvà có:



 (gt)

(tính chất hình thoi)

Vậy: (cạnh huyền, góc nhọn)



**Bài 4.** Cho  vuông tại, đường trung tuyến. Gọi là trung điểm của, là điểm đối xứng vớiqua.

a) Chứng minh tứ giác  là hình thoi.

b) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

 c) Tìm điều kiện của  để tứ giác  là hình vuông.

**Lời giải**

a) Chứng minh tứ giác là hình thoi.

Xét tứ giáccó: 

là hình bình hành.

Mặt khác:  vuông tại , 

Vậy là hình thoi.

b) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

Vì là hình thoi 

Mà  nên  (2)

Từ (1), (2) suy ra:  là hình bình hành.

c) Tìm điều kiện của  để tứ giáclà hình vuông.

Tứ giác là hình thoi để là hình vuông thì  mà (do  là hình bình hành) 

Vậy tam giác  là tam giác vuông cân thì là hình vuông.

 **Bài 5.** Cho hình vuông . Trên cạnhlấy điểm, trên cạnh  lấy điểmsao cho . Chứng minh rằng:

a) .

b) .P

**Lời giải**

a) Chứng minh: 

Xét  và có:

 (do là hình vuông)

 (do là hình vuông)

(gt)

Vậy: (c.g.c)



b) Chứng minh: 

Do nên 

Mà có 



Gọi  là giao điểm của và .

Trong có:



Hay 

 hay 

**Bài 6.** Cho hình vuông. Trên cạnhlấy điểm .Trên cạnhlấy điểm  sao cho . Chứng minh:

a) .

 b) .

c) .

G

**Lời giải**

a) Chứng minh:

Xét và có:

(do  là hình vuông)

 (do  là hình vuông)

(gt)

Vậy: (c.g.c)

b) Chứng minh: 

Vì 



Hay 

Trong có:



c) Chứng minh 

Gọi  là giao điểm của  và 

Trong có: 





 hay 

**Bài 7.** Cho hình vuông. Trên các cạnhlấy lần lượt các điểm M, N, P, Q sao cho .

a) Chứng minh .

b) Chứng minh .

c) Chứng minhlà hình vuông.



**Lời giải**

a) Chứng minh 

Do là hình vuông



Mà(gt) nên

b) Chứng minh 

Xét vàcó:

 (do câu a)

(do là hình vuông)

(gt)

Vậy: (c.g.c)

Chứng minh tương tự ta được:

(c.g.c)

(c.g.c)

Vậy: (1)

c) Chứng minh  là hình vuông

Từ (1) suy ra: 

 là hình thoi. (2)

Mặt khác, ta có: 



Trong có (gt)



Lại có: 

 (3)

Từ (2), (3) suy ra là hình vuông.

**Bài 8.** Cho hình vuông. Gọilần lượt là trung điểm của

a) Chứng minh:là hình bình hành.

b) Chứng minh  tại.

c) cắttại. Chứng minh là trung điểm của.

d) Chứng minh .



**Lời giải**

a) Chứng minh:là hình bình hành.

Ta có: (gt)

(gt)

Mà(gt) ( là hình vuông)



Xét tứ giác có: 

(do tính chất hình vuông )

 là hình bình hành.

b)Chứng minh tại 

Xét vàcó:

 (chứng minh trên)

(gt)

(gt)

Vậy: (c.g.c)



Mà trong có 

 hay

Trong có 

 hay

c)Chứng minhlà trung điểm của

Xét có:  (do )

 (gt)

Suy ra: 

Haylà trung điểm 

d) Chứng minh

Ta có: 



Trongcóvừa là đường cao vừa là đường trung tuyến cân tại

Mà (gt)

Vậy:

**Bài 9.** Cho hình vuông. Trên cạnh lấy điểm. Quakẻ  ( điểmthuộc tia đối của tia). Gọi I là trung điểm của. Chứng minh rằng:

a) .

 b) Ba điểm thẳng hàng.

**Lời giải**

a) Chứng minh:

Ta có:(gt)



Xét vàcó:

(gt)

(gt)

(chứng minh trên)

Vậy: (g.c.g)



b) Chứng minh ba điểm  thẳng hàng

Ta có:có

có

thuộc đường trung trực của

Mặt kháclà đường trung trực của(tính chất hình vuông )

haythẳng hàng.

**Bài 10.** Cho hình bình hành. Gọilần lượt là đường phân giác của .

a) Chứng minh.

b) Cho . Chứng minh .

 c) Trong trường hợp . Tìm số đo  để tứ giáclà hình vuông.

**Lời giải**

a) Chứng minh:

Ta có:là hình bình hành

(so le trong)



 (2 góc so le trong)

b) Chứng minh:

Xét có vừa là đường cao vừa là đường phân giáccân tại



c)Tìm số đo để tứ giáclà hình vuông.

Xét tứ giáccó:

 là hình bình hành

Mà là hình chữ nhật.

Đểlà hình vuông thì 

Màcân tạilà trung tuyến của

vuông tạihay .

**Bài 11.** Cho hình bình hànhcó . Gọitheo thứ tự là trung điểm của.

a) Chứng minh .

b) Tứ giáclà hình gì? Vì sao?



**Lời giải**

a) Chứng minh:

Ta có: là đường trung bình của hình bình hành



Mà(gt)



b) Tứ giác là hình gì? Vì sao?

Ta có:

Xét tứ giác có:



(do là hình bình hành)

là hình bình hành.

Lại có:

Vậy: là hình thoi

**Bài 12.** Cho hình bình hànhcó.là trung điểm của. Trên tia đối của tialấy . Chứng minh:

a) Tứ giáclà hình thoi.

b)thẳng hàng.

c)là trung điểm của.



**Lời giải**

a) Chứng minh: Tứ giáclà hình thoi.

Xétcó

 cân tại

Có 

vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao.

 hay 

Xét tứ giác có:

(gt)

(gt)



Vậy: là hình thoi.

b) Chứng minh:  thẳng hàng.

Vì là hình thoi

Mà (do là hình bình hành).

thẳng hàng.

c) chứng minh:là trung điểm của

Ta có: (do là hình bình hành).

(gt)



Mà (dolà hình thoi)



Hay  là trung điểm của 

**Bài 13.** Cho hình bình hành  có . Gọi  lần lượt là trung điểm của và .

a) Chứng minh .

b) Chứng minh .

c) Chứng minh tứ giác  là hình thoi.

**Lời giải**



a) Vì  là trung điểm của  nên  (1)

Vì  là trung điểm của  nên  (2)

Ta có  là hình bình hành nên  (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra 

Vậy 

b) Ta có  là hình bình hành nên 

Xét tứ giác  ta có 

Tứ giáclà hình bình hành

(hai cạnh đối của hbh).

c) Xét tứ giác , ta có



Tứ giáclà hình bình hành ( vì tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau)

( cặp cạnh đối)

Mà ( giả thiết)

Nên 

Do đó tứ giác là hình bình hành có hai đường chéo và vuông góc với nhau nên

 là hình thoi.

**Bài 14.** Cho hình chữ nhật . Tia phân giác góc  cắt tia phân giác góc  tại . Tia phân giác góc  cắt tia phân giác góc  tại .

a) Tính các góc của .

b) Chứng minh .

c)  cắt  tại . Chứng minh .

**Lời giải**



a) Do tứ giác là hình chữ nhật nên 

 là tia phân giác của nên 

 là tia phân giác của nên 

Xét  ta có:







Vậy các góc của tam giác  là



b) Ta có là tia phân giác của nên



Ta có là tia phân giác của nên



Xét có 

Xét  và  có





 ( vì là hình chữ nhật)

Do đó  ( cạnh huyền – góc nhọn)

c) Ta có  (cm câu a)

hay  (1)

 (cm câu a)

Hay  (2)

Từ (1) và (2) suy ra 

**Bài 15.**  Cho hình chữ nhật  có . Gọi  là trung điểm của  và  là trung điểm của . Chứng minh:

a)  và  là hình vuông.

b)  và .

**Lời giải**



a) Vì  là trung điểm của  nên  (1)

Vì  là trung điểm của  nên  (2)

Vì  là hình chữ nhật nên  (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra 

Ta có 



Xét tứ giác  có



Suy ta tứ giác  là hình bình hành

Lại có  nên  là hình thoi

Mà  nên  là hình vuông.

Xét tứ giác , ta có



Nên tứ giác  là hình bình hành

Lại có  nên  là hình thoi

Mà  nên  là hình vuông.

b) Vì  là hình vuông

nên 



Vì  là hình vuông nên là tia phân giác cùa 



Vì  là hình vuông nên là tia phân giác cùa 





Vậy 

**Bài 16.** Cho hình chữ nhật  có . Gọi  là trung điểm của  và  là trung điểm của

.

a) Chứng minh tứ giác  và  là hình vuông

b) Chứng minh  vuông cân.

c) Gọi  và  lần lượt là tâm các hình vuông  và . Chứng minh  là hình vuông.

**Lời giải**

a) Vì  là trung điểm của  nên  (1)

Vì  là trung điểm của  nên  (2)

Vì  là hình chữ nhật nên  (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra 

Ta có 



Xét tứ giác  có



Suy ta tứ giác  là hình bình hành

Lại có  nên  là hình thoi

Mà  nên  là hình vuông.

Xét tứ giác , ta có



Nên tứ giác  là hình bình hành

Lại có  nên  là hình thoi

Mà  nên  là hình vuông.

b) Vì  là hình vuông nên  là tia phân giác của 



Vì  là hình vuông nên  là tia phân giác của 





 là tam giác vuông tại 

Mặt khác

 là tia phân giác của  nên 

 là tia phân giác của  nên 

 cân tại .

Vậy  vuông cân tại .

c) Vì là giao điểm hai đường chéo của hình vuông  nên 

Vì là giao điểm hai đường chéo của hình vuông  nên 

Tứ giác  có 

Nên  là hình chữ nhật

Mặt khác  cân tại  nên 





 là hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình vuông.

**Bài 17.** Cho hình bình hành  có . Gọi  và  lần lượt là trung điểm của  và .

a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

b) Chứng minh tứ giác  là hình thoi.

c) Gọi  là giao điểm của  và , Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh tứ giác

 là hình chữ nhật.

d) Hình bình hành  cần có thêm điều kiện gì để  là hình vuông.

**Lời giải**



a) Vì là trung điểm của  nên  (1)

Vì  là trung điểm của  nên  (2)

Vì  là hình bình hành nên  (3)

Từ (1), (2) và (3) 

Xét tứ giác  ta có 

Suy ra tứ giác  là hình bình hành ( vì có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau)

b) Xét tứ giác  ta có



Say ra  là hình bình hành

Mặt khác 

 là hình thoi ( vì là hỉnh bình hành có hai cạnh kề bằng nhau)

c) Xét tứ giác  ta có



 là hình bình hành ( vì có một cặp cạnh dối song song và bằng nhau)

 ( cặp cạnh đối)

 (4)

Lại có  là hình bình hành ( cm câu a ) nên  ( cặp cạnh đối )

 (5)

Từ 4) và (5) suy ra tứ giác  là hình bình hành ( vì có hai cặp cạnh đối song song)

Mặt khác theo câu a) thì thì tứ giác  là hình thoi nên 

Suy ra tứ giác  là hình bình hành có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

d) Để tứ giác  là hình vuông thì







 là hình vuông ( vì  đã là hình thoi )



 là hình chữ nhật

Vậy để tứ giác là hình vuông thì tứ giác  phải là hình chữ nhật có 

**Bài 18.** Cho hình bình hành có . Gọi  và  là trung điểm của  và .

a) Tứ giác  là hình gì?

b) Chứng minh .

c)  là giao điểm của  và .  là giao điểm của  với . Chứng minh .

d) Tứ giác  là hình gì?

e) Tìm điều kiện của hình bình hành  để tứ giác  là hình vuông.

**Lời giải**



a) Vì  là trung điểm của  nên 

Vì  là trung điểm của  nên 

Mà  ( vì  là hình bình hành )

Nên 

Xét tứ giác  ta có



Suy ra tứ giác  là hình bình hành ( vì có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau )

Mặt khác 

Suy ra tứ giác  là hình thoi ( hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau )

b) Ta có 

Nên tứ giác  là hình bình hành ( vì có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau )

 ( cặp cạnh đối )

c) Chứng minh tương tự câu a, ta có tứ giác  là hình thoi

Vì  là hình thoi nên  là trung điểm của đường chéo 

Vì  là hình thoi nên  là trung điểm của đường chéo 

Xét  ta có

là trung điểm của  và là trung điểm của 

 là đường trung bình của 



d) Chứng minh tương tự câu b ta có 

Vì  ( câu b) nên 

Vì  nên 

Suy ra tứ giác  là hình bình hành ( vì có hai cặp cạnh đối song song với nhau)

Mặt khác vì tứ giác  là hình thoi nên 

Do đó là hình chữ nhật ( vì là hình bình hành có một góc vuông )

e) Ta có  là hình chữ nhật

Nên  là hình vuông nếu 



 hình thoi  có hai đường chéo bằng nhau nên  là hình vuông

 là hình chữ nhật có 

Do đó  là hình vuông thì  phải là hình chữ nhật có .

**Bài 19.** Cho hình bình hành  có . Gọi  là chân đường vuông góc kẻ từ  đến đường thẳng ,  là trung điểm của ,  là chân đường vuông góc kẻ từ  đến  và  cắt  ở .

a) Tứ giác  là hình gì? Vì sao?

b)  là tam giác gì? Vì sao?

c) Chứng minh rằng: .

**Lời giải**



a) Vì  nên 

Mà  nên 

Lại có  ( vì  là hình bình hành )

Nên tứ giác  ta có 

tứ giác  là hình bình hành ( vì có hai cặp cạnh đối song song )

b) Xét hình bình hành  ta có

 và  là trung điểm của 

là đường trung bình của hình thang 

là trung điểm của 

Xét  ta có

 là trung điểm của  và 

 là trung điểm của 

Xét  có  là đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên  cân tại .

c) Ta có

 là trung điểm của nên 

 là trung điểm của nên 

Mà  nên 

Xét tứ giác  ta có 

Tứ giác  là hình bình hành ( vì có 1 cặp cạnh đối song song và bằng nhau )

 ( 2 góc đối) (1)

Mà  ( tính chất đường chéo của hình thoi)

( vì  cân tại  nên  ) (2)

Từ (1) và (2) suy ra  (3)

Mặt khác vì  là hình bình hành nên

 ( 2 góc đối ) (4)

Từ (3) và (4) ta có  (5)

Lại có 

 (6)

Từ (5) và (6) 

**Bài 20.** Cho hình thoi  có . Kẻ , rồi kéo dài một đoạn . Nối  với ,

 với . Chứng minh:

a)  là trung điểm của .

b) Tứ giác  là hình thoi.

c)  là trung điểm của .

d) .

**Lời giải**



a) Xét  ta có 

 là tam giác đều

Mà  là đường cao  đồng thời là đường trung tuyến

 là trung điểm của 

b) Xét  ta có  vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên  cân tại 

 (1)

Xét  ta có  vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên  cân tại  (2)

Mà  là tam giác đều nên  (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra 

 là hình thoi ( vì có 4 cạnh bằng nhau )

c) Theo câu b thì tứ giác  là hình thoi và 

nên suy ra 

Lại có  ( cặp góc so le trong do )

 có nên  là tam giác đều



 thẳng hàng

Xét  có là trung điểm của  và 

 là đường trung bình của 

là trung điểm của .

d) Ta có 

 tứ giác  là hình thang

Lại có 



 hình thang  có hai góc ở đáy bằng nhau nên là hình thang cân

 hai đường chéo bằng nhau, tức là .

**Bài 21.** Cho , các đường trung tuyến và  cắt nhau tại . Gọi  là trung điểm của ,  là trung điểm của .

a) Tứ giác  là hình gì? Vì sao?

b) Để tứ giác  là hình chữ nhật thì  phải có thêm điều kiện gì?

c)  cần thêm điều kiện gì để  là hình vuông?

**Lời giải**



a) Xét  có

 là trung điểm của 

là trung điểm của 

Suy ra là đường trung bình của 

 (1)

Xét  có

 là trung điểm của 

là trung điểm của 

Suy ra là đường trung bình của 

 (2)

Từ (1) và (2) 

Tứ giác  là hình bình hành.

b) Ta có  là giao điểm của hai đường trung tuyến  và 

nên là trọng tâm của 

Ta có

 ( tính chất trọng tâm tâm của tam giác )



 ( tính chất trọng tâm tâm của tam giác )



Ta lại có  là hình bình hành

Để  là hình chữ nhật thì 





 cân tại 

Vậy để  là hình chữ nhật thì  phải là tam giác cân tại 

c) Để hình chữ nhật  là hình vuông thì 



Vậy để tứ giác  là hình vuông thì  phải cân tại và .

**Bài 22.** Cho  các đường trung tuyến  và  cắt nhau ở . Gọi  là trung điểm của , là trung điểm của .

a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

b) Nếu  cân tại . Chứng minh:  và  là hình chữ nhật.

c) Nếu các đường trung tuyến . Khi đó tứ giác  là hình gì? Vì sao?

**Lời giải**



a) Xét  có

 là trung điểm của 

là trung điểm của 

Suy ra  là đường trung bình của 

 (1)

Xét  có

 là trung điểm của 

là trung điểm của 

Suy ra là đường trung bình của 

 (2)

Tứ (1) và (2) 

Tứ giác  là hình bình hành ( vì có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau ).

b) Vì  là trung điểm của  nên  (3)

Vì  là trung điểm của  nên  (4)

Vì  cân tại  nên  (5)

Từ (3), (4) và (5) 

Xét  và  ta có



 ( vì  cân tại )

 là cạnh chung

Vậy  ( c.g.c )

 ( vì  là trọng tâm của )







 là hình bình hành có hai đường chéo  nên tứ giác  là hình chữ nhật.

c) Nếu  thì 

Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau nên  là hình vuông.

**Bài 23.**  Cho  vuông cân tại.

a) Gọi  là điểm đối xứng với  qua . Chứng minh  vuông cân.

b) Gọi  và  lần lượt là đường phân giác trong của  và . Chứng minh  là phân giác của .

c) Chứng minh  là hình vuông.

d) So sánh  với .

**Lời giải**



a) Vì  là điểm đối xứng với  qua  nên  và .

Ta có:  và (  vuông cân tại ).

 và .

Vậy  vuông cân tại .

b)  là phân giác   .

 là phân giác   .

Suy ra .

Vậy  là tia phân giác .

c)  vuông cân tại ,  là phân giác cũng là đường cao từ đỉnh  đến .

 .

 vuông cân tại ,  là phân giác cũng là đường cao từ đỉnh đến .

.

Ta có: .

Tứ giác  có ba góc vuông nên  là hình chữ nhật.

Lại có là tia phân giác  ( chứng minh ở câu b ).

Vậy  là hình vuông.

d) Xét  và  có:

 (  là điểm đối xứng với  qua );



 là cạnh chung;

Vậy  ( c - g - c ).

Xét  và  có:

 ( cạnh hình vuông );

 là góc chung;

 ( vì ).

Vậy  ( c - g - c ).

**Bài 24.** Cho  vuông tại . Từ một điểm  trên cạnh . Kẻ  tại . Kẻ  tại .

a) Chứng minh: Tứ giáclà hình chữ nhật.

b) Tìm vị trí của trên cạnh  để là hình vuông.

c) Kẻ  tại . So sánh  với rồi tìm vị trí của  để  nhỏ nhất.

**Lời giải**



a) Tứ giác  có: , , .

Suy ra  là hình chữ nhật.

b) Hình chữ nhật  là hình vuông khi , tức là  là tia phân giác trong của .

c) ● Khi thì .

● Khi ,  vuông tại . Suy ra .

Vậy .

Vì  là hình chữ nhật nên . nhỏ nhất khi , khi đó  cũng nhỏ nhất. Vậy  nhỏ nhất khi  tại .

**Bài 25.** Cho  vuông tại  có , là đường trung tuyến. Gọilà đường vuông góc kẻ từ  đến, là đường vuông góc kẻ từ  đến. Gọi  là điểm đối xứng với qua .

a) Tứ giác  là hình gì? Vì sao?

b) Gọi  là trung điểm của . Chứng minh 3 điểm  thẳng hàng.

c)  cần thêm điều kiện gì để tứ giác  là hình vuông.

**Lời giải**



a) Tứ giác  có ; ;  nên  là hình chữ nhật.

b) vuông tại , là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên .

cân tại .

Ta lại có:  tại .

Tứ giác có: ;

 ( là điểm đối xứng với qua ).

 là hình bình hành.

 và .

Mà là trung điểm  nên  và .

  là hình bình hành.

Mà  là trung điểm của cũng là trung điểm của . Vậy  thẳng hàng.

c) Hình chữ nhật là hình vuông khi là phân giác , hay là phân giác .

Khi đó là trung tuyến cũng là phân giác xuất phát từ .

 vuông cân tại .

Vậy  vuông cân tại thì là hình vuông.

**Bài 26.** Cho hình thoi  có . Gọi  lần lượt trên  sao cho.

a) Chứng minh .

b) Chứng minh  là tam giác đều.

**Lời giải**



a)  có    cân tại .

Ta có:  ( là hình thoi ) .

 hay .

 là hình thoi nên  mà  nên .

Xét  và  có:

(gt);

 (cmt);

 (cmt).

 (c - g - c).

 ( cặp góc tương ứng ).

b)    cân tại . 

 có   đều .

Ta có: , mà  ( chứng minh ở câu a ).

. Hay . 

Từ  và   là tam giác đều.

**Bài 27.** Cho hình thoi. Lấy và trên và sao cho . Gọi và  lần lượt là giao điểm của  với. Chứng minh tứ giáclà hình thoi.

**Lời giải**



 là hình thoi nên: ; ; ; .

● Xét và có: ;

;

 là cạnh chung.

Vậy  (c-g-c)  

● Xét và có: ;

;

 là cạnh chung.

Vậy  (c-g-c)   

● Xét và có: ;

;

 (gt).

Vậy  (c-g-c)  (cặp góc tương ứng).

● Xét và có: ;

(Vì , mà );

.

Vậy  (g-c-g) . 

Từ , ,   là hình thoi.

**Bài 28.** Cho . Lấy các điểm và lần lượt trên vàsao cho . Gọilần lượt là trung điểm của. Chứng minh:

a) .

b) .

**Lời giải**



a) Trong  có  là trung điểm ,  là trung điểm .

 là đường trung bình của 

  và  

Trong  có  là trung điểm ,  là trung điểm .

 là đường trung bình của .

  và  

Từ  và  suy ra .

b) Từ và  suy ra .

Tứ giác  có  và  nên  là hình bình hành.

Trong  có  là trung điểm ,  là trung điểm .

 là đường trung bình của .

.

Ta lại có   

Từ  và   .

Hình bình hành  có  nên  là hình thoi.

Suy ra .

**Bài 29.** Cho hình thang cân( AB // CD ). Gọi  lần lượt là trung điểm các cạnh. Chứng minh tứ giác là hình thoi.

**Lời giải**



● Vìlà trung điểm , là trung điểm nên  là đường trung bình .

  và  

● Vìlà trung điểm , là trung điểm nên  là đường trung bình .

 và  

● Vìlà trung điểm , là trung điểm nên  là đường trung bình .

Mà ( Vìlà hình thang cân ) 

Từ và   và . Vậy tứ giác là hình bình hành.

Từ ,  và .

Hình bình hành  có   là hình thoi.

**Bài 30.** Cho hình thang (). Gọi lần lượt là trung điểm của.

a) Chứng minh là hình bình hành.

b) Hình bình hành  là hình gì nếu hai đường chéo  và .

**Lời giải**



a)

● Vìlà trung điểm , là trung điểm nên  là đường trung bình .

  và . 

● Vìlà trung điểm , là trung điểm nên  là đường trung bình .

  và . 

● Vìlà trung điểm , là trung điểm nên  là đường trung bình .

  và .

Từ và    và . Vậy tứ giác là hình bình hành.

b) Khi  thì  (Vì , ).

Khi đó hình bình hành  là hình chữ nhật.

Khi  thì  (Vì ,  ).

Khi đó hình chữ nhật  là hình vuông.

**Bài 31.** Cho hình thoi. Gọi  lần lượt là trung điểm của .

a) Chứng minh .

b) Tứ giác là hình chữ nhật.

**Lời giải**



a) Vì  là hình thoi nên  

Vìlà trung điểm , là trung điểm nên  là đường trung bình .

  và  

Vìlà trung điểm , là trung điểm nên  là đường trung bình .

 và 

Từ ,  và  suy ra .

b) Vìlà trung điểm , là trung điểm nên  là đường trung bình .

  và . 

Từ , ,  và   và .

  là hình bình hành.

Hình bình hành  có   là hình chữ nhật.

**Bài 32.** Cho hình thoi  có là giao điểm của hai đường chéo. Gọi lần lượt là chân đường vuông góc từ  xuống.

a) Chứng minh  thẳng hàng và  thẳng hàng.

b) Chứng minh .

c) Tứ giác là hình gì? Vì sao?

**Lời giải**



a)

 có ; 

 có ; 



, , mà (là hình thoi).

 . 

Từ , ,  và  suy ra  

Vì  thẳng hàng nên  

Từ  và  suy ra . Suy ra  thẳng hàng.

 có ; 

 có ; 



, , mà (là hình thoi).

 . 

Từ , ,  và  suy ra  

Vì  thẳng hàng nên  

Từ  và  suy ra . Suy ra  thẳng hàng.

b) Ta có ,  mà (là hình thoi )

Suy ra .

Xét các tam giác vuông: , , và  có:

;

 (cmt).

 ( c.huyền – g.nhọn ).

  (các cạnh tương ứng).

c) Tứ giác có ;  là hình bình hành.

Hình bình hành có   là hình chữ nhật.

**Bài 33.** Cho hình thoi ( góc  tù). Từ  hạ . Từ  hạ . Gọi  là giao điểm của  và ,  là giao điểm của  và .  là giao điểm của  và . Chứng minh:

a) là trực tâm .

b) thẳng hàng.

c) .

d) .

e) Tứ giác là hình thoi.

**Lời giải**



a) Xét  có: ,  và   là trực tâm .

b)  là trực tâm . 

Xét  có: ,  và .

 là trực tâm .

. 

 là hình thoi nên  tại . 

Từ , ,  suy ra  thẳng hàng.

c) Xét  vuông tại và  vuông tại , có:

 ( là hình thoi) ;

 là góc chung.

 ( c.huyền – g.nhọn ).

 ( cặp góc tương ứng ).

Xét  vuông tại  và  vuông tại N, có:

( là hình thoi) ;

 là góc chung.

 ( c.huyền – g.nhọn ).

 ( cặp góc tương ứng ).

Trong hình thoi  có 

Hay .

Mà  và  nên .

d) Ta có: ( Tổng bốn góc trong một tứ giác).

 ( Tổng bốn góc trong một tứ giác).

Lại có:  ( Hai góc đối của hình thoi ).

 ( Vì cùng bằng ).

 .

e) Ta có:  ( câu d);

 ( đối đỉnh );

 ( đối đỉnh );

;

Lại có:  ( câu c );

 là hình bình hành.

Vì thẳng hàng mà  tại   tại .

Vậy hình bình hành  là hình thoi.

**Bài 35:** Cho hình vuông . Hai đường thẳng và  vuông góc với nhau ở tâm  của hình vuông. Đường thẳng cắt lần lượt ở  và  đường thẳng  cắt  và  ở  và 

a) Chứng minh .

b) Chứng minh .

c) Tứ giác  là hình vuông.

****

**Lời giải**

a) Chứng minh .

Ta có là hình vuông

 tại ;  là tia phân giác của

;  là tia phân giác của ;



; 

Lại có: 



Xét  và  có:

( 2 góc cùng phụ với )

(chứng minh trên)

(chứng minh trên)

(g-c-g)

b) Chứng minh .

Theo phần a, ta có  (cặp cạnh tương ứng) (1) Sửa lại dấu suy ra cho đúng và gõ trên mathtype thầy cô nhé, rà soát lại phía sau còn nhiều lỗi tương tự

Xét  và  có:

( 2 góc so le trong)

(Chứng minh trên)

(2 góc đối đỉnh)

(g-c-g)

 (cặp cạnh tương ứng) (2)

Xét  và  có:

( 2 góc so le trong)

(chứng minh trên)

(2 góc đối đỉnh)

(g-c-g)

 (cặp cạnh tương ứng) (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra 

c) Tứ giác  là hình vuông.

Xét tứ giác  có  =>  là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)

Mặt khác có  tại =>  tại  => là hình vuông.

**Bài 36:** Cho hình vuông . Trên cạnh  lấy điểm . Từ  dựng đường thẳng vuông góc với  tại , đường thẳng này cắt đường thẳng  tại .

a) Chứng minh .

b) Từ  dựng đường thẳng song song với và từ  dựng đường thẳng song son với , hai đường thẳng này cắt nhau tại . Chứng minh đồng quy.

**Lời giải**

a) Chứng minh .

Ta có:



Xét  và  có:



(cạnh hình vuông )

(chứng minh trên)

(g-c-g)

 (cặp cạnh tương ứng)

b) Chứng minh đồng quy.

Xét tứ giác có (gt)

là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Mà  (gt) là hình chữ nhật

Lại có: (chứng minh phần a)

 là hình vuông (dấu hiệu nhận biết)

Gọi là giao điểm của hai đường chéo và của hình vuông 

* là trung điểm của  (tính chất hình vuông)

là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền  của tam giác vuông 



Lại có =>  => thuộc đường trung trực của 

Mà  là đường trung trực của  => 

Vậy đồng quy

**Bài 37:** Cho hình vuông . Vẽ . Tia cắt  ở , cắt đường thẳng  tại .

a) Chứng minh  vuông cân.

 b) Vẽ hình bình hành  có  là giao điểm của và . Chứng minh  thẳng hàng.

c) Chứng minh .

**Lời giải**

a) Chứng minh  vuông cân.

Xét  và  có:



(cạnh hình vuông ABCD)

(cùng phụ với )

(g-c-g)

 (cặp cạnh tương ứng)

Xét  có  => cân tại 

Lại có  tại  => 

*  vuông cân tại 

b) Chứng minh thẳng hàng.

Từ  kẻ ; ;

Mà (ABCD là hình vuông)

là hình chữ nhật (1)

Ta có là hình bình hành (gt)

Lại có (chứng minh trên) =>  là hình thoi

Mặt khác  (chứng minh trên) =>  là hình vuông => (tính chất hình vuông)

Xét  và  có:





(cùng phụ với )

(cạnh huyền - góc nhọn)

 (cặp cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) => là hình vuông =>  là phân giác của 

Hay  là phân giác của =>  trùng với  hay thẳng hàng.

c) Chứng minh .

Từ F kẻ  có 

là hình chữ nhật (3) => 

 (cùng phụ với )

Xét  và  có:



(cạnh của hình vuông)

(chứng minh trên)

(cạnh huyền - góc nhọn)

 (cặp cạnh tương ứng) (4)

Từ (3); (4) suy ra là hình vuông =>  là phân giác của 

 (tính chất đường chéo của hình vuông)

Lại có  là đường chéo của hình vuông 



 Hay .



**Bài 38:** Cho hình vuông . Trên tia đối của tia lấy điểm , Trên tia đối của tia  lấy điểm  sao cho . Vẽ hình bình hành . Gọi  là trung điểm của . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác  là hình vuông.

b)  thuộc tia phân giác góc .

c) .

d) Tứ giác  là hình thang.

**Lời giải**

a) Tứ giác  là hình vuông.

Xét  và  có:



(cạnh của hình vuông)

(gt)

(c-g-c)

 (cặp cạnh tương ứng)

và  (cặp góc tương ứng)

Theo giả thiết: là hình bình hành

Lại có 

là hình thoi (dấu hiệu nhận biết) (1)

Lại có:





Từ (1) và (2) suy ra  là hình vuông.(dấu hiệu nhận biết)

b)  thuộc tia phân giác góc .

Kẻ  tại  và 

 là hình chữ nhật (3)



Lại có 

 (cùng phụ với )

Xét  và  có:



(cạnh của hình vuông)



(cạnh huyền - góc nhọn)

 (cặp cạnh tương ứng) (4)

Từ (3) và (4) suy ra  là hình vuông

 là tia phân giác của . Vậy  thuộc tia phân giác góc .

c) .

Theo phần b,  là tia phân giác của 

(Tính chất đường chéo của hình vuông)

Lại có  là tia phân giác của  =>  (Tính chất đường chéo của hình vuông)

Ta có: 



d, Tứ giác  là hình thang.

Xét vuông tại  (), có là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền 



Mà  ( là trung điểm của )



*  thuộc đường trung trực của . Mà  là đường trung trực của   thuộc BD => thẳng hàng

Ta có là tia phân giác của => (Tính chất đường chéo của hình vuông)



Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị =>  hay 

Xét tứ giác  có  => Tứ giác  là hình thang.



**Bài 39:** Cho hình vuông , Kéo dài  lấy điểm , Kéo dài  lấy điểm  sao cho .

a) Chứng minh .

b)  là tam giác gì? Vì sao?

c) Kẻ tia và tia .  cắt  tại . Tứ giác  là hình gì? Vì sao?

**Lời giải**

a) Chứng minh .

Xét  và có:

 (2 cạnh của hình vuông)





*  (c-g -c) Không sử dụng dấu mũi tên này

b)  là tam giác gì? Vì sao?

Theo phần a,  =>  (cặp góc tương ứng)

và (cặp cạnh tương ứng)

Xét tam giác  có =>  cân tại  (1)

Lại có: 

*  (2)

Từ (1); (2) suy ra  vuông cân tại 

c) Tứ giác  là hình gì? Vì sao?

Theo giả thiết ; cắt  tại 



Xét tứ giác có  => là hình bình hành

Lại có: => là hình thoi.

Mặt khác => là hình vuông

**Bài 40:** Cho hình vuông . Trên tia đối của các tia lần lượt lấy các điểm . sao cho . Chứng minh:

a, .

**** b, .

c, Tứ giác  là hình vuông.

**Lời giải**

a) .

là hình vuông => 

Theo giả thiết 

* 
* 

Xét  và  có:





(chứng minh trên)

(c-g-c)

Chứng minh tương tự ta có : (c-g-c)

(c-g-c)

Từ đó suy ra: 

b) .

Theo phần a, =>  (cặp góc tương ứng)

Lại có: (Tổng 2 góc nhọn trong tam giác vuông)

* 
* 

c) Tứ giác  là hình vuông.

Theo phần a,  (cặp cạnh tương ứng)

(cặp cạnh tương ứng)

 (cặp cạnh tương ứng)

*  =>  là hình thoi
* Lại có:  (chứng minh phần b) =>  là hình vuông.

**Bài 41:** Cho hình vuông . Từ điểm  thuộc cạnh  vẽ đường thẳng cắt  ở sao cho . Kẻ  ở . Chứng minh:

a)  và .

b) .

c) .

**Lời giải**

a)  và .

Xét  và  có:



chung

 (gt)

(cạnh huyền - góc nhọn)

 (cặp cạnh tương ứng)

Mà (2 cạnh của hình vuông)

* 

b) .

Xét  và  có:



chung

(chứng minh trên)

* (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

c) .

Theo phần a,  (cặp góc tương ứng)

Theo phần b, (cặp góc tương ứng)

Mà 



**Bài 42:** Cho hình vuông .  là điểm tùy ý trên cạnh . Tia phân giác của  cắt  tại . Kẻ  tại  và tia  cắt  tại . Chứng minh:

a) .

b) .

**** c) .

**Lời giải**

a) .

Xét  và  có:



chung

(là tia phân giác của )

(cạnh huyền - góc nhọn)

b) .

Theo phần a, (cặp cạnh tương ứng)

Mà (2 cạnh của hình vuông )

* 

Xét  và  có:

(chứng minh trên)

chung



(cạnh huyền - cạnh góc vuông)

c) .

Theo phần b, (cặp góc tương ứng)

Mà 



**Bài 43**: Cho hình vuông . Trong hình vuông vẽ  đều. Bên ngoài hình vuông vẽ  đều.

a, Tính các góc của .

b, Chứng minh  vuông cân.

c, Chứng minh thẳng hàng.

**Lời giải**

a) Tính các góc của .

Ta có  đều => 

Mà 

* 

Ta có: (cùng = )

* cân tại 
* 

Trong có (tổng 3 góc trong )



Vậy trong có ; 

b) Chứng minh  vuông cân.

Ta có: 

* 

Vì  đều (gt) => 



 vuông tại 

Lại có (cùng = )

vuông cân tại 

c) Chứng minh thẳng hàng.

Theo câu b, vuông cân tại C => 

Ta có: 



*  thẳng hàng

**Bài 44:** Cho  vuông tại ,. Gọi  là trung điểm của ,  là trung điểm của .

a) Tính 

b) Vẽ tia  sao cho  cắt tại . Chứng minh rằng tứ giác là hình vuông.

c) Gọi  là giao điểm của  và . Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh rằng tứ giác BDCE là hình bình hành và 

**Lời giải**



a) có  là trung điểm của , là trung điểm của (giả thiết)

 là đường trung bình của 



Vậy 

b) Tứ giác  có: 

 là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

Hình bình hành có  (do  vuông tại )

là hình chữ nhật

Có  (do E là trung điểm của )



Hình chữ nhật  có 

 là hình vuông

c) Hình vuông  có cắt tại 

  là trung điểm của và 

có  là đường trung bình 

Tứ giác  có 

 là hình bình hành

 Hai đường chéo  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Mà  là trung điểm của suy ra cũng là trung điểm của DE

có đường trung tuyến và cắt nhau tại K

 là trọng tâm 



Mà 

 hay 

**Bài 45:** Cho hình thang vuông  có  và . Có . Gọi  là điểm đối xứng của  qua .

a) Chứng minh  và tứ giác là hình vuông.

b) Gọi  là trung điểm của  và  là giao điểm của và . Chứng minh diện tích  bằng diện tích tứ giác .

c) Biết và cắt nhau tại . Gọi  là hình chiếu của  trên . Chứng minh .

**Lời giải**



a) Vì  là điểm đối xứng của  qua  nên  là trung điểm của .



Mà  (giả thiết)



Mặt khác:  (do )

  là hình bình hành

Hình bình hành  có  (giả thiết)

 là hình thoi

Hình thoi  có 

 là hình vuông

b) Có  là trung điểm của 

Có  là trung điểm của 

Mà  (do là hình vuông)



 là hình vuông









c) Có  (Do  là hình chiếu của  lên )

Ta có (c.g.c)

 (2 góc tương ứng)

Mà  (do  vuông tại )



 hay 



vuông tại I

 vuông tại  

 vuông tại 

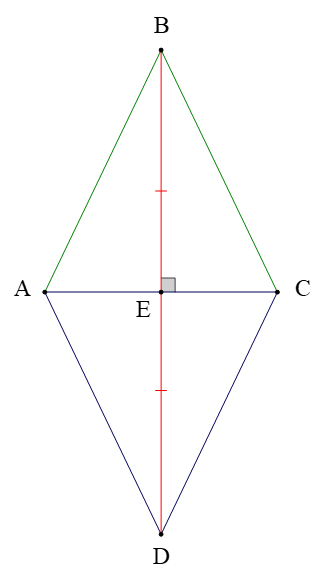


**Bài 46:** Cho  cân tại  có đường cao . Trên tia đối của tia  lấy điểm  sao cho 

a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành

b) Chứng minh tứ giác  là hình thoi

**Lời giải**



a) Có  cân tại  có đường cao  (giả thiết)

đồng thời là đường trung tuyến của tam giác



Tứ giác có EA = EC (chứng minh trên),  (giả thiết)

là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

b) Hình bình hành có 2 đường chéo 

là hình thoi (dấu hiệu nhận biết)

**Bài 47:** Cho  cân tại , có đường cao .

a, Tính diện tích  biết .

b, Gọi  là trung điểm của  và  là điểm đối xứng của qua . Chứng minh tứ giác  là hình chữ nhật.

c, Gọi  là điểm đối xứng của  qua . Chứng minh tứ giác  là hình thoi.

d, Kẻ , Gọi lần lượt là trung điểm của . Chứng minh .

**Lời giải**



a)  cân tại  có đường cao 

 đồng thời là đường trung tuyến,  là trung điểm của 



vuông tại H



b) Tứ giác  có  là trung điểm của  (giả thiết),  là trung điểm của  (do  đối xứng với  qua )

 là hình bình hành

Hình bình hành  có (do )

 là hình chữ nhật

c) Tứ giác  có  là trung điểm của  (chứng minh trên),  là trung điểm của  (do  đối xứng với  qua )

 là hình bình hành

Hình bình hành có 2 đường chéo 

 là hình thoi

d) Nối 

 có là trung điểm của ,  là trung điểm của 

là đường trung bình của 

 (1)

 có là trung điểm của ,  là trung điểm của 

là đường trung bình của 

Mà 



 có ;   là trực tâm của 

 (2)

Từ (1), (2) (quan hệ từ vuông góc đến song song)

**Bài 48:** Cho hình vuông  có  là giao của hai đường chéo. Lấy  là điểm bất kì trên đường chéo  ( khác  và ). Gọi  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  trên .

a, Chứng minh tứ giác  là hình chữ nhật.

b, Chứng minh  và chứng minh .

c, Gọi  lần lượt là trung điểm của . Tính .

**Lời giải**



a) Có  (do  theo tứ tự là hình chiếu của  trên )

Tứ giác  có 

 là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)

b) Chứng minh  (c.g.c do chung, )



Mà  (do là hình chữ nhật)



 là hình chữ nhật  và 

Giả sử 

Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật có  là đường chéo là đường phân giác

 là hình vuông



Có 

c) Gọi là trung điểm của

 là đường trung bình của 











Chứng minh  (c.g.c)



Mà 



**Bài 49:** Cho hình vuông . Qua vẽ hai đường thẳng vuông góc với nhau lần lượt cắt tại và . Cắt tại và .

a) Chứng minh  và  là các tam giác cân.

b) cắt tại . Hai điểm  lần lượt là trung điểm của và .

Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật.

c) Chứng minh là trực tâm .

d) Chứng minh là đường trung trực của .

e) Chứng minh bốn điểm  thẳng hàng.

**Lời giải**



a) Xét  và  có:

,  (là hình vuông)

 (cùng phụ với )

 (g.c.g)



 cân tại 

Xét  và  có:

,  (là hình vuông)

 (cùng phụ với )

 (g.c.g)



 cân tại 

b)  cân tại có là đường trung tuyến (là trung điểm của )

vừa là đường cao vừa là đường phân giác của tam giác

 cân tại có là đường trung tuyến (là trung điểm của )

vừa là đường cao vừa là đường phân giác của tam giác

Có là phân giác , là phân giác của , và  kề bù



Tứ giác  có  (do ), (do ),  (do )

  là hình chữ nhật (Dấu hiệu nhận biết)

c) Có  là hình chữ nhật (chứng minh trên)



 hay 

Xét có:  tại H,  tại , 

  là trực tâm của 

d)  vuông tại  có đường trung tuyến  

 vuông tại  có đường trung tuyến  



  nằm trên đường trung trực của  (1)

 vuông tại  có đường trung tuyến  

 vuông tại  có đường trung tuyến  



nằm trên đường trung trực của  (2)

Từ (1), (2) ta có là đường trung trực của 

e) Có (do là hình vuông)

nằm trên đường trung trực của  (3)

Có (do là hình vuông)

nằm trên đường trung trực của  (4)

Từ (1), (2), (3), (4) ta có cùng nằm trên đường trung trực của 

4 điểm trên thẳng hàng.

**Bài 50:** Cho đoạn thẳng  và một điểm  thay đổi trên đoạn  ( không trùng với  và ) Vẽ các hình vuông AMCD và  thuộc cùng một nửa mặt phẳng với bờ .

a) Chứng minh  và .

b) Gọi G, I, N, K lần lượt là trung điểm của . Tứ giác  là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh  luôn đi qua 1 điểm cố định khi M di chuyển trên .

d) Chứng minh rằng trung điểm  của  luôn nằm trên một đường cố định khi  di chuyển trên .

**Lời giải**



a) Xét  và  có:

(do  là hình vuông)

(do  là hình vuông)

 (do ,  là hình vuông)

 (c.g.c)



Giả sử 

 và  có: (chứng minh trên), (đối đỉnh)

 (định lý tổng 3 góc trong tam giác)

Mà 

b)  có  là trung điểm của ,  là trung điểm của 

 là đường trung bình của 

 (1)

 có  là trung điểm của ,  là trung điểm của 

 là đường trung bình của 

 (2)

Từ (1), (2) ta có 

là hình bình hành

 có  là trung điểm của ,  là trung điểm của 

 là đường trung bình của 

 (3)

Từ (1), (3) ta có 

Hình bình hành có  Cho đoạn thẳng  và một điểm

là hình thoi

 có  là trung điểm của ,  là trung điểm của 

 là đường trung bình của 

 mà 



Mặt khác 

 hay 

Hình thoi có 

là hình vuông

c) 

 có 

 vuông cân tại 

cố định  cố định

Xét có  là đường trung bình ( là trung điểm của  là trung điểm của )

 (1)

Xét tứ giác có: 

là hình chữ nhật



là hình bình hành

 (2)

Từ (1) và (2) ta có (tiên đề Ơclit)

luôn đi qua 1 điểm cố định khi di chuyển trên 

d)  là hình chữ nhật

 là trung điểm của nên  là trung điểm của 

Từ Q kẻ 

 vuông cân tại  là trung điểm của 

 là trung tuyến đồng thời là đường cao



Mà 

Mà 

 là trung điểm của  hay 

 là đường trung bình của  hay 

Vì cố định nên  cố định

 cố định

 nằm trên đường thẳng song song với  và cách  một khoảng bằng 