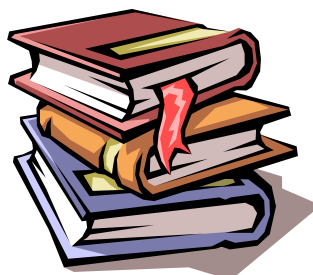


Tailieumontoan.com



Sưu tầm



**CÁC CHUYÊN ĐỀ
HỌC SINH GIỎI TOÁN 8**



Tài liệu sưu tầm, ngày 24 tháng 8 năm 2020

TUYỂN TẬP 14 CHUYÊN ĐỀ SỐ HỌC BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 8

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh về các chuyên đề toán THCS, website tailieumontoan.com giới thiệu đến thầy cô và các em 14 chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán lớp 8. Chúng tôi đã kham khảo qua nhiều tài liệu để làm 14 chuyên đề về này nhằm đáp ứng nhu cầu về tài liệu hay và cập nhật được các dạng toán mới bồi dưỡng học sinh giỏi lớp 8.

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng tuyển tập chuyên đề này để giúp con em mình học tập. Hy vọng 14 chuyên đề lớp 8 này có thể giúp ích nhiều cho học sinh lớp 8 phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian để sưu tầm và tổng hợp song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ chuyên đề này!

Mục Lục

	Trang
Lời nói đầu	
Chủ đề 1. Chuyên đề chia hết	1
Chủ đề 2. Chuyên đề số nguyên tố	50
Chủ đề 3. Chuyên đề số chính phương	69
Chủ đề 4. Chuyên đề nghiệm nguyên	133
Chủ đề 5. Chuyên đề phân tích đa thức thành nhân tử	179
Chủ đề 6. Chuyên đề chứng minh bất đẳng thức	207
Chủ đề 7. Chuyên đề min-max	226
Chủ đề 8. Chuyên đề phương trình	248
Chủ đề 9. Chuyên đề bất phương trình	
Chủ đề 10. Chuyên đề biến đổi biểu thức hữu tỷ	272
Chủ đề 11. Chuyên đề đa thức và tính chia hết của đa thức	318
Chủ đề 12. Chuyên đề hình học tổ hợp	352
Chủ đề 13. Chuyên đề toán rời rạc	380
Chủ đề 14. Các dạng toán khác	407

ĐS8-Chuyên đề 1: CHIA HẾT

Qua Các Đề Thi HSG Môn Toán Lớp 8

A. Bài toán

Câu 1: Chứng minh rằng: $A = \left[n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \right] : 7$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Câu 2: Chứng minh rằng: $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Câu 3: a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Câu 4: Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

Câu 5: Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Câu 6: Chứng minh rằng:

$$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} \text{ chia hết cho } 40.$$

Câu 7: a) Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A = 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 8: Chứng minh rằng

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Câu 9: Chứng minh rằng $a^5 - a : 30 (a \in \mathbb{Z})$

Câu 10: Cho a, b là hai số tự nhiên. Biết rằng a chia cho 5 dư 3 và b chia cho 5 dư 2. Hỏi tích $a \cdot b$ chia cho 5 dư bao nhiêu?

Câu 11: Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Đặt $S = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3$ và

$P = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng: S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.

Câu 12: a) Chứng minh rằng: $21^{30} + 39^{21}$ chia hết cho 45

b) Chứng minh rằng: Với mọi số tự nhiên n ta có: $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$.

Câu 13: Chứng minh:

a) $A = 2^{10} + 2^{11} + 2^{12}$ chia hết cho 7.

b) $B = (6n+1)(n+5) - (3n+5)(2n-1)$ chia hết cho 2, với $n \in \mathbb{Z}$.

c) $C = 5n^3 + 15n^2 + 10n$ chia hết cho 30, với $n \in \mathbb{Z}$.

d) Nếu $a = x^2 - yz$; $b = y^2 - xz$; $c = z^2 - xy$ thì $D = ax + by + cz$ chia hết cho $(a + b + c)$.

e) $E = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$ là bình phương của một số nguyên, với $x \in \mathbb{Z}$.

f) $F = (x^2 + x - 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2$ chia hết cho $(x - 1)$.

g) $G = x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$, với $n \in \mathbb{N}$.

Câu 14: Chứng minh rằng: $B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24$ chia hết cho 6 (Câu 2b đề 10)

Câu 15: Chứng minh: Với mọi n là số tự nhiên chẵn thì biểu thức: $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 323

Câu 16: Chứng minh rằng $M = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4$ chia hết cho 16, với $n \in \mathbb{Z}$

Câu 17: a) Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A = 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 18: Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3

Chứng minh rằng: $A = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3$ chia hết cho 3.

Câu 19: Cho hai số nguyên, số thứ nhất chia cho 5 dư 1, số thứ hai chia cho 5 dư 2. Hỏi tổng bình phương của chúng có chia hết cho 5 không ?

Câu 20: Chứng minh rằng $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Câu 21: Chứng minh rằng:

$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 40

Câu 22: Chứng minh rằng $11^{10} - 1$ chia hết cho 100

Câu 23: Chứng minh rằng $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Câu 24: Chứng minh rằng:

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Câu 25: a) Chứng minh rằng: $n^3 + 3n^2 + 2n : 6$ với mọi số nguyên n

b) Tìm số nguyên n sao cho: $2n^3 + n^2 + 7n + 1 : (2n - 1)$

Câu 26: . Cho số tự nhiên $n > 3$. Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}, 0 < b < 10$) thì tích ab chia hết cho 6

Câu 27: Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225.

Câu 28: Chứng minh rằng $2^{2008} + 2^{2009} + 2^{2010}$ chia hết cho 7

Câu 29: Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n

Câu 30: Chứng minh rằng $3^{21} - 2^{24} - 6^8 - 1$ chia hết cho 1930

Chứng minh rằng: $A = (2^n - 1)(2^n + 1)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n .

Câu 31: Tìm các số có 3 chữ số chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 7

Câu 32: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m, n $m = \frac{n^2 + n + 1}{n + 1}$ thì phân số

$\frac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$ tối giản

Câu 33: Chứng minh rằng $n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$ chia hết cho 24 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Câu 34: Chứng minh rằng $a^5 - a : 30$ ($a \in \mathbb{Z}$)

Câu 35:

Đặt $A = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$. Chứng minh rằng A chia hết cho 3 với mọi giá trị nguyên dương của n

Nếu a chia 13 dư 2 và b chia 13 dư 3 thì $a^2 + b^2$ chia hết cho 13

Tìm các số nguyên thỏa mãn

Câu 36: Chứng minh rằng: $A = \left[n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \right] : 7$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Câu 37: Hãy chứng minh :

$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n$ chia hết cho 210 với mọi số tự nhiên n

Câu 38:

Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A = 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 39: Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3

Chứng minh rằng: $A = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3$ chia hết cho 3

Câu 40: Cho hai số nguyên, số thứ nhất chia cho 5 dư 1, số thứ hai chia cho 5 dư 2. Hỏi tổng bình phương của chúng có chia hết cho 5 không ?

Câu 41: Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

Câu 42: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y ta có: $x^5y - xy^5$ chia hết cho 30.

Câu 43: Hãy viết thêm vào bên phải số 43 hai chữ số để nhận được một số có 4 chữ số chia hết cho 3 và 7.

Câu 44: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$ tối giản.

Câu 45:

a) Cho $A = \frac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 2a^2 - 4a - 8}$. Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để A là số nguyên.

b) Tìm số tự nhiên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$.

Câu 46: Chứng minh tổng lập phương của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 9.

Câu 47: Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh: $(a^5 + b^5 + c^5) : 30$

Câu 48: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A = 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 49: a. Tìm số tự nhiên n để đa thức A chia hết cho đơn thức B

$$A = 3x^{n-1}y^6 - 5x^{n+1}y^4 \text{ và } B = 2x^3y^n$$

b. Xác định các giá trị của a, b và c để đa thức $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $(x - 3)^3$

Câu 50: Chứng minh rằng số có dạng $A = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên n .

Câu 51: Chứng minh rằng $n^4 + 7(7 + 2n^2)$ chia hết cho 64 với mọi n là số nguyên lẻ.

Câu 52: Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên a thỏa mãn $(2017^{2017} + 1)$ chia hết $a^3 + 11a$

Câu 53: Cho số tự nhiên $n > 3$. Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}, 0 < b < 10$) thì tích ab chia hết cho 6.

Câu 54:

Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số

Câu 55:

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên x thì biểu thức $A = x^5 - x$ luôn chia hết cho 30.

Câu 56:

Chứng minh rằng:

c) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

d) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Câu 57: Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $(n^3 - n) : 24$

Câu 58: Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Câu 59: Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 - (a + b + c)$ chia hết cho 30.

Câu 60: Cho 3 số tự nhiên a, b, c . Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 3 thì

$a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ chia hết cho 6

Câu 61:

Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Câu 62: Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương thì: $5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) : 91$

Câu 63: Chứng minh $11^{10} - 1$ chia hết cho 100

Câu 64: Chứng minh rằng: $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Câu 65: Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2013}$ là các số tự nhiên có tổng cộng bằng 2013^{2014}

Chứng minh rằng: $B = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2013}^3$ chia hết cho 3.

Câu 66: Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức

$g(x) = x^2 + x - 2$

Câu 67: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a^3 + 5a$ chia hết cho 6

Câu 68: Chứng minh rằng: $Q = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

B. Lời giải

Câu 1: Chứng minh rằng: với $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$$A = \left[n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \right] : 7 \quad A = \left[n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \right]$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
&= n[n(n^2 - 7) - 6][n(n^2 - 7) + 6] = n(n^3 - 7n - 6)(n^3 - 7n + 6) \\
&= n(n^3 - n - 6n - 6)(n^3 - n - 6n + 6) = n[(n^2 - 1) - 6(n + 1)][(n^2 - 1) - 6(n - 1)] \quad \text{Do} \\
&= n(n + 1)(n^2 - n - 6)(n - 1)(n^2 + n - 6) = n(n + 1)(n + 2)(n - 3)(n - 1)(n - 2)(n + 3)
\end{aligned}$$

đó A là tích của 7 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow A:7 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Câu 2: Chứng minh rằng: $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$$

$$\text{Vì } 2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} - \dots) = 2010 \cdot (\dots) \text{ chia hết cho 2010 (1)}$$

$$\text{Vì } 2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots) = 2010 \cdot (\dots) \text{ chia hết cho 2010 (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Câu 3: a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Lời giải

Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a + b$ chia hết cho 3

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$$

Vì $a + b$ chia hết cho 3 nên $(a + b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3.

Do vậy, $(a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$ chia hết cho 9

$$n^5 + 1 : (n^3 + 1) \Leftrightarrow (n^5 + n^2 - n^2 + 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)(n + 1) : (n + 1)(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n - 1 : n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow n(n - 1) : n^2 - n + 1$$

$$\text{Hay } n^2 - n : n^2 - n + 1 \Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : (n^2 - n + 1)$$

$$\Rightarrow 1 : n^2 - n + 1$$

Xét hai trường hợp:

$$+) n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$+) n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0, \text{ không có giá trị của } n \text{ thỏa mãn}$$

Câu 4: Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

Lời giải

Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a+b$ chia hết cho 3.

Ta

có:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab] = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$$

Vì $a+b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3

Do vậy $(a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$ chia hết cho 9

Câu 5: Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Lời giải

$$n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2,3)=1$ nên chia hết cho 6

$18n:6$, suy ra điều phải chứng minh

Câu 6: Chứng minh rằng:

$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11}$ chia hết cho 40.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} \\ &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}) \\ &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^8(1 + 3 + 3^2 + 3^3) \\ &= 40 + 3^4 \cdot 40 + 3^8 \cdot 40 \\ &= 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8)40 \end{aligned}$$

Vậy $A:40$

Câu 7:

a) Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A = 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Lời giải

a) Ta phải chứng minh $A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} A &= n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\ &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \\ &= 3n^3 - 3n + 9n^2 + 18n + 9 \\ &= 3n(n-1)(n+1) + 9(n^2 + 2n + 1) \end{aligned}$$

Nhận thấy $n(n-1)(n+1):3 \Rightarrow 3n(n-1)(n+1):9$ và $9(n^2+2n+1):9$

Vậy $A:9$

$$\begin{aligned} b) 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} &= 25.5^n + 26.5^n + 8.8^{2n} \\ &= 5^n(59-8) + 8.64^n = 59.5^n + 8(64^n - 5^n) \end{aligned}$$

$$59.5^n : 59 \text{ và } 8.(64^n - 5^n) : (64 - 5) = 59$$

Vậy $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 8: Chứng minh rằng

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Lời giải

a) Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11} \cdot (2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17$ chia hết cho 17

b) Ta có:

$$19^{19} + 69^{19} = (19+69)(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18}) = 88.(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18}) \text{ chia hết cho 44}$$

Câu 9: Chứng minh rằng $a^5 - a : 30 (a \in \mathbb{Z})$

Lời giải

$$\begin{aligned} a^5 - a &= a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a+1)(a-1)[(a-4)^2 + 5] \\ &= a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) + 5a(a+1)(a-1) \end{aligned}$$

Do tích của 5 số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5 và trong 5 số nguyên liên tiếp luôn có ba số nguyên liên tiếp mà tích của chúng chia hết cho 6 và $(6, 5) = 1$

Suy ra $a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) : 30$ và $5a(a+1)(a-1) : 30$.

Vậy $a^5 - a : 30$

Câu 10: Cho a, b là hai số tự nhiên. Biết rằng a chia cho 5 dư 3 và b chia cho 5 dư 2. Hỏi tích $a.b$ chia cho 5 dư bao nhiêu ?

Lời giải

a chia cho 5 dư 3 nên tồn tại số tự nhiên m sao cho $a = 5m + 3$ (1)

b chia cho 5 dư 2 nên tồn tại số tự nhiên n sao cho $b = 5n + 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a.b = (5m+3)(5n+2) = \dots = 5(5mn+2m+3n+1) + 1$

Suy ra $a.b$ chia cho 5 dư 1.

Câu 11: Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Đặt $S = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3$ và

$P = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng: S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.

Lời giải

HD: Xét hiệu: $S - P$

Chứng minh: $a^3 - a = (a-1)a(a+1) : 6$ với mọi số nguyên a .

Sau đó sử dụng tính chất chia hết của một tổng suy ra đpcm.

Câu 12: a) Chứng minh rằng: $21^{30} + 39^{21}$ chia hết cho 45

b) Chứng minh rằng: Với mọi số tự nhiên n ta có: $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$.

Lời giải

a) Chứng minh rằng: $21^{30} + 39^{21}$ chia hết cho 45.

HD: Đặt $M = 21^{30} + 39^{21}$

Nhận xét $45 = 5.9$ mà 5 và 9 là hai số nguyên tố cùng nhau (1)

Vậy để c/m $M : 45$ ta cần c/m $M : 5$ và $M : 9$

Thật vậy, $M = 21^{30} + 39^{21} = (21^{30} - 1^{30}) + (39^{21} - (-1)^{21}) : 5$ (2)

(Vì $(21^{30} - 1^{30}) : (21 - 1) : 5$ và $(39^{21} - (-1)^{21}) : (39 - (-1)) : 5$)

Mặt khác, $21 : 3 \Rightarrow 21^{30} : 9$ và $39 : 3 \Rightarrow 39^{21} : 9$. Do đó, $M : 9$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra đpcm.

* Chú ý: $(a^n - b^n) : (a - b)$

b) Chứng minh rằng: Với mọi số tự nhiên n ta có: $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$.

Ta có: $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} = 51.5^n + 8.64^n = 59.5^n + 8.(64^n - 5^n) : 59$

(Vì $(64^n - 5^n) : (64 - 5)$).

Suy ra đpcm.

Câu 13: Chứng minh:

a) $A = 2^{10} + 2^{11} + 2^{12}$ chia hết cho 7.

b) $B = (6n+1)(n+5) - (3n+5)(2n-1)$ chia hết cho 2, với $n \in \mathbb{Z}$.

c) $C = 5n^3 + 15n^2 + 10n$ chia hết cho 30, với $n \in \mathbb{Z}$.

d) Nếu $a = x^2 - yz$; $b = y^2 - xz$; $c = z^2 - xy$ thì $D = ax + by + cz$ chia hết cho $(a+b+c)$.

e) $E = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$ là bình phương của một số nguyên, với $x \in \mathbb{Z}$.

f) $F = (x^2 + x - 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2$ chia hết cho $(x-1)$.

g) $G = x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$, với $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

Chứng minh:

a) $A = 2^{10} + 2^{11} + 2^{12}$ chia hết cho 7

Ta có: $A = 2^{10} + 2^{11} + 2^{12} = 2^{10} + 2^{10} \cdot 2 + 2^{10} \cdot 2^2 = 2^{10} \cdot (1 + 2 + 2^2) = 2^{10} \cdot 7 \div 7$

Vậy, $A = 2^{10} + 2^{11} + 2^{12}$ chia hết cho 7.

b) $B = (6n+1)(n+5) - (3n+5)(2n-1)$ chia hết cho 2, với $n \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $B = (6n+1)(n+5) - (3n+5)(2n-1) = \dots = 24n + 10 = 2 \cdot (12n + 5) \div 2$

Vậy, $B = (6n+1)(n+5) - (3n+5)(2n-1)$ chia hết cho 2, với $n \in \mathbb{Z}$

c) $C = 5n^3 + 15n^2 + 10n$ chia hết cho 30, với $n \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $C = 5n^3 + 15n^2 + 10n = \dots = 5n(n+1)(n+2)$

Vì $5 \div 5$ và $n(n+1)(n+2) \div 6$ mà $(5, 6) = 1$ nên $5n(n+1)(n+2) \div 30$

Vậy, $C = 5n^3 + 15n^2 + 10n$ chia hết cho 30, với $n \in \mathbb{Z}$.

d) Nếu $a = x^2 - yz$; $b = y^2 - xz$; $c = z^2 - xy$ thì $D = ax + by + cz$ chia hết cho $(a+b+c)$.

Ta có: $D = ax + by + cz = (x^2 - yz) \cdot x + (y^2 - xz) \cdot y + (z^2 - xy) \cdot z$

$$= \dots = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \dots = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Vậy, $D = ax + by + cz$ chia hết cho $(a+b+c)$

e) $E = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$ là bình phương của một số nguyên, với $x \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $E = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = (x^4 - 4x^3 + 4x^2) - (6x^2 - 12x) + 9$

$$= (x^2 - 2x)^2 - 6(x^2 - 2x) + 3^2 = (x^2 - 2x - 3)^2 = [(x-3)(x+1)]^2$$

Vậy, $E = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = [(x-3)(x+1)]^2$ là bình phương của một số nguyên, với $x \in \mathbb{Z}$.

f) $F = (x^2 + x - 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2$ chia hết cho $(x-1)$.

Ta có $F = (x^2 + x - 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2 = (x-1) \cdot Q(x) + r$

Xét tại $x=1$ thì $r = (1^2 + 1 - 1)^{2018} + (1^2 - 1 + 1)^{2018} - 2 = 0$

Vậy, $F = (x^2 + x - 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2$ chia hết cho $(x-1)$.

g) $G = x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$, với $n \in N$.

Ta

có:

$$G = x^{8n} + x^{4n} + 1 = x^{8n} + 2x^{4n} + 1 - x^{4n} = (x^{4n} + 1)^2 - (x^{2n})^2 = (x^{4n} + x^{2n} + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1) \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } x^{4n} + x^{2n} + 1 = x^{4n} + 2x^{2n} + 1 - x^{2n} = (x^{2n} + 1)^2 - (x^n)^2 = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } G = x^{8n} + x^{4n} + 1 = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1)$$

Vậy, $G = x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$, với $n \in N$.

Câu 14: Chứng minh rằng: $B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24$ chia hết cho 6

Lời giải

Chứng minh rằng: $B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24$ chia hết cho 6

Ta có: $B = n^3 + 6n^2 - 19n - 24 = n^3 - n + 6n^2 - 18n - 24$

$$= n(n^2 - 1) + 6(n^2 - 3n - 4) = (n-1)n(n+1) + 6(n^2 - 3n - 4)$$

Vì $(n-1)n(n+1):6(?)$ và $6(n^2 - 3n - 4):6$ nên $B:6$ (đpcm)

Câu 15: Chứng minh: Với mọi n là số tự nhiên chẵn thì biểu thức: $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 323

Lời giải

Chứng minh: Với mọi n là số tự nhiên chẵn thì biểu thức: $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1$ chia hết cho 323.

Ta có: $323 = 17 \cdot 19$ và $(17, 19) = 1$. Ta cần c/m: $A:17$ và $A:19$.

$$\text{Ta có } A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 3^n) + (16^n - 1)$$

$$\text{Mà } (20^n - 3^n):(20-3) \text{ hay } (20^n - 3^n):17(1)$$

$$\text{Và } (16^n - 1):(16+1) \text{ (vì } n \text{ là số chẵn)} \text{ hay } (16^n - 1):17(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A:17$.

$$\text{Tương tự, } A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 1) + (16^n - 3^n)$$

$$\text{Mà } (20^n - 1):(20-1) \text{ hay } (20^n - 1):19(3)$$

Và $(16^n - 3^n) : (16 + 3)$ (vì n là số chẵn) hay $(16^n - 3^n) : 19(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $A : 19$.

Vì $A : 17$ và $A : 19$ mà $(17, 19) = 1$ suy ra $A : 323$ (đpcm)

Câu 16: Chứng minh rằng $M = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4$ chia hết cho 16, với $n \in \mathbb{Z}$

Lời giải

Chứng minh rằng $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4$ chia hết cho 16, với $n \in \mathbb{Z}$

Ta có: $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4 = n^4 (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)$

$$= n^4 (n^4 + n^3 + 3n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 3n + n + 1) = n^4 [n^3(n+1) + 3n^2(n+1) + 3n(n+1) + (n+1)]$$

$$= n^4 (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = n^4 (n+1)(n+1)^3 = [n(n+1)]^4$$

Vì $n(n+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên $n(n+1) : 2$

Suy ra $A = [n(n+1)]^4 : 2^4$ mà $2^4 = 16$

Vậy, $A : 16$ với $n \in \mathbb{Z}$.

Câu 17: a) Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A = 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Lời giải

a) Ta phải chứng minh $A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với $n \in \mathbb{Z}$

$$A = n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8$$

$$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$$

$$= 3n^3 - 3n + 9n^2 + 18n + 9$$

$$= 3n(n-1)(n+1) + 9(n^2 + 2n + 1)$$

Nhận thấy $n(n-1)(n+1) : 3 \Rightarrow 3n(n-1)(n+1) : 9$ và $9(n^2 + 2n + 1) : 9$

Vậy $A : 9$

$$b) 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} = 25 \cdot 5^n + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 8^{2n}$$

$$= 5^n (59 - 8) + 8 \cdot 64^n = 59 \cdot 5^n + 8(64^n - 5^n)$$

$$59 \cdot 5^n : 59 \text{ và } 8 \cdot (64^n - 5^n) : (64 - 5) = 59$$

Vậy $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$

Câu 18: Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3

Chứng minh rằng: $A = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3$ chia hết cho 3.

Lời giải

Để thấy $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3

Xét hiệu:

$$\begin{aligned} A - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) &= (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) \\ &= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_{2016}^3 - a_{2016}) \end{aligned}$$

Các hiệu trên chia hết cho 3, do vậy A chia hết cho 3

Câu 19: Cho hai số nguyên, số thứ nhất chia cho 5 dư 1, số thứ hai chia cho 5 dư 2. Hỏi tổng bình phương của chúng có chia hết cho 5 không?

Lời giải

Vì số thứ nhất chia cho 5 dư 1 nên có dạng $5a+1$, số thứ hai chia cho 5 dư 2 nên có dạng $5b+2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

Ta có tổng bình phương hai số đó là:

$$(5a+1)^2 + (5b+2)^2 = 25a^2 + 10a + 1 + 25b^2 + 20b + 4 = 5(5a^2 + 5b^2 + 2a + 2b + 1) : 5$$

Vậy tổng bình phương của hai số chia hết cho 5

Câu 20: Chứng minh rằng $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$$

$$\text{Vì } 2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} + \dots) : 2010 \quad (1)$$

$$2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots) : 2010 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Câu 21: Chứng minh rằng:

$$A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} \text{ chia hết cho } 40$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{11} \\ &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}) \\ &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^8 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3) \\ &= 40 + 3^4 \cdot 40 + 3^8 \cdot 40 \\ &= 40 \cdot (1 + 3^4 + 3^8) : 40 \end{aligned}$$

Vậy $A : 40$

Câu 22: Chứng minh rằng $11^{10} - 1$ chia hết cho 100

Lời giải

$$11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1) = 10 \cdot (11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$$

Vì $10 \vdots 10$

Và $(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$ có chữ số tận cùng bằng 0

Nên $(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$ chia hết cho 10

Vậy $11^{10} - 1$ chia hết cho 100

Câu 23: Chứng minh rằng $2009^{2008} + 2011^{2010}$ chia hết cho 2010

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$$

$$\text{Vì } 2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} - \dots)$$

$$= 2010 \cdot (\dots) \text{ chia hết cho 2010 (1)}$$

$$\text{Vì } 2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots)$$

$$= 2010 \cdot (\dots) \text{ chia hết cho 2010 (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có đpcm.

Câu 24: Chứng minh rằng:

e) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

f) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Lời giải

$$\text{Ta có: } 8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11} \cdot (2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17$$

Rõ ràng kết quả trên chia hết cho 17

Áp dụng hằng đẳng thức

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \text{ với mọi } n \text{ lẻ}$$

$$\text{Ta có: } 19^{19} + 69^{19} = (19 + 69)(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$$

$$= 88 \cdot (19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18}) \text{ chia hết cho 44}$$

Câu 25: a) Chứng minh rằng: $n^3 + 3n^2 + 2n \vdots 6$ với mọi số nguyên n

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta có:

$$\begin{aligned} n^3 + 3n^2 + 2n &= n(n^2 + 3n + 2) = n(n^2 + n + 2n + 2) \\ &= n[(n^2 + n) + (2n + 2)] = n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Vì n là số nguyên nên: $n; n+1; n+2$ là ba số nguyên liên tiếp

Do đó có ít nhất một số chia hết cho 2, 1 số chia hết cho 3

$$\Rightarrow n(n+1)(n+2) : 6 \text{ hay } n^3 + 3n^2 + 2n : 6 \text{ với mọi số nguyên } n$$

b) Tìm số nguyên n sao cho: $2n^3 + n^2 + 7n + 1 : (2n-1)$

Lời giải

Để $2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n-1$ thì $5 : 2n-1$ hay $2n-1$ là Ư(5)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n-1 = -5 \\ 2n-1 = -1 \\ 2n-1 = 1 \\ 2n-1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Vậy $n \in \{-2; 0; 1; 3\}$ thì $2n^3 + n^2 + 7n + 1 : 2n-1$

Câu 26: Cho số tự nhiên $n > 3$. Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}, 0 < b < 10$) thì tích ab chia hết cho 6

Lời giải

Ta có: $2^n = 10a + b \Rightarrow b : 2 \Rightarrow ab : 2$ (1)

Ta chứng minh $ab : 3$ (2)

Thật vậy, từ đẳng thức $2^n = 10a + b \Rightarrow 2^n$ có chữ số tận cùng là b

Đặt $n = 4k + r$ ($k, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 3$) ta có: $2^n = 16^k \cdot 2^r$

Nếu $r = 0$ thì $2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 10 \Rightarrow 2^n$ tận cùng là 2^r

Suy ra $b = 2^r \Rightarrow 10a = 2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) : 3 \Rightarrow a : 3 \Rightarrow ab : 3$

Từ (1) và (2) suy ra $ab : 6$

Câu 27: Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225.

Lời giải

Với $n = 1$ ta có: $16 - 15 - 1 = 0 : 225$

Giả sử bài toán đúng với $n = k$ tức là ta có:

$$16^k - 15k - 1 : 225$$

Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$

$$\text{Thật vậy: } 16^{k+1} - 15(k+1) - 1 = 16 \cdot 16^k - 15k - 15 - 1$$

$$\begin{aligned}
&= 16^k (15 + 1) - 15k - 15 - 1 \\
&= (16^k - 15k - 1) + 15(15^k - 1) \\
&= (16^k - 15k - 1) + 225 \cdot A(k) : 225
\end{aligned}$$

Vậy $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi n là số nguyên dương.

Câu 28: Chứng minh rằng $2^{2008} + 2^{2009} + 2^{2010}$ chia hết cho 7

Lời giải

$$2^{2008} + 2^{2009} + 2^{2010} = 2^{2008} \cdot (1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^{2008} : 7$$

Câu 29: Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n

Lời giải

Ta có: $n^3 - n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ chia hết cho 3 vì tích của 3 số nguyên liên tiếp

Ta cũng có $(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 2 vì trong 3 số liên tiếp có 1 số chẵn

Mà $(2, 3) = 1$. Vậy $n^3 - n$ chia hết cho 6

Câu 30: . Chứng minh rằng $3^{21} - 2^{24} - 6^8 - 1$ chia hết cho 1930

Lời giải

Đặt $a = 3^7, b = -2^8, c = (-1)^3$. Ta có:

$$\begin{aligned}
3^{21} - 2^{24} - 6^8 - 1 &= (3^7)^3 + (-2^8)^3 + (-1)^3 - 3 \cdot 3^7 \cdot (-2^8) \cdot (-1) \\
&= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)
\end{aligned}$$

Mà $a + b + c = 3^7 + (-2^8) + (-1)^3 = 1930$ nên suy ra đpcm.

Chứng minh rằng: $A = (2^n - 1)(2^n + 1)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n .

Lời giải

Chứng minh rằng: $A = (2^n - 1)(2^n + 1)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n .

Theo giả thiết n là một số tự nhiên nên $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ là ba số tự nhiên liên tiếp

Vì tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3 nên $(2^n - 1) \cdot 2^n \cdot (2^n + 1) : 3$

Mặt khác, $(2^n, 3) = 1$ nên $(2^n - 1)(2^n + 1) : 3$.

Vậy, $A = (2^n - 1)(2^n + 1)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n .

Câu 31: Tìm các số có 3 chữ số chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 7

Lời giải

Gọi số có ba chữ số cần tìm là \overline{abc}

Ta có: $\overline{abc} = (98a + 7b) + 2a + 3b + c$

$$\sqrt{abc}:7 \Rightarrow 2a+3b+c:7 \quad (3)$$

Mặt khác, vì $a+b+c:7$ (4), kết hợp với (3) suy ra $b-c:7$

Do đó $b-c$ chỉ có thể nhận các giá trị $-7; 0; 7$

Với $b-c=-7 \Rightarrow c=b+7$. Kết hợp với (4) ta chọn được các số 707; 518; 329 thỏa mãn.

Với $b-c=7 \Rightarrow b=c+7$. Đổi vai trò b và c của trường hợp trên ta được các cặp số 770, 581, 392 thỏa mãn Câu toán.

Với $b-c=0 \Rightarrow b=c$ mà do (4) nên $a+2b:7$

Do $1 \leq a+2b \leq 27$ nên $a+2b$ chỉ có thể nhận các giá trị 7; 14; 21.

Từ đó ta chọn được 12 số thỏa mãn là 133; 322; 511; 700; 266; 455; 644; 833; 399; 588; 777; 966

Vậy có 18 số thỏa mãn Câu toán:
707; 518; 329; 770; 581; 392; 133; 322; 511; 700; 266; 455; 644; 833; 399; 588; 777; 966.

Câu 32: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{10n^2+9n+4}{20n^2+20n+9}$ tối giản

Lời giải

Gọi d là ƯCLN của $10n^2+9n+4$ và $20n^2+20n+9$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10n^2+9n+4:d \\ 20n^2+20n+9:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20n^2+18n+8:d \\ 20n^2+20n+9:d \end{cases} \Rightarrow 2n+1:d \Rightarrow d \text{ là số tự nhiên lẻ}$$

Mặt khác $2n+1:d \Rightarrow 4n^2+4n+1:d \Rightarrow 20n^2+20n+5:d \Rightarrow 4:d$, mà d lẻ nên $d=1$

Vậy phân số trên tối giản

Câu 33: Chứng minh rằng $n^4-2n^3-n^2+2n$ chia hết cho 24 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Lời giải

$$\begin{aligned} n^4-2n^3-n^2+2n &= n(n^3-2n^2-n+2) \\ &= n[n^2 \cdot (n-2) - (n-2)] \\ &= n(n^2-1)(n-2) = n(n-1)(n+1)(n-2) \end{aligned}$$

$n(n-1)(n+1)(n-2)$ là tích 4 số nguyên liên tiếp trong đó phải có 1 số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3 và một số chia hết cho 4

$$\text{Nên } n(n-1)(n+1)(n-2):2.3.4=24$$

Vậy $n^4-2n^3-n^2+2n:24$

Câu 34: Chứng minh rằng $a^5-a:30 (a \in \mathbb{Z})$

Lời giải

$$a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a+1)(a-1)[(a-4)^2 + 5]$$

$$= a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) + 5a(a+1)(a-1)$$

Do tích của 5 số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 5 và trong 5 số nguyên liên tiếp luôn có ba số nguyên liên tiếp mà tích của chúng chia hết cho 6 và $(6, 5) = 1$

Suy ra $a(a+1)(a-1)(a-2)(a+2) : 30$ và $5a(a+1)(a-1) : 30$.

Vậy $a^5 - a : 30$

Câu 35: a) Đặt $A = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$. Chứng minh rằng A chia hết cho 3 với mọi giá trị nguyên dương của n

b) Nếu a chia 13 dư 2 và b chia 13 dư 3 thì $a^2 + b^2$ chia hết cho 13

c) Tìm các số nguyên m, n thỏa mãn $m = \frac{n^2 + n + 1}{n + 1}$

Lời giải

$$A = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n+1)^3 + 2(n+1) = \dots$$

$$= n(n+1)(n+2) + 3(n+1)$$

Khi đó: $3(n+1) : 3$; $n(n+1)(n+2)$ là tích của 3 số nguyên dương liên tiếp nên chia hết cho 3
 $\Rightarrow A : 3$

$$a = 13k + 2, b = 13n + 3$$

$$a^2 + b^2 = (13k + 2)^2 + (13n + 3)^2 = \dots = 13(13k^2 + 4k + 13n^2 + 4n + 1) : 13$$

Thực hiện chia

$$m = \frac{n^2 + n + 1}{n + 1} = n + \frac{1}{n + 1}$$

Để m nguyên với n nguyên khi $n + 1 \in U(1) = \{\pm 1\}$

Khi đó $\begin{cases} n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow m = 1 \\ n + 1 = -1 \Rightarrow n = -2 \Rightarrow m = -3 \end{cases}$

Câu 36: Chứng minh rằng: $A = [n^3(n^2 - 7)^2 - 36n] : 7$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Ta có: $A = [n^3(n^2 - 7)^2 - 36n]$

$$\begin{aligned}
&= n[n(n^2 - 7) - 6][n(n^2 - 7) + 6] = n(n^3 - 7n - 6)(n^3 - 7n + 6) \\
&= n(n^3 - n - 6n - 6)(n^3 - n - 6n + 6) = n[(n^2 - 1) - 6(n + 1)][(n^2 - 1) - 6(n - 1)] \quad \text{Do đó} \\
&= n(n + 1)(n^2 - n - 6)(n - 1)(n^2 + n - 6) = n(n + 1)(n + 2)(n - 3)(n - 1)(n - 2)(n + 3)
\end{aligned}$$

A là tích của 7 số nguyên liên tiếp

$$\Rightarrow A : 7 \forall n \in \mathbb{Z}$$

Câu 37: Hãy chứng minh :

$$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \text{ chia hết cho } 210 \text{ với mọi số tự nhiên } n$$

Lời giải

$$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = (n - 3)(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$$

Đây là tích của 7 số nguyên liên tiếp nên có một bội của 2, 1 bội của 3, 1 bội của 5, 1 bội của 7

$$\text{Mà } (2, 3, 5, 7) = 1 \text{ nên } A : (2.3.5.7) \Rightarrow A : 210$$

Câu 38:

Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9

$$\text{Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên } n \text{ thì } A = 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$$

Lời giải

b) Ta phải chứng minh $A = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 : 9$ với $n \in \mathbb{Z}$

$$A = n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8$$

$$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$$

$$= 3n^3 - 3n + 9n^2 + 18n + 9$$

$$= 3n(n - 1)(n + 1) + 9(n^2 + 2n + 1)$$

$$\text{Nhận thấy } n(n - 1)(n + 1) : 3 \Rightarrow 3n(n - 1)(n + 1) : 9 \text{ và } 9(n^2 + 2n + 1) : 9$$

Vậy $A : 9$

$$b) 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} = 25.5^n + 26.5^n + 8.8^{2n}$$

$$= 5^n(59 - 8) + 8.64^n = 59.5^n + 8(64^n - 5^n)$$

$$59.5^n : 59 \text{ và } 8.(64^n - 5^n) : (64 - 5) = 59$$

$$\text{Vậy } 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$$

Câu 39: Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ là các số tự nhiên có tổng chia hết cho 3

Chứng minh rằng: $A = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3$ chia hết cho 3.

Lời giải

Dễ thấy $a^3 - a = a(a - 1)(a + 1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3

Xét hiệu:

$$A - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) = (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2016}^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016})$$

$$= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_{2016}^3 - a_{2016})$$

Các hiệu trên chia hết cho 3, do vậy A chia hết cho 3

Câu 40: Cho hai số nguyên, số thứ nhất chia cho 5 dư 1, số thứ hai chia cho 5 dư 2. Hỏi tổng bình phương của chúng có chia hết cho 5 không?

Lời giải

Cho hai số nguyên, số thứ nhất chia cho 5 dư 1, số thứ hai chia cho 5 dư 2. Hỏi tổng bình phương của chúng có chia hết cho 5 không?

Câu 41: Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

Lời giải

Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a + b$ chia hết cho 3.

Ta

có:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab] = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$$

$a + b$ chia hết cho 3 nên $(a + b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3

Do vậy $(a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$ chia hết cho 9

Câu 42: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y ta có: $x^5y - xy^5$ chia hết cho 30.

Lời giải

Ta có:

$$x^5y - xy^5 = xy(x^4 - y^4) = xy(x^4 - 1 - y^4 + 1) = xy(x^4 - 1) - xy(y^4 - 1)$$

Ta có: $x(x^4 - 1) = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ chia hết cho 2, 3 và 5

$$\Rightarrow xy(x^4 - 1) : 30$$

Tương tự, ta có: $xy(y^4 - 1) : 30$

$$\Rightarrow x^5y - xy^5 : 30$$

Câu 43: Hãy viết thêm vào bên phải số 43 hai chữ số để nhận được một số có 4 chữ số chia hết cho 3 và 7.

Lời giải

Vì $(3, 7) = 1$, theo bài toán ta có $\overline{43ab} : 21$

Vì 4300 chia 21 dư 16 nên $\overline{ab} \equiv -16 \pmod{21}$ hay \overline{ab} chia 21 dư 5.

$$\text{Vậy } \overline{ab} = 21q + 5$$

Cho $q = 0 \Rightarrow \overline{ab} = 05$, số mới là 4305

Cho $q = 1 \Rightarrow \overline{ab} = 26$, số mới là 4326

Cho $q = 2 \Rightarrow \overline{ab} = 47$, số mới là 4347

Cho $q = 3 \Rightarrow \overline{ab} = 68$, số mới là 4368

Cho $q = 4 \Rightarrow \overline{ab} = 89$, số mới là 4389

Câu 44: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$ tối giản.

Lời giải

Gọi d là ƯCLN của $10n^2 + 9n + 4$ và $20n^2 + 20n + 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10n^2 + 9n + 4 : d \\ 20n^2 + 20n + 9 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20n^2 + 18n + 8 : d \\ 20n^2 + 20n + 9 : d \end{cases} \Rightarrow 2n + 1 : d \Rightarrow d \text{ là số tự nhiên lẻ}$$

Mặt khác: $2n + 1 : d \Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 : d \Rightarrow 20n^2 + 20n + 5 : d \Rightarrow 4 : d$, mà d lẻ nên $d = 1$

Vậy phân số trên tối giản

Câu 45:

a) Cho $A = \frac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 2a^2 - 4a - 8}$. Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để A là số nguyên.

b) Tìm số tự nhiên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Lời giải

a) Rút gọn $A = \frac{1}{a-2}$

$$\text{Để } A \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{1}{a-2} \text{ nguyên} \Leftrightarrow 1 : (a-2) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 3 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} n^5 + 1 : n^3 + 1 &\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : (n^3 + 1) \Leftrightarrow (n+1)(n-1) : (n^3 + 1) \\ &\Leftrightarrow (n+1)(n-1) : (n+1)(n^2 - n + 1) \Leftrightarrow (n-1) : (n^2 - n + 1) \quad (\text{vì } n+1 \neq 0) \end{aligned}$$

+) Nếu $n = 1 \Rightarrow 0 : 1$

+) Nếu $n > 1$ thì $(n-1) < n(n-1) + 1 < n^2 - n + 1$ nên không thể xảy ra

$$\Leftrightarrow n-1 : n^2 - n + 1$$

Vậy $n = 1$

Câu 46: Chứng minh tổng lập phương của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 9.

Lời giải

Ta có ba số tự nhiên liên tiếp là $n, n+1, n+2$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$\text{Khi đó ta có: } n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3(n-1)n(n+1) + 9n : 9$$

Câu 47:

Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh: $(a^5 + b^5 + c^5) : 30$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} a^5 - a &= a.(a^2 - 1).(a^2 + 1) = a.(a^2 - 1).(a^2 - 4 + 5) \\ &= (a - 2)(a - 1)a.(a + 1).(a + 2) + 5(a - 1)a.(a + 1) \end{aligned}$$

Do $(a - 2)(a - 1)a.(a + 1).(a + 2)$ là tích 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, 3 và 5, do đó chia hết cho 30.

Lại có $(a - 1)a.(a + 1)$ chia hết cho 6 nên $5(a - 1)a.(a + 1)$ chia hết cho 30.

Từ đó suy ra $a^5 - a$ chia hết cho 30

Tương tự $b^5 - b$ chia hết cho 30 và $c^5 - c$ chia hết cho 30

Từ đó suy ra $(a^5 + b^5 + c^5) - (a + b + c) = (a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c)$ chia hết cho 30

Mà $a + b + c = 0$ nên $a^5 + b^5 + c^5$ chia hết cho 30

Câu 48: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A = 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$

Lời giải

$$5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} = 25.5^n + 26.5^n + 8.8^{2n} = 5^n(59 - 8) + 8.64^n = 59.5^n + 8(64^n - 5^n)$$

$$59.5^n : 59 \text{ và } 8(64^n - 5^n) : (64 - 5) = 59$$

$$\text{Vậy } 5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$$

Câu 49: a. Tìm số tự nhiên n để đa thức A chia hết cho đơn thức B

$$A = 3x^{n-1}y^6 - 5x^{n+1}y^4 \text{ và } B = 2x^3y^n$$

b. Xác định các giá trị của a, b và c để đa thức $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $(x - 3)^3$

Lời giải

a) Điều kiện để A chia hết cho B là

$$\begin{cases} n-1 \geq 3 \\ n+1 \geq 3 \\ 6 \geq n \\ 4 \geq n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \geq 4 \\ n \leq 4 \end{cases} \Rightarrow n = 4$$

Vậy với $n = 4$ thì đa thức A chia hết cho đơn thức B

$$\text{Khi đó } A:B = (3x^3y^6 - 5x^5y^4)(2x^3y^4) = \frac{3}{2}y^2 - \frac{5}{2}x^2$$

b) Chia $P(x)$ cho $(x - 3)^3$ ta được thương là $x + 9$ và dư là

$$R(x) = (a + 54)x^2 + (b - 216)x + 243 + c$$

$$P(x) \div (x - 3)^3 \Rightarrow R(x) \equiv 0 \text{ cho ta}$$

$$a + 54 = 0 \Rightarrow a = -54; b - 216 = 0 \Rightarrow b = 216; c + 243 = 0 \Rightarrow c = -243$$

Câu 50: Chứng minh rằng số có dạng $A = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên n .

Lời giải

$$A = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n+1)(n+2)(n+3)$$

Vì $n; n+1; n+2$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên tồn tại 1 số chia hết cho 3. Do đó $n(n+1)(n+2) : 3$

Vì $n; n+1; n+2; n+3$ là bốn số tự nhiên liên tiếp nên có 2 số chẵn liên tiếp, trong 2 số chẵn liên tiếp có 1 số chia hết cho 2, số kia chia hết cho 4.

$$\text{Vậy } n(n+1)(n+2)(n+3) : 8$$

Vì $\text{ƯCLN}(3; 8) = 1$ nên $A = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ chia hết cho 24.

Câu 51: Chứng minh rằng $n^4 + 7(7 + 2n^2)$ chia hết cho 64 với mọi n là số nguyên lẻ.

Lời giải

Ta có $x^2 + y^2 - 20(x+y) + 2213 = (x-10)^2 + (y-10)^2 + 2013 \geq 2013$ với mọi x, y .

$$\Rightarrow P = \frac{2012}{(x-10)^2 + (y-10)^2 + 2013} \leq \frac{2012}{2013}$$

$$P = \frac{2012}{2013} \text{ khi } x = 10 \text{ và } y = 10$$

$$\text{Vậy Max } P = \frac{2012}{2013} \text{ khi } x = 10 \text{ và } y = 10.$$

Câu 52: Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên a thỏa mãn $(2017^{2017} + 1)$ chia hết $a^3 + 11a$

Lời giải

Giả sử tồn tại số nguyên a thỏa mãn $(2017^{2017} + 1)$ chia hết $a^3 + 11a$

$$A = a^3 + 11a = (a^3 - a) + 12a = a(a-1)(a+1) + 12a$$

ta có $(a-1); a; (a+1)$ là 3 số nguyên liên tiếp nên tồn tại một số là bội của 3 suy ra $(a-1)a(a+1) : 3$

Vì $12a$ chia hết cho 3 nên $A : 3$ (1)

Mặt khác $2017^{2017} + 1 = (2016 + 1)^{2017} + 1$ chia cho 3 dư 2 (2)

Từ (1) và (2) dẫn đến điều giả sử trên là sai, tức là không có số nguyên nào thỏa mãn điều kiện bài toán đã cho.

Câu 53: Cho số tự nhiên $n > 3$. Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ ($a, b \in \mathbb{N}, 0 < b < 10$) thì tích ab chia hết cho 6.

Lời giải

Ta có $2^n = 10a + b \Rightarrow b \div 2 \Rightarrow ab \div 2$ (1)

Ta chứng minh $ab \div 3$ (2)

Thật vậy, từ đẳng thức $2^n = 10a + b \Rightarrow 2^n$ có chữ số tận cùng là b.

Đặt $n = 4k + r$ ($k, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 3$) ta có: $2^n = 16^k 2^r$.

Nếu $r = 0$ thì $2^n = 16^k$ tận cùng là 6 $\Rightarrow b = 6 \Rightarrow ab \div 6$.

Nếu $1 \leq r \leq 3$ thì $2^n - 2^r = 2^r(16^k - 1) \div 10 \Rightarrow 2^n$ tận cùng là 2^r

suy ra $b = 2^r \Rightarrow 10a = 2^n - 2^r = 2^r(16^k - 1) \div 3 \Rightarrow a \div 3 \Rightarrow ab \div 3$.

Từ (1) và (2) suy ra $ab \div 6$.

Câu 54: Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } n^3 + n + 2 &= n^3 + 1 + n + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1) + (n+1) \\ &= (n+1)(n^2 - n + 2) \end{aligned}$$

$$\text{Do } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ nên } \begin{cases} n+1 > 1 \\ n^2 - n + 2 > 1. \end{cases} \text{ .Vậy } n^3 + n + 2 \text{ là hợp số.}$$

Câu 55: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên x thì biểu thức $A = x^5 - x$ luôn chia hết cho 30.

Lời giải

$$A = x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)x(x+1)(x^2 + 1)$$

Vì $(x-1)x(x+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên $A \div 6$ (1)

+) Nếu $x \div 5 \Rightarrow A \div 5$

+) Nếu $x \div 5$ dư 1 thì $(x-1) \div 5 \Rightarrow A \div 5$

+) Nếu $x \div 5$ dư 4 thì $(x+1) \div 5 \Rightarrow A \div 5$

+) Nếu $x \div 5$ dư 2 hoặc 3 thì $x^2 \div 5$ dư 4 $\Rightarrow (x^2 + 1) \div 5 \Rightarrow A \div 5$

Vậy $A \div 5$ với mọi x và $(5, 6) = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A \div 30$

Câu 56:

Chứng minh rằng:

$8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

$19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Lời giải

Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11} \cdot (2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17$

Rõ ràng kết quả trên chia hết cho 17

Áp dụng hằng đẳng thức

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ với mọi n lẻ

Ta có: $19^{19} + 69^{19} = (19 + 69)(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$
 $= 88 \cdot (19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$ chia hết cho 44

Câu 57:

Lời giải

Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

Vì $(n-1); n; (n+1)$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3 (1)

Do đó

$$(n^3 - n) : 8 \quad (2)$$

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1); (2) suy ra

$$(n^3 - n) : 24$$

Câu 58: $n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2, 3) = 1$ nên chia hết cho 6

$18n : 6$, suy ra điều phải chứng minh

Câu 59: Học sinh biến đổi được

$$a^5 - a = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) + 5a(a-1)(a+1)$$

Lập luận được $a^5 - a : 30$; $b^5 - b : 30$; $c^5 - c : 30$, kết luận

Câu 60:

$$A = a + b + c : 3 \Rightarrow 2A : 6; B = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$$

$$C = B + 2A = a^3 + 3a^2 + 2a + b^3 + 3b^2 + 2b + c^3 + 3c^2 + 2c$$

$$= a(a+1)(a+2) + b(b+1)(b+2) + c(c+1)(c+2)$$

$a(a+1)(a+2), b(b+1)(b+2), c(c+1)(c+2)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 $\Rightarrow C : 6 \Rightarrow B : 6$

Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a + b$ chia hết cho 3

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)\left[(a + b)^2 - 3ab\right]$$

Vì $a + b$ chia hết cho 3 nên $(a + b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3.

Do vậy, $(a + b)\left[(a + b)^2 - 3ab\right]$ chia hết cho 9

$$n^5 + 1 : (n^3 + 1) \Leftrightarrow (n^5 + n^2 - n^2 + 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)(n + 1) : (n + 1)(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n - 1 : n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow n(n - 1) : n^2 - n + 1$$

$$\begin{aligned} \text{Hay } n^2 - n : n^2 - n + 1 &\Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : (n^2 - n + 1) \\ &\Rightarrow 1 : n^2 - n + 1 \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp:

$$+) n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$+) n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0, \text{ không có giá trị của } n \text{ thỏa mãn}$$

Câu 61:

$$A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n$$

$$A = (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n). A \text{ chia hết cho } 7$$

$$A = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n). A \text{ chia hết cho } 13$$

Do $(13, 7) = 1$ nên A chia hết cho 91

$$\begin{aligned} \text{Câu 62: } 11^{10} - 1 &= (11 - 1)(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1) = 10.(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1) \\ \text{Vì } 10 &: 10 \end{aligned}$$

Và $(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$ có chữ số tận cùng (hàng đơn vị) bằng 0

Nên $(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1)$ chia hết cho 10

Vậy $11^{10} - 1$ chia hết cho 10.

Câu 63:

$$\text{Ta có: } 2009^{2008} + 2011^{2010} = (2009^{2008} + 1) + (2011^{2010} - 1)$$

$$\text{Vì } 2009^{2008} + 1 = (2009 + 1)(2009^{2007} - \dots) = 2010 \cdot (\dots) \text{ chia hết cho } 2010 \quad (1)$$

$$\text{Vì } 2011^{2010} - 1 = (2011 - 1)(2011^{2009} + \dots) = 2010 \cdot (\dots) \text{ chia hết cho } 2010 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Câu 64: Dễ thấy $a^3 - a = a(a+1)(a-1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 3

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu } B - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2013}) &= (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2013}^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2013}) \\ &= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_{2013}^3 - a_{2013}) \text{ chia hết cho } 3 \end{aligned}$$

Mà $a_1, a_2, \dots, a_{2013}$ là các số tự nhiên có tổng bằng 2013^{2014}

Do vậy B chia hết cho 3.

Câu 65: Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức

$$g(x) = x^2 + x - 2$$

Lời giải

$$*g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x-2)$$

$$*f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4 : g(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x-1)(x-2)Q(x) \quad (1) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Thay $x_1 = 1; x_2 = 2$ vào (1) ta có:

$$a + b + 6 = 0 \text{ và } 8a + 4b + 16 = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ và } b = -8$$

$$\text{Vậy } f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4 : g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \end{cases}$$

Câu 66: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a^3 + 5a$ chia hết cho 6

Lời giải

$$a^3 + 5a = a^3 - a + 6a = a(a^2 - 1) + 6a = a(a-1)(a+1) + 6a$$

Vì $a(a-1)(a+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3

mà $(2, 3) = 1$ nên $a(a-1)(a+1)$ chia hết cho 6

$6a$ chia hết cho 6

Nên $a^3 + 5a$ chia hết cho 6

Câu 67: Chứng minh rằng: $Q = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải

$$\begin{aligned}Q &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \\&= n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) \\&= 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Đặt } C &= n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + 3n + 3 \\&= n^2(n+1) + 2n(n+1) + 3(n+1) \\&= n(n+1)(n+2) + 3(n+1)\end{aligned}$$

Ta thấy $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3 (vì tích 3 số tự nhiên liên tiếp)

Và $3(n+1):3 \Rightarrow C$ chia hết cho 3

Nên $Q = 3C$ chia hết cho 9

ĐS8 – CHUYÊN ĐỀ 02: SỐ NGUYÊN TỐ**Qua Các Đề Thi HSG Môn Toán Lớp 8****A. Bài toán**

Câu 1: Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số

Câu 2: Tìm số tự nhiên n để: $A = n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố

Câu 3: Cho p và $2p+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng là hợp số.

Câu 4: Số tự nhiên $A = 1 + 2^{3^{2012}}$ là số nguyên tố hay hợp số ? Giải thích

Câu 5: Cho a, b, c là các số nguyên khác 0, $a \neq c$ sao cho $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$. Chứng minh rằng

$a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

Câu 6: Cho $P = n^4 + 4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Câu 7: Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

Câu 8: Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là $m \neq 5$ hai số chính phương

$m = a^4 + 4$

Câu 9: Chứng minh rằng nếu $m \neq 5$ thì $m = a^4 + 4a$ không là số nguyên tố

Câu 10: Cho số nguyên tố $p > 3$. Biết rằng có số tự nhiên n sao cho trong cách viết thập phân của số p^n có đúng 20 chữ số. Chứng minh rằng trong 20 chữ số này có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Câu 11: Tìm các số nguyên dương n để $n^{1988} + n^{1987} + 1$ là số nguyên tố.

Câu 12:

Chứng minh: $9n+2$ và $12n+3 (n \in \mathbb{N})$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 13:

Tìm các số nguyên tố p sao cho $7p+1$ bằng lập phương một số tự nhiên

Câu 14: Cho $P = n^4 + 4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Câu 15:

Số tự nhiên $A = 1 + 2^{3^{2012}}$ là số nguyên tố hay hợp số ? Giải thích

Câu 16: Tìm tất cả các số nguyên dương để là số nguyên tố

Câu 17: Tìm số tự nhiên để là số nguyên tố biết: $p = n^3 - n^2 + n - 1$

Câu 18: Tìm số nguyên sao cho là số nguyên tố

Câu 19: Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24

Câu 20: Cho $A = p^4$ trong đó p là số nguyên tố. Tìm các giá trị của p để tổng các ước dương của A là số chính phương.

Câu 21: Tìm các số nguyên tố x và y sao cho $x^2 - 2y^2 = 1$

Câu 22: Tìm các số tự nhiên n để $B = (n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố

Câu 23: Chứng minh rằng: Nếu $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ thì $A = (a^2 + a + 1)(a^2 + a + 2) - 12$ là hợp số

Câu 24: Tìm tất cả các số nguyên dương n để $(1 + n^{2017} + n^{2018})$ là số nguyên tố

Câu 25: Cho $P = n^4 + 4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Câu 26: Tìm số tự nhiên n để p là số nguyên tố biết: $p = n^3 - n^2 + n - 1$.

Câu 27: Tìm số tự nhiên n để p là số nguyên tố biết: $p = n^3 - n^2 + n - 1$.

Câu 28: Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

B. Lời giải

Câu 1: Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số

Lời giải

Ta có: $n^3 + n + 2 = n^3 + 1 + n + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1) + (n+1) = (n+1)(n^2 - n + 2)$

Do $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $n+1 > 1$ và $n^2 - n + 2 > 1$. Vậy $n^3 + n + 2$ là hợp số

Câu 2: Tìm số tự nhiên n để: $A = n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố

Lời giải

$$A = n^3 - n^2 + n - 1 = (n^2 + 1)(n - 1)$$

Để A là nguyên tố thì $n - 1 = 1 \Leftrightarrow n = 2$. Khi đó $A = 5$

Câu 3: Cho p và $2p+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p+1$ là hợp số

Lời giải

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng

$$p = 3k + 1; p = 3k - 1 \text{ với } k > 1$$

+ Nếu

$$p = 3k + 1 \text{ thì } 2p + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$$

Suy ra

$2p + 1$ là hợp số (vô lý)

+Nếu $p = 3k - 1, k > 1$ thì $4p + 1 = 12k - 3 = 3 \cdot (4k - 1)$

Do $k > 1$ nên $4k - 1 > 3$. Do đó $4p + 1$ là hợp số.

Câu 4: Số tự nhiên $A = 1 + 2^{3^{2012}}$ là số nguyên tố hay hợp số ? Giải thích

Lời giải

$3^{2012} : 3$ nên có thể viết $3^{2012} = 3n (n \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow A = 1 + 2^{3^{2012}} = 1^3 + 2^{3n} = 1^3 + (2^n)^3 = (1 + 2^n) \left[1 - 2^n + (2^n)^2 \right] \Rightarrow A \text{ là hợp số}$$

Câu 5: Cho a, b, c là các số nguyên khác 0, $a \neq c$ sao cho $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$. Chứng minh rằng

$a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (a - c)(b^2 - ac) = 0 \Rightarrow b^2 = ac$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a + c + b)(a + c - b)$$

Ta thấy $a^2 + b^2 + c^2 > 3$ do đó nếu $a^2 + b^2 + c^2$ là các số nguyên tố thì xảy ra các trường hợp sau:

$$1) a + c - b = 1; a + c + b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$$

$$\Rightarrow (a - 1)^2 + (c - 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1 \quad (ktm)$$

$$2) a + c + b = 1, a + c - b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$$

$$\Rightarrow (a - 1)^2 + (c - 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1 \quad (ktm)$$

$$3) a + c + b = -1, a + c - b = -(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$$

$$\Rightarrow (a + 1)^2 + (c + 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \quad (ktm)$$

$$4) a + c - b = -1, a + c + b = -(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$$

$$\Rightarrow (a + 1)^2 + (c + 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \quad (ktm)$$

Câu 6: Cho $P = n^4 + 4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = [(n - 1)^2 + 1][(n + 1)^2 + 1] \end{aligned}$$

Vì n là số tự nhiên nên $(n+1)^2 + 1 \geq 2$. Như vậy muốn P là số nguyên tố thì ta phải có

$$(n-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1$$

Khi đó $P = 5$ là số nguyên tố.

Câu 7: Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2) \cdot (a^2 + 2a + 2)$$

$$\text{Vì } a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 - 2a + 2 \in \mathbb{Z}; a^2 + 2a + 2 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Có: } a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 \geq 1 \forall a \text{ và } a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 \geq 1 (\forall a)$$

$$\text{Vậy } a^4 + 4 \text{ là số nguyên tố thì } \begin{cases} a^2 + 2a + 2 = 1 \\ a^2 - 2a + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1(tm) \\ a = -1(tm) \end{cases}$$

Câu 8: Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

Lời giải

Để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

$$\Leftrightarrow n+18 = p^2 \text{ và } n-41 = q^2 \ (p, q \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow p^2 - q^2 = (n+18) - (n-41) = 59 \Leftrightarrow (p-q)(p+q) = 59$$

$$\text{Nhưng } 59 \text{ là số nguyên tố, nên: } \begin{cases} p-q=1 \\ p+q=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=30 \\ q=29 \end{cases}$$

$$\text{Từ } n+18 = p^2 = 30^2 = 900 \Rightarrow n = 882$$

$$\text{Thay vào } n-41, \text{ ta được } 882-41 = 841 = 29^2 = q^2$$

Vậy với $n = 882$ thì $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

Câu 9: Chứng minh rằng nếu $m \neq 5$ thì $m = a^4 + 4$ không là số nguyên tố

Lời giải

$$\begin{aligned} m = a^4 + 4 &= (a^4 + 4a^2 + 4) - (2a)^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a) \\ &= [(a^2 + 2a + 1) + 1][(a^2 - 2a + 1) + 1] = [(a+1)^2 + 1][(a-1)^2 + 1] \end{aligned}$$

Vì $(a+1)^2 \geq 1 \forall a, (a-1)^2 \geq 0 \forall a$ nên giá trị nhỏ nhất của thừa số thứ nhất là 1 khi $a = -1$

Giá trị nhỏ nhất của thừa số thứ hai là 1 nếu $a = 1$

Còn các trường hợp khác là tích > 1

Vậy ngoài $\begin{cases} a=1 \\ a=-1 \end{cases}$ khi đó $m = 5$ thì có thể phân tích thành tích của hai thừa số lớn hơn 1 nên m

không thể là số nguyên tố.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Câu 10: Cho số nguyên tố $p > 3$. Biết rằng có số tự nhiên n sao cho trong cách viết thập phân của số p^n có đúng 20 chữ số. Chứng minh rằng trong 20 chữ số này có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Lời giải

Do p là số nguyên tố và $p > 3$ nên p không chia hết cho 3. (*)

p^n có 20 chữ số. Các chữ số chỉ có thể là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gồm 10 chữ số đôi một khác nhau.

Nếu không có quá nhiều hơn 2 chữ số giống nhau thì mỗi chữ số phải có mặt đúng 2 lần trong cách viết số p^n . Như vậy tổng các chữ số của số p^n là: $2(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 90$: 3 nên $p^n \div 3$

Điều này mâu thuẫn (*).

Vậy trong số p^n phải có ít nhất 3 chữ số giống nhau.

Câu 11: Tìm các số nguyên dương n để $n^{1988} + n^{1987} + 1$ là số nguyên tố.

Lời giải:

+ Với $n = 1$ ta có $n^{1988} + n^{1987} + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$ là số nguyên tố.

+ Với $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$ ta có $n^{1988} + n^{1987} + 1 > n^2 + n + 1$

Mặt khác, ta có $n^{1988} - n^2 = n^2 (n^{1986} - 1) = n^2 \left[(n^3)^{662} - (1^3)^{662} \right] : (n^3 - 1^3)$

* **Chú ý:** $a^n - b^n : a - b$

Mà $n^3 - 1^3 = (n - 1)(n^2 + n + 1) : (n^2 + n + 1)$

Suy ra $(n^{1988} - n^2) : (n^2 + n + 1)$

Tương tự, $n^{1987} - n = n(n^{1986} - 1) : (n^2 + n + 1)$

Khi đó, $n^{1988} + n^{1987} + 1 = (n^{1988} - n^2) + (n^{1987} - n) + (n^2 + n + 1) : (n^2 + n + 1)$

Suy ra với $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$ thì $n^{1988} + n^{1987} + 1$ là hợp số.

Vậy, $n = 1$ thì $n^{1988} + n^{1987} + 1$ là số nguyên tố.

Câu 12:

Chứng minh: $9n + 2$ và $12n + 3 (n \in \mathbb{N})$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Lời giải

Chứng minh: $9n + 2$ và $12n + 3 (n \in \mathbb{N})$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Gọi $d = \text{UCLN}(9n + 2, 12n + 3)$, $d \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Khi đó, } \begin{cases} (9n+2):d \\ (12n+3):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (36n+8):d \\ (36n+9):d \end{cases} \Rightarrow (36n+9)-(36n+8):d \Rightarrow 1:d \Leftrightarrow d=1$$

Vậy, và $12n+3 (n \in \mathbb{N})$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Câu 13: Tìm các số nguyên tố p sao cho $7p + 1$ bằng lập phương một số tự nhiên

Lời giải

Tìm các số nguyên tố p sao cho $7p + 1$ bằng lập phương một số tự nhiên.

Giả sử $7p + 1 = m^3 (m \in \mathbb{N})$, mà $p \geq 2 \Rightarrow m \geq 3$

$$\text{Khi đó } 7p = m^3 - 1 = (m-1)(m^2 + m + 1) (*)$$

Vì $7, p$ là các số nguyên tố, $m-1 > 1, m^2 + m + 1 > 1$

nên từ (*) suy ra $m-1 = 7$ hoặc $m^2 + m + 1 = 7$.

$$a) m-1 = 7 \Leftrightarrow m = 8 \Rightarrow p = 73; m^3 = 512 = 7 \cdot 73 + 1, \text{ đúng.}$$

$$b) m^2 + m + 1 = 7 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0.$$

Giải ra ta được $m = 2$ hoặc $m = -3$ đều không thỏa mãn điều kiện $m \geq 3$.

Vậy chỉ có số nguyên tố $p = 73$ là số cần tìm.

Câu 14:

Cho $P = n^4 + 4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = [(n-1)^2 + 1][(n+1)^2 + 1] \end{aligned}$$

Vì n là số tự nhiên nên $(n+1)^2 + 1 \geq 2$. Như vậy muốn P là số nguyên tố thì ta phải có

$$(n-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1$$

Khi đó $P = 5$ là số nguyên tố

Câu 15: Số tự nhiên $A = 1 + 2^{3^{2012}}$ là số nguyên tố hay hợp số ? Giải thích

Lời giải

$$3^{2012} : 3 \text{ nên có thể viết } 3^{2012} = 3n (n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow A = 1 + 2^{3^{2012}} = 1^3 + 2^{3n} = 1^3 + (2^n)^3 = (1 + 2^n) \left[1 - 2^n + (2^n)^2 \right] \Rightarrow A \text{ là hợp số}$$

Câu 16: Tìm tất cả các số nguyên dương

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

để $(1 + n^{2017} + n^{2018})$ là số nguyên tố

Lời giải

Đặt: $A = 1 + n^{2017} + n^{2018}$

$n = 1$ Với thì $A = 3$ là số nguyên tố

Với $n > 1$, ta có:

$$\begin{aligned} 1 + n^{2017} + n^{2018} &= (n^{2018} - n^2) + (n^{2017} - n) + (n^2 + n + 1) \\ &= n^2(n^{2016} - 1) + n(n^{2016} - 1) + (n^2 + n + 1) = (n^{2016} - 1)(n^2 + n) + (n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

Ta lại có: $n^{2016} - 1 = (n^3)^{672} - 1 = (n^3 - 1) \left[(n^3)^{671} + (n^3)^{670} + \dots + n^3 + 1 \right] : (n^3 - 1)$

$\Rightarrow (n^{2016} - 1) : (n^2 + n + 1)$. Suy ra $A : (n^2 + n + 1)$, mà $1 < n^2 + n + 1 < A$ nên A là hợp số.

Vậy $n = 1$ là số nguyên dương duy nhất thỏa mãn điều kiện

Câu 17: Tìm số tự nhiên n để p là số nguyên tố biết: $p = n^3 - n^2 + n - 1$

Lời giải

Biến đổi được $p = (n^2 + 1)(n - 1)$

Nếu $n = 0; 1$ không thỏa mãn đề Câu

Nếu $n = 2$ thỏa mãn đề Câu vì $p = (2^2 + 1)(2 - 1) = 5$

Nếu $n > 3$ không thỏa mãn đề Câu vì khi đó p có từ 3 ước trở lên là $1; n - 1 > 1$ và $n^2 + 1 > n - 1 > 1$

Vậy $n = 2$ thì $p = n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

Câu 18: Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

Lời giải

Ta có:

$$a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2) \cdot (a^2 + 2a + 2)$$

$$\text{Vì } a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 - 2a + 2 \in \mathbb{Z}; a^2 + 2a + 2 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Có: } a^2 + 2a + 2 = (a + 1)^2 + 1 \geq 1 \forall a \text{ và } a^2 - 2a + 2 = (a - 1)^2 + 1 \geq 1 (\forall a)$$

Vậy $a^4 + 4$ là số nguyên tố thì $\begin{cases} a^2 + 2a + 2 = 1 \\ a^2 - 2a + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1(tm) \\ a = -1(tm) \end{cases}$

Câu 19: Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24

Lời giải

Ta có: $n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$

Vì $n - 1; n; n + 1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Do đó $(n^3 - n) : 8 \quad (2)$

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1); (2) suy ra $(n^3 - n) : 24 \quad (dpcm)$

Câu 20: Cho $A = p^4$ trong đó p là số nguyên tố. Tìm các giá trị của p để tổng các ước dương của A là số chính phương.

Lời giải

Các ước dương của A là $1; p; p^2; p^3; p^4$

Tổng các ước là $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4n^2$$

Ta có:

$$4p^4 + 4p^3 + p^2 < 4n^2 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 8p^2 + 4p$$

$$\Rightarrow (2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2 \Rightarrow (2n)^2 = (2p^2 + p + 1)^2$$

Do đó :

$$4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = -1(ktm) \\ p_2 = 3(tm) \end{cases}$$

Vậy $p = 3$

Câu 21: Tìm các số nguyên tố x và y sao cho $x^2 - 2y^2 = 1$

Lời giải

Ta có: $x^2 - 2y^2 = 1 \Leftrightarrow 2y^2 = x^2 - 1 : 2 \Rightarrow (x-1)(x+1) : 2$

Xét trường hợp : $x+1 : 2 \Rightarrow x+1 = 2k \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = 2k - 1$

Khi đó ta có $2y^2 : 4 \Rightarrow y^2 : 2 \Rightarrow y = 2$ (do y nguyên tố). Từ đó suy ra $x = 3$

Xét trường hợp $x-1 : 2 \Rightarrow x+1 = 2t \quad (t \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = 2t + 1$

Khi đó ta có: $2y^2 : 4 \Rightarrow y^2 : 2 \Rightarrow y = 2$ (do y nguyên tố) suy ra $x = 3$

Câu 22: Ta có:

$$B = (n^2 - 8)^2 + 36 = n^4 - 16n^2 + 64 + 36$$

$$= n^4 + 20n^2 + 100 - 36n^2$$

$$= (n^2 + 10)^2 - (6n)^2$$

$$= (n^2 - 6n + 10)(n^2 + 6n + 10)$$

Với $n \in \mathbb{N}$ thì $0 < n^2 - 6n + 10 \leq n^2 + 6n + 10$

Nên để B là số nguyên tố thì trước hết $n^2 - 6n + 10 = 1$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Hay $(n-3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 3$

Thử lại, với $n = 3$ thì $B = (3^2 - 8)^2 + 36 = 37$

37 là số nguyên tố nên $n = 3$ là giá trị cần tìm

Câu 23: Đặt $a^2 + a + 1 = x$ (1)

$$\begin{aligned} A &= x(x+1) - 12 = x^2 + x - 12 = x^2 - 3x + 4x - 12 \\ &= (x^2 - 3x) + (4x - 12) = x(x-3) + 4(x-3) \\ &= (x-3)(x+4) \end{aligned}$$

Thay (1) vào biểu thức A, ta có

$$\begin{aligned} A &= (a^2 + a - 2)(a^2 + a + 5) \\ &= (a^2 + 2a - a - 2)(a^2 + a + 5) \\ &= (a-)(a+2)(a^2 + a + 5) \end{aligned}$$

Ta thấy $A : a-1; A : a+2; A : a^2 + a + 5$

Vậy A là hợp số

Câu 24:

Lời giải

Đặt: $A = 1 + n^{2017} + n^{2018}$

Với $n = 1$ thì $A = 3$ là số nguyên tố

Với $n > 1$ ta có:

$$\begin{aligned} 1 + n^{2017} + n^{2018} &= (n^{2018} - n^2) + (n^{2017} - n) + (n^2 + n + 1) \\ &= n^2(n^{2016} - 1) + n(n^{2016} - 1) + (n^2 + n + 1) = (n^{2016} - 1)(n^2 + n) + (n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

Ta lại có: $n^{2016} - 1 = (n^3)^{672} - 1 = (n^3 - 1)[(n^3)^{671} + (n^3)^{670} + \dots + n^3 + 1] : (n^3 - 1)$
 $\Rightarrow (n^{2016} - 1) : (n^2 + n + 1)$

Suy ra $A : (n^2 + n + 1)$, mà $1 < n^2 + n + 1 < A$ nên A là hợp số

Vậy $n=1$ là số nguyên dương duy nhất thỏa mãn điều kiện.

Câu 25: Cho $P = n^4 + 4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2) - (2n)^2 \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = [(n-1)^2 + 1] \cdot [(n+1)^2 + 1] \end{aligned}$$

Vì n là số tự nhiên nên $(n+1)^2 + 1 \geq 2$. Như vậy muốn P là số nguyên tố thì phải có $(n-1)^2 + 1 = 1$

hay $(n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1$

Khi đó $P = 5$ là số nguyên tố.

Câu 26: Tìm số tự nhiên n để p là số nguyên tố biết: $p = n^3 - n^2 + n - 1$.

Lời giải

Biến đổi được $p = (n^2 + 1)(n - 1)$

Nếu $n = 0; 1$ không thỏa mãn đề bài

Nếu $n = 2$ thỏa mãn đề bài vì $p = (2^2 + 1)(2 - 1) = 5$

Nếu $n > 3$ không thỏa mãn đề bài vì khi đó p có từ 3 ước trở lên là $1; n - 1 > 1$ và $n^2 + 1 > n - 1 > 1$

Vậy $n = 2$ thì $p = n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

Câu 27: Tìm số tự nhiên n để p là số nguyên tố biết: $p = n^3 - n^2 + n - 1$

Lời giải

1) Biến đổi được $p = (n^2 + 1)(n - 1)$

Nếu $n = 0; 1$ không thỏa mãn đề bài

Nếu $n = 2$ thỏa mãn đề bài vì $p = (2^2 + 1)(2 - 1) = 5$

Nếu $n > 3$ không thỏa mãn đề bài vì khi đó p có từ 3 ước trở lên là $1; n - 1 > 1$ và $n^2 + 1 > n - 1 > 1$

Vậy $n = 2$ thì $p = n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.

Câu 28: Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

Lời giải

Ta có: $a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2) \cdot (a^2 + 2a + 2)$

Vì $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 - 2a + 2 \in \mathbb{Z}; a^2 + 2a + 2 \in \mathbb{Z}$

Có: $a^2 + 2a + 2 = (a + 1)^2 + 1 \geq 1 \forall a$ và $a^2 - 2a + 2 = (a - 1)^2 + 1 \geq 1 (\forall a)$

Vậy $a^4 + 4$ là số nguyên tố thì $\begin{cases} a^2 + 2a + 2 = 1 \\ a^2 - 2a + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1(tm) \\ a = -1(tm) \end{cases}$

ĐS8-Chuyên đề 3: SỐ CHÍNH PHƯƠNG**Qua Các Đề Thi HSG Môn Toán Lớp 8****A. Bài toán**

Câu 1: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số \overline{abcd} , biết rằng nó là một số chính phương, số \overline{abcd} chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.

Câu 2: Cho a là một số gồm $2n$ chữ số 1, b là một số gồm $n+1$ chữ số 1, c là một số gồm n chữ số 1 ($n \in \mathbb{N}^*$). Cmr: $a+b+6c+8$ là một số chính phương.

Câu 3: Tìm số nguyên dương n để $n+1$ và $4n+29$ là số chính phương

Câu 4: Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

Câu 5: a) Tìm số có hai chữ số mà bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

b) Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng nếu cộng ba tích, mỗi tích của hai trong ba số đó thì được 26.

c) Tìm bốn số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tích của chúng bằng 120

Câu 6: Cho các số a, b, c, d nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:

$$\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6. \text{ Chứng minh } A = abcd \text{ là số chính phương.}$$

Câu 7: Cho $a_n = 1+2+3+\dots+n$. Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương

Câu 8: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì:

$$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 \text{ là số chính phương}$$

Câu 9: Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ

Câu 10: Tìm số tự nhiên n để: $D = n^5 - n + 2$ là số chính phương.

Câu 11: Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

Câu 12: Chứng minh rằng tổng hai số chính phương liên tiếp cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 13: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho: $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7$ là số chính phương.

Câu 14:

Chứng minh: số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$ không phải là số chính phương.

Câu 15:

Tìm các số nguyên n để $B = n^2 - n + 13$ là số chính phương?

Câu 16:

Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

Câu 17:

Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương

Câu 18: Cho $A = p^4$ trong đó p là số nguyên tố. Tìm các giá trị của p để tổng các ước dương của A là số chính phương.

Câu 19: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Câu 20: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k+1)(k+2)$ (với $k \in \mathbb{N}^*$)

Chứng minh rằng $4S + 1$ là bình phương của một số tự nhiên

Câu 21: Tìm số tự nhiên n sao cho số $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương.

Câu 22: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Câu 23: Cho n là tổng của hai số chính phương. Chứng minh rằng n^2 cũng là tổng của hai số chính phương

Câu 24: Cho các số a, b, c, d nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:

$$\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6. \text{ Chứng minh } A = abcd \text{ là số chính phương.}$$

Câu 25: Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương.

Câu 26: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì:

$$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 \text{ là số chính phương.}$$

Câu 27: Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương.

Câu 28: Cho a, b, c là các số hữu tỷ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ac = 1$. Chứng minh rằng biểu thức $Q = (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Câu 29: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x thì biểu thức P một số chính phương.
 $P = (x+5)(x+7)(x+9)(x+11) + 16.$

Câu 30: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương

Câu 31: Cho a và b là các số tự nhiên thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$

Chứng minh rằng: $a-b$ và $3a+3b+1$ là các số chính phương.

Câu 32: Cho $A = p^4$ trong đó p là số nguyên tố. Tìm các giá trị của p để tổng các ước dương của A là số chính phương.

Câu 33: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Câu 34: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k+1)(k+2)$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng $4S + 1$ là bình phương của một số tự nhiên

Câu 35: Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 36: Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị thì ta vẫn được một số chính phương.

Câu 37: Tìm số tự nhiên n sao cho số $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương.

B.Lời giải

Câu 1: Tìm số tự nhiên có bốn chữ số \overline{abcd} , biết rằng nó là một số chính phương, số \overline{abcd} chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.

Lời giải:

Vì \overline{abcd} là số chính phương và d là một số nguyên tố có 1 chữ số nên $d = 5$.

Đặt $\overline{abc5} = m^2, m \in \mathbb{N}^*$. Khi đó m có chữ số tận cùng là 5 (1)

Mặt khác, $1000 \leq m^2 \leq 9999$ suy ra $32 \leq m \leq 99$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $m \in \{35; 45; 55; 65; 75; 85; 95\}$

Suy ra $m^2 \in \{1225; 2025; 3025; 4225; 5625; 7225; 9025\}$

Ta lại có: $m^2 = \overline{abc5}; 9$.

Do đó, chọn $\overline{abcd} \in \{2025; 5625\}$.

Câu 2: Cho a là một số gồm $2n$ chữ số 1, b là một số gồm $n+1$ chữ số 1, c là một số gồm n chữ số 1 ($n \in \mathbb{N}^*$). Cmr: $a+b+6c+8$ là một số chính phương.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } a+b+6c+8 &= \frac{10^{2n}-1}{9} + \frac{10^{n+1}-1}{9} + 6 \cdot \frac{10^n-1}{9} + 8 \\ &= \frac{10^{2n}-1+10 \cdot 10^n-1+6 \cdot 10^n-6+72}{9} \\ &= \frac{10^{2n}+16 \cdot 10^n+64}{9} = \left(\frac{10^n+8}{3} \right)^2 = 33...36^2_{n-1 \text{ số } 3} \end{aligned}$$

Vậy, $a+b+6c+8$ là một số chính phương

Câu 3: Tìm số nguyên dương n để $n+1$ và $4n+29$ là số chính phương

Lời giải:

Đặt $n+1 = a^2, 4n+29 = b^2 (a, b \in \mathbb{N})$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta có: $b^2 - 4a^2 = 25 \Leftrightarrow (b-2a)(b+2a) = 25$

Mà $b+2a > 0$ nên $b-2a > 0$ và $b+2a > b-2a > 0$ nên suy ra $b-2a=1$ và $b+2a=25$

Do đó, $a=6$. Vậy, $n=35$.

Câu 4: Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

Lời giải:

a) Để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

$$\Leftrightarrow n+18 = p^2 \text{ và } n-41 = q^2 \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow p^2 - q^2 = (n+18) - (n-41) = 59 \Leftrightarrow (p-q)(p+q) = 59$$

Nhưng 59 là số nguyên tố, nên:
$$\begin{cases} p-q=1 \\ p+q=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=30 \\ q=29 \end{cases}$$

Từ $n+18 = p^2 = 30^2 = 900 \Rightarrow n = 882$

Thay vào $n-41$, ta được $882-41 = 841 = 29^2 = q^2$

Vậy với $n=882$ thì $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

Câu 5: a) Tìm số có hai chữ số mà bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

b) Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng nếu cộng ba tích, mỗi tích của hai trong ba số đó thì được 26.

c) Tìm bốn số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tích của chúng bằng 120

Lời giải:

a) Số cần tìm có dạng \overline{ab} , với $a, b \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$

Theo đề bài ta có: $\overline{ab}^2 = (a+b)^3 \Leftrightarrow (10a+b)^2 = (a+b)^3 \quad (1)$

Hệ thức (1) chứng tỏ \overline{ab} phải là một số lập phương và $(a+b)$ phải là một số chính phương.

Do $10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$

+Nếu $\overline{ab} = 27 \Leftrightarrow a+b = 9 = 3^2$ (chính phương)

+Nếu $\overline{ab} = 64 \Leftrightarrow a+b = 10$ (không chính phương nên loại)

Vậy, số cần tìm là $\overline{ab} = 27$.

b) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $(x-1), x, (x+1)$ (ĐK : $x \geq 1, x \in \mathbb{N}$)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta có : $(x-1)x + x(x+1) + (x-1)(x+1) = 26 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 26 \Leftrightarrow x = 3$ (Vì $x \geq 1, x \in \mathbb{N}$)

Vậy, ba số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 2, 3, 4.

c) Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là $(x-1), x, (x+1), (x+2)$ (ĐK : $x \geq 2, x \in \mathbb{Z}$)

Ta có : $(x-1)x(x+1)(x+2) = 120 \Leftrightarrow [x(x+1)][(x-1)(x+2)] = 120$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x)[(x^2 + x) - 2] = 120 \Leftrightarrow (x^2 + x) - 2(x^2 + x) + 1 = 121$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x - 1)^2 = 11^2$$

Vì $x \geq 2, x \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 + x - 1 = 11$ $(x-3)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 3$ (Vì $x+4 > 0$)

Vậy, bốn số nguyên dương liên tiếp phải tìm là 2, 3, 4, 5

Câu 6: Cho các số a, b, c, d nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:

$$\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6. \text{ Chứng minh } A = abcd \text{ là số chính phương.}$$

Lời giải:

$$\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{a}{a+b} + 1 + \frac{b}{b+c} + 1 + \frac{c}{c+d} + 1 + \frac{d}{d+a} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b+c} + 1 - \frac{c}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a+b} - \frac{b}{b+c} + \frac{d}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{d(a-c)}{(c+d)(d+a)} = 0$$

$$\Leftrightarrow b(c+d)(d+a) - d(a+b)(b+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow abc - acd + bd^2 - b^2d = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd) = 0$$

$$\Leftrightarrow ac - bd = 0 \Leftrightarrow ac = bd$$

Vậy $A = abcd = (ac)^2$ là số chính phương

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Câu 7: Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương.

Lời giải:

Ta có:

$$a_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1$$

$$a_n + a_{n+1} = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n + 1$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \text{ là một số chính phương.}$$

Câu 8: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì:

$$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 \text{ là số chính phương}$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4$$

$$= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4$$

$$\text{Đặt } x^2 + 5xy + 5y^2 = t \ (t \in \mathbb{Z}) \text{ thì}$$

$$A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4 = t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$$

$$\text{Vì } x, y, z \in \mathbb{Z} \text{ nên } x^2 \in \mathbb{Z}, 5xy \in \mathbb{Z}, 5y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 + 5xy + 5y^2 \in \mathbb{Z} \text{ (đpcm)}$$

Vậy A là số chính phương

Câu 9: Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ

Lời giải

$$\text{Gọi hai số lần lượt là } a^2 \text{ và } (a+1)^2$$

Theo đề bài ra ta có:

$$a^2 + (a+1)^2 + a^2(a+1)^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$$

$$= (a^4 + 2a^3 + a^2) + 2(a^2 + a) + 1 = (a^2 + a)^2 + 2(a^2 + a) + 1$$

$$= (a^2 + a + 1)^2 \text{ là một số chính phương lẻ vì } a^2 + a = a(a+1) \text{ là số chẵn}$$

$$\Rightarrow a^2 + a + 1 \text{ là số lẻ}$$

Câu 10: Tìm số tự nhiên n để: $D = n^5 - n + 2$ là số chính phương.

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$D = n^5 - n + 2 = n(n^4 - 1) + 2 = n(n+1)(n-1)(n^2 + 1) + 2$$

$$= n(n-1)(n+1)[(n^2 - 4) + 5] + 2$$

$$= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) + 5n(n-1)(n+1) + 2$$

Mà $n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) : 5$ (tích 5 số tự nhiên liên tiếp)

Và $5n(n-1)(n+1) : 5$. Vậy D chia 5 dư 2

Do đó D có tận cùng là 2 hoặc 7 nên D không phải là số chính phương.

Vậy không có giá trị nào của n để D là số chính phương

Câu 11: Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

Lời giải

Gọi \overline{abcd} là số phải tìm, $a, b, c, d \in \mathbb{N}, 0 \leq a, b, c, d \leq 9; a \neq 0$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)} = m^2 \end{cases} (k, m \in \mathbb{N}; 31 < k < m < 100)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 1353 = m^2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } m^2 - k^2 = 1353$$

$$\Rightarrow (m+k)(m-k) = 123.11 = 41.33 (k+m < 200)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+k=123 \\ m-k=11 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m+k=41 \\ m-k=33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m=67 \\ k=56 \end{cases} \\ \begin{cases} m=37 \\ k=4 \end{cases} \end{cases}$$

Kết luận đúng: $\overline{abcd} = 3136$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Câu 12: Chứng minh rằng tổng hai số chính phương liên tiếp cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Lời giải

Gọi hai số chính phương liên tiếp đó là k^2 và $(k+1)^2$.

Ta có: $k^2 + (k+1)^2 + k^2 \cdot (k+1)^2 = k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 = (k^2 + k + 1)^2 = [k(k+1) + 1]^2$ là số chính phương. (1)

Vì $k(k+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên $k(k+1)$ chẵn $\Rightarrow k(k+1) + 1$ lẻ $\Rightarrow [k(k+1) + 1]^2$ lẻ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 13: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho: $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7$ là số chính phương.

Lời giải

$$\text{Giả sử } n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7 = y^2 \quad (y \in \mathbb{N})$$

$$\text{Ta có: } y^2 = (n^2 + n)^2 + n^2 + n + 7$$

$$\Rightarrow y^2 > (n^2 + n)^2$$

$$\Rightarrow y > |n^2 + n|$$

$$\Rightarrow y \geq |n^2 + n| + 1 \quad (\forall y \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow y^2 \geq (n^2 + n + 1)^2$$

$$\Rightarrow y^2 \geq (n^2 + n + 1)^2$$

$$\text{Thay } y^2 = (n^2 + n)^2 + n^2 + n + 7$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n+3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq n \leq 2$$

Thử trực tiếp $n = 2; n = -3$ thỏa mãn

Vậy số nguyên n cần tìm là $n \in \{2; -3\}$

Câu 14:

Chứng minh: số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$ không phải là số chính phương.

Lời giải

) Chứng minh: số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$ không phải là số chính phương.

$$\text{Ta có } n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2(n^4 - n^2 + 2n + 2) = n^2[n^2(n-1)(n+1) + 2(n+1)]$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{aligned}
 &= n^2 \left[(n+1)(n^3 - n^2 + 2) \right] = n^2 (n+1) \left[(n^3 + 1) - (n^2 - 1) \right] \\
 &= n^2 (n+1)^2 (n^2 - 2n + 2)
 \end{aligned}$$

Với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$ và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

Suy ra $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$ do đó $n^2 - 2n + 2$ không phải là số chính phương.

Vậy, số có dạng $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$ không phải là số chính phương

Câu 15:

Tìm các số nguyên n để $B = n^2 - n + 13$ là số chính phương?

Lời giải

Ta có B là số chính phương thì $4B$ cũng là số chính phương.

Đặt $4B = k^2, k \in \mathbb{N}$

Khi đó, $4B = 4n^2 - 4n + 52 = k^2 \Leftrightarrow (2n-1+k)(2n-1-k) = -51$

Vì $(2n-1+k) > (2n-1-k)$ nên ta có 4 trường hợp:

$$\begin{cases} 2n-1+k=1 \\ 2n-1-k=-51 \end{cases}, \begin{cases} 2n-1+k=3 \\ 2n-1-k=-17 \end{cases}, \begin{cases} 2n-1+k=51 \\ 2n-1-k=-1 \end{cases}, \begin{cases} 2n-1+k=17 \\ 2n-1-k=-3 \end{cases}$$

Giải ra ta lần lượt được: $n = -12, n = -3, n = 13, n = 4$

Vậy, khi $n = -12$ hoặc $n = -3$ hoặc $n = 13$ hoặc $n = 4$ thì $B = n^2 - n + 13$ là số chính phương.

Câu 16:

Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

Lời giải

Để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

$$\Leftrightarrow n+18 = p^2 \text{ và } n-41 = q^2 \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow p^2 - q^2 = (n+18) - (n-41) = 59 \Leftrightarrow (p-q)(p+q) = 59$$

$$\text{Nhưng } 59 \text{ là số nguyên tố, nên: } \begin{cases} p-q=1 \\ p+q=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=30 \\ q=29 \end{cases}$$

$$\text{Từ } n+18 = p^2 = 30^2 = 900 \Rightarrow n = 882$$

$$\text{Thay vào } n-41, \text{ ta được } 882-41 = 841 = 29^2 = q^2$$

Vậy với $n = 882$ thì $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Câu 17:

Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương

Lời giải

Ta có: $a_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1$

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} &= 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n + 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \text{ là một số chính phương.} \end{aligned}$$

Câu 18: Cho $A = p^4$ trong đó p là số nguyên tố. Tìm các giá trị của p để tổng các ước dương của A là số chính phương.

Lời giải

Các ước dương của A là $1; p; p^2; p^3; p^4$

Tổng các ước là $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2 \ (n \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4n^2$$

Ta có:

$$\begin{aligned} 4p^4 + 4p^3 + p^2 &< 4n^2 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 8p^2 + 4p \\ \Rightarrow (2p^2 + p)^2 &< (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2 \Rightarrow (2n)^2 &= (2p^2 + p + 1)^2 \end{aligned}$$

Do đó :

$$4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = -1(\text{ktm}) \\ p_2 = 3(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy $p = 3$

Câu 19: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Lời giải

$$\text{Giả sử } n^2 + 4n + 2013 = m^2 \ (m \in \mathbb{N})$$

$$\text{Suy ra } (n+2)^2 + 2009 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n+2)^2 = 2009$$

$$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2) = 2009$$

Mặt khác $2009 = 2009.1 = 287.7 = 49.41$ và $m+n+2 > m-n-2$ nên có các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} m+n+2 = 2009 \\ m-n-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1005 \\ n = 1002 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} m+n+2 = 287 \\ m-n-2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 147 \\ n = 138 \end{cases}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\text{TH3: } \begin{cases} m+n+2=49 \\ m-n-2=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=45 \\ n=2 \end{cases}$$

Vậy các số cần tìm là 1002;138;2

Câu 20: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k+1)(k+2)$ (với $k \in \mathbb{N}^*$)

Chứng minh rằng $4S+1$ là bình phương của một số tự nhiên

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } k(k+1)(k+2) &= \frac{1}{4}k(k+1)(k+2).4 = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)[(k+3)-(k-1)] \\ &= \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k-1) \\ \Rightarrow 4S &= 1.2.3.4 - 0.1.2.3 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + \dots + k(k+1)(k+2)(k+3) \\ &\quad - k(k+1)(k+2)(k-1) = k(k+1)(k+2)(k+3) \\ \Rightarrow 4S+1 &= k(k+1)(k+2)(k+3)+1 \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} k(k+1)(k+2)(k+3)+1 &= k(k+3)(k+1)(k+2)+1 \\ &= (k^2+3k)(k^2+3k+2)+1 = (k^2+3k+1)^2 \end{aligned}$$

Mà $k \in \mathbb{N}^*$ nên $k^2+3k+1 \in \mathbb{N}^*$ nên suy ra đpcm.

Câu 21: Tìm số tự nhiên n sao cho số $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử A là số chính phương, suy ra tồn tại số $k \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$\begin{aligned} n^2 + n + 6 = k^2 &\Leftrightarrow 4(n^2 + n + 6) = 4k^2 \\ \Leftrightarrow (2k)^2 - (2n+1)^2 &= 23 \Leftrightarrow (2k+2n+1)(2k-2n-1) = 23 \quad (*) \end{aligned}$$

Do $k, n \in \mathbb{N}$ nên dễ thấy $2k-2n-1$ và $2k+2n+1$ là các số nguyên

Ngoài ra $23 > 0$ và $2k+2n+1 \geq 1; 2k-2n-1 < 2k+2n+1$

Suy ra $1 \leq 2k-2n-1 < 2k+2n+1$

Căn cứ các lập luận trên và 23 là số nguyên tố nên từ (*) suy ra

$$\begin{cases} 2k-2n-1=0 \\ 2k+2n+1=23 \end{cases} \Rightarrow 4n+2=22 \Leftrightarrow n=5$$

Với $n=5$ thì $A=36=6^2$ là số chính phương

Vậy $n=5$ là số tự nhiên cần tìm

Câu 22: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử $n^2 + 4n + 2013 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$)

Suy ra $(n+2)^2 + 2009 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n+2)^2 = 2009$

$$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2) = 2009$$

Mặt khác $2009 = 2009.1 = 287.7 = 49.41$ và $m+n+2 > m-n-2$ nên có các trường hợp sau:

$$TH1: \begin{cases} m+n+2 = 2009 \\ m-n-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1005 \\ n = 1002 \end{cases}$$

$$TH2: \begin{cases} m+n+2 = 287 \\ m-n-2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 147 \\ n = 138 \end{cases}$$

$$TH3: \begin{cases} m+n+2 = 49 \\ m-n-2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 45 \\ n = 2 \end{cases}$$

Vậy các số cần tìm là 1002; 138; 2

Câu 23: Cho n là tổng của hai số chính phương. *CMR*: n^2 cũng là tổng của hai số chính phương

Lời giải

Đặt $N = a^2 + b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}$

Khi đó $N^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$ là tổng của hai số chính phương.

Câu 24: Cho các số a, b, c, d nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:

$$\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6. \text{ Chứng minh } A = abcd \text{ là số chính phương.}$$

Lời giải

$$a) \frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{a}{a+b} + 1 + \frac{b}{b+c} + 1 + \frac{c}{c+d} + 1 + \frac{d}{d+a} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b+c} + 1 - \frac{c}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{b}{a+b} - \frac{b}{b+c} + \frac{d}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{d(a-c)}{(c+d)(d+a)} = 0 \\
&\Leftrightarrow b(c+d)(d+a) - d(a+b)(b+c) = 0 \\
&\Leftrightarrow abc - acd + bd^2 - b^2d = 0 \\
&\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd) = 0 \\
&\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd) = 0 \\
&\Leftrightarrow ac - bd = 0 \Leftrightarrow ac = bd
\end{aligned}$$

Vậy $A = abcd = (ac)^2$ là số chính phương

Câu 25:

Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 \\
a_n + a_{n+1} &= 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n + 1 \\
&= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \text{ là một số chính phương.}
\end{aligned}$$

Câu 26: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x, y thì:

$$A = (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 \text{ là số chính phương.}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } A &= (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 \\
&= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4 \\
&\text{Đặt } x^2 + 5xy + 5y^2 = t \ (t \in \mathbb{Z}) \text{ thì}
\end{aligned}$$

$$A = (t - y^2)(t + y^2) + y^4 = t^2 - y^4 + y^4 = t^2 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$$

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \mathbb{Z}, 5xy \in \mathbb{Z}, 5y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 + 5xy + 5y^2 \in \mathbb{Z} (dfcm)$

Vậy A là số chính phương

Câu 27: Cho $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Chứng minh rằng $a_n + a_{n+1}$ là một số chính phương.

Lời giải

Ta có: $a_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1$

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} &= 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n + 1 \\ &= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \text{ là một số chính phương.} \end{aligned}$$

Câu 28: Cho a, b, c là các số hữu tỷ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ac = 1$. Chứng minh rằng biểu thức $Q = (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Lời giải

Vì $ab + ac + bc = 1$ nên $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$

Tương tự: $b^2 + 1 = (a+b)(b+c)$ $c^2 + 1 = (b+c)(c+a)$

Do đó: $Q = (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = [(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \Rightarrow dpcm$

Câu 29: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x thì biểu thức P một số chính phương.

$$P = (x+5)(x+7)(x+9)(x+11) + 16.$$

Lời giải

Ta có: $P = (x+5)(x+7)(x+9)(x+11) + 16.$

$$\Leftrightarrow P = (x+5)(x+11)(x+7)(x+9) + 16.$$

$$\Leftrightarrow P = (x^2 + 16x + 55)(x^2 + 16x + 63) + 16.$$

$$\Leftrightarrow P = (x^2 + 16x + 55)^2 + 8(x^2 + 16x + 55) + 16.$$

$$\Leftrightarrow P = (x^2 + 16x + 55)^2 + 2(x^2 + 16x + 55) \cdot 4 + 4^2.$$

$$\Leftrightarrow P = (x^2 + 16x + 59)^2. \text{ Với } x \text{ là số nguyên thì } P \text{ là một số CP.}$$

Câu 30: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương

Lời giải

b) Giả sử $n^2 + 4n + 2013 = m^2, (m \in \mathbb{N})$

$$\text{Suy ra } (n+2)^2 + 2009 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n+2)^2 = 2009$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2) = 2009$$

Mặt khác $2009 = 2009.1 = 287.7 = 49.41$ và $m+n+2 > m-n-2$ nên có các trường hợp sau xảy ra:

$$\text{TH1: } \begin{cases} m+n+2 = 2009 \\ m-n-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1005 \\ n = 1002 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} m+n+2 = 287 \\ m-n-2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 147 \\ n = 138 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} m+n+2 = 49 \\ m-n-2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 45 \\ n = 2 \end{cases}$$

Vậy các số cần tìm là: 1002; 138; 2

Câu 31: Từ $2a^2 + a = 3b^2 + b$ có $(a-b)(3a+3b+1) = a^2$

Cũng có : $(a-b)(2a+2b+1) = b^2$. Suy ra $(a-b)^2 \cdot (2a+2b+1)(3a+3b+1) = (ab)^2$

Gọi $(2a+2b+1, 3a+3b+1) = d$. Chứng minh được $d = 1$

$\Rightarrow 3a+3b+1$ là số chính phương $\Rightarrow a+b$ là số chính phương (đpcm)

Câu 32: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Lời giải

Các ước dương của A là $1; p; p^2; p^3; p^4$

Tổng các ước là $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4n^2$$

Ta có: $4p^4 + 4p^3 + p^2 < 4n^2 < 4p^4 + p^2 + 4 + 4p^3 + 8p^2 + 4p$

$$\Rightarrow (2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2 \Rightarrow (2n)^2 = (2p^2 + p + 1)^2$$

Do đó : $4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1$

$$\Rightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = -1 & (\text{không thỏa mãn}) \\ p_2 = 3 & (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Vậy $p = 3$

Câu 33: Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Lời giải

Giả sử $n^2 + 4n + 2013 = m^2 \quad (m \in \mathbb{N})$

Suy ra $(n+2)^2 + 2009 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n+2)^2 = 2009$

$$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2) = 2009$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Mặt khác $2009 = 2009.1 = 287.7 = 49.41$ và $m + n + 2 > m - n - 2$ nên có các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} m + n + 2 = 2009 \\ m - n - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1005 \\ n = 1002 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} m + n + 2 = 287 \\ m - n - 2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 147 \\ n = 138 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} m + n + 2 = 49 \\ m - n - 2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 45 \\ n = 2 \end{cases}$$

Vậy các số cần tìm là 1002; 138; 2.

Câu 34: Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k+1)(k+2)$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh rằng $4S + 1$ là bình phương của một số tự nhiên

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } k(k+1)(k+2) &= \frac{1}{4}k(k+1)(k+2).4 = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)[(k+3) - (k-1)] \\ &= \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k-1) \\ \Rightarrow 4S &= 1.2.3.4 - 0.1.2.3 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + \dots + k(k+1)(k+2)(k+3) \\ &\quad - k(k+1)(k+2)(k-1) = k(k+1)(k+2)(k+3) + 1 \\ \Rightarrow 4S + 1 &= k(k+1)(k+2)(k+3) + 1 \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} k(k+1)(k+2)(k+3) + 1 &= k(k+3)(k+1)(k+2) + 1 \\ &= (k^2 + 3k)(k^2 + 3k + 2) + 1 = (k^2 + 3k + 1)^2 \end{aligned}$$

Mà $k \in \mathbb{N}^*$ nên $k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{N}^*$ nên suy ra đpcm.

Câu 35: Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Lời giải

Gọi hai số lần lượt là a^2 và $(a+1)^2$

Theo bài ra ta có:

$$\begin{aligned} a^2 + (a+1)^2 + a^2 \cdot (a+1)^2 &= a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 \\ &= (a^4 + 2a^3 + a^2) + 2(a^2 + a) + 1 = (a^2 + a)^2 + 2(a+1) + 1 \\ &= (a^2 + a + 1)^2 \text{ là một số chính phương lẻ vì } a^2 + a = a(a+1) \text{ là số chẵn nên } a^2 + a + 1 \text{ là số lẻ} \end{aligned}$$

Câu 36:

Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị thì ta vẫn được một số chính phương.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

Gọi \overline{abcd} là số phải tìm $a, b, c, d \in \mathbb{N}, 0 \leq a, b, c, d \leq 9, a \neq 0$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ (a+1)(b+3)(c+5)(d+3) = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 1353 = m^2 \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{N}, 31 < k < m < 100$$

$$\text{Do đó: } m^2 - k^2 = 1353$$

$$\Rightarrow (m+k)(m-k) = 123 \cdot 11 = 41 \cdot 33 \quad (k+m < 200)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+k=123 \\ m-k=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=67 \\ m=57 \end{cases} \quad (TM)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+k=41 \\ m-k=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=37 \\ k=4 \end{cases} \quad (KTM)$$

Vậy số cần tìm là $\overline{abcd} = 3136$

Câu 37: Tìm số tự nhiên n sao cho số $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử A là số chính phương, suy ra tồn tại số $k \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$n^2 + n + 6 = k^2 \Leftrightarrow 4(n^2 + n + 6) = 4k^2$$

$$\Leftrightarrow (2k)^2 - (2n+1)^2 = 23 \Leftrightarrow (2k+2n+1)(2k-2n-1) = 23 \quad (*)$$

Do $k, n \in \mathbb{N}$ nên dễ thấy $2k-2n-1$ và $2k+2n+1$ là các số nguyên

Ngoài ra $23 > 0$ và $2k+2n+1 \geq 1; 2k-2n-1 < 2k+2n+1$

Suy ra $1 \leq 2k-2n-1 < 2k+2n+1$

Căn cứ các lập luận trên và 23 là số nguyên tố nên từ (*) suy ra

$$\begin{cases} 2k-2n-1=0 \\ 2k+2n+1=23 \end{cases} \Rightarrow 4n+2=22 \Leftrightarrow n=5$$

Với $n=5$ thì $A=36=6^2$ là số chính phương

Vậy $n=5$ là số tự nhiên cần tìm.

ĐS8-CHUYÊN ĐỀ 4: PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN**Qua Các Đề Thi HSG Môn Toán Lớp 8****A. Bài toán**

Bài 1: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ sao cho: $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 40 = 0$

Bài 2:

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$

Bài 3:

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Bài 4:

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$

Bài 5:

Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho: $x^2 = y^2 + 2y + 13$

Bài 6: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $3^x - y^3 = 1$

Bài 7: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$.

Bài 8: Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x > y > 0$ và $x^3 + 7y = y^3 + 7x$

Bài 9: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Bài 10: Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng tổng của ba tích của hai trong ba số ấy bằng 242.

Bài 11: . Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho: $x^2 = y^2 + 2y + 13$

Bài 12: : Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$

Bài 13: Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức sau có giá trị là số nguyên.

$$A = \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 5}{2x + 1}$$

Bài 14: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} = 2$$

Bài 15: Tìm tất cả các số x, y, z nguyên thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$

Bài 16:

Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho $x^2 = y^2 + 2y + 13$

Bài 17: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^2 - 25 = y(y + 6)$

Bài 18: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

Bài 19: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$ sao cho tích $x.y$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 20: Với giá trị nào của a và b thì đa thức $(x-a)(x-10)+1$ phân tích thành tích của một đa thức bậc nhất có hệ số nguyên.

Bài 21: a) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

b) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$ sao cho tích $x.y$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 22: Ký hiệu $[a]$ (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a . Tìm x biết

$$\text{rằng: } \left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1$$

Bài 23: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + x + 3 = y^2$

Bài 24:

Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: $x^2 + 2x - 10 = y^2$

Bài 25:

Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$

Bài 26: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Bài 27: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

Bài 28: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Bài 29: Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + y^2 = 3 - xy$

Bài 30: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3x^2 + 3xy - 17 = 7x - 2y$

Bài 31:

a) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn: $2^x = 5^y - 624$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $10x^2 + 50y + 42xy + 14x - 6y + 57 < 0$

Bài 32: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

Bài 33: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3x^2 + 3xy - 17 = 7x - 2y$

Bài 34: Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $5x^4 + 10x^2 + 2y^6 + 4y^3 - 6 = 0$

Bài 35: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + 8y^2 + 4xy - 2x - 4y = 4$

Bài 36: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3^x + 4^x = 5^x$

Bài 37: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi

Bài 38: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} = 2$$

Bài 39: Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho $x^2 = y^2 + 2y + 13$

Bài 40: Tìm tất cả các số x, y, z nguyên thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$

Bài 41: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + x + 3 = y^2$

Bài 42: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

Bài 43: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0$

Bài 44: Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + y^2 = 3 - xy$

Bài 45:

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$ với x, y nguyên dương.

Bài 46: Tìm giá trị nguyên của x để $A:B$ biết $A = 10x^2 - 7x - 5$ và $B = 2x - 3$

Bài 47: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

Bài 48: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$.

Bài 49: Tìm nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình

$$x^2 = y(y+1)(y+2)(y+3).$$

Bài 50:

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$.

Bài 51: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32)$

Bài 52: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 5x - 6 = 0$

Bài 53: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$$

Bài 54: Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + y^2 = 3 - xy$

Bài 55: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

Bài 56: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Bài 57:

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $B = \frac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{2x - 1}$ nhận giá trị nguyên

Bài 58:

Giải phương trình tìm nghiệm nguyên: $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$

Bài 59:

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$

Bài 60:

Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x + 5y = 15$

Bài 61:

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

Bài 62:

Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau: $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$

Bài 63:

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Bài 64: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^2 - 25 = y(y + 6)$

Bài 65:

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Bài 66: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3x^2 + 3xy - 17 = 7x - 2y$

Bài 67: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

B. Lời giải

Bài 1:

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ sao cho: $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 40 = 0$

Lời giải

Ta có:

$$3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - (x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1) = -41$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1)^2 - (2x)^2 = 41$$

$$\Leftrightarrow (3x + y + 1)(y - x + 1) = 41$$

Đặt : $3x + y + 1 = a$ và $y - x + 1 = b$. Suy ra a và b là các ước của 41, có tích bằng 41. Nhận thấy 41 là số nguyên tố, từ đó ta có các trường hợp như bảng sau:

a	-41	-1	1	41
b	-1	-41	41	1
$x = \frac{a-b}{4}$	-10	10	-10	10
$y = \frac{a+3b-4}{4}$	-12	-32	30	10

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(-10; -12); (10; -32); (-10; 30); (10; 10)$

Bài 2:

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$

Lời giải

$$x^2 - xy = 6x - 5y - 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x - 5) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 5} \text{ (vì } x = 5 \text{ không là nghiệm của (2))}$$

$$\Leftrightarrow y = (x + 1) + \frac{3}{x + 5}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vì x, y nguyên nên $x - 5$ là ước của 3 $\Leftrightarrow x - 5 \in \{-1; 1; 3; -3\}$ hay $x \in \{4; 6; 8; 2\}$

x	2	6	4	8
y	0	8	0	8

Vậy nghiệm của phương trình $(x; y) = \{(2; 0); (4; 0); (6; 8); (8; 8)\}$

Bài 3:

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Lời giải

Ta có: $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)

$$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x+2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x < y < x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x+1$

Thay $y = x+1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x; y) = (-1; 0)$

Bài 4:

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x+y) + 2y^2 + 10 = 0$

Lời giải

Ta có:

$$x^2 + 2xy + 7(x+y) + 2y^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8xy + 28x + 28y + 8y^2 + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 2y + 7)^2 + 4y^2 = 9 (*)$$

Ta thấy $(2x + 2y + 7)^2 \geq 0$ nên $4y^2 \leq 9 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{9}{4}$ do y nguyên nên $y^2 \in \{0; 1\}$

$$\Rightarrow y = \{0; -1\}$$

Với $y = 0$ thay vào (*) ta được: $(2x + 7)^2 = 9$ tìm được $x \in \{-2; -5\}$

Với $y = 1$ thay vào (*) ta có: $(2x + 9)^2 = 5$, không tìm được x nguyên

Với $y = -1$ thay vào (*) ta có $(2x + 5)^2 = 5$ không tìm được x nguyên

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\text{Vậy } (x; y) = \{(-2; 0); (-5; 0)\}$$

Bài 5: Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho : $x^2 = y^2 + 2y + 13$

Lời giải

Ta có:

$$x^2 = y^2 + 2y + 13 \Leftrightarrow x^2 = (y + 1)^2 + 12$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1)(x - y - 1) = 12$$

Do $x + y + 1 - (x - y - 1) = 2y + 2$ là số chẵn và $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $x + y + 1 > x - y - 1$. Do đó $x + y + 1$ và $x - y - 1$ là hai số nguyên dương chẵn

Từ đó suy ra chỉ có một trường hợp : $x + y + 1 = 6$ và $x - y - 1 = 2$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ và } y = 1. \text{ Vậy } (x; y) = (4; 1)$$

Bài 6: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $3^x - y^3 = 1$

Lời giải

$$3^x - y^3 = 1 \Leftrightarrow 3^x = y^3 + 1 \quad (1)$$

- Dễ thấy $x = y = 0$ là một nghiệm của (1).

- Nếu $x < 0$ thì $3^x = \frac{1}{3^n}$ (n nguyên dương, $n = -x$)

suy ra $0 < 3^x < 1$. Mà $y^3 + 1$ là số nguyên, suy ra (1) không có nghiệm nguyên.

- Nếu $x > 0$ thì $3^x : 3$

$$(1) \Leftrightarrow 3^x = (y + 1)^3 - 3y(y + 1) \Rightarrow (y + 1)^3 : 3 \text{ nên } y + 1 : 3$$

Đặt $y + 1 = 3k$ (k nguyên), suy ra $y = 3k - 1$. Thay vào (1) ta được: $3^x = (3k - 1)^3 + 1 = 9k(3k^2$

$$- 3k + 1) \text{ nên } 3k^2 - 3k + 1 \text{ là ước của } 3^x \text{ mà } 3k^2 - 3k + 1 : 3 \text{ và } 3k^2 - 3k + 1 = 3\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$$

$$\text{nên } 3k^2 - 3k + 1 = 1 \Leftrightarrow 3k(3k - 1) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ hoặc } k = 1.$$

Với $k = 0$ thì $y = -1$ suy ra $3^x = 0$ phương trình vô nghiệm.

Với $k = 1$ thì $y = 2$ suy ra $3^x = 9$ nên $x = 2$.

Bài 7: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$.

Lời giải

$$\text{a) } x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 35xy - 5x^2y^2 - 60$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 = 5(3 - xy)(xy - 4) \quad (1)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vì $(x - y)^2 \geq 0$ nên $5(3 - xy)(xy - 4) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq xy \leq 4 \Leftrightarrow xy \in \{3; 4\}$

$$\text{Đẳng thức (1) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ x, y \in \mathbb{Z} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = -2 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Vậy $(x, y) \in \{(2; 2); (-2; -2)\}$

Bài 8: Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x > y > 0$ và $x^3 + 7y = y^3 + 7x$

Lời giải

$$PT \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 7(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 - 7 = 0 \text{ (Vì } x > y) \Leftrightarrow (x - y)^2 = 7 - 3xy \geq 0 \Rightarrow xy \leq 2$$

Vì $x > y > 0$ nên $xy = 2$, do đó $x = 2; y = 1$

Bài 9: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2$

Lời giải

Thêm xy vào hai vế của phương trình ta có:

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 y^2 + xy$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 = xy(xy + 1)$$

Ta thấy xy & $xy + 1$ là hai số nguyên liên tiếp có tích là một số chính phương nên tồn tại một số bằng 0

$$\text{TH1: } xy = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

$$\text{TH2: } xy + 1 = 0 \text{ ta có } xy = -1 \text{ nên } (x; y) \in \{(1; -1); (-1; 1)\}$$

Thử lại ba cặp số $(0; 0); (-1; 1); (1; -1)$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 10: Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng tổng của ba tích của hai trong ba số ấy bằng 242

Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $x, x + 1, x + 2$. Ta có:

$$x(x+1) + x(x+2) + (x+1)(x+2) = 242$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + x^2 + 2x + x^2 + 3x + 2 = 242$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 2 = 242 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 240$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 80 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 81$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 9^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=9 \\ x+1=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \text{ (TM)} \\ x=-10 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Vậy ba số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 8;9;10

Bài 11: . Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho: $x^2 = y^2 + 2y + 13$

Lời giải

Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng $(x+y+1)(x-y-1) = 12$

Lập luận để có $x+y+1 > x-y-1$ và $x+y+1; x-y-1$ là các ước dương của 12. Từ đó ta có các trường hợp:

$x+y+1$	12	6	4
$x-y-1$	1	2	3
x	$\frac{13}{2}$	4	$\frac{7}{2}$
y	$\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$

Mà x, y nguyên dương nên $(x; y) = (4; 1)$

Bài 12: : Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$

Lời giải

$$x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - (y+2)^2 = 7 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y+3) = 7$$

Vì x, y nguyên dương nên

$$x+y+3 > x-y-1 > 0 \Rightarrow x+y+3 = 7 \text{ và } x-y-1 = 1 \Rightarrow x=3; y=1$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Phương trình có nghiệm dương duy nhất $(x, y) = (3, 1)$

Bài 13: Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức sau có giá trị là số nguyên.

$$A = \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 5}{2x + 1}$$

Lời giải:

ĐKXD: $2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

Ta có: $A = \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 5}{2x + 1} = \frac{x^2(2x + 1) + (2x + 1) + 4}{2x + 1} = x^2 + 1 + \frac{4}{2x + 1}$

Để A có giá trị nguyên khi x nguyên thì $2x + 1 \in U(4) = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$

Lập bảng:

$2x + 1$	-4	-2	-1	1	2	4
$2x$	-5	-3	-2	0	1	3
x	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Vậy, $x \in \{-1; 0\}$.

Bài 14: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} = 2$$

Giải:

+) Với a, b, c, d dương, ta có:

$$\begin{aligned} F &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \\ &= \left(\frac{a}{b+c} + \frac{c}{d+a} \right) + \left(\frac{b}{c+d} + \frac{d}{a+b} \right) = \frac{a(d+a) + c(b+c)}{(b+c)(d+a)} + \frac{b(a+b) + d(c+d)}{(c+d)(a+b)} \geq \\ &\geq \frac{a^2 + c^2 + ad + bc}{\frac{1}{4} \cdot (b+c+d+a)^2} + \frac{b^2 + d^2 + ab + cd}{\frac{1}{4} \cdot (c+d+a+b)^2} = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + bc + cd)}{(a+b+c+d)^2} \end{aligned}$$

(theo bất đẳng thức $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$)

Mặt khác: $2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + bc + cd) - (a+b+c+d)^2$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd = (a - c)^2 + (b - d)^2 \geq 0$$

Suy ra $F \geq 2$ và đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = c; b = d$

+) Áp dụng $F \geq 2$ với $a = 2016, b = x, c = y, d = 2015$ ta có:

$$\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow y = 2016, x = 2015$

Bài 15: Tìm tất cả các số x, y, z nguyên thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$

Giải:

$$a) \quad x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{4} \right) + (z^2 - 2z + 1) + \left(\frac{3}{4}y^2 - 3y + 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 + (z - 1)^2 + \frac{3}{4}(y - 2)^2 = 0$$

Có các giá trị $(x, y, z) = (1; 2; 1)$

Bài 16:

Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho $x^2 = y^2 + 2y + 13$

Giải:

Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng $(x + y + 1)(x - y - 1) = 12$

Lập luận để có $x + y + 1 > x - y - 1$ và $x + y + 1; x - y - 1$ là các ước dương của 12 từ đó có các trường hợp

$x + y + 1$	12	6	4
$x - y - 1$	1	2	3
x	$\frac{13}{2}$	4	$\frac{7}{2}$
y	$\frac{9}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$

Mà x, y nguyên dương nên $(x; y) = (4; 1)$

Bài 17: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình:

$$x^2 - 25 = y(y + 6)$$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$x^2 - 25 = y(y + 6)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (y + 3)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 3)(x - y - 3) = \begin{cases} (\pm 4).(\pm 4) \\ (\pm 2).(\pm 8) \\ (\pm 1).(\pm 16) \end{cases}$$

$x - y$	7	-1	5	1	11	-5	4	2	19	-13
$x + y$	1	-7	5	-11	-1	5	13	-19	-2	-4

Vậy các cặp số nguyên phải tìm là:

$$(4; -3); (-4; -3); (5; 0); (-5; -6); (5; -6); (-5; 0)$$

Bài 18: Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

Lời giải

$$y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x + y) = (x + 1)(x + 2)(*)$$

V T (*) là số chính phương, VP (*) là tích hai số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow y = 2$$

Bài 19: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$ sao cho tích $x.y$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Điều kiện $x \neq 0$

$$2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy = 2$$

$$\text{Vì } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0; \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \neq 0; \text{ mọi } y$$

Do đó $xy \leq 2$ mà $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = 2; y = 1 \\ x = -1; y = -2 \\ x = -2; y = -1 \end{cases}$$

Bài 20: Với giá trị nào của a và b thì đa thức $(x-a)(x-10)+1$ phân tích thành tích của một đa thức bậc nhất có hệ số nguyên.

Lời giải

Giả sử :

$$\begin{aligned} (x-a)(x-10)+1 &= (x-m)(x-n) \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow x^2 - (a+10)x + 10a+1 &= x^2 - (m+n)x + mn \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m+n = a+10 \\ mn = 10a+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Khử a ta có:

$$\begin{aligned} mn &= 10(m+n-10)+1 \\ \Leftrightarrow mn - 10m - 10n + 100 &= 1 \\ \Leftrightarrow m(n-10) - 10(n-10) &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } m, n \text{ nguyên ta có: } \begin{cases} m-10=1 \\ n-10=1 \end{cases} \& \begin{cases} m-10=-1 \\ n-10=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ a=8 \end{cases}$$

Bài 21: a) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

b) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$ sao cho tích $x.y$ đạt giá trị lớn nhất.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

a)

$$y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x+y) = (x+1)(x+2)(*)$$

VT (*) là số chính phương, VP (*) là tích hai số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\text{Với } x=-1 \Rightarrow y=1$$

$$\text{Với } x=-2 \Rightarrow y=2$$

b)

Điều kiện $x \neq 0$

$$2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy = 2$$

$$\text{Vì } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0; \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \neq 0; \text{ mọi } y$$

Do đó $xy \leq 2$ mà $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x=1; y=2 \\ x=2; y=1 \\ x=-1; y=-2 \\ x=-2; y=-1 \end{cases}$$

Bài 22: Ký hiệu $[a]$ (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a . Tìm x biết

$$\text{rằng: } \left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1$$

Lời giải

$$\left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{34x+19}{11} - (2x+1) < 1 \text{ và } 2x+1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 12x+8 < 11 \Leftrightarrow -8 \leq 12x < 3 \Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq 2x+1 < \frac{3}{2}$$

$$\text{Do } 2x+1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 2x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x=0 \end{cases}$$

Bài 23:

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + x + 3 = y^2$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

$$\begin{aligned}
 1) \quad x^2 + x + 3 = y^2 &\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 12 = 4y^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2 - 4y^2 = -11 \\
 &\Leftrightarrow (2x+2y+1)(2x-2y+1) = -11 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x+2y+1=1 \\ 2x-2y+1=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2y+1=-1 \\ 2x-2y+1=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2y+1=11 \\ 2x-2y+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+2y+1=-11 \\ 2x-2y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Bài 24:

Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: $x^2 + 2x - 10 = y^2$

Lời giải

Ta có: $x^2 + 2x - 10 = y^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 - y^2 = 11$
 $\Leftrightarrow (x+1+y)(x+1-y) = 11 \quad (2)$

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $x+1+y > x+1-y > 0$

(2) viết thành: $(x+1+y)(x+1-y) = 11.1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1+y=11 \\ x+1-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (5; 5)$

Bài 25:

Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 &\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) - 7 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+1)^2 - (y+2)^2 = 7 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y+3) = 7
 \end{aligned}$$

Vì x, y nguyên dương nên

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$x + y + 3 > x - y - 1 > 0 \Rightarrow x + y + 3 = 7 \text{ và } x - y - 1 = 1 \Rightarrow x = 3; y = 1$$

Phương trình có nghiệm dương duy nhất $(x, y) = (3, 1)$

Bài 26: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Lời giải

$$\text{Ta có: } y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y \quad (1)$$

$$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x+2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x < y < x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x+1$

Thay $y = x+1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x; y) = (-1; 0)$

Bài 27: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

Lời giải

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z trong đó cạnh huyền là z

(x, y, z là các số nguyên dương). Ta có

$$xy = 2(x + y + z) \quad (1) \text{ và } x^2 + y^2 = z^2 \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có:

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y) \Leftrightarrow z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$$

$$\Leftrightarrow (z + 2)^2 = (x + y - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + 2 = x + y - 2 \\ z + 2 = -x - y + 2 \end{cases} \text{ (ktm vì } z > 0)$$

$$\Leftrightarrow z = x + y - 4; \text{ thay vào (1) ta được: } xy = 2(x + y + x + y - 4)$$

$$\Leftrightarrow xy - 4x - 4y = -8$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4$$

Từ đó tìm được các giá trị của x, y, z là:

$$(x; y; z) \in \{(5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10)\}$$

Bài 28: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Lời giải

) Ta có: $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)

$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x+2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $x < y < x+2$, mà x, y nguyên suy ra $y = x+1$

Thay $y = x+1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Từ đó tìm được hai cặp số (x, y) thỏa mãn Câu toán là: $(-1; 0); (1; 2)$

Bài 29: Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + y^2 = 3 - xy$

Lời giải

Ta có: $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 3 - xy \geq 2xy \Leftrightarrow xy \leq 1$

Lại có: $(x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy \Rightarrow 3 - xy \geq -2xy \Leftrightarrow xy \geq -3$

Suy ra $-3 \leq xy \leq 1$. Mà $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow xy \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$

Lần lượt thử ta được $(x, y) \in \{(-2; 1); (1; -2); (2; -1); (-1; 2); (1; 1)\}$ là nghiệm của PT

Bài 30: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3x^2 + 3xy - 17 = 7x - 2y$

Lời giải

Ta có:

$3x^2 + 3xy - 17 = 7x - 2y \Leftrightarrow 3xy + 2y = -3x^2 + 7x + 17 \Leftrightarrow (3x+2)y = -3x^2 + 7x + 17$ Vì x nguyên nên $2x+3 \neq 0$ nên ta có:

$$y = \frac{-3x^2 + 7x + 17}{3x+2} = \frac{-3x^2 - 2x + 9x + 6 + 11}{2} \\ = \frac{-x(3x+2) + 3(3x+2) + 11}{3x+2} = -x + 3 + \frac{11}{3x+2}$$

Vì x, y nguyên nên ta có $\frac{11}{3x+2}$ nguyên $\Rightarrow 11 : 3x+2 \Rightarrow 3x+2 = \pm 1; \pm 11$

Xét các trường hợp ta tìm được $x = -1; y = -1; x = -3; y = 5$ thỏa mãn và kết luận

Bài 31:

a) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn: $2^x = 5^y - 624$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $10x^2 + 50y + 42xy + 14x - 6y + 57 < 0$

Lời giải

a) Ta có: $2^x = 5^y - 624 \Leftrightarrow 2^x + 624 = 5^y (*)$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

+Xét $x = 0$, ta có: $5^y = 625 \Leftrightarrow y = 4$

+Xét $x \in \mathbb{N}$ và $x > 0$ ta có VT(*) là số chẵn còn vế phải (*) là số lẻ, Vô lý

Vậy $(x; y) = (0; 4)$

b) Ta có:

$$10x^2 + 50y^2 + 42xy + 14x - 6y + 57 < 0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2 + 42xy + 49y^2) + (x^2 + 14x + 49) + (y^2 - 6y + 9) - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 7y)^2 + (x + 7)^2 + (y - 3)^2 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 7y)^2 + (x + 7)^2 + (y - 3)^2 < 1$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (3x + 7y)^2 \geq 0 \\ (x + 7)^2 \geq 0 \\ (y - 3)^2 \geq 0 \end{cases} \text{ và } x, y \in \mathbb{Z} \text{ nên } (3x + 7y)^2 + (x + 7)^2 + (y - 3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (3x + 7y)^2 = (x + 7)^2 = (y - 3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Bài 32: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

Lời giải

$$x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + x - 2013x - 2013y - 2013 = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x + y + 1) - 2013(x + y + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 2013)(x + y + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2013 = 1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2014 \\ y = -2014 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2013 = -1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ y = -2014 \end{cases}$$

Bài 33: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3x^2 + 3xy - 17 = 7x - 2y$

Lời giải

Ta có:

$$3x^2 + 3xy - 17 = 7x - 2y \Leftrightarrow 3xy + 2y = -3x^2 + 7x + 17 \Leftrightarrow (3x + 2)y = -3x^2 + 7x + 17 \text{ Vì } x \text{ nguyên nên}$$

$2x + 3 \neq 0$ nên ta có:

$$y = \frac{-3x^2 + 7x + 17}{3x + 2} = \frac{-3x^2 - 2x + 9x + 6 + 11}{3x + 2}$$

$$= \frac{-x(3x + 2) + 3(3x + 2) + 11}{3x + 2} = -x + 3 + \frac{11}{3x + 2}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vì x, y nguyên nên ta có $\frac{11}{3x+2}$ nguyên $\Rightarrow 11 \vdots 3x+2 \Rightarrow 3x+2 = \pm 1; \pm 11$

Xét các trường hợp ta tìm được $x = -1; y = -1; x = -3; y = 5$

Bài 34: Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $5x^4 + 10x^2 + 2y^6 + 4y^3 - 6 = 0$

Lời giải

$$5x^4 + 10x^2 + 2y^6 + 4y^3 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x^4 + 10x^2 + 5) + (2y^6 + 4y^3 + 2) = 13$$

$$\Leftrightarrow 5(x^4 + 2x^2 + 1) + 2(y^6 + 2y^3 + 1) = 13$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 + 1)^2 + 2(y^3 + 1)^2 = 13$$

$$\text{Vì: } \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \in \mathbb{Z} \\ y^3 + 1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Mà } 5(x^2 + 1)^2 \leq 13 \Rightarrow x^2 + 1 \leq 1$$

Mặt khác $x^2 + 1 \geq 1$ với mọi x

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Với $x = 0$, ta có: $5 + 2(y^3 + 1)^2 = 13$

$$\Rightarrow 2(y^3 + 1)^2 = 8 \Rightarrow (y^3 + 1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^3 + 1 = 2 \\ y^3 + 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^3 = 1 \\ y^3 = -3 \end{cases}$$

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y^3 = 1 \Rightarrow y = 1$

Vậy phương trình có một nghiệm nguyên $(x; y) = (0; 1)$

Bài 35: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + 8y^2 + 4xy - 2x - 4y = 4$

Lời giải

$$x^2 + 8y^2 + 4xy - 2x - 4y = 4 \Leftrightarrow (x + 2y - 1)^2 + 4y^2 = 5$$

$$\text{Do } 4y^2 \geq 4; (x+2y-1)^2 \geq 0; 4y^2 \geq 0 \quad \forall x, y \text{ nên } \begin{cases} 4y^2 = 4 \\ (x+2y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \\ (x+2y-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ (x+1)^2 = 1 \\ y = -1 \\ (x-3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \\ y = -1 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases} \end{cases} \text{ thỏa mãn } x, y \text{ nguyên}$$

Vậy $(x, y) \in \{(0; 1); (-2; 1); (2; -1); (4; -1)\}$

Bài 36: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $3^x + 4^x = 5^x$

Lời giải

Ta thấy $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Với $x \neq 2$ ta xét:

Nếu $x > 2$ thì $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$

Với $x < 2$ dễ thấy $x = 0; x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình

Với $x < 0$ ta đặt $x = -y$ thì $y > 0$ nên $y \geq 1$. Ta có:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{-y} + \left(\frac{4}{5}\right)^{-y} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^y + \left(\frac{5}{4}\right)^y = 1$$

Phương trình này vô nghiệm vì $\left(\frac{5}{3}\right)^y + \left(\frac{5}{4}\right)^y \geq \frac{5}{3} + \frac{5}{4} > 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$

Bài 37: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi

Lời giải

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z trong đó cạnh huyền là z (x, y, z là các số nguyên dương)

Ta có: $xy = 2(x + y + z)(1)$ và $x^2 + y^2 = z^2 (2)$

Từ (2) suy ra $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có:

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$$

$$z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y)$$

$$z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$$

$$(z + 2)^2 = (x + y - 2)^2$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Suy ra $z + 2 = x + y - 2 \Rightarrow z = x + y - 4$; thay vào (1) ta được:

$$xy = 2(x + y + x + y - 4)$$

$$xy - 4x - 4y = -8$$

$$(x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4$$

Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y, z là:

$$(x; y; z) \in \{(5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10)\}$$

Bài 38: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} = 2$$

Lời giải

+) Với a, b, c, d dương, ta có:

$$\begin{aligned} F &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \\ &= \left(\frac{a}{b+c} + \frac{c}{d+a} \right) + \left(\frac{b}{c+d} + \frac{d}{a+b} \right) = \frac{a(d+a) + c(b+c)}{(b+c)(d+a)} + \frac{b(a+b) + d(c+d)}{(c+d)(a+b)} \geq \\ &\geq \frac{a^2 + c^2 + ad + bc}{\frac{1}{4} \cdot (b+c+d+a)^2} + \frac{b^2 + d^2 + ab + cd}{\frac{1}{4} \cdot (c+d+a+b)^2} = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + bc + cd)}{(a+b+c+d)^2} \end{aligned}$$

(theo bất đẳng thức $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$)

Mặt khác:

$$\begin{aligned} &2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + bc + cd) - (a+b+c+d)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd = (a-c)^2 + (b-d)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra $F \geq 2$ và đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = c; b = d$

+) Áp dụng $F \geq 2$ với $a = 2016, b = x, c = y, d = 2015$ ta có:

$$\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow y = 2016, x = 2015$

Bài 39: Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho $x^2 = y^2 + 2y + 13$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng $(x+y+1)(x-y-1)=12$

Lập luận để có $x+y+1 > x-y-1$ và $x+y+1; x-y-1$ là các ước dương của 12 từ đó có các trường hợp

$x+y+1$	12	6	4
$x-y-1$	1	2	3
x	$\frac{13}{2}$	4	$\frac{7}{2}$
y	$\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$

Mà x, y nguyên dương nên $(x; y) = (4; 1)$

Bài 40: Tìm tất cả các số x, y, z nguyên thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$

Lời giải

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{4}\right) + (z^2 - 2z + 1) + \left(\frac{3}{4}y^2 - 3y + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + (z-1)^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 = 0$$

Có các giá trị $(x, y, z) = (1; 2; 1)$

Bài 41: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + x + 3 = y^2$

Lời giải

$$x^2 + x + 3 = y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 12 = 4y^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2 - 4y^2 = -11$$

$$\Leftrightarrow (2x+2y+1)(2x-2y+1) = -11$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x + 2y + 1 = 1 \\ 2x - 2y + 1 = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 2y + 1 = -1 \\ 2x - 2y + 1 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 2y + 1 = 11 \\ 2x - 2y + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 2y + 1 = -11 \\ 2x - 2y + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \end{cases}$$

Bài 42: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

Lời giải

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z trong đó cạnh huyền là z (x, y, z là các số nguyên dương). Ta có

$$xy = 2(x + y + z) \quad (1) \text{ và } x^2 + y^2 = z^2 \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có:

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y) \Leftrightarrow z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$$

$$\Leftrightarrow (z + 2)^2 = (x + y - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + 2 = x + y - 2 \\ z + 2 = -x - y + 2 \end{cases} \quad (\text{ktm vì } z > 0)$$

$$\Leftrightarrow z = x + y - 4; \text{ thay vào (1) ta được: } xy = 2(x + y + x + y - 4)$$

$$\Leftrightarrow xy - 4x - 4y = -8$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4$$

Từ đó tìm được các giá trị của x, y, z là:

$$(x; y; z) \in \{(5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10)\}$$

Bài 43: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0$

Lời giải

$$x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)^2 = 16 - y^2 \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $16 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 16 \Rightarrow y^2 \in \{0; 4; 9; 16\}$

$$*) y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$*) y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}(ktm)$$

$$*) y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}(ktm)$$

$$*) y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow x = \pm 8$$

Vậy phương trình đã cho có các cặp nghiệm nguyên là $(4;0); (-4;0); (8;4); (-8;-4)$

Bài 44: Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + y^2 = 3 - xy$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 3 - xy \geq 2xy \Leftrightarrow xy \leq 1$$

$$\text{Lại có: } (x + y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy \Rightarrow 3 - xy \geq -2xy \Leftrightarrow xy \geq -3$$

$$\text{Suy ra } -3 \leq xy \leq 1. \text{ Mà } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow xy \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$$

Lần lượt thử ta được $(x, y) \in \{(-2;1); (1;-2); (2;-1); (-1;2); (1;1)\}$ là nghiệm của phương trình

Bài 45: a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$ với x, y nguyên dương.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y \quad (1)$$

$$(x + 2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x + 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x < y < x + 2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x + 1$

Thay $y = x + 1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x; y) = (-1; 0)$

$$\text{b) } x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - (y + 2)^2 = 7 \Leftrightarrow (x - y - 1)(x + y + 3) = 7$$

$$\text{Vì } x, y \text{ nguyên dương nên } x + y + 3 > x - y - 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y + 3 = 7 \\ x - y - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (3; 1)$

Bài 46: Tìm giá trị nguyên của x để $A : B$ biết $A = 10x^2 - 7x - 5$ và $B = 2x - 3$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\text{Xét } \frac{A}{B} = \frac{10x^2 - 7x - 5}{2x - 3} = 5x + 4 + \frac{7}{2x - 3}$$

$$\text{Với } x \in \mathbb{Z} \text{ thì } A:B \text{ khi } \frac{7}{2x-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7:(2x-3)$$

$$\text{Mà } U(7) = \{-1; 1; 7; -7\} \text{ nên } x = -5; -2; 2; 1 \text{ thì } A:B$$

Bài 47: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

Lời giải

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z ; trong đó cạnh huyền là z
(x, y, z là các số nguyên dương)

$$\text{Ta có: } xy = 2(x + y + z) \quad (1) \text{ và } x^2 + y^2 = z^2 \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có:

$$z^2 = (x + y)^2 - 2xy, \text{ thay (1) vào ta có:}$$

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$$

$$z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y)$$

$$z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$$

$$(z + 2)^2 = (x + y - 2)^2 \Rightarrow z + 2 = x + y - 2$$

$$z = x + y - 4, \text{ thay vào (1) ta được:}$$

$$xy = 2(x + y + x + y - 4) \Leftrightarrow xy - 4x - 4y = -8$$

$$(x - 4) \cdot (y - 4) = 8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$$

Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y, z là:

$$(x; y; z) \in \{(5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10)\}$$

Bài 48: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$.

Lời giải

$$(x^2 - 4x)^2 + 2 \cdot (x - 2)^2 = 43 \Leftrightarrow (x^2 - 4x)^2 + 2(x^2 - 4x + 4) = 43;$$

$$\text{Đặt } x^2 - 4x = t. \text{ ĐK } t \geq -4$$

$$\text{Khi đó ta có được phương trình: } t^2 + 2t - 35 = 0 \Leftrightarrow (t + 7)(t - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -7 \text{ (loại) hoặc } t = 5$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Với $t = 5$, khi đó $x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = -1$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{-1; 5\}$

Bài 49: Tìm nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình

$$x^2 = y(y+1)(y+2)(y+3).$$

Lời giải

$$x^2 = y(y+1)(y+2)(y+3) \Leftrightarrow x^2 = y(y+3)(y+1)(y+2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (y^2 + 3y)(y^2 + 3y + 2)$$

$$\text{Đặt } t = y^2 + 3y + 1 \text{ ta được } x^2 = (t-1)(t+1) \Leftrightarrow x^2 = t^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - t^2 = -1 \Leftrightarrow (x-t)(x+t) = -1$$

Vì x, y là những số nguyên nên $x-t$ và $x+t$ cũng là những số nguyên. Do đó ta có hai trường hợp sau:

* TH1: $x-t=1$ và $x+t=-1$. Suy ra $x=0$ và $t=-1$.

$$\text{Với } t=-1 \text{ thì } y^2 + 3y + 1 = -1 \Leftrightarrow y^2 + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y+2) = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ hoặc } y = -2.$$

* TH2: $x-t=-1$ và $x+t=1$. Suy ra $x=0$ và $t=1$.

$$\text{Với } t=1 \text{ thì } y^2 + 3y + 1 = 1 \Leftrightarrow y^2 + 3y = 0 \Leftrightarrow y(y+3) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ hoặc } y = -3.$$

Vậy PT đã cho có 4 nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(0; -3), (0; -2), (0; -1), (0; 0)$

Bài 50: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y \quad (1)$$

$$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x+2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $x < y < x + 2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x + 1$

Thay $y = x + 1$ vào pt ban đầu và giải phương trình tìm được $x = \pm 1$;

Từ đó tìm được hai cặp số (x, y) thỏa mãn bài toán là:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$(-1; 0)$ và $(1; 2)$

KL nghiệm

Bài 51: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32)$

Lời giải

Ta có:

$$y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32) \Leftrightarrow x^6 + (x^6 - 2x^3y + y^2) = 64$$

$$\Leftrightarrow (x^2)^3 + (x^3 - y)^2 = 64$$

Vì $x^2 \in \mathbb{N}$ và 64 chỉ được phân tích thành $64 = 0^2 + 4^3 = 0^3 + 8^2$ nên ta có:

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ x^3 - y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x^2 = 0 \\ (x^3 - y)^2 = 8^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; x = -2 \\ y = 8; y = -8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 0 \\ y = 8; y = -8 \end{cases}$$

Vậy pt đã cho có 4 nghiệm nguyên: $(x = 0; y = 8); (x = 0; y = -8); (x = 2; y = 8); (x = -2; y = -8)$

Bài 52: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 5x - 6 = 0$

Lời giải

Ta có: $y^2 + 2xy - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 5x + 6 \quad (*) \Leftrightarrow (x + y)^2 = (x + 2)(x + 3)$

VT của (*) là số chính phương; VP của (*) là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

*) Với $x = -2 \Rightarrow y = 2$

*) Với $x = -3 \Rightarrow y = 3$

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x; y) = (-2; 2)$ hoặc $(x; y) = (-3; 3)$.

Bài 53: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$$

Lời giải

Ta có: $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)

$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x + 2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $x < y < x + 2$, mà x, y nguyên nên suy ra $y = x + 1$

Thay $y = x + 1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = 1$ hoặc -1 .

Từ đó tìm được hai cặp số $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là $(-1; 0); (1; 2)$

Bài 54: Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2 + y^2 = 3 - xy$

Lời giải

Ta có: $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 3 - xy \geq 2xy \Leftrightarrow xy \leq 1$

Lại có: $(x + y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy \Rightarrow 3 - xy \geq -2xy \Leftrightarrow xy \geq -3$

Suy ra $-3 \leq xy \leq 1$. Mà $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow xy \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$

Lần lượt thử ta được $(x; y) \in \{(-2; 1); (1; -2); (2; -1); (-1; 2); (1; 1)\}$ là nghiệm của phương trình.

Bài 55:

Lời giải

Gọi các cạnh của tam giác vuông là $x; y; z$ trong đó cạnh huyền là z .

$(x; y; z)$ là các số nguyên dương).

Ta có: $xy = 2(x + y + z)$ (1) và $x^2 + y^2 = z^2$ (2)

Từ (2) suy ra $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có:

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y) \Leftrightarrow z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$$

$$\Leftrightarrow (z + 2)^2 = (x + y - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + 2 = x + y - 2 \\ z + 2 = -x - y + 2 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn vì } z > 0)$$

Suy ra $z = x + y - 4$ thay vào (1) ta được: $xy = 2(x + y + x + y - 4)$

$$\Leftrightarrow xy - 4x - 4y = -8 \Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4$$

Từ đó tìm được các giá trị của $x; y; z$ là:

$$(x; y; z) \in \{(5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10)\}$$

Bài 56: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Lời giải

1.1 Ta có: $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)

$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x + 2$ (2)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Từ (1) và (2) ta có: $x < y < x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x+1$

Thay $y = x+1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x; y) = (-1; 0)$

Bài 57: Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $B = \frac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{2x-1}$ nhận giá trị nguyên

Lời giải

$$a) \quad B = \frac{4x^3 - 6x^2 + 8x}{2x-1} = \frac{4x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 2x + 6x - 3 + 3}{2x-1} = 2x^2 - 2x + 3 + \frac{3}{2x-1}$$

Để B nhận giá trị nguyên thì $(2x-1) \in U(3) = \{-1; 1; -3; 3\} \Rightarrow x \in \{0; 1; -1; 2\}$

Bài 58:

Giải phương trình tìm nghiệm nguyên: $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$

Lời giải

Ta nhận thấy $1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x

Nên $x^3 < 1 + x + x^2 + x^3 = y^3$

Theo câu a): $(x+2)^3 > 1 + x + x^2 + x^3$

Suy ra: $x^3 < y^3 < (x+2)^3$

$$\Rightarrow y^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên $(-1; 0); (0; 1)$

Bài 59:

Ta có:

$$x^2 + 2xy + 7(x+y) + 2y^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8xy + 28x + 28y + 8y^2 + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 2y + 7)^2 + 4y^2 = 9(*)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta thấy: $(2x + 2y + 7)^2 \geq 0$ nên $4y^2 \leq 9 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{9}{4}$ do y nguyên nên

$$y^2 \in \{0;1\} \Rightarrow y \in \{0;1;-1\}$$

Với $y = 0$ thay vào (*) ta được $(2x + 7)^2 = 9$ tìm được $x \in \{-2;-5\}$

Với $y = 1$ thay vào (*) ta có: $(2x + 9)^2 = 5$ không tìm được x nguyên

Với $y = -1$ thay vào (*) ta có: $(2x + 5)^2 = 5$ không tìm được x nguyên.

Vậy $(x; y)$ nguyên tìm được $(-2; 0); (-5; 0)$

Bài 60: Biến đổi về dạng: $(x + y + 2)(x + 2y + 1) = 17 = 1.17 = 17.1 = -1. -17 = -17. -1$

$$\text{Xét 4 trường hợp} \Rightarrow (x; y) = \{(30; -15); (-18; 17); (12; -15); (-36; 17)\}$$

Bài 61: Ta có:

$$y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2$$

$$(*) \Leftrightarrow (x + y)^2 = (x + 1)(x + 2)$$

VT của (*) là số chính phương; VP của (*) là tích của hai số nguyên liên tiếp nên phải có một số bằng 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x; y) = \{(-1; 1); (-2; 2)\}$

Bài 62: $x^2 - xy = 6x - 5y - 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x - 5) \quad (2)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 5} \text{ (vì } x = 5 \text{ không là nghiệm của phương trình (2))}$$

$$\Leftrightarrow y = x - 1 + \frac{3}{x - 5}. \text{ Vì } x, y \text{ nguyên nên } x - 5 \text{ là ước của 3}$$

Hay $x - 5 \in \{-1; 3; 1; -3\}$ hay $x \in \{4; 6; 8; 2\}$

Khi $x = 2 \Rightarrow y = 0$ Khi $x = 4 \Rightarrow y = 0$

Khi $x = 6 \Rightarrow y = 8$ Khi $x = 8 \Rightarrow y = 8$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $(x, y) \in \{(2, 0); (4, 0); (6, 8); (8, 8)\}$

Bài 63: Ta có: $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)

$$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x+2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x < y < x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x+1$

Thay $y = x+1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x; y) = (-1; 0)$

Bài 64: Bài 6.

$$x^2 - 25 = y(y+6) \Leftrightarrow x^2 - (y+3)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x+y+3)(x-y-3) = (\pm 4).(\pm 4) = (\pm 2).(\pm 8) = (\pm 1).(\pm 16)$$

$x-y$	7	-1	5	1	11	-5	4	2	19	-13
$x+y$	1	-7	5	-11	-1	-5	13	-19	-2	-4

Vậy các cặp số nguyên phải tìm là:

$$(4; -3); (-4; -3); (5; 0); (-5; -6); (5; -6); (-5; 0)$$

Bài 65:

Lời giải

Ta có: $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)

$$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x+2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $x < y < x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x+1$

Thay $y = x+1$ vào phương trình ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x; y) = (-1; 0)$

Bài 66: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3x^2 + 3xy - 17 = 7x - 2y$

Lời giải

Ta có:

$$3x^2 + 3xy - 17 = 7x - 2y \Leftrightarrow 3xy + 2y = -3x^2 + 7x + 17 \Leftrightarrow (3x+2)y = -3x^2 + 7x + 17$$

Vì x nguyên nên $2x+3 \neq 0$ nên ta có:

$$y = \frac{-3x^2 + 7x + 17}{3x + 2} = \frac{-3x^2 - 2x + 9x + 6 + 11}{2}$$

$$= \frac{-x(3x + 2) + 3(3x + 2) + 11}{3x + 2} = -x + 3 + \frac{11}{3x + 2}$$

Vì x, y nguyên nên ta có $\frac{11}{3x + 2}$ nguyên $\Rightarrow 11 : 3x + 2 \Rightarrow 3x + 2 = \pm 1; \pm 11$

Xét các trường hợp ta tìm được $x = -1; y = -1; x = -3; y = 5$ thỏa mãn và kết luận.

Bài 67: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

Lời giải

a) $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + x - 2013x - 2013y - 2013 = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x + y + 1) - 2013(x + y + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 2013)(x + y + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2013 = 1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2014 \\ y = -2014 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2013 = -1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ y = -2014 \end{cases}$$

ĐS8-Chuyên đề 5: PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ**Qua Các Đề Thi HSG Môn Toán Lớp 8****A. Bài toán****Bài 1:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

b) $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

Bài 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = (a + 1)(a + 3)(a + 5)(a + 7) + 15$ **Bài 3:** Phân tích các đa thức ra thừa số:

a) $x^4 + 4$

b) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

Bài 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$.**Bài 5:** Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

b) $x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$

Bài 6: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

b) $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$

Bài 8: Phân tích đa thức $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ thành nhân tử**Bài 9:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^5 + x + 1$;

b) $x^5 + x^4 + 1$

c) $x^8 + x + 1$;

d) $x^8 + x^7 + 1$

Bài 10: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $(a - x)y^3 - (a - y)x^3 + (x - y)a^3$ **Bài 11:** Phân tích đa thức thành nhân tử: $2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 4abc$.**Bài 12:** Phân tích thành nhân tử:

a) $(a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 - 4b^2$;

b) $a(b^2 - c^2) - b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

$$c) (a^2 + b^2)^3 + (c^2 - a^2)^3 - (b^2 + c^2)^3$$

Bài 13: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$; b) $(x^2 + 2x)^2 + 9x^2 + 18x + 20$;
 c) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 2) - 6$; d) $(x^2 + 8x + 7)(x + 3)(x + 5) + 15$

Bài 14: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

- a) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$;
 b) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$

Bài 15: Cho đa thức $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$

- a) Phân tích $P(x)$ thành nhân tử
 b) Chứng minh rằng $P(x) \vdots 6$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

Bài 16: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

- a) $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$; b) $3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x + 1$

Bài 17: Cho đa thức $E = x^4 + 2017x^2 + 2016x + 2017$.

- a) Phân tích đa thức E thành nhân tử;
 b) Tính giá trị của E với x là nghiệm của phương trình: $|x^2 - x + 1| = 1$.

Bài 18: Phân tích đa thức $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ thành nhân tử

Bài 19: Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

1. $x^2 + 7x + 6$
 2. $x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$

Bài 20: Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$; b) $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

Bài 21: Phân tích đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ thành nhân tử

Bài 22: Phân tích đa thức thành nhân tử

- a) $x^4 + 1 - 2x^2$ b) $-x^2 - 28x - 27$

Bài 23: Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x(x+2)(x^2+2x+2)+1$

Bài 24: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

Bài 25: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$

Bài 26: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

b) $x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$

Bài 27: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$

Bài 28: Phân tích đa thức thành nhân tử: $P = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$

Bài 29: Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y - 5$

Bài 30: Phân tích đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ thành nhân tử

Bài 31: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^2 - y^2 - 5x + 5y$

b) $2x^2 - 5x - 7$

Bài 32: Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

1. $x^2 + 7x + 6$

2. $x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$

Bài 33: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 49$

b) $x^2 - 6x + 5$

Bài 34: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

b) $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$

Bài 35: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

Bài 36: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2(x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1$

Bài 37: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3 - 2x^2 - x + 2$

Bài 38: Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = x^4 + 2007x^2 + 2006x + 2007$

Bài 39: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x(x+4)(x+6)(x+10) + 128$.

Bài 40: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3 \cdot (x^2 - 7)^2 - 36x$

Dựa vào kết quả trên hãy chứng minh:

$$A = n^3 \cdot (n^2 - 7) - 36n \text{ chia hết cho } 210 \text{ với mọi số tự nhiên } n$$

Bài 41:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 19x - 30$

Bài 42:

Phân tích đa thức $A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ thành nhân tử. Từ đó suy ra điều kiện của a, b, c để $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Bài 43:

Phân tích đa thức $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ thành nhân tử

Bài 44:

1) Chứng minh : $(x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) = x^4 - y^4$

2) Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(x+2)(x^2 + 2x + 2) + 1$

3) Tìm a, b, c biết: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ và $a^8 + b^8 + c^8 = 3$

Bài 45:

Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ với $a, b, c \neq 0$

Tính giá trị biểu thức $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$

Bài 46:

Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Hãy rút gọn phân thức : $P = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Bài 47:

Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, tính giá trị của biểu thức $P = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Bài 48:

a) Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, (với $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$)

Tính giá trị của biểu thức $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Bài 49:

Tìm x, y, z biết: $10x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x - 4y - 4xz + 5 = 0$

Bài 50:

Cho a và b thỏa mãn: $a + b = 1$. Tính giá trị của biểu thức $B = a^3 + b^3 + 3ab$

Bài 51:

Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$$

Bài 52:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$1. \quad 8(x^2 + 3x + 5)^2 + 7(x^2 + 3x + 5) - 15$$

$$2. \quad x^{11} + x^7 + 1$$

Bài 53:

Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

$$1. x^2 + 7x + 6$$

$$2. x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$$

Bài 54: a) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính giá trị của biểu thức sau: $B = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$.

b) Cho x, y, z là ba số thực khác 0, thỏa mãn $x + y + z \neq 0$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

$$\text{Tính } C = \frac{x^{2019} + y^{2019} + z^{2019}}{(x + y + z)^{2019}}.$$

Bài 55:

a) Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức: } P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$$

b) Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Bài 56:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$

Bài 57:

Cho $x = by + cz$; $y = ax + cz$; $z = ax + by$ và $x + y + z \neq 0$; $xyz \neq 0$.

$$\text{CMR: } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$$

Bài 58: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

Bài 59: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

Bài 60: Phân tích đa thức thành nhân tử: $M = (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

Bài 61: Phân tích biểu thức sau thành nhân tử: $P = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

Bài 62: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Bài 63: Phân tích đa thức $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ thành nhân tử

Bài 64: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

Bài 65: Phân tích biểu thức sau thành nhân tử: $P = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

Bài 66: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^4 + 2x^2y + y^2 - 9$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

Bài 67: Phân tích thành nhân tử: $x^4 - 6x^2 - 7x - 6$

Bài 68:

Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = (a+1)(a+3)(a+5)(a+7) + 15$

Bài 69: Phân tích đa thức thành nhân tử a) $x^4 + 1 - 2x^2$ b) $x^2 - 28x - 27$

Bài 70: Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

1. $x^2 + 7x + 6$

2. $x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$

Bài 71: Phân tích đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ thành nhân tử

Bài 72: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 - y^2 - 5x + 5y$

b) $2x^2 - 5x - 7$

Bài 73: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $A = x^3 + 2019x^2 + 2019x + 2018$

Bài 74: Phân tích thành nhân tử $P = a^8 + a^4b^4 + b^8$

Bài 75: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $3x(x+2) - 5x - 10$.

b) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

Bài 76: Bài 7: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $7x^2 - 7xy - 5x + 5y$.

b) $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$.

Bài 77: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $a^4 + 8a^3 + 14a^2 - 8a - 15$

b) $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$

Bài 78: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a, $x(x+2)(x^2+2x+2)+1$

b, $x^4 + 2016x^2 + 2015x + 2016$

Bài 79: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 - 4x$

b) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

Bài 80: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) - 144$

Bài 81: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

Bài 82: Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$$

Bài 83: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$M = (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$$

Bài 84: Phân tích biểu thức sau thành nhân tử:

$$P = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$$

Bài 85: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Bài 86: Phân tích đa thức $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ thành nhân tử

Bài 87: Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y - 5$

Bài 88:

Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

Bài 89: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1)$

2) $6x^3 + 13x^2 + 4x - 3$

3) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$

Bài 90: Phân tích đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ thành nhân tử

Bài 91: Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0$$

Bài 92: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh tam giác đều

Bài 93: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$

Bài 94: Cho ba số a, b, c thỏa mãn $abc = 2004$

$$\text{Tính } M = \frac{2004a}{ab + 2004a + 2004} + \frac{b}{bc + b + 2004} + \frac{c}{ac + c + 1}$$

Bài 95:

Phân tích các đa thức thành nhân tử:

c) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

d) $x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$

Bài 96:

Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^4 + 1 - 2x^2$

b) $-x^2 - 28x - 27$

Bài 97: Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x(x + 2)(x^2 + 2x + 2) + 1$

Bài 98:

Cho biểu thức $A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$

a) Phân tích biểu thức A thành nhân tử

b) Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì $A < 0$

Bài 99:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a) (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$$

$$b) x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$$

Bài 100: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$c) x^4 + 4$$

$$d) (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$$

Bài 101: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = (a + 1)(a + 3)(a + 5)(a + 7) + 15$

Bài 102: Với giá trị nào của a và b thì đa thức $(x - a)(x - 10) + 1$ phân tích thành tích của một đa thức bậc nhất có hệ số nguyên

Bài 103: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a) 3x^2 - 7x + 2$$

$$b) a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1)$$

Bài 104: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$$

Bài 105: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$a) x^2 - x - 6$$

$$b) x^3 - x^2 - 14x + 24$$

Bài 106: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(x + 2)(x^2 + 2x + 2) + 1$

Bài 107: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$a) x^4 + 4$$

$$b) (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$$

Bài 108: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc$

Bài 109: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

Bài 110: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a) a^3 - a^2 - 4a + 4$$

$$b) 2a^3 - 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$$

Bài 111: Phân tích đa thức $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ thành nhân tử

Bài 112: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$

Bài 113: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $12x^3 + 16x^2 - 5x - 3$

b) $(x^2 - x + 1)^2 - 5x(x^2 - x + 1) + 4x^2$

Bài 114: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a) $18x^3 - \frac{8}{25}x$

b) $a(a+2b)^3 - b(2a+b)^3$

c) $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 1$

Bài 115: Phân tích thành nhân tử:

a) $a^2 - 7a + 12$

b) $x^4 + 2015x^2 + 2014x + 2015$

c) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

d) $(x^2 - 8)^2 + 36$

Bài 116: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $5x^2 - 26x + 24$

b) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$

c) $x^2 + 6x + 5$

d) $x^4 + 2015x^2 + 2014x + 2015$

Bài 117: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $8(x^2 + 3x + 5)^2 + 7(x^2 + 3x + 5) - 15$

b) $x^{11} + x^7 + 1$

Bài 118: Rút gọn biểu thức:
$$\frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}$$

Bài 119: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- Tìm ĐKXD và rút gọn A
- Tìm các số nguyên x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Bài 120: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 \cdot (x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1$

Bài 121:

Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

- Tìm ĐKXD và rút gọn P
- Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Bài 122: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

Bài 123: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- $x^3 - 9x$
- $4x^2 - 3x - 1$
- $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$

Bài 124: Cho $A = \frac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 2a - 4a - 8}$

- Rút gọn A
- Tìm số nguyên a để A là số nguyên

Bài 125: Cho biểu thức $A = \frac{x}{x+1} - \frac{3-3x}{x^2-x+1} + \frac{x+4}{x^3+1}$

- Rút gọn biểu thức A
- Chứng minh rằng giá trị của A luôn dương với mọi $x \neq -1$

Bài 126: Phân tích thành nhân tử:

- $a^3 + 2a^2 - 13a + 10$
- $(a^2 + 4b^2 - 5)^2 - 16(ab + 1)^2$

$$A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+4}{3-x}$$

Bài 127: Cho biểu thức

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm x để A nhận giá trị là một số nguyên

Bài 128: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^{20} + x + 1$

Bài 129:

- Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$
- Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

Bài 130: Phân tích đa thức thành nhân tử: $P = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$

Bài 131: Cho biểu thức $Q = 1 + \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$

- Rút gọn Q
- Tính giá trị của Q biết $\left| x - \frac{3}{4} \right| = \frac{5}{4}$
- Tìm giá trị nguyên của x để Q có giá trị nguyên

Bài 132:

Cho biểu thức $P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1} \right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$

- Rút gọn P
- Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$
- Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên
- Tìm x để $P > 0$

Bài 133: Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
- Tìm x để $|A| = A$

Bài 134: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$1) x^2 + 2014x + 2013$$

$$2) x(x+2)(x^2+2x+2) + 1$$

Bài 135:

- a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$
- b) Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

Bài 136:

- a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
- b) Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \forall a, b > 0$

Bài 137: Cho biểu thức:

$$M = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$$

- a) Rút gọn M
- b) Tính giá trị của biểu thức M khi $x = -1$
- c) Với giá trị nào của x thì $M = -2$
- d) Tìm giá trị nguyên của x để M có giá trị nguyên.

Bài 138: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

Bài 139: Rút gọn biểu thức: $\frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}$

Bài 140: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- a) $x^4 + 4$
- b) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

B.Lời giải**Bài 1:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$
- b) $x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= \left[(x+y+z)^3 - x^3 \right] - (y^3 + z^3) \\
&= (y+z) \left[(x+y+z)^2 + (x+y+z)x + x^2 \right] - (y+z)(y^2 - yz + z^2) \\
&= (y+z)(3x^2 + 3xy + 3yz + 3zx) = 3(y+z) \left[x(x+y) + z(x+y) \right] \\
&= 3(x+y)(x+z)(y+z)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010 &= (x^4 - x) + (2010x^2 + 2010x + 2010) \\
&= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010)
\end{aligned}$$

Bài 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = (a+1)(a+3)(a+5)(a+7) + 15$

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= (a+1)(a+3)(a+5)(a+7) + 15 \\
&= (a+1)(a+7)(a+3)(a+5) + 15 \\
&= (a^2 + 8a + 7)(a^2 + 8a + 15) + 15 \\
&= (a^2 + 8a)^2 + 22(a^2 + 8a) + 120 \\
&= (a^2 + 8a + 11)^2 - 1^2 \\
&= (a^2 + 8a + 12)(a^2 + 8a + 10) \\
&= (a+2)(a+6)(a^2 + 8a + 10)
\end{aligned}$$

Bài 3: Phân tích các đa thức ra thừa số:

a) $x^4 + 4$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

Lời giải

$$\begin{aligned}
x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \\
(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24 &= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\
&= \left[(x^2 + 7x + 11)^2 - 1 \right] - 24 \\
&= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\
&= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\
&= (x+1)(x+2)(x^2 + 7x + 16)
\end{aligned}$$

Bài 4: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
& x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019. \\
&= x^4 + (x^2 + 2018x^2) + 2018x + (2018 + 1) + x^3 - x^3 \\
&= (x^4 + x^3 + x^2) + (2018x^2 + 2018x + 2018) - (x^3 - 1) \\
&= x^2(x^2 + x + 1) + 2018(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2018 - x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2019)
\end{aligned}$$

Bài 5: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

e) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

f) $x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$

Lời giải

$$\begin{aligned}
a / x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz \\
&= (x + y + z)^3 - 3z(x + y)(x + y + z) - 3xy(x + y + z) \\
&= (x + y + z) \left[(x + y + z)^2 - 3z(x + y) - 3xy \right] \\
&= (x + y + z) \left[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 3zx - 3zy - 3xy \right] \\
&= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b / x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011 \\
&= x^4 + x^3 + x^2 + 2010x^2 + 2010x + 2010 - x^3 + 1 \\
&= x^2(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2010 - x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2011)
\end{aligned}$$

Bài 6: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

e) $x^4 + 4$

f) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

Lời giải

$$\begin{aligned}
a. x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\
&= (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\
&= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)
\end{aligned}$$

b. $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\
&= \left[(x^2 + 7x + 11)^2 - 1 \right] - 24 \\
&= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\
&= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\
&= (x + 1)(x + 6)(x^2 + 7x + 16)
\end{aligned}$$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử:

b) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

b) $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$

Lời giải

$$\begin{aligned}
&a) x^3 - x^2 - 14x + 24 \\
&= x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 12x + 24 \\
&= x^2(x - 2) + x(x - 2) - 12(x - 2) \\
&= (x^2 + x - 12)(x - 2) \\
&= (x - 2)(x - 3)(x + 4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&b) x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018 \\
&= x^4 + 2017x^2 + x^2 + 2017x + 2017 + 1 \\
&= (x^4 + x^2 + 1) + 2017(x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2017(x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2018)
\end{aligned}$$

Bài 8: Phân tích đa thức $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ thành nhân tử

Lời giải

$$\begin{aligned}
&a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = a^2(b - c) - b^2(a - c) + c^2(a - b) \\
&= a^2(b - c) - b^2[(a - b) + (b - c)] + c^2(a - b) \\
&= (a^2 - b^2)(b - c) + (c^2 - b^2)(a - b) \\
&= (a - b)(a + b)(b - c) - (b - c)(b + c)(a - b) \\
&= (a - b)(b - c)[a + b - b - c] = (a - b)(b - c)(a - c)
\end{aligned}$$

Bài 9: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^5 + x + 1$;

b) $x^5 + x^4 + 1$

c) $x^8 + x + 1$;

d) $x^8 + x^7 + 1$

Lời giải :

a) Ta có: $x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$$= x^2(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

b) Ta có: $x^5 + x^4 + 1 = x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1 = x^3(x^2 + x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1)$

$$= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$$

c) Ta có: $x^8 + x + 1 = x^8 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^6 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$$= x^2(x^3 + 1)(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1)$$

d) Ta có: $x^8 + x^7 + 1 = (x^8 - x^2) + (x^7 - x) + (x^2 + x + 1)$

$$= x^2(x^3 + 1)(x-1)(x^2 + x + 1) + x(x^3 + 1)(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^6 - x^4 + x^3 - x + 1).$$

Bài 10: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $(a-x)y^3 - (a-y)x^3 + (x-y)a^3$

Lời giải :

Ta có: $(a-x)y^3 - (a-y)x^3 + (x-y)a^3$

$$= (a-x)y^3 - [(a-x) + (x-y)]x^3 + (x-y)a^3$$

$$= (a-x)y^3 - (a-x)x^3 - (x-y)x^3 + (x-y)a^3$$

$$= (a-x)(y^3 - x^3) + (a^3 - x^3)(x-y)$$

$$= (x-a)(x-y)(x^2 + xy + y^2) - (x-a)(x^2 + ax + a^2)(x-y)$$

$$= (x-a)(x-y)(x^2 + xy + y^2 - x^2 - ax - a^2)$$

$$= (x-y)(x-a)(y^2 - ax - a^2 + xy)$$

$$= (x-y)(x-a)[x(y-a) + (y+a)(y-a)]$$

$$= (x-y)(x-a)(y-a)(x+y+a)$$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử: $2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 4abc$.

$$2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 4abc \quad \text{Lời giải :}$$

Ta có :

$$= 2a^2b + 4ab^2 - a^2c - 2abc + ac^2 + 2bc^2 - 4b^2c - 2abc$$

$$= 2ab(a+2b) - ac(a+2b) + c^2(a+2b) - 2bc(a+2b)$$

$$\begin{aligned}
&= (a+2b)(2ab-ac+c^2-2bc) \\
&= (a+2b)[a(2b-c)-c(2b-c)] \\
&= (a+2b)(2b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

Bài 12: Phân tích thành nhân tử:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } (a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 - 4b^2; \\
&\text{b) } a(b^2-c^2) - b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2) \\
&\text{c) } (a^2+b^2)^3 + (c^2-a^2)^3 - (b^2+c^2)^3
\end{aligned}$$

Lời giải :

$$\begin{aligned}
\text{Ta có : a) } &(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 - 4b^2 = (a+b+c)^2 + (a-b+c+2b)(a-b+c-2b) \\
&= (a+b+c)^2 + (a+b+c)(a-3b+c) = (a+b+c)(a+b+c+a-3b+c) \\
&= 2(a+b+c)(a-b+c) \\
&\text{b) } a(b^2-c^2) - b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2) = ab^2 - ac^2 - bc^2 + ab^2 + ac^2 - b^2c \\
&= ab(a+b) - c^2(a+b) + c(a+b)(a-b) = (a+b)(ab-c^2+ca-cb) \\
&= (a+b)(b+c)(a-c) \\
&\text{c) } (a^2+b^2)^3 + (c^2-a^2)^3 - (b^2+c^2)^3 = (a^2+b^2)^3 + (c^2-a^2)^3 + (-b^2-c^2)^3
\end{aligned}$$

Bài 13: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$\begin{aligned}
&\text{a) } (x^2+x)^2 - 2(x^2+x) - 15; & \text{b) } (x^2+2x)^2 + 9x^2 + 18x + 20; \\
&\text{c) } (x^2+3x+1)(x^2+3x+2) - 6; & \text{d) } (x^2+8x+7)(x+3)(x+5) + 15
\end{aligned}$$

Lời giải :

$$\begin{aligned}
&\text{a) } (x^2+x)^2 - 2(x^2+x) - 15 \\
&\quad \text{Đặt } x^2+x=y, \text{ ta có: } y^2-2y-15=(y-5)(y+3) \\
&\quad \text{Vậy, } (x^2+x)^2 - 2(x^2+x) - 15 = (x^2+x-5)(x^2+x+3) \\
&\text{b) } (x^2+2x)^2 + 9x^2 + 18x + 20 \\
&\quad \text{Đặt } x^2+2x=y, \text{ ta có: } y^2+9y+20=(y+4)(y+5) \\
&\quad \text{Vậy, } (x^2+2x)^2 + 9x^2 + 18x + 20 = (x^2+2x+4)(x^2+2x+5)
\end{aligned}$$

c) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 2) - 6$

Đặt $x^2 + 3x + 1 = y$, ta có: $y^2 + y - 6 = (y - 2)(y + 3)$

Vậy, $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 2) - 6 = (x^2 + 3x - 1)(x^2 + 3x + 4)$

d) $(x^2 + 8x + 7)(x + 3)(x + 5) + 15$

Đặt $x^2 + 8x + 7 = y$, ta có: $y^2 + 8y + 15 = (y + 3)(y + 5)$

Vậy, $(x^2 + 8x + 7)(x + 3)(x + 5) + 15 = (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12)$

Bài 14: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$;

b) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$

Lời giải :

a) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$;

Đặt $x^2 + 4x + 8 = y$ ta được:

$$\begin{aligned} (x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 &= y^2 + 3xy + 2x^2 \\ &= (y^2 + 2xy + x^2) + (xy + x^2) = (y + x)(y + 2x) \\ &= (x^2 + 5x + 8)(x + 2)(x + 4) \end{aligned}$$

Vậy, $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = (x^2 + 5x + 8)(x + 2)(x + 4)$

b) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$

Ta có: $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12 = (x + y)^2 - (x - y) - 12 = \dots = (x + y + 3)(x + y - 4)$

Vậy, $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12 = (x + y + 3)(x + y - 4)$.

Bài 15: Cho đa thức $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$

a) Phân tích $P(x)$ thành nhân tử

b) Chứng minh rằng $P(x) \vdots 6$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$

Lời giải :

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có : } P(x) &= 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6 \\ &= 2x^4 - 6x^3 - x^3 + 3x^2 - 5x^2 + 15x - 2x + 6 \\ &= 2x^3(x - 3) - x^2(x - 3) - 5x(x - 3) - 2(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-3)(2x^3 - x^2 - 5x - 2) \\
&= (x-3)(2x^3 - 4x^2 + 3x^2 - 6x + x - 2) \\
&= (x-3)[2x^2(x-2) + 3x(x-2) + (x-2)] \\
&= (x-3)(x-2)(2x^2 + 3x + 1) \\
&= (x-3)(x-2)(2x^2 + 2x + x + 1) \\
&= (x-3)(x-2)[2x(x+1) + (x+1)] \\
&= (x-3)(x-2)(x+1)(2x+1)
\end{aligned}$$

b) Chứng minh rằng $P(x) \vdots 6$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } P &= (x-3)(x-2)(x+1)(2x+1) = (x-3)(x-2)(x+1)(2x-2+3) \\
&= 2(x-3)(x-2)(x+1)(x-1) + 3(x-3)(x-2)(x+1)
\end{aligned}$$

Vì $(x-3), (x-2)$ là hai số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2

Do đó, $3(x-3)(x-2)(x+1) \vdots 6$ (1)

Và $(x-3), (x-2), (x-1)$ là ba số nguyên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 3 mà $UCLN(2,3) = 1$ và $2.3 = 6$. Suy ra $2(x-3)(x-2)(x+1)(x-1) \vdots 6$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P(x) \vdots 6$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

Bài 16: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1; & \text{b) } 3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x + 1
\end{array}$$

Lời giải :

$$\text{a) } 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$$

Ta viết $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = (2x^2 + ax + 1)(2x^2 + bx + 1)$ với mọi x

$$= 4x^4 + (2a + 2b)x^3 + (ab + 4)x^2 + (a + b)x + 1$$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được: $2a + 2b = 4, ab + 4 = 5, a + b = 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a = 1, b = 1$.

Vậy, $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = (2x^2 + x + 1)^2$.

$$\text{b) } 3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x + 1$$

Ta viết $3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = (3x^2 + cx + 1)(x^2 + dx + 1)$ với mọi x

$$= 3x^4 + 3dx^3 + 3x^2 + cx^3 + cdx^2 + cx + x^2 + dx + 1$$

$$= 3x^4 + (3d + c)x^3 + (4 + cd)x^2 + (c + d)x + 1$$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được: $3d + c = 11, 4 + cd = -7, c + d = -2 \Leftrightarrow c, d \in \emptyset$. (loại)

Khi đó, ta chọn cách viết khác $3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = (3x + m)(x^3 + nx^2 + px + q)$ với mọi x

$$\begin{aligned} &= 3x^4 + 3nx^3 + 3px^2 + 3qx + mx^3 + mnx^2 + mpx + mq \\ &= 3x^4 + (3n + m)x^3 + (3p + mn)x^2 + (3q + mp)x + mq \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta được $3n + m = 11, 3p + mn = -7, 3q + mp = -2, mq = 1$

Xét hai trường hợp:

+TH1: $m = q = -1$, giải ra được $n = 4, p = -1$ (nhận)

+TH2: $m = q = 1$, giải ra $n, p \in \emptyset$ (loại)

Vậy, $3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = (3x - 1)(x^3 + 4x^2 - x - 1)$.

Bài 17: Cho đa thức $E = x^4 + 2017x^2 + 2016x + 2017$.

a) Phân tích đa thức E thành nhân tử;

b) Tính giá trị của E với x là nghiệm của phương trình: $|x^2 - x + 1| = 1$.

Lời giải :

a) Phân tích đa thức E thành nhân tử;

$$\begin{aligned} E &= x^4 + 2017x^2 + 2016x + 2017 = (x^4 - x) + 2017x^2 + 2017x + 2017 \\ &= (x^4 - x) + 2017(x^2 + x + 1) \\ &= x(x^3 - 1) + 2017(x^2 + x + 1) \\ &= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2017(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2017) \end{aligned}$$

b) Tính giá trị của E với x là nghiệm của phương trình: $|x^2 - x + 1| = 1$.

$$\text{Ta có: } |x^2 - x + 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 1 \\ x^2 - x + 1 = -1 \end{cases}$$

$$*) \ x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$*) \ x^2 - x + 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \quad (\text{vô nghiệm}).$$

Vậy với $x = 0 \Rightarrow E = 2017$; $x = 1 \Rightarrow E = 6051$.

Bài 18: Phân tích đa thức $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ thành nhân tử

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) &= a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b) \\ &= a^2(b-c) - b^2[(a-b) + (b-c)] + c^2(a-b) \\ &= (a^2 - b^2)(b-c) + (c^2 - b^2)(a-b) \\ &= (a-b)(a+b)(b-c) - (b-c)(b+c)(a-b) \\ &= (a-b)(b-c)[a+b-b-c] = (a-b)(b-c)(a-c) \end{aligned}$$

Bài 19: Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

$$1. x^2 + 7x + 6$$

$$2. x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$$

Lời giải

Ta có:

$$1) x^2 + 7x + 6 = x^2 + x + 6x + 6 = x(x+1) + 6(x+1) = (x+6)(x+1)$$

$$2) x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008 = x^4 + x^2 + 2007x^2 + 2007x + 2007 + 1$$

Bài 20: Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a) (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3; \quad b) x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$$

$$\begin{aligned} &= x^4 + x^2 + 1 + 207(x^2 + x + 1) = (x^2 + 1) - x^2 + 2007(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2008) \end{aligned}$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= [(x+y+z)^3 - x^3] - (y^3 + z^3) \\ &= (y+z) \left[(x+y+z)^2 + (x+y+z)x + x^2 \right] - (y+z)(y^2 - yz + z^2) \\ &= (y+z)(3x^2 + 3xy + 3yz + 3zx) = 3(y+z)[x(x+y) + z(x+y)] \\ &= 3(x+y)(x+z)(y+z) \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010 &= (x^4 - x) + (2010x^2 + 2010x + 2010) \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010) \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \\ &= x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4 \\ &= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) \\ &= (x-1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

$$a) x^4 + 1 - 2x^2$$

$$\text{b) } -x^2 - 28x - 27$$

a) $x^4 - 1 + 2x^2 = (x^2 + 1)^2$

b) $-x^2 - 28x - 27 = -(x+1)(x+27)$

Lời giải

$$\begin{aligned} & x(x+2)(x^2+2x+2)+1=(x^2+2x)(x^2+2x+2)+1 \\ & =(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1 \\ & =(x^2+2x+1)^2=(x+1)^4 \end{aligned}$$

g) $x^4 + 4$

h) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \text{.a } x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\ & = (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ & = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

b. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\
&= [(x^2 + 7x + 11)^2 - 1] - 24 \\
&= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\
&= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\
&= (x + 1)(x + 6)(x^2 + 7x + 16)
\end{aligned}$$

Bài 25: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$

Lời giải

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6 \\
&= (x + 1)(x - 3)(x^2 - 2x + 2)
\end{aligned}$$

Bài 26: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

b) $x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$

Lời giải

$$\begin{aligned}
a / x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz \\
&= (x + y + z)^3 - 3z(x + y)(x + y + z) - 3xy(x + y + z) \\
&= (x + y + z) \left[(x + y + z)^2 - 3z(x + y) - 3xy \right] \\
&= (x + y + z) \left[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 3zx - 3zy - 3xy \right] \\
&= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b / x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011 \\
&= x^4 + x^3 + x^2 + 2010x^2 + 2010x + 2010 - x^3 + 1 \\
&= x^2(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2010 - x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2011)
\end{aligned}$$

Bài 27: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$

Lời giải

$$\begin{aligned}
& x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019 \\
&= x^4 + (x^2 + 2018x^2) + 2018x + (2018 + 1) + x^3 - x^3 \\
&= (x^4 + x^3 + x^2) + (2018x^2 + 2018x + 2018) - (x^3 - 1) \\
&= x^2(x^2 + x + 1) + 2018(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2018 - x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2019)
\end{aligned}$$

Bài 28: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$P = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
& x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) \\
&= x^2(y - z) + y^2z - y^2x + z^2x - z^2y \\
&= x^2(y - z) + yz(y - z) + x(y^2 - z^2) \\
&= (y - z)(x^2 + yz - xy - xz) \\
&= (y - z)[x(x - y) - z(x - y)] \\
&= (y - z)(x - y)(x - z)
\end{aligned}$$

Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y - 5$

Lời giải

$$\begin{aligned}
&= (x - y)^2 + 4(x - y) - 5 = (x - y)^2 + 4(x - y) + 4 - 9 \\
&= (x - y + 2)^2 - 3^2 = (x - y + 5)(x - y - 1)
\end{aligned}$$

Bài 29: Phân tích đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ thành nhân tử

Lời giải

$$\begin{aligned}
& x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4 \\
&= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2
\end{aligned}$$

Bài 30: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$a) x^2 - y^2 - 5x + 5y$$

$$b) 2x^2 - 5x - 7$$

Lời giải

$$a) x^2 - y^2 - 5x + 5y = (x^2 - y^2) - (5x - 5y) = (x + y)(x - y) - 5(x - y) = (x - y)(x + y - 5)$$

$$b) 2x^2 - 5x - 7 = 2x^2 + 2x - 7x - 7$$

$$= 2x(x + 1) - 7(x + 1) = (x + 1)(2x - 7)$$

Bài 31: Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

$$1. x^2 + 7x + 6$$

$$2. x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$$

Lời giải

1)

$$x^2 + 7x + 6 = x^2 + x + 6x + 6$$

$$= x(x + 1) + 6(x + 1) = (x + 6)(x + 1)$$

2)

$$x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008 = x^4 + x^2 + 2007x^2 + 2007x + 2007 + 1$$

$$= x^4 + x^2 + 1 + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + 1)^2 - x^2 + 2007(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2008)$$

Bài 32: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a) x^2 - 6xy + 9y^2 - 49$$

$$b) x^2 - 6x + 5$$

Lời giải

a)

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 49 = (x^2 - 6xy + 9y^2) - 7^2$$

$$= (x - 3y)^2 - 7^2 = (x - 3y - 7)(x - 3y + 7)$$

b)

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - x - 5x + 5$$

$$= x(x - 1) - 5(x - 1) = (x - 1)(x - 5)$$

Bài 33: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

b) $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) & x^3 - x^2 - 14x + 24 \\ &= x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 12x + 24 \\ &= x^2(x - 2) + x(x - 2) - 12(x - 2) \\ &= (x^2 + x - 12)(x - 2) \\ &= (x - 2)(x - 3)(x + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) & x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018 \\ &= x^4 + 2017x^2 + x^2 + 2017x + 2017 + 1 \\ &= (x^4 + x^2 + 1) + 2017(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2017(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2018) \end{aligned}$$

Bài 34: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 \\ &= (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013 \\ &= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2013(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013) \end{aligned}$$

Bài 35:

Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2(x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1$

Lời giải

$$\begin{aligned}
& x^2(x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1 \\
&= x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 2) + 1 \\
&= (x^4 + x^2)(x^4 + x^2 - 2) + 1 \\
&= (x^4 + x^2)^2 - 2(x^4 + x^2) + 1 \\
&= (x^4 + x^2 - 1)^2
\end{aligned}$$

Bài 36: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3 - 2x^2 - x + 2$

Lời giải

Ta có

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^3 - 2x^2) - (x - 2) = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$$

Bài 37: Phân tích đa thức thành nhân tử

$$A = x^4 + 2007x^2 + 2006x + 2007$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= x^4 + 2007x^2 + 2006x + 2007 = x^4 - x + 2007x^2 + 2007x + 2007 \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2007)
\end{aligned}$$

Bài 38: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
& x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 \\
&= [x(x + 10)] \cdot [(x + 4)(x + 6)] + 128 \\
&= (x^2 + 10x) \cdot (x^2 + 10x + 24) + 128 \\
&\text{Đặt } x^2 + 10x = a, \text{ ta có:} \\
&a(a + 24) + 128 \\
&= a^2 + 24a + 128 \\
&= (a + 8)(a + 16) \\
&= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) \\
&= (x + 2)(x + 8)(x + 5 + \sqrt{17})(x + 5 - \sqrt{17})
\end{aligned}$$

Bài 39: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3 \cdot (x^2 - 7)^2 - 36x$

Dựa vào kết quả trên hãy chứng minh:

$A = n^3 \cdot (n^2 - 7) - 36n$ chia hết cho 210 với mọi số tự nhiên n

Lời giải

$$\begin{aligned}
 a) x^3(x^2 - 7)^2 - 36x &= x \left[(x^3 - 7x)^2 - 36 \right] \\
 &= x(x^3 - 7x - 6)(x^3 - 7x + 6) = x(x^3 - x - 6x - 6)(x^3 - x - 6x + 6) \\
 &= x \left[x(x-1)(x+1) - 6(x+1) \right] \left[x(x-1)(x+1) - 6(x-1) \right] \\
 &= x(x+1)(x^2 - x - 6)(x-1)(x^2 + x - 6) \\
 &= x(x+1)(x^2 - 3x + 2x - 6)(x-1)(x^2 + 3x - 2x - 6) \\
 &= x(x+1)(x-1) \left[x(x-3) + 2(x-3) \right] \left[x(x+3) - 2(x+3) \right] \\
 &= x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x-2)(x+3)
 \end{aligned}$$

b) Theo phần a ta có:

$$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = n(n+1)(n-1)(n-3)(n+2)(n-2)(n+3)$$

Đây là tích của 7 số nguyên liên tiếp. Trong 7 số nguyên liên tiếp có:

- Một bội của 2 nên A chia hết cho 2
- Một bội của 3 nên A chia hết cho 3
- Một bội của 5 nên A chia hết cho 5
- Một bội của 7 nên A chia hết cho 7.

Mà 2;3;5;7 đôi một nguyên tố cùng nhau nên $A : (2.3.5.7)$ hay $A : 210$

Bài 40:

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 19x - 30$

Lời giải

Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 19x - 30$

Ta có: $x^3 - 19x - 30 = x^3 - 9x - 10x - 30 = x(x^2 - 9) - 10(x+3)$

$$= x(x-3)(x+3) - 10(x+3) = (x+3)(x^2 - 3x - 10) = (x+3)(x+2)(x-5)$$

Vậy, $x^3 - 19x - 30 = (x+3)(x+2)(x-5)$

Bài 41: Phân tích đa thức $A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ thành nhân tử. Từ đó suy ra điều kiện của a, b, c để $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Lời giải

Ta có: $A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$

Đề $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{cases}$$

Bài 42:

Phân tích đa thức $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ thành nhân tử

Lời giải

$$\begin{aligned} a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) &= a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b) \\ &= a^2(b-c) - b^2[(a-b) + (b-c)] + c^2(a-b) \\ &= (a^2 - b^2)(b-c) + (c^2 - b^2)(a-b) \\ &= (a-b)(a+b)(b-c) - (b-c)(b+c)(a-b) \\ &= (a-b)(b-c)[a+b-b-c] = (a-b)(b-c)(a-c) \end{aligned}$$

Bài 43:

4) Chứng minh: $(x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) = x^4 - y^4$

5) Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(x+2)(x^2 + 2x + 2) + 1$

6) Tìm a, b, c biết: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ và $a^8 + b^8 + c^8 = 3$

Lời giải

1) Ta có: $(x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$
 $= x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + x^3y - x^2y^2 + xy^3 - y^4$
 $= x^4 - y^4$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

$$x(x+2)(x^2+2x+2)+1=(x^2+2x)(x^2+2x+2)+1$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Ta có: } &= (x^2+2x)^2 + 2(x^2+2x) + 1 \\ &= (x^2+2x+1)^2 = (x+1)^4 \end{aligned}$$

$$3) \text{ Biến đổi } a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \text{ về } (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

Lập luận suy ra $a=b=c$

Thay $a=b=c$ vào $a^8+b^8+c^8=3$ ta có: $3a^8=3 \Leftrightarrow a^8=1 \Leftrightarrow a=\pm 1$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a=b=c=1 \\ a=b=c=-1 \end{cases}$$

Bài 44: Cho $a^3+b^3+c^3=3abc$ với $a, b, c \neq 0$

Tính giá trị biểu thức $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$

Lời giải

Biến đổi giả thiết về dạng:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(a+b+c) \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right] = 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Với } a+b+c=0 \text{ tính được: } P = \left(\frac{-c}{b}\right) \left(\frac{-a}{c}\right) \left(\frac{-b}{a}\right) = -1$$

$$\text{Với } a=b=c \text{ tính được: } P = 2.2.2 = 8$$

Bài 45:

Cho $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Hãy rút gọn phân thức: $P = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Lời giải

Từ $x^3+y^3+z^3=3xyz$ chỉ ra được $x+y+z=0$ hoặc $x=y=z$

$$\text{TH1: } x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z; x+z=-y; y+z=-x \Rightarrow P=-1$$

$$\text{TH2: } x=y=z \Rightarrow P=\frac{1}{8}$$

Bài 46:

Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, tính giá trị của biểu thức $P = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$$

Khi đó:

$$P = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = xyz \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3$$

Bài 47:

c) Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

d) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, (với $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$)

Tính giá trị của biểu thức $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } (a+b+c)^3 &= (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \\ &= (a+b)^3 + 3(a+b)c \cdot (a+b+c) + c^3 = (a+b)^3 + c^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(-c) \quad (\text{Vì } a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \end{aligned}$$

$$\text{b) Với } a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$$

$$\text{Áp dụng kết quả câu a ta có: } \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$$

$$\begin{aligned} \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} &= \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = xyz \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) \\ &= xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3 \end{aligned}$$

Bài 48:

Tìm x, y, z biết: $10x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x - 4y - 4xz + 5 = 0$

Lời giải

$$\begin{aligned} b) B &= 2x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 2028 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 8x + 16 + 2012 \\ &= (x+y)^2 + (x-4)^2 + 2012 \geq 2012 \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất của } B \text{ là } 2012 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases}$$

Bài 49:

Cho a và b thỏa mãn : $a + b = 1$. Tính giá trị của biểu thức $B = a^3 + b^3 + 3ab$

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = a^3 + b^3 + 3ab = a^3 + b^3 + 3ab.(a+b) = (a+b)^3 = 1 \quad (\text{Vì } a+b=1)$$

Bài 50:

Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \quad & a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b) = a^4(b-c) - b^4(a-c) + c^4(a-b) \\ &= a^4(b-c) - b^4(a-b+b-c) + c^4(a-b) \\ &= a^4(b-c) - b^4(a-b) - b^4(b-c) + c^4(a-b) \\ &= (b-c)(a^4 - b^4) - (a-b)(b^4 - c^4) \\ &= (b-c)(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) - (a-b)(b-c)(b+c)(b^2 + c^2) \\ &= (a-b)(b-c)(a^3 + ab^2 + a^2b + b^3 - b^3 - bc^2 - b^2c - c^3) \\ &= (a-b)(b-c) \left[(a-c)(a^2 + ac + c^2) + b^2(a-c) + b(a-c)(a+c) \right] \\ &= (a-b)(b-c)(a-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Bài 51:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$3. \quad 8(x^2 + 3x + 5)^2 + 7(x^2 + 3x + 5) - 15$$

$$4. \quad x^{11} + x^7 + 1$$

Lời giải

$$8(x^2 + 3x + 5)^2 + 7(x^2 + 3x + 5) - 15$$

Đặt $t = x^2 + 3x + 5$, ta có:

$$8(x^2 + 3x + 5)^2 + 7(x^2 + 3x + 5) - 15 = 8t^2 + 7t - 15$$

$$= 8t^2 - 8t + 15t - 15 = 8t(t - 1) + 15(t - 1) = (t - 1)(8t + 15)$$

Thay $t = x^2 + 3x + 5$ vào đa thức ta có:

$$8(x^2 + 3x + 5)^2 + 7(x^2 + 3x + 5) - 15$$

$$= (x^2 + 3x + 5 - 1)[8(x^2 + 3x + 5) + 15]$$

$$= (x^2 + 3x + 4)(8x^2 + 24x + 55)$$

2.

$$\begin{aligned} x^{11} + x^7 + 1 &= (x^{11} + x^{10} + x^9) + (-x^{10} - x^9 - x^8) \\ &\quad + (x^8 + x^7 + x^6) + (-x^6 - x^5 - x^4) + (x^5 + x^4 + x^3) + (-x^3 - x^2 - x) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^9(x^2 + x + 1) - x^8(x^2 + x + 1) + x^6(x^2 + x + 1) - x^4(x^2 + x + 1) + x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1) \cdot (x^9 - x^8 + x^6 - x^4 + x^3 + 1) \end{aligned}$$

Bài 52:

Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

$$1. x^2 + 7x + 6$$

$$2. x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$$

Lời giải

1)

$$x^2 + 7x + 6 = x^2 + x + 6x + 6$$

$$= x(x + 1) + 6(x + 1) = (x + 6)(x + 1)$$

2)

$$\begin{aligned}
 x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008 &= x^4 + x^2 + 2007x^2 + 2007x + 2007 + 1 \\
 &= x^4 + x^2 + 1 + 207(x^2 + x + 1) = (x^2 + 1) - x^2 + 2007(x^2 + x + 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2008)
 \end{aligned}$$

Bài 53:

a) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính giá trị của biểu thức sau: $B = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$.

b) Cho x, y, z là ba số thực khác 0, thỏa mãn $x + y + z \neq 0$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Tính $C = \frac{x^{2019} + y^{2019} + z^{2019}}{(x + y + z)^{2019}}$.

Lời giải

a) vì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ nên $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = 3 \cdot \frac{1}{xyz}$ (ĐKXĐ: $x, y, z \neq 0$)

Ta có: $B = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3}$

$$= xyz \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot 3 \cdot \frac{1}{xyz} = 3$$

Vậy, $B = 3$ khi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

b) vì x, y, z là ba số thực khác 0, thỏa mãn $x + y + z \neq 0$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ nên $x = y = z \neq 0$.

Do đó, $C = \frac{x^{2019} + y^{2019} + z^{2019}}{(x + y + z)^{2019}} = \frac{3 \cdot x^{2019}}{(3x)^{2019}} = \frac{1}{3^{2018}}$

Vậy, $C = \frac{1}{3^{2018}}$ với x, y, z là ba số thực khác 0, thỏa mãn $x + y + z \neq 0$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

Bài 54:

c) Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

d) Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Lời giải

$$a) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2}{b^2 + 2ac} = \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} \quad ; \quad \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \\ &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)} \\ &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1 \end{aligned}$$

$$b) \forall x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z \Rightarrow (x+y)^3 = -z^3$$

$$\text{Hay } x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = -z^3 \Rightarrow 3xyz = x^3 + y^3 + z^3$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) &= (x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= x^5 + y^5 + z^5 + x^3(y^2 + z^2) + y^3(z^2 + x^2) + z^3(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = z^2 - 2xy \quad (\forall x + y = -z)$$

$$\text{Tương tự: } y^2 + z^2 = x^2 - 2yz; \quad z^2 + x^2 = y^2 - 2zx$$

$$\begin{aligned} \text{Vì vậy: } 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) &= x^5 + y^5 + z^5 + x^3(x^2 - 2yz) + y^3(y^2 - 2zx) + z^3(z^2 - 2xy) \\ &= 2(x^5 + y^5 + z^5) - 2xyz(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } 2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

Bài 55:

$$\text{Phân tích đa thức thành nhân tử: } (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$$

Lời giải

$$(x+1)(x-3)(x^2 - 2x + 2)$$

Bài 56:

Cho $x = by + cz$; $y = ax + cz$; $z = ax + by$ và $x + y + z \neq 0$; $xyz \neq 0$.

$$\text{CMR: } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$$

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết } \Rightarrow 2cz + z = x + y \Rightarrow 2cz = x + y - z$$

$$\Rightarrow c = \frac{x+y-z}{2z} \Rightarrow c+1 = \frac{x+y+z}{2z} \Rightarrow \frac{1}{c+1} = \frac{2z}{x+y+z}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{1+a} = \frac{2x}{x+y+z}; \frac{1}{1+b} = \frac{2y}{x+y+z}. \text{ Khi đó: } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$$

Bài 57: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + z^3 - 3xy(x+y) - 3xyz \\ &= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z) \left[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 \right] - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) \end{aligned}$$

Bài 58: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

Lời giải

$$\begin{aligned} &x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 \\ &= (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013 \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2013 \cdot (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013) \end{aligned}$$

Bài 59: Phân tích đa thức thành nhân tử: $M = (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24 \\ M &= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 24 \\ M &= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\ M &= (x^2 + 7x + 11)^2 - 25 \\ M &= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\ M &= (x+1)(x+6)(x^2 + 7x + 16) \end{aligned}$$

Bài 60: Phân tích biểu thức sau thành nhân tử: $P = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } P &= 2(a^3 + b^3) + 7ab(a + b) \\ &= 2(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 7ab(a + b) \\ &= (a + b)(2a^2 + 2b^2 + 5ab) \\ &= (a + b)(2a^2 + 4ab + 2b^2 + ab) \\ &= (a + b)[2a(a + 2b) + b(a + 2b)] \\ &= (a + b)(2a + b)(a + 2b)\end{aligned}$$

$$\text{Kết luận } P = (a + b)(2a + b)(a + 2b)$$

Bài 61: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{a) } & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ &= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 \\ &= x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (x - 1)(x - 2)(x - 3)\end{aligned}$$

Bài 62: Phân tích đa thức $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ thành nhân tử

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } & a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = a^2(b - c) + b^2(c - a) - c^2(b - c + c - a) \\ &= (b - c)(a^2 - c^2) + (c - a)(b^2 - c^2) = (b - c)(a - c)(a + c) + (c - a)(b - c)(b + c) \\ &= (b - c)(a - c)(a + c - b - c) = (b - c)(a - c)(a - b)\end{aligned}$$

Bài 63: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$\begin{aligned}\text{a) } & x^4 + 4 \\ \text{b) } & (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24\end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{a. } & x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \\ \text{b. } & (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 = \left[(x^2 + 7x + 11)^2 - 1 \right] - 24 \\
&= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 = (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\
&= (x + 1)(x + 6)(x^2 + 7x + 16)
\end{aligned}$$

Bài 64: Phân tích biểu thức sau thành nhân tử: $P = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } P &= 2(a^3 + b^3) + 7ab(a + b) \\
&= 2(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 7ab(a + b) \\
&= (a + b)(2a^2 + 2b^2 + 5ab) = (a + b)(2a^2 + 4ab + 2b^2 + ab) \\
&= (a + b)[2a(a + 2b) + b(a + 2b)] = (a + b)(2a + b)(a + 2b) \\
\text{Kết luận } P &= (a + b)(2a + b)(a + 2b)
\end{aligned}$$

Bài 65: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^4 + 2x^2y + y^2 - 9$

b) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{a, } x^4 + 2x^2y + y^2 - 9 &= (x^4 + 2x^2y + y^2) - 9 \\
&= (x^2 + y)^2 - 9 \\
&= (x^2 + y - 3)(x^2 + y + 3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b, } (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24 & \\
&= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 24 \\
&= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\
&= [(x^2 + 7x + 11)^2 - 1] - 24 \\
&= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\
&= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\
&= (x + 1)(x + 6)(x^2 + 7x + 16)
\end{aligned}$$

Bài 66: Phân tích thành nhân tử: $x^4 - 6x^2 - 7x - 6$

Lời giải

$$\begin{aligned}
x^4 - 6x^2 - 7x - 6 &= x^4 + 2x^3 - 2x^3 - 4x^2 - 2x^2 - 4x - 3x - 6 \\
&= x^3(x + 2) - 2x^2(x + 2) - 2x(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(x^3 - 2x^2 - 2x - 3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x+2)(x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x + x - 3) = (x+2)[x^2(x-3) + x(x-3) + (x-3)] \\
 &= (x+2)(x-3)(x^2 + x + 1)
 \end{aligned}$$

Bài 67: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = (a+1)(a+3)(a+5)(a+7) + 15$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } A &= (a+1)(a+3)(a+5)(a+7) + 15 \\
 &= (a+1)(a+7)(a+3)(a+5) + 15 \\
 &= (a^2 + 8a + 7)(a^2 + 8a + 15) + 15 \\
 &= (a^2 + 8a)^2 + 22(a^2 + 8a) + 120 \\
 &= (a^2 + 8a + 11)^2 - 1^2 \\
 &= (a^2 + 8a + 12)(a^2 + 8a + 10) \\
 &= (a+2)(a+6)(a^2 + 8a + 10)
 \end{aligned}$$

Bài 68: Phân tích đa thức thành nhân tử $a)x^4 + 1 - 2x^2$ $b) -x^2 - 28x - 27$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 a)x^4 - 1 + 2x^2 &= (x^2 + 1)^2 \\
 b) -x^2 - 28x - 27 &= -(x+1)(x+27)
 \end{aligned}$$

Bài 69: Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử:

$$1. x^2 + 7x + 6$$

$$2. x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008$$

Lời giải

3)

$$\begin{aligned}
 x^2 + 7x + 6 &= x^2 + x + 6x + 6 \\
 &= x(x+1) + 6(x+1) = (x+6)(x+1)
 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
 x^4 + 2008x^2 + 2007x + 2008 &= x^4 + x^2 + 2007x^2 + 2007x + 2007 + 1 \\
 &= x^4 + x^2 + 1 + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + 1)^2 - x^2 + 2007(x^2 + x + 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2007(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2008)
 \end{aligned}$$

Bài 70: Phân tích đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ thành nhân tử

Lời giải

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 &= x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4 \\ &= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) \\ &= (x-1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

Bài 71: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 - y^2 - 5x + 5y$

b) $2x^2 - 5x - 7$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \quad x^2 - y^2 - 5x + 5y &= (x^2 - y^2) - 5(x - y) \\ &= (x + y)(x - y) - 5(x - y) = (x - y)(x + y - 5) \\ b) \quad 2x^2 - 5x - 7 &= 2x^2 + 2x - 7x - 7 = (2x^2 + 2x) - (7x + 7) \\ &= 2x(x + 1) - 7(x + 1) = (x + 1)(2x - 7) \end{aligned}$$

Bài 72: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $A = x^3 + 2019x^2 + 2019x + 2018$

Lời giải

$$A = x^3 + 2019x^2 + 2019x + 2018$$

$$A = x^3 - 1 + 2019(x^2 + x + 2019)$$

$$A = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2019(x^2 + x + 1)$$

$$A = (x^2 + x + 1)(x - 1 + 2019)$$

$$A = (x^2 + x + 1)(x + 2018)$$

Bài 73: Phân tích thành nhân tử $P = a^8 + a^4b^4 + b^8$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= a^8 + a^4b^4 + b^8 = (a^4)^2 + 2a^4b^4 + (b^4)^2 - a^4b^4 = (a^4 + b^4)^2 - (a^2b^2)^2 \\ &= (a^4 + b^4 + a^2b^2)(a^4 + b^4 - a^2b^2) \end{aligned}$$

$$\text{Làm tương tự với } a^4 + b^4 + a^2b^2 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$$

Vậy ta có $P = (a^4 + b^4 - a^2b^2)(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$

Bài 74: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $3x(x+2) - 5x - 10$.

b) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

Lời giải

a) $3x(x+2) - 5x - 10 = 3x(x+2) - 5(x+2) = (x+2)(3x-5)$

b) Ta có $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x^3 - 4x^2 + 4x) - (x^2 - 4x + 4)$

$$= x(x-2)^2 - (x-2)^2$$

$$= (x-1)(x-2)^2$$

Bài 75: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $7x^2 - 7xy - 5x + 5y$.

b) $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$.

Lời giải

a) $7x^2 - 7xy - 5x + 5y = (7x^2 - 7xy) - (5x - 5y) = 7x(x-y) - 5(x-y)$

$$= (x-y)(7x-5)$$

b) Ta có $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

$$= (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013$$

$$= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2013(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013)$$

Bài 76: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $a^4 + 8a^3 + 14a^2 - 8a - 15$

b) $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$

Lời giải

a) $a^4 + 8a^3 + 14a^2 - 8a - 15 = a^4 + 8a^3 + 15a^2 - a^2 - 8a - 15$

$$= (a^4 + 8a^3 + 15a^2) - (a^2 + 8a + 15)$$

$$= a^2(a^2 + 8a + 15) - (a^2 + 8a + 15)$$

$$= (a^2 + 8a + 15)(a^2 - 1)$$

$$= (a + 3)(a + 5)(a + 1)(a - 1)$$

$$b) 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$

$$= [(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2]$$

$$= (a + b - c)(a + b + c)(c - a + b)(c + a - b)$$

Bài 77: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a, $x(x+2)(x^2+2x+2)+1$

b, $x^4 + 2016x^2 + 2015x + 2016$

Lời giải

$$a) x(x+2)(x^2+2x+2)+1 = (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1$$

$$= (x^2+2x)^2 + 2(x^2+2x)+1$$

$$= (x^2+2x+1)^2$$

$$= (x+1)^4$$

$$b) x^4 + 2016x^2 + 2015x + 2016 = x^4 - x + 2016(x^2 + x + 1)$$

$$= x(x^3 - 1) + 2016(x^2 + x + 1) = x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2016(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)[x(x-1) + 2016]$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2016)$$

Bài 78: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 - 4x$

b) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

Lời giải

$$a) x^3 - 4x$$

$$= x(x^2 - 4)$$

$$= x(x-2)(x+2)$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad & x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \\
 &= x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4 \\
 &= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) \\
 &= (x - 1)(x - 2)^2
 \end{aligned}$$

Bài 79: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = (x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) - 144$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= (x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) - 144 \\
 &= [(x - 1)(x + 2)][(x - 3)(x + 4)] - 144 \\
 &= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) - 144 \\
 &= (x^2 + x - 7 + 5)(x^2 + x - 7 - 5) - 144 \\
 &= (x^2 + x - 7)^2 - 25 - 144 = (x^2 + x - 7)^2 - 169 \\
 &= (x^2 + x - 7 - 13)(x^2 + x - 7 + 13) \\
 &= (x^2 + x - 20)(x^2 + x + 6) \\
 &= (x^2 - 4x + 5x - 20)(x^2 + x + 6) = (x - 4)(x + 5)(x^2 + x + 6)
 \end{aligned}$$

Bài 80: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$$a) x^4 + 4 \qquad b) (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 a) \quad & x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2 \\
 &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)
 \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
& (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24 \\
&= \left[(x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) \right] - 24 \\
&= \left[(x^2 + 7x + 11)^2 - 1 \right] - 24 \\
&= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\
&= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\
&= (x+1)(x+6)(x^2 + 7x + 16)
\end{aligned}$$

Bài 81:**Lời giải**

Ta có : $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 = (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013$

$$= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2013.(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013)$$

Vậy $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013)$

Bài 82:**Lời giải**

Ta có : $M = (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24 = (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) - 24$
 $= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24$
 $= (x^2 + 7x + 11)^2 - 25 = (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) = (x+1)(x+6)(x^2 + 7x + 16)$
 Vậy $M = (x+1)(x+6)(x^2 + 7x + 16)$

Bài 83:**Lời giải**

Ta có : $P = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3 = 2(a^3 + b^3) + 7ab(a+b) = 2(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 7ab(a+b)$
 $= (a+b)(2a^2 + 2b^2 + 5ab) = (a+b)(2a^2 + 4ab + 2b^2 + ab) = (a+b)[2a(a+2b) + b(a+2b)]$
 $= (a+b)(2a+b)(a+2b)$
 Vậy $P = (a+b)(2a+b)(a+2b)$

Bài 84:**Lời giải**

Ta có : $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1)$
 $= (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3)$
 Vậy $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$

Bài 85:**Lời giải**

Ta có : $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = a^2(b-c) + b^2(c-a) - c^2(b-c + c-a)$
 $= (b-c)(a^2 - c^2) + (c-a)(b^2 - c^2) = (b-c)(a-c)(a+c) + (c-a)(b-c)(b+c)$

$$= (b - c)(a - c)(a + c - b - c) = (b - c)(a - c)(a - b)$$

$$\text{Vậy } a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = (b - c)(a - c)(a - b)$$

Bài 86: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y - 5$

Lời giải

$$\begin{aligned} (x - y)^2 + 4(x - y) - 5 &= (x - y)^2 + 4(x - y) + 4 - 9 \\ &= (x - y - 2)^2 - 3^2 = (x - y + 5)(x - y - 1) \end{aligned}$$

Bài 87:

Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} &x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 \\ &= (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013 \\ &= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2013 \cdot (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013) \end{aligned}$$

Bài 88: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$3) \quad a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1)$$

$$4) \quad 6x^3 + 13x^2 + 4x - 3$$

$$3) \quad (x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$$

Lời giải

$$1) \quad a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1) = ax^2 + a - a^2x - x = ax(x - a) - (x - a) = (ax - 1)(x - a)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad &6x^3 + 13x^2 + 4x - 3 = 6x^3 + 6x^2 + 7x^2 + 7x - 3x - 3 \\ &= 6x^2(x + 1) + 7x(x + 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(6x^2 + 7x - 3) \\ &= (x + 1)(6x^2 + 9x - 2x - 3) = (x + 1)[3x(2x + 3) - (2x + 3)] \\ &= (x + 1)(2x + 3)(3x - 1) \end{aligned}$$

$$3) \quad (x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15 = (x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) + 1 - 16$$

$$= (x^2 + x - 1)^2 - 4^2 = (x^2 + x - 5)(x^2 + x + 3)$$

Bài 89: Phân tích đa thức $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ thành nhân tử

Lời giải

$$\begin{aligned} & x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \\ &= x^3 - 4x^2 + 4x - x^2 + 4x - 4 \\ &= x(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) \\ &= (x-1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

Bài 90: Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0$$

Lời giải

Biến đổi:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} = \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3 - 1)(x^3 - 1)} \\ &= \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)} \quad (x + y = 1 \Rightarrow y - 1 = -x \text{ \& } x - 1 = -y) \\ &= \frac{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) - (x - y)}{xy(x^2 y^2 + y^2 x + y^2 + yx^2 + xy + y + x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{(x - y)(x^2 + y^2 - 1)}{xy[x^2 y^2 + xy(x + y) + x^2 + y^2 + xy + 2]} \\ &= \frac{(x - y)(x^2 - x + y^2 - y)}{xy[x^2 y^2 + (x + y)^2 + 2]} = \frac{(x - y)[x(x - 1) + y(y - 1)]}{xy(x^2 y^2 + 3)} \\ &= \frac{(x - y)[x(-y) + y(-x)]}{xy(x^2 y^2 + 3)} = \frac{(x - y)(-2xy)}{xy(x^2 y^2 + 3)} \\ &= \frac{-2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} \Rightarrow dfcm \end{aligned}$$

Bài 91: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh tam giác đều.

Lời giải

$$C/m: a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$+) \text{Từ giả thiết suy ra : } (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \quad (a + b + c > 0)$$

$$\text{Biến đổi được kết quả: } (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c \Rightarrow \text{Tam giác đó là đều (đpcm)}$$

Bài 92: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$

Lời giải

$$\begin{aligned} x^3(x^2 - 7)^2 - 36x &= x \left[(x^3 - 7x)^2 - 36 \right] \\ &= x(x^3 - 7x - 6)(x^3 - 7x + 6) = x(x^3 - x - 6x - 6)(x^3 - x - 6x + 6) \\ &\dots\dots \\ &= x(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 3) \end{aligned}$$

Bài 93: Cho ba số a, b, c thỏa mãn $abc = 2004$

$$\text{Tính } M = \frac{2004a}{ab + 2004a + 2004} + \frac{b}{bc + b + 2004} + \frac{c}{ac + c + 1}$$

Lời giải

Thay $2004 = abc$ vào M ta có:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{a^2bc}{ab + a^2bc + abc} + \frac{b}{bc + b + abc} + \frac{c}{ac + c + 1} \\
 &= \frac{a^2bc}{ab(1 + ac + c)} + \frac{b}{b(c + 1 + ac)} + \frac{c}{ac + c + 1} \\
 &= \frac{ac}{1 + ac + c} + \frac{1}{c + 1 + ac} + \frac{c}{ac + c + 1} = \frac{ac + c + 1}{1 + ac + c} = 1
 \end{aligned}$$

Bài 94:

Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

b) $x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 a / x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz \\
 &= (x + y + z)^3 - 3z(x + y)(x + y + z) - 3xy(x + y + z) \\
 &= (x + y + z) \left[(x + y + z)^2 - 3z(x + y) - 3xy \right] \\
 &= (x + y + z) \left[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 3zx - 3zy - 3xy \right] \\
 &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b / x^4 + 2011x^2 + 2010x + 2011 &= x^4 + x^3 + x^2 + 2010x^2 + 2010x + 2010 - x^3 + 1 \\
 &= x^2(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2010 - x + 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2011)
 \end{aligned}$$

Bài 95: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^4 + 1 - 2x^2$

b) $-x^2 - 28x - 27$

Lời giải

a) $x^4 - 1 + 2x^2 = (x^2 + 1)^2$

b) $-x^2 - 28x - 27 = -(x + 1)(x + 27)$

Bài 96: Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x(x+2)(x^2+2x+2)+1$

Lời giải

$$\begin{aligned} x(x+2)(x^2+2x+2)+1 &= (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1 \\ &= (x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1 \\ &= (x^2+2x+1)^2 = (x+1)^4 \end{aligned}$$

Bài 97:

Cho biểu thức $A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$

- Phân tích biểu thức A thành nhân tử
- Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì $A < 0$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2) - (2bc)^2 \\ &= (b^2 + c^2 - 2bc - a^2)(b^2 + c^2 + 2bc - a^2) \\ &= (b + c - a)(b + c + a)(b - c - a)(b - c + a) \end{aligned}$$

b) Ta có: $b + c - a > 0$ (BĐT tam giác)

$$b + c + a > 0 \text{ (BĐT tam giác)}$$

$$b - c - a < 0 \text{ (BĐT tam giác)}$$

$$b + c - a > 0 \text{ (BĐT tam giác)}$$

$$\text{Vậy } A < 0$$

Bài 98:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a) (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$$

$$b) x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010$$

Lời giải

c)

$$\begin{aligned} (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= [(x + y + z)^3 - x^3] - (y^3 + z^3) \\ &= (y + z) \left[(x + y + z)^2 + (x + y + z)x + x^2 \right] - (y + z)(y^2 - yz + z^2) \\ &= (y + z)(3x^2 + 3xy + 3yz + 3zx) = 3(y + z)[x(x + y) + z(x + y)] \\ &= 3(x + y)(x + z)(y + z) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x^4 + 2010x^2 + 2009x + 2010 &= (x^4 - x) + (2010x^2 + 2010x + 2010) \\ &= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2010(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2010) \end{aligned}$$

Bài 99: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

Lời giải

$$\begin{aligned} 1a. \quad x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\ &= (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

1b. $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\
&= \left[(x^2 + 7x + 11)^2 - 1 \right] - 24 \\
&= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\
&= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\
&= (x + 1)(x + 6)(x^2 + 7x + 16)
\end{aligned}$$

Bài 100: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = (a + 1)(a + 3)(a + 5)(a + 7) + 15$

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= (a + 1)(a + 3)(a + 5)(a + 7) + 15 \\
&= (a + 1)(a + 7)(a + 3)(a + 5) + 15 \\
&= (a^2 + 8a + 7)(a^2 + 8a + 15) + 15 \\
&= (a^2 + 8a)^2 + 22(a^2 + 8a) + 120 \\
&= (a^2 + 8a + 11)^2 - 1^2 \\
&= (a^2 + 8a + 12)(a^2 + 8a + 10) \\
&= (a + 2)(a + 6)(a^2 + 8a + 10)
\end{aligned}$$

Bài 101: Với giá trị nào của a và b thì đa thức $(x - a)(x - 10) + 1$ phân tích thành tích của một đa thức bậc nhất có hệ số nguyên

Lời giải

Giả sử :

$$\begin{aligned}
(x - a)(x - 10) + 1 &= (x - m)(x - n) \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \\
\Leftrightarrow x^2 - (a + 10)x + 10a + 1 &= x^2 - (m + n)x + mn \\
\Leftrightarrow \begin{cases} m + n = a + 10 \\ mn = 10a + 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Khử a ta có:

$$mn = 10(m + n - 10) + 1$$

$$\Leftrightarrow mn - 10m - 10n + 100 = 1$$

$$\Leftrightarrow m(n - 10) - 10(n - 10) = 1$$

Vì m, n nguyên ta có: $\begin{cases} m - 10 = 1 \\ n - 10 = 1 \end{cases} \& \begin{cases} m - 10 = -1 \\ n - 10 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ a = 8 \end{cases}$

Bài 102:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $3x^2 - 7x + 2$

b) $a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1)$

Lời giải

$$a) 3x^2 - 7x + 2 = 3x^2 - 6x - x + 2$$

$$= 3x(x - 2) - (x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$$

$$b) a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1) = ax^2 + a - a^2x - x$$

$$= ax(x - a) - (x - a) = (x - a)(ax - 1)$$

Bài 103: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$$

Lời giải

$$a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b) = a^4(b - c) - b^4(a - c) + c^4(a - b)$$

$$\begin{aligned}
&= a^4(b-c) - b^4(a-b+b-c) + c^4(a-b) \\
&= a^4(b-c) - b^4(a-b) - b^4(b-c) + c^4(a-b) \\
&= (b-c)(a^4 - b^4) - (a-b)(b^4 - c^4) \\
&= (b-c)(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) - (a-b)(b-c)(b+c)(b^2 + c^2) \\
&= (a-b)(b-c)(a^3 + ab^2 + a^2b + b^3 - b^3 - bc^2 - b^2c - c^3) \\
&= (a-b)(b-c) \left[(a-c)(a^2 + ac + c^2) + b^2(a-c) + b(a-c)(a+c) \right] \\
&= (a-b)(b-c)(a-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)
\end{aligned}$$

Bài 104: Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^2 - x - 6$

b) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

Lời giải

a) $x^2 - x - 6 = x^2 + 2x - 3x - 6 = x(x+2) - 3(x+2) = (x-3)(x+2)$

b) $x^3 - x^2 - 14x + 24 = x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 12x + 24$

$$\begin{aligned}
&= x^2(x-2) + x(x-2) - 12(x-2) \\
&= (x-2)(x^2 + x - 12) \\
&= (x-2)(x^2 + 4x - 3x - 12) \\
&= (x-2)(x+4)(x-3)
\end{aligned}$$

Bài 105: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(x+2)(x^2 + 2x + 2) + 1$

Lời giải

Ta có: $x(x+2)(x^2 + 2x + 2) + 1 = (x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) + 1$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x) + 1 \\
&= (x^2 + 2x + 1)^2 = (x+1)^4
\end{aligned}$$

Bài 106: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

Lời giải

a) $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$

$$\begin{aligned}
&= (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2 \\
&= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\
&= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24 &= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\
&= \left[(x^2 + 7x + 11)^2 - 1 \right] - 24 \\
&= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\
&= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\
&= (x+1)(x+6)(x^2 + 7x + 16)
\end{aligned}$$

Bài 107: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc$

Lời giải

$$\begin{aligned}
&ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 2abc \\
&= [ab(a+b) + abc] + [bc(b+c) + abc] + ca(c+a) \\
&= ab(a+b+c) + bc(a+b+c) + ac(c+a) \\
&= b(a+b+c)(a+c) + ac(c+a) \\
&= (a+c)(ab+ac+b^2+bc) \\
&= (a+c)[a(b+c) + b(b+c)] \\
&= (a+c)(a+b)(b+c)
\end{aligned}$$

Bài 108: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013$

Lời giải

$$\begin{aligned}
x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 &= (x^4 - x) + (2013x^2 + 2013x + 2013) \\
&= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2013(x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013)
\end{aligned}$$

Bài 109: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $a^3 - a^2 - 4a + 4$

b) $2a^3 - 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

Lời giải

$$\text{a) } a^3 - a^2 - 4a + 4 = a^2(a-1) - 4(a-1) = (a-1)(a+2)(a-2)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3 \\ &= 2(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 7ab(a+b) \\ &= (a+b)(2a^2 + 2b^2 + 5ab) \\ &= (a+b)(2a^2 + 4ab + 2b^2 + ab) \\ &= (a+b)[2a(a+2b) + b(b+2a)] \\ &= (a+b)(2a+b)(a+2b) \end{aligned}$$

Bài 110: Phân tích đa thức $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ thành nhân tử

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) &= a^2(b-c) + b^2(c-a) - c^2(b-c+c-a) \\ &= (b-c)(a^2 - c^2) + (c-a)(b^2 - c^2) \\ &= (b-c)(a-c)(a+c) + (c-a)(b-c)(b+c) \\ &= (b-c)(a-c)(a+c-b-c) = (b-c)(a-c)(a-b) \end{aligned}$$

Bài 111: Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$

Lời giải

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6 = (x+1)(x-3)(x^2 - 2x + 2)$$

Bài 112: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$\text{a) } 12x^3 + 16x^2 - 5x - 3$$

$$\text{b) } (x^2 - x + 1)^2 - 5x(x^2 - x + 1) + 4x^2$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } 12x^3 + 16x^2 - 5x - 3 &= 12x^3 - 6x^2 + 22x^2 - 11x + 6x - 3 \\ &= 6x^2(2x-1) + 11x(2x-1) + 3(2x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2x-1)(6x^2+11x+3) \\
&= (2x-1)(6x^2+9x+2x+3) \\
&= (2x-1)[3x(2x+3)+(2x+3)] \\
&= (2x-1)(3x+1)(2x+3)
\end{aligned}$$

$$\text{b) } A = (x^2 - x + 1)^2 - 5x(x^2 - x + 1) + 4x^2$$

Đặt $x^2 - x + 1 = y$, ta có:

$$\begin{aligned}
A &= 4x^2 - 5xy + y^2 = (4x - y)(x - y) \\
&= (4x - x^2 + x - 1)(x - x^2 + x - 1) \\
&= (x^2 - 5x + 1)(x^2 - 2x + 1) = (x - 1)^2(x^2 - 5x + 1) \\
&= (x - 1)^2 \left(x - \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right) \left(x - \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \right)
\end{aligned}$$

Bài 113: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

$$\text{a) } 18x^3 - \frac{8}{25}x$$

$$\text{b) } a(a+2b)^3 - b(2a+b)^3$$

$$\text{c) } (x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 1$$

Lời giải

$$\text{a) } 18x^3 - \frac{8}{25}x = 2x \left(9x^2 - \frac{4}{25} \right) = 2x \left(3x - \frac{2}{5} \right) \left(3x + \frac{2}{5} \right)$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } a(a+2b)^3 - b(2a+b)^3 &= a[(a+b)+b]^3 - b[a+(a+b)]^3 \\
&= a[(a+b)^3 + 3(a+b)^2b + 3(a+b)b^2 + b^3] \\
&\quad - b[a^3 + 3a^2(a+b) + 3a(a+b)^2 + (a+b)^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a(a+b)^3 + 3ab(a+b)^2 + 3ab^2(a+b) + ab^3 - a^3b - 3a^2b(a+b) \\
&\quad - 3ab(a+b)^2 - b(a+b)^3 \\
&= a(a+b)^3 + 3ab^2(a+b) + ab^3 - a^3b - 3a^2b(a+b) - b(a+b)^3 \\
&= (a+b)[a(a+b)^2 + 3ab^2 - ab(a-b) - 3a^2b - b(a+b)^2] \\
&= (a+b)(a^3 + 2a^2b + ab^2 + 3ab^2 - a^2b + ab^2 - 3a^2b - a^2b - 2ab^2 - b^3) \\
&= (a+b)(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) = (a+b)(a-b)^3
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1 &= (x^2-7x+10)(x^2-7x+12)+1 \\
 &= (x^2-7x+11-1)(x^2-7x+11+1)+1 \\
 &= (x^2-7x+11)^2-1+1 = (x^2-7x+11)^2
 \end{aligned}$$

Bài 114: Phân tích thành nhân tử:

a) $a^2 - 7a + 12$

b) $x^4 + 2015x^2 + 2014x + 2015$

c) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

d) $(x^2 - 8)^2 + 36$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } a^2 - 7a + 12 &= a^2 - 3a - 4a + 12 \\
 &= (a-3)(a-4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } x^4 + 2015x^2 + 2014x + 2015 &= x^4 + x^3 + x^2 + 2014x^2 + 2014x + 2014 - x^3 + 1 \\
 &= x^2(x^2 + x + 1) + 2014(x^2 + x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^4 + 2014 - x + 1) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^4 - x + 2015)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3xyz \\
 &= (x+y+z)^3 - 3z(x+y)(x+y+z) - 3xy(x+y+z) \\
 &= (x+y+z) \left[(x+y+z)^2 - 3z(x+y) - 3xy \right] \\
 &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - 3zx - 3zy - 3xy) \\
 &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } (x^2 - 8)^2 + 36 &= x^4 - 16x^2 + 100 \\
 &= (x^2 + 10)^2 - 36x^2 \\
 &= (x^2 + 6x + 10)(x^2 - 6x + 10)
 \end{aligned}$$

Bài 115: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $5x^2 - 26x + 24$

b) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$

c) $x^2 + 6x + 5$

$$d) x^4 + 2015x^2 + 2014x + 2015$$

Lời giải

$$a) 5x^2 - 26x + 24 = 5x^2 - 6x - 20x + 24 = x(5x - 6) - 4(5x - 6) = (5x - 6)(x - 4)$$

$$b) \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}x\right)^2 \cdot 1 + 3\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot 1^2 - 1^3 = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^3$$

$$c) x^2 + 6x + 5 = x(x + 1) + 5(x + 1) = (x + 5)(x + 1)$$

$$\begin{aligned} d) x^4 + 2015x^2 + 2014x + 2015 &= x^4 + x^3 + x^2 - x^3 - x^2 - x + 2015x^2 + 2015x + 2015 \\ &= x^2(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + 2015(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2015) \end{aligned}$$

Bài 116: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a) 8(x^2 + 3x + 5)^2 + 7(x^2 + 3x + 5) - 15$$

$$b) x^{11} + x^7 + 1$$

Lời giải

$$a) 8(x^2 + 3x + 5)^2 + 7(x^2 + 3x + 5) - 15$$

Đặt $t = x^2 + 3x + 5$, ta có:

$$\begin{aligned} 8(x^2 + 3x + 5)^2 + 7(x^2 + 3x + 5) - 15 &= 8t^2 + 7t - 15 \\ &= 8t^2 - 8t + 15t - 15 \\ &= 8t(t - 1) + 15(t - 1) \\ &= (t - 1)(8t + 15) \end{aligned}$$

Thay $t = x^2 + 3x + 5$ vào đa thức ta có:

$$\begin{aligned} 8(x^2 + 3x + 5)^2 + 7(x^2 + 3x + 5) - 15 &= (x^2 + 3x + 5 - 1)[8(x^2 + 3x + 5) + 15] \\ &= (x^2 + 3x + 4)(8x^2 + 24x + 55) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x^{11} + x^7 + 1 &= (x^{11} + x^{10} + x^9) + (-x^{10} - x^9 - x^8) + (x^8 + x^7 + x^6) + (-x^6 - x^5 - x^4) \\ &\quad + (x^5 + x^4 + x^3) + (-x^3 - x^2 - x) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^9(x^2 + x + 1) - x^8(x^2 + x + 1) + x^6(x^2 + x + 1) - x^4(x^2 + x + 1) \\ &\quad + x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1) \cdot (x^9 - x^8 + x^6 - x^4 + x^3 + 1) \end{aligned}$$

Bài 117:

$$\begin{aligned}
& \frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1} = \frac{x^2 + x^2a + a + a^2 + a^2x^2 + 1}{x^2 - x^2a - a + a^2 + a^2x^2 + 1} \\
& = \frac{x^2 + x^2a + a^2x^2 + 1 + a + a^2}{x^2 - x^2a + a^2x^2 + 1 - a + a^2} = \frac{x^2(1 + a + a^2) + (1 + a + a^2)}{x^2(1 - a + a^2) + (1 - a + a^2)} \\
& = \frac{(x^2 + 1)(1 + a + a^2)}{(x^2 + 1)(1 - a + a^2)} = \frac{1 + a + a^2}{1 - a + a^2}
\end{aligned}$$

Bài 118:

$$\text{a) ĐKXD: } \begin{cases} 2x^2 + 8 \neq 0 \\ 8 - 4x + 2x^2 - x^3 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ thì:

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\
&= \left[\frac{x(x - 2)}{2(x^2 + 4)} + \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(x - 2)} \right] \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\
&= \frac{x(x - 2)^2 + 2x^2 \cdot 2}{2(x^2 + 4)(x - 2)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \\
&= \frac{(x^2 - 4x + 4) + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x + 1}{x} \\
&= \frac{x^2 + 4}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x + 1}{x} = \frac{x + 1}{2x}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy, với } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \text{ thì } A = \frac{x + 1}{2x}$$

$$\text{b) Xét với } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} (*)$$

Giả sử biểu thức A nhận giá trị nguyên thì biểu thức 2A cũng nhận giá trị nguyên

$$2A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2x+2}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$$

$x = -1; x = 1$ đều thỏa mãn (*)

Với $x = -1$ thì $A = \frac{-1+1}{2(-1)} = 0$ (thỏa mãn $A \in \mathbb{Z}$)

Với $x = 1$ thì $A = \frac{1+1}{2 \cdot 1} = 1$ (thỏa mãn $A \in \mathbb{Z}$)

Vậy để biểu thức A nhận giá trị nguyên thì $x \in \{-1; 1\}$

Bài 119:

$$\begin{aligned} & x^2(x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1 \\ &= x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 2) + 1 \\ &= (x^4 + x^2)(x^4 + x^2 - 2) + 1 \\ &= (x^4 + x^2)^2 - 2(x^4 + x^2) + 1 \\ &= (x^4 + x^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

Bài 120:

a) ĐKXD: $x \neq 0; x \neq 1$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}$$

b) $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} (tm)$

$$P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2 \stackrel{Cosi}{\geq} 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Bài 121:

$$A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$\begin{aligned} &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz \\ &= (x+y+z)^3 - 3(x+y)z(x+y+z) - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z) \left[(x+y+z)^2 - 3(x+y)z - 3xy \right] \\ &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) \end{aligned}$$

Bài 122:

$$a/ = x(x^2 - 9)$$

$$= x(x + 3)(x - 3)$$

$$b/ = 4x^2 + 4x - x - 1 = (4x^2 + 4x) - (x + 1)$$

$$= 4x(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(4x - 1)$$

$$c/ = ab(a - b) + b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c$$

$$= ab(a - b) + (b^2c - a^2c) + (ac^2 - bc^2)$$

$$= ab(a - b) + c(b^2 - a^2) + c^2(a - b)$$

$$= (a - b)[(ab - ac) - (bc - c^2)] = (a - b)[a(b - c) - c(b - c)]$$

$$= (a - b)(b - c)(a - c)$$

Bài 123:

$$a/ A = \frac{(a + 2)^2}{(a^3 - 2a^2) + (4a^2 - 8a) + (4a - 8)}$$

$$= \frac{(a + 2)^2}{(a - 2)(a^2 + 4a + 4)} = \frac{(a + 2)^2}{(a - 2)(a + 2)^2} = \frac{1}{a - 2}$$

$$b/ \text{ Để } A \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{a - 2} \in \mathbb{Z} \text{ nên } a - 2 \text{ là ước của}$$

$$\text{Với } a - 2 = 1 \text{ thì } a = 3$$

$$\text{Với } a - 2 = -1 \text{ thì } a = 1.$$

Vậy $a \in \{-1; 1\}$ thì A là số nguyên

Bài 124:

a)

$$A = \frac{x}{x + 1} - \frac{3 - 3x}{x^2 - x + 1} + \frac{x + 4}{x^3 + 1} = \frac{x(x^2 - x + 1) - (x + 1)(3 - 3x) + x + 4}{(x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

$$= \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{(x + 1)(x^2 + x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$$

$$b) \quad \text{Với mọi } x \neq -1 \text{ thì } A = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\forall i \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0; \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \neq -1 \Rightarrow A > 0, \forall x \neq -1$$

Bài 125:

a) Ta nhận thấy $a = 1, a = 2$ là nghiệm của đa thức nên:

$$a^3 + 2a^2 - 13a + 10 = (a - 1)(a - 2)(a + 5)$$

b)

$$\begin{aligned} (a^2 + 4b^2 - 5)^2 - 16(ab + 1)^2 &= (a^2 + 4b^2 - 5 + 4ab + 4)(a^2 + 4b^2 - 5 - 4ab - 4) \\ &= [(a + 2b)^2 - 1][(a - 2b)^2 - 9] \\ &= (a + 2b + 1)(a + 2b - 1)(a - 2b - 3)(a - 2b + 3) \end{aligned}$$

Bài 126: a) ĐKXĐ: $x \neq 2, x \neq 3$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x - 9}{(x - 3)(x - 2)} - \frac{x + 3}{x - 2} + \frac{2x + 4}{x - 3} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 8}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{(x + 4)(x - 2)}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{x + 4}{x - 3} \end{aligned}$$

b) Ta có: $A = \frac{x + 4}{x - 3} = 1 + \frac{7}{x - 3}$

Đề $A \in \mathbb{Z}$ thì $x - 3 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\} \Rightarrow x \in \{-4; 2; 4; 10\}$

Kết hợp với ĐKXĐ ta được $x \in \{-4; 4; 10\}$

Bài 127:

$$\begin{aligned} x^{20} + x + 1 &= x^{20} - x^2 + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x^{18} - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^2(x^9 + 1)(x^9 - 1) + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x^9 + 1)(x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^2 \cdot (x^9 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1) \cdot [x^2 \cdot (x^9 + 1)(x - 1)(x^6 + x^3 + 1) + 1] \end{aligned}$$

Bài 128:

1) Ta có:

$$\begin{aligned}
& x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 \\
&= (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013 \\
&= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2013 \cdot (x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013)
\end{aligned}$$

2) Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\
&= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2 - x) + x^2(2 - x)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\
&= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)} \right) \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \\
&= \frac{x \cdot (x-2)^2 + 4x^2}{2(x-2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x+1) \cdot (x+2)}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x+1}{x^2} \\
&= \frac{x(x^2 + 4)(x+1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x+1}{2x}
\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{x+1}{2x}$ với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Bài 129:

$$\begin{aligned}
& x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) \\
&= x^2(y-z) + y^2z - y^2x + z^2x - z^2y \\
&= x^2(y-z) + yz(y-z) - x(y^2 - z^2) \\
&= (y-z)(x^2 + yz - xy - xz) \\
&= (y-z)[x(x-y) - z(x-y)] \\
&= (y-z)(x-y)(x-z)
\end{aligned}$$

Bài 130:

$$\begin{aligned}
 a) Q &= 1 + \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x} \\
 &= 1 + \frac{x+1+x+1-2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)} \\
 &= 1 + \frac{-2x^2+4x}{x+1} \cdot \frac{1}{x(x-2)} \quad DK : x \neq 0; -1; 2 \\
 &= 1 + \frac{-2x(x-2)}{(x+1)x(x-2)} = 1 + \frac{-2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}
 \end{aligned}$$

$$b) \left| x - \frac{3}{4} \right| = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2(ktm) \\ x = -\frac{1}{2}(tm) \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow Q = -3$$

$$c) Q \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-3; -2; 1\}$$

Bài 131:

$$ĐKXD: x \neq \frac{1}{2}; x \neq \frac{5}{2}; x \neq \frac{-3}{2}; x \neq \frac{7}{4}; x \neq 4$$

$$a) \text{ Rút gọn } P = \frac{2x-3}{2x-5}$$

$$b) \left| x \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+) x = \frac{1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{1}{2} \quad ; +) x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{2}{3}$$

$$c) P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-5 \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\}$$

$$x-5 = -2 \Rightarrow x = 3(tm)$$

$$x-5 = -1 \Rightarrow x = 4(ktm)$$

$$x-5 = 1 \Rightarrow x = 6(tm)$$

$$x-5 = 2 \Rightarrow x = 7(tm)$$

Kết luận: $x \in \{3; 6; 7\}$ thì P nhận giá trị nguyên

$$d) \quad P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5}$$

Ta có: $1 > 0$

$$\text{Để } P > 0 \text{ thì } \frac{2}{x-5} > 0 \Rightarrow x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$$

Với $x > 5$ thì $P > 0$

Bài 132:

$$a) \quad \text{ĐKXĐ: } x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$$

$$A = \left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$$

$$= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

$$b) \quad A \text{ nguyên, mà } x \text{ nguyên nên } 2 \mid (1-2x)$$

Từ đó tìm được $x = 1$ và $x = 0$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x = 0$

$$|A| = A \Leftrightarrow A > 0$$

$$c) \quad \text{Ta có: } \Leftrightarrow \frac{2}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện: } -1 \neq x < \frac{1}{2}$$

Bài 133:

$$1) \quad x^2 + 2014x + 2013$$

$$= x^2 + 2013x + x + 2013$$

$$= x(x+2013) + (x+2013) = (x+1)(x+2013)$$

$$2) \quad x(x+2)(x^2+2x+2)+1$$

$$= (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1$$

$$= (x^2+2x)^2 + 2(x^2+2x)+1$$

$$= (x^2+2x+1)^2 = (x+1)^4$$

Bài 134:

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
& x^4 + 2013x^2 + 2012x + 2013 \\
&= (x^4 - x) + 2013x^2 + 2013x + 2013 \\
&= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2013 \cdot (x^2 + x + 1) \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2013)
\end{aligned}$$

b)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\
&= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2 - x) + x^2(2 - x)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\
&= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)} \right) \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \\
&= \frac{x \cdot (x-2)^2 + 4x^2}{2(x-2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x+1) \cdot (x+2)}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x+1}{x^2} \\
&= \frac{x(x^2 + 4)(x+1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x+1}{2x}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{x+1}{2x} \text{ với } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Bài 135:

$$\begin{aligned}
\text{b) } A &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\
&= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + z^3 - 3xy(x+y) - 3xyz \\
&= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y+z) \\
&= (x+y+z) \left[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 \right] - 3xy(x+y+z) \\
&= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)
\end{aligned}$$

c) Xét hiệu:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \frac{4}{a+b} \\
 &= \frac{b(a+b) + a(a+b) - 4ab}{ab(a+b)} \\
 &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0 \text{ (Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a=b) \\
 \text{Vậy } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\geq \frac{4}{a+b} \text{ (dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a=b)
 \end{aligned}$$

Bài 136:

a) Điều kiện $x \neq 0, x \neq \pm 2$

$$\begin{aligned}
 M &= \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x+2} \right) \\
 &= \left[\frac{x}{(x-2)(x+2)} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right] : \frac{x^2 - 4 + 10 - x^2}{x+2} \\
 &= \frac{x - 2(2+x) + x - 2}{(x-2)(x+2)} : \frac{6}{x+2} \\
 &= \frac{-6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{6} = \frac{-1}{x-2} = \frac{1}{2-x}
 \end{aligned}$$

$$b) \quad x = -1 \Rightarrow M = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

$$c) \quad M = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2-x} = 2 \Leftrightarrow 2(2-x) = 1 \Leftrightarrow 2-x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (TMDK)}$$

d) Để M nhận giá trị nguyên thì $\frac{1}{2-x}$ nhận giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow 2-x \in U(1) = \{-1; 1\}$$

$$\begin{cases} 2-x = -1 \Rightarrow x = 3(tm) \\ 2-x = 1 \Rightarrow x = 1(tm) \end{cases}$$

Vậy với $x \in \{1; 3\}$ thì M nhận giá trị nguyên.

Bài 137: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

Lời giải

$$P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} = \frac{a(a^2 - 1) - 4(a^2 - 1)}{(a^3 - 8) - 7a(a - 2)} = \frac{(a^2 - 1)(a - 4)}{(a - 2)(a^2 - 5a + 4)}$$

$$= \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)(a - 1)(a - 4)} = \frac{a + 1}{a - 2}$$

Vậy $P = \frac{a + 1}{a - 2}$ với $a \neq \{1; 2; 4\}$

Bài 138: Rút gọn biểu thức: $\frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1} &= \frac{x^2 + x^2a + a + a^2 + a^2x^2 + 1}{x^2 - x^2a - a + a^2 + a^2x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2 + x^2a + a^2x^2 + 1 + a + a^2}{x^2 - x^2a + a^2x^2 + 1 - a + a^2} = \frac{x^2(1 + a + a^2) + (1 + a + a^2)}{x^2(1 - a + a^2) + (1 - a + a^2)} \\ &= \frac{(x^2 + 1)(1 + a + a^2)}{(x^2 + 1)(1 - a + a^2)} = \frac{1 + a + a^2}{1 - a + a^2} \end{aligned}$$

Bài 139: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

Lời giải

a) $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$
 $= (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$
 $= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

b) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$
 $= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24$
 $= [(x^2 + 7x + 11)^2 - 1] - 24$
 $= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2$
 $= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16)$
 $= (x + 1)(x + 6)(x^2 + 7x + 16)$

ĐS8-Chuyên đề 6: BẤT ĐẲNG THỨC
Qua Các Đề Thi HSG Môn Toán Lớp 8

A. Bài toán

Bài 1. Cho x, y, z dương và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 + 2xz} + \frac{1}{z^2 + 2xy} \geq 9$$

Bài 2: Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ với $a + b \geq 1$

Bài 3 : Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 4 : Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 5 :

a) Chứng minh $x^2 - x + 1 > 0$ (với mọi x)

b) Chứng minh: $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \geq \frac{1}{3}$

c) Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức : $A = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

Bài 6 :

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Bài 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = |x - 2006| + |x - 2007| + 2006$

Bài 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Bài 9 : Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

Bài 10: Tìm các giá trị của x để biểu thức:

$P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 11 : Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 12 : Chứng minh rằng: $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Bài 13 Cho a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 8$. Chứng minh $-4 \leq a + b \leq 4$

Bài 14: Cho hai số x, y thỏa mãn điều kiện $(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$

Bài 15 : Cho các số a, b, c thỏa mãn $1 \geq a, b, c \geq 0$.

Chứng minh rằng: $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$

Bài 16 : Cho ba số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

Bài 17 : Cho tam giác có nửa chu vi $p = \frac{a+b+c}{2}$ với a, b, c là độ dài ba cạnh

$$\text{Chứng minh } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Bài 18 : Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 19 : Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 20 : Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh rằng: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 8$

Bài 21 : Cho hai số a, b thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Chứng minh: $a^3 + b^3 + ab \geq \frac{1}{2}$

Bài 22 : Chứng minh rằng $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6) + 10 > 0$ với mọi a .

Bài 23 : Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$

Bài 24 : Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, p là nửa chu vi. CMR:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Bài 25 : Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} > \frac{a-d}{a+b}$

Bài 26 : Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Bài 27 : So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$

Bài 28 : Cho số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=2016$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức: $P = \frac{2a+3b+3c+1}{2015+a} + \frac{3a+2b+3c}{2016+b} + \frac{3a+3b+2c-1}{2017+c}$

Bài 29 : Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác.

Chứng minh: $\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ac}{a-b+c} \geq a+b+c$

Bài 30 : Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}$

Bài 31 : CMR với a, b, c là các số dương, ta có: $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$

Bài 32: Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$

Bài 33 : Cho các số thực $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$$

Bài 34 : a) Cho $x > 0, y > 0$ và m, n là hai số thực. Chứng minh rằng $\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y}$

b) Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

Bài 35 : Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

Chúng minh $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (1)

Bài 36 : Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 37: Cho $a, b, c > 0; a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$

Bài 38 : Cho $x, y, z > 0$. CMR: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$

Bài 39 : Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh:

$$\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \geq 1$$

Bài 40 : Cho $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$

Bài 41 : Chứng minh rằng : $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10 > 0$ với mọi x

Bài 42 : Cho $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ và $x + y + z = 1$.

Chúng minh rằng $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$

Bài 43 : Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Chúng minh rằng: $\frac{x^3}{y+2z} + \frac{y^3}{z+2x} + \frac{z^3}{x+2y} \geq \frac{1}{3}$

Bài 44 : a. Chứng minh $x^2 - x + 1 > 0$ (với mọi x)

b. Chứng minh: $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \geq \frac{1}{3}$

Bài 45: Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

Bài 46: CMR với a, b, c là các số dương, ta có: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Bài 47: Cho x, y, z dương và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 + 2xz} + \frac{1}{z^2 + 2xy} \geq 9$$

Bài 48: Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ với $a + b \geq 1$

Bài 49: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 50: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 51: Cho biểu thức $A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$

a) Phân tích biểu thức A thành nhân tử

b) Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì $A < 0$

Bài 52: Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

Bài 53: Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

Bài 54: Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

Bài 55: Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 56: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 57: Cho 2 số a và b thỏa mãn $a \geq 1; b \geq 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Bài 58: Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \forall a, b > 0$

Bài 59: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 60: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 61: Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

Bài 62: Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

Bài 63: Cho 2 số a và b thỏa mãn $a \geq 1; b \geq 1$. Chứng minh: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$

Bài 64: Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 65: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 66: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2$$

Bài 67: Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

Bài 68: Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

Bài 69: Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-d}{a+b}$

Bài 70: Chứng minh rằng: $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Bài 71: Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ với $a + b \geq 1$

Bài 72: Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Bài 73: a) Cho $x > 0, y > 0$ và m, n là hai số thực. Chứng minh rằng $\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y}$

b) Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

Bài 74: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Bài 75: Cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh rằng $a + b \leq 2$

Bài 76: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 77: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 78: Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, p là nửa chu vi.

$$\text{CMR: } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Bài 79: Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

Bài 80: Cho biểu thức $A = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. Chứng minh rằng nếu a, b, c là 3 cạnh của một tam giác thì $A > 0$

Bài 81: Cho bốn số dương a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Bài 82: a) Chứng minh với mọi số thực x, y, z, t ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq x(y + z + t). \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?}$$

b) Chứng minh rằng với x, y bất kỳ, ta có: $x^4 + y^4 \geq xy^3 + x^3y$

Bài 83: a) Cmr : $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq -1$

b) Cho các số dương a và b thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Cmr : $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$

Bài 84: Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}$$

$$\text{b) } x^8 - x^7 + x^2 - x + 1 > 0$$

Bài 85: Cmr: a) $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$

$$\text{b) } a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$$

Bài 86: Chứng minh rằng:

$$\text{a) } x^3 + 4x + 1 > 3x^2 \text{ với } x \geq 0;$$

$$\text{b) } (x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 9 \geq 0;$$

$$\text{c) } a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab - 4ac + 8bc$$

Bài 87: Chứng minh với mọi số thực a, b khác 0 ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

Bài 88: Chứng minh BĐT: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$

Bài 89: a) Chứng minh: $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

b) Chứng minh: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$

c) Chứng minh: $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{1}{2}$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

d) Chứng minh: $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

e) Cho a và b cùng dấu. Chứng minh: $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 0$

Bài 90: Cho ba số dương a, b, c

a) Chứng minh rằng: $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$;

b) Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Bài 91: Cho $a+b+c < 0$, chứng minh: $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \leq 0$.

Bài 92: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right)^2 \geq (a+c)(b+d)$; b) $ab+bc+ca \leq 0$ khi $a+b+c=0$.

Bài 93: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác

a) Chứng minh rằng: $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$

b) Chứng minh rằng: $(a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca)$ thì tam giác đó là tam giác đều.

Bài 94: Cho $x+y=2$. Chứng minh rằng: $x^{2017} + y^{2017} \leq x^{2018} + y^{2018}$.

Bài 95: a) Chứng minh: $H = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

b) Chứng minh: $K = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

Bài 96: Cho ba số x, y, z .

a) Chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$;

b) Khi $\frac{x+y+z}{3} = \sqrt{673}$. Chứng minh $xy + yz + zx \leq 2019$.

Bài 97: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a+b=1$. Chứng minh $\left(a + \frac{1}{b} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{a} \right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Bài 98: Với $a, b, c > 0$. Hãy chứng minh các BĐT:

a) $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$; b) $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$;

c) $\frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c$.

Bài 99:

a) Cho $a^2 + b^2 \leq 2$. Chứng minh rằng: $a + b \leq 2$.

b) Cho a, b là các số tùy ý. Chứng minh: $4a(a+b)(a+1)(a+b+1) + b^2 \geq 0$

c) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh: $abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$

Bài 100:

Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Bài 101:

Cho các số a, b, c thỏa mãn $1 \geq a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$

Bài 102: Cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh rằng $a + b \leq 2$

Bài 103: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 104: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2$$

Bài 105: Cho a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 8$. Chứng minh $-4 \leq a + b \leq 4$

Bài 106: CMR với a, b, c là các số dương, ta có: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Bài 107: Cho biểu thức $A = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. Chứng minh rằng nếu a, b, c là 3 cạnh của một tam giác thì $A > 0$

Bài 108: CMR với a, b, c là các số dương, ta có: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Bài 109: Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác

$$\text{Chứng minh rằng } A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 110: Chứng minh rằng $\left(a - \frac{1}{b}\right)\left(b - \frac{1}{c}\right)\left(c - \frac{1}{a}\right) \geq \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right)\left(c - \frac{1}{c}\right)$, trong đó a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1.

Bài 111: Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ với mọi số thực a, b, c.

Bài 112: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{a+3c}{a+b} + \frac{a+3b}{a+c} + \frac{2a}{b+c} \geq 5$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 113: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Bài 114: Cho a và b là hai số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{25}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 115: Cho a, b, c là độ dài các cạnh và p là nửa chu vi của một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Bài 116: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Bài 117: Cho $x > y > 0$. Chứng minh: $\frac{x-y}{x+y} < \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Bài 118: Chứng minh biểu thức: $A = 4a(a+b)(a+b+c)(a+c) + b^2c^2 \geq 0$ với mọi a, b, c.

Bài 119: Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

Bài 120: Cho a, b, c > 0; a + b + c = 3.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$.

Bài 121: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 122: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 123: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 6$. Chứng minh rằng $\frac{x+y}{xyz} \geq \frac{4}{9}$

Bài 124: Cho $a, b, c > 0$ Chứng minh rằng

$$\frac{a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{b}{3b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{c}{3c^2 + 2a^2 + b^2} \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Bài 125: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a+b}{bc+a^2} + \frac{b+c}{ac+b^2} + \frac{c+a}{ab+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Bài 126: Cho a, b, c là các số không âm và không lớn hơn 2 thỏa mãn $a + b + c = 3$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

Bài 127: Chứng minh rằng: $\left(a - \frac{1}{b}\right)\left(b - \frac{1}{c}\right)\left(c - \frac{1}{a}\right) \geq \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right)\left(c - \frac{1}{c}\right)$, trong đó a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1

Bài 128: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 129: Chứng minh rằng: $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Bài 130: Chứng minh $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$ với mọi số dương a, b, c .

Bài 131: Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 132: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2$$

Bài 133: Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng : $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

Bài 134: Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

Bài 135: Cho a, b, c là các số dương.

$$\text{Chứng minh: } \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Bài 136: Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{3}{2} \text{ với } a \geq b \geq c > 0$$

Bài 137: Cho $a - b = 1$. Chứng minh $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

Bài 138: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 139: Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

Bài 140: Cho x, y thỏa mãn $xy \geq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$

Bài 141: Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz \text{ với mọi } x, y, z$$

Bài 142: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 143: Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

Bài 144: a) Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, p là nửa chu vi.

$$\text{CMR: } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

b) Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} > \frac{a-d}{a+b}$

B. Lời giải

Bài 1 : Cho x, y, z dương và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 + 2xz} + \frac{1}{z^2 + 2xy} \geq 9$$

Lời giải

$$\text{Đặt } a = x^2 + 2yz; b = y^2 + 2xz; c = z^2 + 2xy$$

$$\Rightarrow a, b, c > 0 \text{ và } a + b + c = (x + y + z)^2 = 1$$

Chứng minh: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = 9 \text{ hay } \frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2zx} + \frac{1}{z^2+2xy} \geq 9 (dfcm)$$

Bài 2 : Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ với $a+b \geq 1$

Lời giải

$$\text{Theo bài ra ta có: } a+b \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 1 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } (a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } 2(a^2 + b^2) \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$$

Bài 3 : Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Lời giải

$$\text{Đặt } x = b+c-a; y = a+c-b; z = a+b-c \Rightarrow x, y, z > 0$$

$$\Rightarrow x+y+z = a+b+c$$

$$2a = a+b+c - (b+c-a) = x+y+z - x = y+z \Rightarrow a = \frac{y+z}{2}$$

$$\text{Tương tự: } b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$$

$$\text{BDT chứng minh tương đương với: } \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geq 6 \text{ do } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Bài 4 : Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$. (đpcm)

Bài 5

- a) Chứng minh $x^2 - x + 1 > 0$ (với mọi x)
- b) Chứng minh: $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \geq \frac{1}{3}$
- c) Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức : $A = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

Lời giải

a) $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ (với mọi x)

- b) Từ kết quả câu a, nhân 2 vế của BĐT với số dương $3(x^2 - x + 1)$ được:

$$3x^2 + 3x + 3 > x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Suy ra: $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \geq \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} &= \frac{3(x^2 - x + 1) + x^2 + x + 1 - 3(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} \\ &= 3 - \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 - x + 1} = 3 - \frac{2(x-1)^2}{x^2 - x + 1} \leq 3 \end{aligned}$$

Vậy $\text{Max} A = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Bài 6 :

- a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$$

- b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Lời giải

a) Ta có: $A = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1 = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1$

Do $(x - y)^2 \geq 0; (y - 2)^2 \geq 0$

$$\text{Nên } A = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow x = y = 2$$

$$\text{Vậy } \min A = 1 \Leftrightarrow x = y = 2$$

$$\text{b) } B = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + (x+1)} = \frac{3(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{x^2+1}$$

$$\text{Do } x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{B}{x^2+1} \leq 3. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Vậy } \max B = 3 \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = |x - 2006| + |x - 2007| + 2006$

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} P &= |x - 2006| + |x - 2007| + 2006 \\ &= |x - 2006| + |2007 - x| + 2006 \geq |(x - 2006) + (2007 - x)| + 2006 = 2007 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \min P = 2007 \Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$$

Bài 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1} \\ &= \frac{-335x^2 - 335 + 335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} = -335 + \frac{335(x+3)^2}{x^2 + 1} \geq -335 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -335 khi $x = -3$

Bài 9 : Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

Lời giải

Từ

$$a+b+c=1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a} \\ \frac{1}{b}=1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b} \\ \frac{1}{c}=1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 3+2+2+2=9$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$$

Bài 10 : Tìm các giá trị của x để biểu thức:

$P=(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

$$P=(x-1)(x+6)(x+2)(x+3)=(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)=(x^2+5x)^2-36$$

Ta thấy $(x^2+5x)^2 \geq 0$ nên $P=(x^2+5x)^2-36 \geq -36$

$$\text{Do đó } \min P = -36 \Leftrightarrow x^2+5x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases}$$

Bài 11 : Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Lời giải

Đặt $b+c-a=x>0; c+a-b=y>0; a+b-c=z>0$

$$\text{từ đó suy ra } a=\frac{y+z}{2}; b=\frac{x+z}{2}; c=\frac{x+y}{2};$$

Thay vào ta được

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

$$\text{Từ đó suy ra } A \geq \frac{1}{2}(2+2+2) \text{ hay } A \geq 3$$

Bài 12 : Chứng minh rằng: $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} \\
 &= \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{100.100} \\
 &< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1
 \end{aligned}$$

Bài 13 : Cho a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 8$. Chứng minh $-4 \leq a + b \leq 4$

Lời giải

Ta có:

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ mà } a^2 + b^2 \leq 8 \text{ nên } 2ab \leq 8$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 8 + 8 = 16$$

$$\Rightarrow (a + b)^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow (a + b + 4)(a + b - 4) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq a + b \leq 4 \text{ (đpcm)}$$

Bài 14 : Cho hai số x, y thỏa mãn điều kiện $(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$

Lời giải

$$(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + x^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 = -3x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 = -3x^2 + 1$$

$$\text{Ta có: } -3x^2 + 1 \leq 1 \forall x \Rightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 + y^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq A \leq 2$$

$$A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0. \text{ Vậy } \min A = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } \max A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}$$

Bài 15 : Cho các số a, b, c thỏa mãn $1 \geq a, b, c \geq 0$.

Chứng minh rằng: $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$

Lời giải

Vì $b, c \in [0; 1]$ nên suy ra $b^2 \leq b; c^3 \leq c$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\text{Do đó : } a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq a + b + c - ab - bc - ca \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } a + b + c - ab - bc - ca = (a-1)(b-1)(c-1) - abc + 1 \quad (2)$$

$$\text{Vì } a, b, c \in [0;1] \text{ nên } (a-1)(b-1)(c-1) \leq 0; -abc \leq 0$$

$$\text{Do đó từ (2)} \Rightarrow a + b + c - ab - bc - ca \leq 1 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (3) suy ra } a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$$

Bài 16 : Cho ba số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

Lời giải

Từ

$$a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

Bài 17 : Cho tam giác có nửa chu vi $p = \frac{a+b+c}{2}$ với a, b, c là độ dài ba cạnh

$$\text{Chứng minh } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Lời giải

$$\text{Ta có : } \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{a}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{b}; \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{c}$$

Cộng vế với vế các BĐT cùng chiều:

$$2 \left(\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-a} \right) \geq \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-a} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Bài 18 : Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{aligned}
\text{Đặt } P &= \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \\
&= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)
\end{aligned}$$

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ và $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ với a, b, c dương, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 \right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + 1 \right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + 1 \right)$$

Bởi vậy

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1 \right) \\
&= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \text{ (đpcm)}
\end{aligned}$$

Bài 19 : Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Áp dụng bất đẳng thức $(**)$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$. (đpcm)

Bài 20 : Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh rằng : $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 8$

Lời giải

Bài toán phụ : Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$ (1)

Chứng minh (1) $\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

Áp dụng bài toán phụ (1) ta có:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 \quad (2)$$

Mà $\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 = \left(2 + \frac{x+y}{xy}\right)^2 = \left(2 + \frac{2}{xy}\right)^2$ (vì $x + y = 2$)

Với $x, y > 0$ ta có: $0 < xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ (vì $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$)

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2} \Rightarrow \frac{2}{xy} \geq \frac{8}{(x+y)^2}$$

$$\Rightarrow \left(2 + \frac{2}{xy}\right)^2 \geq \left(2 + \frac{8}{(x+y)^2}\right) \geq (2+2)^2 = 16 \text{ (Vi } x+y=2)$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 16 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra : } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 8$$

Bài 21 : Cho hai số a, b thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Chứng minh : $a^3 + b^3 + ab \geq \frac{1}{2}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 + ab \geq \frac{1}{2}(1) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + ab - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 + b^2 - ab) + ab - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - \frac{1}{2} \geq 0 \text{ (vì } a+b=1)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2(1-a)^2 - 1 \geq 0 \text{ (vì } b=1-a)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2 - 4a + 2a^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 4\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) \geq 0 \forall a \quad (2)$$

(2) đúng nên (1) đúng ta có đpcm.

Bài 22 : Chứng minh rằng $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6) + 10 > 0$ với mọi a .

Lời giải

$$(a-1)(a-3)(a-4)(a-6) + 10 = (a^2 - 7a + 6)(a^2 - 7a + 12) + 10$$

Đặt $t = a^2 - 7a + 6$. Khi đó ta có:

$$(a-1)(a-3)(a-4)(a-6) + 10 = (a^2 - 7a + 6)(a^2 - 7a + 12) + 10 = (t+3)^2 + 1 > 0.$$

Bài 23 : Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$

Lời giải

Ta có:

$$\left(\frac{1}{2}a - b\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + b^2 \geq ab \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2}a - c\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + c^2 \geq ac \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{2}a - d\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + d^2 \geq ad \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{2}a - e\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + e^2 \geq ae \quad (4)$$

Ta cộng (1), (2), (3), (4) vế theo vế ta được:

$$4 \cdot \frac{1}{4}a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

Bài 24 : Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, p là nửa chu vi.

$$\text{CMR: } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{p-b+p-c} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{p-c+p-a} = \frac{2}{b}$$

Cộng từng vế ta có điều phải chứng minh

Bài 25 : Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} > \frac{a-d}{a+b}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} \geq 4$$

Xét

$$\begin{aligned} & \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} - 4 \\ &= (a+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} \right) + (b+d) \left(\frac{1}{c+d} + \frac{1}{a+b} \right) - 4 \\ &\geq (a+c) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} + (b+d) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} - 4 = 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow đpcm

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d$

Bài 26 : Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 100} \\ &< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} < 1 \end{aligned}$$

Vậy $B < 1$

Bài 27 : So sánh hai số sau: $C = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ và $D = 2^{32}$

Lời giải

$$\begin{aligned} C &= (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ (2-1)C &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ C &= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ C &= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ C &= (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\ C &= (2^{16}-1)(2^{16}+1) = 2^{32} - 1 \end{aligned}$$

Vì $2^{32} - 1 < 2^{32}$ nên $C < D$

Bài 28 : Cho số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=2016$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức: $P = \frac{2a+3b+3c+1}{2015+a} + \frac{3a+2b+3c}{2016+b} + \frac{3a+3b+2c-1}{2017+c}$

Lời giải

Ta có:

$$P = \frac{2a+3b+3c+1}{2015+a} + \frac{3a+2b+3c}{2016+b} + \frac{3a+3b+2c-1}{2017+c}$$

$$= \frac{b+c+4033}{2015+a} + \frac{c+a+4032}{2016+b} + \frac{a+b+4031}{2017+c}$$

Đặt

$$2015+a = x$$

$$2016+b = y$$

$$2017+c = z$$

$$P = \frac{b+c+4033}{2015+a} + \frac{c+a+4032}{2016+b} + \frac{a+b+4031}{2017+c}$$

$$= \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{z}} + 2\sqrt{\frac{y}{z} \cdot \frac{z}{y}} = 6 \quad (\text{Co-si})$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z$ suy ra $a = 673, b = 672, c = 671$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 6 khi $a = 673, b = 672, c = 671$

Bài 29 : Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác.

Chúng minh: $\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ac}{a-b+c} \geq a+b+c$

Lời giải

Vì a, b, c là 3 cạnh của tam giác nên $a+b-c > 0; -a+b+c > 0; a-b+c > 0$

Đặt $x = -a+b+c > 0; y = a-b+c > 0; z = a+b-c > 0$

Ta có: $x+y+z = a+b+c; a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$

$$\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ac}{a-b+c} = \frac{(y+z)(x+z)}{4z} + \frac{(x+z)(x+y)}{4x} + \frac{(x+y)(y+z)}{4y}$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + 3x + 3y + 3z \right) = \frac{1}{4} \left[3(x+y+z) + \frac{1}{2} \left(2\frac{xy}{z} + 2\frac{yz}{x} + 2\frac{xz}{y} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[3(x+y+z) + \frac{y}{2} \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \frac{x}{2} \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \frac{z}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right]$$

$$\geq \frac{1}{4} \left[3(x+y+z) + x + y + z \right] = x + y + z$$

Mà $x + y + z = a + b + c$ nên suy ra điều phải chứng minh.

Bài 30 : Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 2 \cdot \frac{a}{c}$$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} = 2 \cdot \frac{c}{b}$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{c} = 2 \cdot \frac{b}{a}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$2 \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right) \geq 2 \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \right) \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

Bài 31 : CMR với a, b, c là các số dương, ta có: $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$

Lời giải

$$A = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right)$$

$$\text{Mà } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \text{ (BDT Cô si)}$$

$$\text{Do đó: } A \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9. \text{ Vậy } A \geq 9$$

Bài 32 : Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

Lời giải

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)} \geq 0 \quad (2)$$

Vì $x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0 \quad (2)$

\Rightarrow BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$

Bài 33 : Cho các số thực $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 2a-1 \Rightarrow \frac{1}{2a-1} \geq \frac{1}{a^2}$$

$$\text{Nên } VT \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} \geq \frac{8}{(a+b)^2}; \frac{8}{(a+b)^2} + 2 \geq \frac{8}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 2 \geq \frac{8}{a+b}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \geq \frac{8}{b+c}; \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + 2 \geq \frac{8}{c+a}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$$

$$\text{Do vậy, } \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 34 :

$$\text{a) Cho } x > 0, y > 0 \text{ và } m, n \text{ là hai số thực. Chứng minh rằng } \frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y}$$

b) Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

Lời giải

a) Với $x > 0, y > 0$ và $m, n \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (m^2y + n^2x)(x+y) \geq xy(m+n)^2$$

$$\Leftrightarrow (nx - my)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng}$$

b) Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} + \frac{p^2}{z} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y} + \frac{p^2}{z} \geq \frac{(m+n+p)^2}{x+y+z} \quad (2)$$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có:

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{do } abc=1)$$

Hay $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Do đó: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

Bài 35. Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

Chúng minh $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1 \right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1 \right) - 3 \\ &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+c+a}{c+a} + \frac{c+a+b}{a+b} - 3 = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3\end{aligned}$$

Đặt : $x = b + c; y = c + a; z = a + b$. Suy ra $x, y, z > 0$ và ta có:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{1}{2}(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 3 \\ &= \frac{1}{2} \left[9 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) \right] - 3 \\ &= \frac{1}{2} \left[9 + \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(x-z)^2}{xz} + \frac{(y-z)^2}{yz} \right] - 3 \geq \frac{1}{2} \cdot 9 - 3 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$(\text{Vì } \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(x-z)^2}{xz} + \frac{(y-z)^2}{yz} \geq 0)$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c$$

$$\text{Chứng minh : } \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \quad (2)$$

Thật vậy, do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử : $a \geq b \geq c$

Xét hiệu :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \right) - \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \\
&= \left(\frac{a^2}{b^2+c^2} - \frac{a}{b+c} \right) + \left(\frac{b^2}{c^2+a^2} - \frac{b}{c+a} \right) + \left(\frac{c^2}{a^2+b^2} - \frac{c}{a+b} \right) \\
&= \frac{(a^2b - ab^2) + (a^2c - ac^2)}{(b^2+c^2)(b+c)} + \frac{(b^2a - ba^2) + (b^2c - bc^2)}{(c^2+a^2)(c+a)} + \frac{(c^2a - ca^2) + (c^2b - cb^2)}{(a^2+b^2)(a+b)} \\
&= \frac{ab(a-b) + ac(a-c)}{(b^2+c^2)(b+c)} + \frac{-ab(a-b) + bc(b-c)}{(c^2+a^2)(c+a)} + \frac{-ac(a-c) - bc(b-c)}{(a^2+b^2)(a+b)} \\
&= ab(a-b) \left(\frac{1}{(b^2+c^2)(b+c)} - \frac{1}{(c^2+a^2)(c+a)} \right) \\
&\quad + bc(b-c) \left(\frac{1}{(c^2+a^2)(c+a)} - \frac{1}{(a^2+b^2)(a+b)} \right)
\end{aligned}$$

Vì giá trị của các biểu thức trong ngoặc đều không âm

Vậy $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

Bài 36. Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức (***) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{Mà } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \text{ nên } \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}. (\text{đpcm})$$

Bài 37. Cho $a, b, c > 0; a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$

Lời giải

Do $a, b > 0$ và $1+b^2 \geq 2b$ với mọi b nên:

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$$

Mà $a + b + c = 3$ nên $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$ (1)

Cũng từ $a + b + c = 3 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 9$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 9$

Mà $a^2 + b^2 \geq 2ab; b^2 + c^2 \geq 2bc; c^2 + a^2 \geq 2ac$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Suy ra $3(ab + bc + ca) \leq 9 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ đpcm

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 38. Cho $x, y, z > 0$. CMR: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq x; \frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq x; \frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z$$

Cộng lại ta có điều phải chứng minh

Bài 39. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh:

$$\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \geq 1$$

Lời giải

Áp dụng hệ quả bất đẳng thức Bu-nhi-a Cóp-xki, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} &= \frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} = \frac{a^2}{2ab+ac} + \frac{b^2}{2bc+ab} + \frac{c^2}{2ac+bc} \geq \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ac)} \end{aligned}$$

Ta chứng minh

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3ab + 3bc + 3ca$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \geq 1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=1 \\ a,b,c>0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Bài 40. Cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $a^4+b^4+c^4 \geq a^3+b^3+c^3$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (a-1)^2(a^2+a+1) \geq 0 \Leftrightarrow a^4-a^3-a+1 \geq 0 \quad (1)$$

Tương tự cũng có:

$$b^4-b^3-b+1 \geq 0 \quad (2)$$

$$c^4-c^3-c+1 \geq 0 \quad (3)$$

Cộng (1);(2);(3) ta được:

$$a^4-a^3-a+1+b^4-b^3-b+1+c^4-c^3-c+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)+3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-(a^3+b^3+c^3) \geq 0 \Leftrightarrow a^4+b^4+c^4 \geq a^3+b^3+c^3 \text{ (Dfcm)}$$

Bài 41. Chứng minh rằng : $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10 > 0$ với mọi x

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10 = (x-1)(x-6)(x-3)(x-4)+10$$

$$= (x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+10$$

$$= (x^2-7x+9-3)(x^2-7x+9+3)+10$$

$$= (x^2-7x+9)^2-9+10 = (x^2-7x+9)^2+1 > 0 \quad (\forall x)$$

$$\text{Vì } (x^2-7x+9)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x$$

Do đó : $(x^2-7x+9)^2+1 > 0$ với mọi x (bài toán được chứng minh).

Bài 42. Cho $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ và $x+y+z=1$.

$$\text{Chứng minh rằng } xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}$$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow xyz &\geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \\ \Leftrightarrow xyz &\geq (1-2z)(1-2x)(1-2y) \\ \Leftrightarrow xyz &\geq 1-2(x+y+z)+4(xy+yz+zx)-8xyz \\ \Leftrightarrow xyz &\geq 1-2+4(xy+yz+zx)-8xyz \\ \Leftrightarrow 1+xyz &\geq 4(xy+yz+zx)-8xyz \\ \Leftrightarrow 1+\frac{1}{27} &\geq 4(xy+yz+zx)-8xyz \\ \Leftrightarrow \frac{7}{27} &\geq xy+yz+zx-2xyz (dfcm) \end{aligned}$$

Bài 43. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^3}{y+2z} + \frac{y^3}{z+2x} + \frac{z^3}{x+2y} \geq \frac{1}{3}$

Lời giải

Ta có: $\frac{9x^3}{y+2z} + x(y+2z) \geq 6x^2$; $\frac{9y^3}{z+2x} + y(z+2x) \geq 6y^2$; $\frac{9z^3}{x+2y} + z(x+2y) \geq 6z^2$

Lại có: $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

Nên ta có:

$$\begin{aligned} \frac{9x^3}{y+2z} + \frac{9y^3}{z+2x} + \frac{9z^3}{x+2y} + 3(xy+yz+zx) &\geq 6(x^2+y^2+z^2) \\ \Rightarrow \frac{x^3}{y+2z} + \frac{y^3}{z+2x} + \frac{z^3}{x+2y} &\geq \frac{x^2+y^2+z^2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$

Bài 44: a. Chứng minh $x^2 - x + 1 > 0$ (với mọi x)

b. Chứng minh: $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \geq \frac{1}{3}$

Lời giải

$$\text{c) } x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ (với mọi } x \text{)}$$

d) Từ kết quả câu a, nhân 2 vế của BĐT với số dương $3(x^2 - x + 1)$ được:

$$3x^2 + 3x + 3 > x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \geq \frac{1}{3}$$

Bài 45: Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Vì } x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0$$

Suy ra BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Bài 46: CMR với a, b, c là các số dương, ta có: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \\ &= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \end{aligned}$$

Mà $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (BĐT Cô si). Do đó: $A \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$. Vậy $A \geq 9$

Bài 47: Cho x, y, z dương và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 + 2xz} + \frac{1}{z^2 + 2xy} \geq 9$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

$$a) \text{ C/m: } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$+) \text{ Từ giả thiết suy ra: } (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \quad (a+b+c > 0)$$

$$\text{Biến đổi được kết quả: } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c \Rightarrow \text{Tam giác đó là đều (đpcm)}$$

$$b) \text{ Đặt } a = x^2 + 2yz; b = y^2 + 2xz; c = z^2 + 2xy$$

$$\Rightarrow a, b, c > 0 \text{ và } a+b+c = (x+y+z)^2 = 1$$

$$\text{Chứng minh: } (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = 9 \text{ hay } \frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2zx} + \frac{1}{z^2+2xy} \geq 9 \text{ (đpcm)}$$

$$\text{Bài 48: Chứng minh rằng: } a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \text{ với } a+b \geq 1$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a+b \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 1 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } (a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } 2(a^2 + b^2) \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$$

Bài 49: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Lời giải

$$a) \text{ Đặt } x = b+c-a; \quad y = a+c-b; \quad z = a+b-c \Rightarrow x, y, z > 0$$

$$\Rightarrow x+y+z = a+b+c$$

$$2a = a+b+c - (b+c-a) = x+y+z - x = y+z \Rightarrow a = \frac{y+z}{2}$$

$$\text{Tương tự: } b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$$

BĐT chứng minh tương đương với: $\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geq 6 \text{ do } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Bài 50: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức } (**) \text{ ta có: } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$$

$$\text{Áp dụng BĐT } (*) \text{ ta có: } \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$$

(Vì $abc = 1$)

$$\text{Hay } \frac{1}{\frac{a^2}{ab+ac}} + \frac{1}{\frac{b^2}{bc+ab}} + \frac{1}{\frac{c^2}{ac+bc}} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{Mà } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \text{ nên } \frac{1}{\frac{a^2}{ab+ac}} + \frac{1}{\frac{b^2}{bc+ab}} + \frac{1}{\frac{c^2}{ac+bc}} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}. (\text{đpcm})$$

Bài 51: Cho biểu thức $A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$

a) Phân tích biểu thức A thành nhân tử

b) Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì $A < 0$

c) Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2) - (2bc)^2 \\ &= (b^2 + c^2 - 2bc - a^2)(b^2 + c^2 + 2bc - a^2) \\ &= (b + c - a)(b + c + a)(b - c - a)(b - c + a) \end{aligned}$$

b) Ta có: $b + c - a > 0$ (BĐT tam giác)

$$b + c + a > 0 \text{ (BĐT tam giác)}$$

$$b - c - a < 0 \text{ (BĐT tam giác)}$$

$$b + c - a > 0 \text{ (BĐT tam giác)}$$

$$\text{Vậy } A < 0$$

Bài 52: Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} a + b + c = 1 &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 53: Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

Lời giải

Học sinh chứng minh $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ với mọi $x, y > 0$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \geq 0; \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 2 \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y > 0$

Bài 54: Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

Lời giải

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)$$

$$= [(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2]$$

$$= -(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 55: Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Lời giải

Đặt $b+c-a = x > 0; c+a-b = y > 0; a+b-c = z > 0$

Từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$

Thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{2} [2+2+2] \Leftrightarrow A \geq 3$$

Bài 56: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh BĐT: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*) \text{ . Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn... đúng)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Áp dụng BĐT (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Ta có:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+ac+bc)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vi } abc=1)$$

$$\text{Hay } \frac{1}{ab+ac} + \frac{1}{bc+ab} + \frac{1}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{Mà } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3 \text{ nên } \frac{1}{ab+ac} + \frac{1}{bc+ab} + \frac{1}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 57: Cho 2 số a và b thỏa mãn $a \geq 1; b \geq 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} &= \left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} \right) + \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \right) \\ &= \frac{ab-a^2}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{ab-b^2}{(1+b^2)(1+ab)} \\ &= \frac{a(b-a)(1+b^2) + b(a-b)(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} = \frac{(b-a)(a+ab^2-b-a^2b)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} = \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \\ \text{Do } a \geq 1; b \geq 1 \text{ nên } \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Bài 58: Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \forall a, b > 0$

Lời giải

Xét hiệu:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \frac{4}{a+b} \\ &= \frac{b(a+b) + a(a+b) - 4ab}{ab(a+b)} \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0 \text{ (Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a=b)$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \text{ (dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a=b)$$

Bài 59: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Áp dụng bất đẳng thức $(**)$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$$

Áp dụng BĐT $(*)$ ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\forall abc=1)$$

Hay

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$. (đpcm)

Bài 60: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } P &= \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ và $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ với a, b, c dương, dấu bằng xảy ra

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

Ta có: $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 \right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + 1 \right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + 1 \right)$

$$\begin{aligned} \text{Bởi vậy } P &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1 \right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Bài 61: Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$

Lời giải

Học sinh chứng minh $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ với mọi $x, y > 0$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \geq 0; \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - 2 \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y > 0$

Bài 62: Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

Lời giải

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 &= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab) \\ &= [(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2] \\ &= -(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \end{aligned}$$

Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 63: Cho 2 số a và b thỏa mãn $a \geq 1; b \geq 1$. Chứng minh: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} &= \left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} \right) + \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \right) = \frac{ab-a^2}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{ab-b^2}{(1+b^2)(1+ab)} \\ &= \frac{a(b-a)(1+b^2) + b(a-b)(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} = \frac{(b-a)(a+ab^2-b-a^2b)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} = \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \end{aligned}$$

$$\text{Do } a \geq 1; b \geq 1 \text{ nên } \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Bài 64: Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Lời giải

Đặt $b+c-a=x>0$; $c+a-b=y>0$; $a+b-c=z>0$

Từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}$; $b = \frac{x+z}{2}$; $c = \frac{x+y}{2}$

Thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{2} [2+2+2] \Leftrightarrow A \geq 3$$

Bài 65: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh BĐT: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*) . \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2 \Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Áp dụng BĐT (**) ta có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta

$$\text{có: } \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2}{2(ab+ac+bc)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2}{2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \quad (\text{Vi } abc=1)$$

$$\text{Hay } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{Mà } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3 \text{ nên } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 66: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2$$

Lời giải

- Nhận xét : có $a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(c + a)$

Tương tự: $b + ca = (b + a)(b + c)$; $c + ab = (c + a)(c + b)$

$$\text{Do đó: } VT = \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+a)(b+c)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+a)(b+c)}{c+a} \geq 2(a+b)$$

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(a+c)$$

$$\frac{(b+a)(b+c)}{a+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(b+c)$$

Vậy $2.VT \geq 4(a+b+c) = 4 \Leftrightarrow VT \geq 2$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 67: Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

Lời giải

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2 \cdot (xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \quad (2)$$

Vì $x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

\Rightarrow BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu “=” xảy ra khi $x = y$

Bài 68: Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

Lời giải

$$\text{Từ } a+b+c=1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

Bài 69: Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-d}{a+b}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} &\geq \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} \geq 4 \end{aligned}$$

Xét

$$\begin{aligned} &\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} - 4 \\ &= (a+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} \right) + (b+d) \left(\frac{1}{c+d} + \frac{1}{a+b} \right) - 4 \\ &\geq (a+c) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} + (b+d) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} - 4 = 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow đpcm

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = d$

Bài 70: Chứng minh rằng: $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Lời giải

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} \\
&= \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{100.100} \\
&< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1
\end{aligned}$$

Bài 71: Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ với $a + b \geq 1$

Lời giải

Theo bài ra ta có: $a + b \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 1$ (1)

Mặt khác: $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2(a^2 + b^2) \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

Bài 72: Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Lời giải

Ta có:

$$\left(\frac{1}{2}a - b\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + b^2 \geq ab \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2}a - c\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + c^2 \geq ac \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{2}a - d\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + d^2 \geq ad \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{2}a - e\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}a^2 + e^2 \geq ae \quad (4)$$

Ta cộng (1), (2), (3), (4) về theo về ta được:

$$\begin{aligned}
4 \cdot \frac{1}{4}a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &\geq ab + ac + ad + ae \\
\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &\geq a(b + c + d + e)
\end{aligned}$$

Bài 73: a) Cho $x > 0, y > 0$ và m, n là hai số thực. Chứng minh rằng $\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y}$

b) Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

Lời giải

a) Với $x > 0, y > 0$ và $m, n \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (m^2y + n^2x)(x+y) \geq xy(m+n)^2$$

$$\Leftrightarrow (nx - my)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng}$$

b) Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} + \frac{p^2}{z} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y} + \frac{p^2}{z} \geq \frac{(m+n+p)^2}{x+y+z} \quad (2)$$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có:

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (do \quad abc=1)$$

Hay $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Do đó: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

Bài 74: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a+b=1$. Chứng minh $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Lời giải

a) Có: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (*)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$

Áp dụng (*) có: $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(a + \frac{1}{b}\right) \quad ; \quad \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(b + \frac{1}{a}\right)$

Suy ra: $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5\left[\left(a + \frac{1}{b}\right) + \left(b + \frac{1}{a}\right)\right]$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5\left[(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (Vi \quad a+b=1)$$

Với a, b dương, chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} = 4 \quad (Vi \quad a+b=1)$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

Ta được: $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5.4$

$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Bài 75: Cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh rằng $a + b \leq 2$

Lời giải

Giả sử

$$a + b > 2 \Leftrightarrow (a + b)^3 > 2^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) > 8 \Leftrightarrow 2 + 3ab(a + b) > 8(a^3 + b^3 = 2)$$

$$\Leftrightarrow 3ab(a + b) > 6 \Leftrightarrow ab(a + b) > 2 \Leftrightarrow ab(a + b) > a^3 + b^3 (a^3 + b^3 = 2)$$

$$\Leftrightarrow ab(a + b) > (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow ab > a^2 - ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 < 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 < 0 \text{ (Vô lý)}$$

Vậy $a + b \leq 2$

Bài 76: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Lời giải

Đặt $b + c - a = x > 0$; $c + a - b = y > 0$; $a + b - c = z > 0$. Ta có: $x, y, z > 0$

Từ đó suy ra: $a = \frac{y+z}{2}$; $b = \frac{x+z}{2}$; $c = \frac{x+y}{2}$

Thay vào ta được: $A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2) \Rightarrow A \geq 3$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Bài 77: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Lời giải

Đặt $b + c - a = x > 0$; $c + a - b = y > 0$; $a + b - c = z > 0$

Từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}$; $b = \frac{x+z}{2}$; $c = \frac{x+y}{2}$

Thay vào ta được:

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A \geq 3 \Leftrightarrow a=b=c$

Bài 78: Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, p là nửa chu vi.

$$\text{CMR: } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{p-a+p-c} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{p-c+p-a} = \frac{2}{b}$$

Cộng từng vế ta có điều phải chứng minh

Bài 79: Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

Lời giải

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 &= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab) \\ &= [(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2] \\ &= -(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \end{aligned}$$

Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 80 : Cho biểu thức $A = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. Chứng minh rằng nếu a, b, c là 3 cạnh của một tam giác thì $A > 0$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4a^2b^2 - (2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4) \\ &= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\ &= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \end{aligned}$$

Do a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên

Bài 81: Cho bốn số dương a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Lời giải:

$$\text{Cho bốn số dương } a, b, c, d. \text{ Chứng minh rằng: } 1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vì $a, b, c, d > 0$ ta có: $\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c}$ (1); $\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d}$ (2)

$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{c+a}$$
 (3); $\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d}{d+b}$ (4)

Lấy (1), (2), (3) và (4) cộng về theo về, thu gọn ta được điều phải chứng minh.

(**Chú ý : Dạng tương tự :** Cho bốn số dương a, b, c, d .

Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b}$ có giá trị không nguyên)

Bài 82: a) Chứng minh với mọi số thực x, y, z, t ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq x(y + z + t). \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?}$$

b) Chứng minh rằng với x, y bất kỳ, ta có: $x^4 + y^4 \geq xy^3 + x^3y$

Lời giải:

a) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq x(y + z + t)$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 \geq 4xy + 4xz + 4xt$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 4xz + 4z^2) + (x^2 - 4xt + 4t^2) + x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 + (x - 2t)^2 + x^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow x = y = z = t = 0$.

b) Ta có: $x^4 + y^4 \geq xy^3 + x^3y \Leftrightarrow x^3(x - y) + y^3(y - x) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^3 - y^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x - y)(x^2 + xy + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2}y \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right] \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow x = y$.

Bài 83: a) Cmr : $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq -1$

b) Cho các số dương a và b thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Cmr : $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$

Lời giải:

a) Xét hiệu : $A = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - (-1) = \dots = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + 1$

Đặt $x^2 - 5x + 5 = y$. Khi đó, $A = (y-1)(y+1) + 1 = y^2 \geq 0$.

Vậy, $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq -1$.

Dấu “=” $\Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 0$ (giải tiếp tìm x)

b) Ta có:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) = \left(1 + \frac{a+b}{a}\right)\left(1 + \frac{a+b}{b}\right) = \left(2 + \frac{b}{a}\right)\left(2 + \frac{a}{b}\right) = 5 + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 5 + 2.2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 9$$

(Vì các số dương a và b thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$)

Vậy, $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$. Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Bài 84: Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}$

b) $x^8 - x^7 + x^2 - x + 1 > 0$

Lời giải:

a) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}$

Áp dụng BĐT $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Dấu “=” $\Leftrightarrow x = y$.

Ta có: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \geq 2 \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 2 \cdot \frac{a}{c} \quad (1)$

Tương tự, $\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2 \cdot \frac{b}{a} \quad (2)$ và $\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 2 \cdot \frac{c}{b} \quad (3)$

Lấy (1), (2) và (3) cộng vế theo vế ta được đpcm.

Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b = c \neq 0$.

b) Đặt $A = x^8 - x^7 + x^2 - x + 1 = (x-1)x^7 - (x-1) + x^2 = (x-1)(x^7 - 1) + x^2$

+ Nếu $x \geq 1$ thì $x^7 \geq 1$, do đó $(x-1)(x^7 - 1) \geq 0$, còn $x^2 > 0$ nên $A > 0$

+ Nếu $x < 1$ thì $x^7 < 1$, do đó $(x-1)(x^7 - 1) > 0$, còn $x^2 \geq 0$ nên $A > 0$

Vậy, $A = x^8 - x^7 + x^2 - x + 1 > 0$ với mọi x .

Bài 85: Cmr: a) $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$

b) $a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$

Lời giải:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c \Leftrightarrow \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 - c + \frac{1}{4}\right) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \quad (\text{Đúng})$

Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$

b) $a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (2a^2b^2 - 4ab + 2) \geq 0$
 $\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2(ab - 1)^2 \geq 0$

Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b = 1$ hoặc $\Leftrightarrow a = b = -1$

Bài 86: Chứng minh rằng:

a) $x^3 + 4x + 1 > 3x^2$ với $x \geq 0$;

b) $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 9 \geq 0$;

c) $a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab - 4ac + 8bc$

Lời giải:

Chứng minh rằng:

a) $x^3 + 4x + 1 > 3x^2$ với $x \geq 0$

$\Leftrightarrow x(x-2)^2 + x^2 + 1 > 0$ với $x \geq 0$ (Đúng)

b) Xét $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 9 = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 9$

Đặt $x^2 - 7x + 9 = a$. Khi đó, ta có: $(a-3)(a+3) + 9 = a^2 \geq 0$

Vậy, $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 9 \geq 0$ (đpcm)

$$c) a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab - 4ac + 8bc \Leftrightarrow (a^2 - 4ab + 4b^2) + 4c^2 + (4ac - 8bc) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)^2 + 2.(a-2b).(2c) + (2c)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2b+2c)^2 \geq 0 \text{ (Đúng)}$$

Bài 87: Chứng minh với mọi số thực a, b khác 0 ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \Leftrightarrow \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\right] - 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1^2\right] - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right)^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - ab}{ab} \cdot \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left[\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2\right] \cdot (a-b)^2}{(ab)^2} \geq 0 \text{ (Đúng)}$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b \neq 0$.

Vậy, $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ với $a, b \neq 0$. Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b \neq 0$.

Bài 88: Chứng minh BĐT: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$

Lời giải:

$$\text{Chứng minh BĐT: } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$$

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) \geq x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

$$\text{Vậy, } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}. \text{ Dấu “=”} \Leftrightarrow x = y.$$

Bài 89: a) Chứng minh: $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

b) Chứng minh: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$

c) Chứng minh: $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{1}{2}$ với $n \in N, n \geq 1$.

d) Chứng minh: $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$ với $n \in N, n \geq 1$

e) Cho a và b cùng dấu. Chứng minh: $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 0$

Lời giải:

a) Chứng minh: $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

Ta có: $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab + ac - 2bc \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - (ab - ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)(b - c) + (b - c)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b + c\right)^2 \geq 0 \text{ (Đúng)}$$

Vậy, $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$. Dấu “=” $\Leftrightarrow \frac{a}{2} - b + c = 0$.

b) Chứng minh: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

*** Cách 1: Dùng biến đổi tương đương.**

Ta có: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 - a^2bc - ab^2c - abc^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^4 + b^4 - 2a^2b^2) + (b^4 + c^4 - 2b^2c^2) + (c^4 + a^4 - 2c^2a^2)$$

$$+ (a^2b^2 + b^2c^2 - 2ab^2c) + (b^2c^2 + c^2a^2 - 2abc^2) + (c^2a^2 + a^2b^2 - 2a^2bc) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 \geq 0 \text{ (Đúng)}$$

Vậy, $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$. Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b = c$.

*** Cách 2: Dùng BĐT phụ:** $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. Dấu “=” $\Leftrightarrow x = y = z$.

Ta có: $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2$

$$\geq (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$$

$$\geq (ab) \cdot (bc) + (bc) \cdot (ca) + (ca) \cdot (ab) = abc(a + b + c)$$

Vậy, $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$. Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b = c$.

c) Chứng minh: $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{1}{2}$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Với $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ ta có: $\frac{1}{k^2 + (k+1)^2} = \frac{1}{2k^2 + 2k + 1} < \frac{1}{2k^2 + 2k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

Do đó, $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} = \frac{1}{1^2 + 2^2} + \frac{1}{2^2 + 3^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2}$

$$< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Vậy, $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{1}{2}$ với $n \in N, n \geq 1$

d) Chứng minh: $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$ với $n \in N, n \geq 1$

Với $k \in N, k \geq 1$ ta có: $\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4k^2 + 4k + 1} < \frac{1}{4k^2 + 4k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

Ta có: $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{(2.1+1)^2} + \frac{1}{(2.2+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2}$
 $< \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$
 $= \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

Vậy, $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$ với $n \in N, n \geq 1$.

e) Cho a và b cùng dấu. Chứng minh: $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 0$

Ta có: $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 2 \frac{a}{b} + 1 \right] + \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 - 2 \frac{b}{a} + 1 \right] + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) - 2$
 $= \left(\frac{a}{b} - 1 \right)^2 + \left(\frac{b}{a} - 1 \right)^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) - 2$
 $\geq \left(\frac{a}{b} - 1 \right)^2 + \left(\frac{b}{a} - 1 \right)^2 + 2 - 2 \geq 0$ (Vì c/m được $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ với a, b cùng

dấu)

Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b \neq 0$

Vậy, $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 0$ với a và b cùng dấu. Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b \neq 0$

Bài 90: Cho ba số dương a, b, c

a) Chứng minh rằng: $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$;

b) Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Lời giải:

Cho ba số dương a, b, c

a) Chứng minh rằng: $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$ (**HS tự giải**)

b) Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

* **Cách 1:** Ta có: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 \geq \frac{3}{2} + 1 + 1 + 1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2} \\
&\Leftrightarrow 2(a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq 9 \\
&\Leftrightarrow [(a+b)+(b+c)+(c+a)] \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq 9 \text{ (Đúng) (theo câu a)}
\end{aligned}$$

Dấu “=” $a=b=c>0$.

KL: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$. Dấu “=” $a=b=c>0$.

* **Cách 2:** Đặt $x=b+c, y=c+a, z=a+b$ với $x, y, z>0$.

Suy ra $a = \frac{-x+y+z}{2}, b = \frac{x-y+z}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}$

Do đó, $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{-x+y+z}{2x} + \frac{x-y+z}{2y} + \frac{x+y-z}{2z}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[-1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 \right] = \frac{1}{2} \left[3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[3 + \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(z-x)^2}{zx} + \frac{(y-z)^2}{yz} \right] \geq \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 91: Cho $a+b+c<0$, chứng minh: $P=a^3+b^3+c^3-3abc \leq 0$.

Lời giải:

Cho $a+b+c<0$, chứng minh: $P=a^3+b^3+c^3-3abc \leq 0$.

Ta có: $P=a^3+b^3+c^3-3abc = \dots = \frac{1}{2}(a+b+c) \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right]$

Vì $a+b+c<0$ và $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ nên $P=a^3+b^3+c^3-3abc \leq 0$.

Dấu “=” $\Leftrightarrow a=b=c<0$

Vậy, $P=a^3+b^3+c^3-3abc \leq 0$ với $a+b+c<0$. Dấu “=” $\Leftrightarrow a=b=c<0$.

Bài 92: Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right)^2 \geq (a+c)(b+d);$ b) $ab+bc+ca \leq 0$ khi $a+b+c=0$.

Lời giải:

a) $\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right)^2 \geq (a+c)(b+d)$

Áp dụng BĐT $(x+y)^2 \geq 4xy$. Dấu “=” $\Leftrightarrow x=y$

Ta có: $\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right)^2 \geq 4 \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot \left(\frac{c+d}{2} \right) = (a+c)(b+d)$

Dấu “=” $\Leftrightarrow a+b=c+d$

b) $ab+bc+ca \leq 0$ khi $a+b+c=0$.

Ta có: $a+b+c=0 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$
 $\Rightarrow ab+bc+ca \leq 0$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b = c = 0$

Bài 93: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác

a) Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

b) Chứng minh rằng: $(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca)$ thì tam giác đó là tam giác đều.

Lời giải:

Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác

a) Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

+Ta có: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$

$$\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ca \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \quad (\text{Đúng})$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ tam giác đó là tam giác đều.

$$+ \text{ Theo BĐT tam giác ta có: } \begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 < ab + ac \\ b^2 < bc + ba \\ c^2 < ca + cb \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

Vậy, $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ với a, b, c là ba cạnh của một tam giác.

b) Chứng minh rằng: $(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca)$ thì tam giác đó là tam giác đều.

$$\text{Xét hiệu } (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) = \dots = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

$$\text{Suy ra } (a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 0 \Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy, $(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca)$ thì tam giác đó là tam giác đều.

Bài 94: Cho $x + y = 2$. Chứng minh rằng: $x^{2017} + y^{2017} \leq x^{2018} + y^{2018}$.

Lời giải:

Cho $x + y = 2$. Chứng minh rằng: $x^{2017} + y^{2017} \leq x^{2018} + y^{2018}$.

$$\text{Xét hiệu: } (x^{2018} + y^{2018}) - (x^{2017} + y^{2017}) = x^{2017}(x - 1) + y^{2017}(y - 1)$$

$$= x^{2017}(1 - y) + y^{2017}(y - 1) \quad (\text{vì } x + y = 2 \text{ nên } x - 1 = 1 - y)$$

$$\text{Do đó } (x^{2018} + y^{2018}) - (x^{2017} + y^{2017}) = (1 - y)(x^{2017} - y^{2017})$$

$$\text{Giả sử } x \geq y \Rightarrow x \geq 1 \geq y \text{ và } x^{2017} \geq y^{2017}, \text{ do đó } (1 - y)(x^{2017} - y^{2017}) \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

$$\text{Tương tự, } x \leq y \Rightarrow x \leq 1 \leq y \text{ và } x^{2017} \leq y^{2017}, \text{ do đó } (1 - y)(x^{2017} - y^{2017}) \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow x = y = 1$

Bài 95: a) Chứng minh: $H = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$ với $n \in N, n \geq 2$

b) Chứng minh: $K = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$ với $n \in N, n \geq 3$

Lời giải:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

a) Chứng minh: $H = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$ với $n \in N, n \geq 2$

Ta có: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ với $n \in N, n \geq 2$.

Do đó, $H = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) < \frac{2}{3}$.

Vậy, $H = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$ với $n \in N, n \geq 2$

b) Chứng minh: $K = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$ với $n \in N, n \geq 3$

Ta có: $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1) - (n-1)}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$

Do đó, $K = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right]$
 $= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2.3} - \frac{1}{n(n+1)} \right] < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2.3} = \frac{1}{12}$

Vậy, $K = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$ với $n \in N, n \geq 3$.

Bài 96: Cho ba số x, y, z .

a) Chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$;

b) Khi $\frac{x+y+z}{3} = \sqrt{673}$. Chứng minh $xy + yz + zx \leq 2019$.

Lời giải:

Hay $xy + yz + zx \leq 2019$. Cho ba số x, y, z .

a) Chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (1)

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0.$$

Các bước biến đổi tương đương mà bất đẳng thức cuối đúng nên bất đẳng thức đầu đúng.

b) Khi $\frac{x+y+z}{3} = \sqrt{673}$. Chứng minh $xy + yz + zx \leq 2019$.

Ta có $\frac{x+y+z}{3} = \sqrt{673} \Leftrightarrow (x+y+z)^2 = 3.2019$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 3.2019 \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có: $3(xy + yz + zx) \leq 3.2019$

Bài 97: Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Lời giải:

$$\text{Có: } (a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (*)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$

$$\text{Áp dụng } (*) \text{ có: } \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(a + \frac{1}{b}\right); \quad \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(b + \frac{1}{a}\right)$$

$$\text{Suy ra: } \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5\left[\left(a + \frac{1}{b}\right) + \left(b + \frac{1}{a}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5\left[(a + b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (\text{Vi } a + b = 1)$$

$$\text{Với } a, b \text{ dương, chứng minh } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b} = 4 \quad (\text{Vi } a + b = 1)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

$$\text{Ta được: } \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5.4$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Bài 98: Với $a, b, c > 0$. Hãy chứng minh các BĐT:

$$\text{a) } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b;$$

$$\text{b) } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c;$$

$$\text{c) } \frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c.$$

Lời giải

Với $a, b, c > 0$. Hãy chứng minh các BĐT:

$$\text{a) } \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$$

Với $a > 0, b > 0, c > 0$ nên $\frac{ab}{c} > 0, \frac{bc}{a} > 0$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương $\frac{ab}{c}$ và $\frac{bc}{a}$ ta được

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} = 2\sqrt{b^2} = 2b$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow a = c > 0$

Vậy, $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$ với $a, b, c > 0$. Dấu “=” $\Leftrightarrow a = c > 0$.

$$b) \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

Áp dụng kết quả câu a, ta có:
$$\begin{cases} \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b \\ \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} \geq 2a \Rightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c \\ \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c \end{cases}$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Vậy, $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$. Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

$$c) \frac{a^3+b^3}{2ab} + \frac{b^3+c^3}{2bc} + \frac{c^3+a^3}{2ca} \geq a + b + c.$$

$$\text{Ta có } \frac{a^3+b^3}{2ab} + \frac{b^3+c^3}{2bc} + \frac{c^3+a^3}{2ca} = \frac{a^2}{2b} + \frac{b^2}{2a} + \frac{b^2}{2c} + \frac{c^2}{2b} + \frac{c^2}{2a} + \frac{a^2}{2c}$$

Áp dụng kết quả câu a, ta có:
$$\begin{cases} \frac{a^2}{2b} + \frac{c^2}{2b} \geq 2\sqrt{\frac{a^2c^2}{4b^2}} = \frac{ac}{b} \\ \frac{b^2}{2a} + \frac{c^2}{2a} \geq \frac{bc}{a} \\ \frac{a^2}{2c} + \frac{b^2}{2c} \geq \frac{ab}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3+b^3}{2ab} + \frac{b^3+c^3}{2bc} + \frac{c^3+a^3}{2ca} \geq \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Vậy, $\frac{a^3+b^3}{2ab} + \frac{b^3+c^3}{2bc} + \frac{c^3+a^3}{2ca} \geq a + b + c$. Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Bài 99:

a) Cho $a^2 + b^2 \leq 2$. Chứng minh rằng: $a + b \leq 2$.

b) Cho a, b là các số tùy ý. Chứng minh: $4a(a+b)(a+1)(a+b+1) + b^2 \geq 0$

c) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh: $abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$

Lời giải

a) Cho $a^2 + b^2 \leq 2$. Chứng minh rằng: $a + b \leq 2$.

Ta có $a^2 + b^2 \leq 2$ mà $2ab \leq a^2 + b^2 \leq 2$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Do đó $a^2 + b^2 + 2ab \leq 2 + 2 \Leftrightarrow (a+b)^2 \leq 4 \Leftrightarrow |a+b| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq a+b \leq 2$.

Vậy, nếu $a^2 + b^2 \leq 2$ thì $a+b \leq 2$.

b) Cho a, b là các số tùy ý. Chứng minh: $4a(a+b)(a+1)(a+b+1)+b^2 \geq 0$

Đặt $B = 4a(a+b)(a+1)(a+b+1)+b^2 = 4(a^2+ab+a)(a^2+ab+a+b)+b^2$

Đặt $m = a^2 + ab + a$, ta có:

$$B = 4m.(m+b)+b^2 = 4m^2 + 4mb + b^2 = (2m+b)^2 \geq 0$$

Vậy, $4a(a+b)(a+1)(a+b+1)+b^2 \geq 0$. Dấu "=" $\Leftrightarrow 2m+b=0 \Leftrightarrow 2(a^2+ab+a)+b=0$.

c) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh: $abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$.

Đặt $b+c-a=x>0$, $a+c-b=y>0$, $a+b-c=z>0$ thì $xyz>0$ và

$$x+y=2a, y+z=2b, z+x=2c$$

C/m BĐT phụ: $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$ với $x, y, z \geq 0$.

Thật vậy, ta có $(x+y)^2 \geq 4xy, (y+z)^2 \geq 4yz, (z+x)^2 \geq 4zx$

Suy ra $(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geq 64x^2y^2z^2 \Leftrightarrow [(x+y)(y+z)(z+x)]^2 \geq (8xyz)^2$

$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz \text{ (cả hai vế đều không âm)}$$

Do đó, $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$ với $x, y, z \geq 0$. Dấu "=" $x=y=z \geq 0$

Áp dụng BĐT trên, ta có $(2a).(2b).(2c) \geq 8(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$

$$\Leftrightarrow abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

Vậy, $abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$. Dấu "=" $\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow$ tam giác đã cho đều.

Bài 100:

Cho a, b > 0 thỏa mãn $a+b=1$. Chứng minh $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Lời giải

Có: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$ (*)

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$

$$\text{Áp dụng (*) có: } \left(a+\frac{1}{b}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(a+\frac{1}{b}\right) \quad ; \quad \left(b+\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(b+\frac{1}{a}\right)$$

$$\text{Suy ra: } \left(a+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5\left[\left(a+\frac{1}{b}\right) + \left(b+\frac{1}{a}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5\left[(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (\text{Vi } a+b=1)$$

Với a, b dương, chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} = 4 \quad (\text{Vi } a+b=1)$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

Ta được: $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5.4$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Bài 101:

Cho các số a, b, c thỏa mãn $1 \geq a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng: $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$

Lời giải

Vì $b, c \in [0; 1]$ nên suy ra $b^2 \leq b; c^3 \leq c$

Do đó: $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq a + b + c - ab - bc - ca \quad (1)$

Lại có: $a + b + c - ab - bc - ca = (a-1)(b-1)(c-1) - abc + 1 \quad (2)$

Vì $a, b, c \in [0; 1]$ nên $(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0; -abc \leq 0$

Do đó từ (2) $\Rightarrow a + b + c - ab - bc - ca \leq 1 \quad (3)$

Từ (1) và (3) suy ra $a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leq 1$

Bài 102:

Cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh rằng $a + b \leq 2$

Lời giải

Giả sử

$$a + b > 2 \Leftrightarrow (a+b)^3 > 2^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a+b) > 8 \Leftrightarrow 2 + 3ab(a+b) > 8(a^3 + b^3 = 2)$$

$$\Leftrightarrow 3ab(a+b) > 6 \Leftrightarrow ab(a+b) > 2 \Leftrightarrow ab(a+b) > a^3 + b^3 (a^3 + b^3 = 2)$$

$$\Leftrightarrow ab(a+b) > (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow ab > a^2 - ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 < 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 < 0 (\text{Vô lý})$$

Vậy $a + b \leq 2$

Bài 103:

Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Lời giải

Đặt $b+c-a = x > 0; c+a-b = y > 0; a+b-c = z > 0$. Ta có: $x, y, z > 0$

Từ đó suy ra : $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$

Thay vào ta được: $A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2) \Rightarrow A \geq 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Bài 104:

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2$$

Lời giải

- Nhận xét : có $a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(c + a)$

Tương tự: $b + ca = (b + a)(b + c); \quad c + ab = (c + a)(c + b)$

$$\text{Do đó: } VT = \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+a)(b+c)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+a)(b+c)}{c+a} \geq 2(a+b)$$

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(a+c)$$

$$\frac{(b+a)(b+c)}{a+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(b+c)$$

Vậy $2.VT \geq 4(a+b+c) = 4 \Leftrightarrow VT \geq 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 105: Cho a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 8$. Chứng minh $-4 \leq a + b \leq 4$

Lời giải

Ta có:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ mà } a^2 + b^2 \leq 8 \text{ nên } 2ab \leq 8$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 8 + 8 = 16$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow (a+b+4)(a+b-4) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq a+b \leq 4 \text{ (đpcm)}$$

Bài 106: CMR với a, b, c là các số dương, ta có: $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$

Lời giải

$$A = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right)$$

Mà $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (BĐT Cô si)

Do đó: $A \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$. Vậy $A \geq 9$

Bài 107: Cho biểu thức $A = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. Chứng minh rằng nếu a, b, c là 3 cạnh của một tam giác thì $A > 0$

Lời giải

$$A = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4a^2b^2 - (2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4)$$

$$= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$

$$= \left[(a+b)^2 - c^2 \right] \left[c^2 - (a-b)^2 \right] = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$

Do a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên

$$a+b+c > 0; a+b-c > 0; c+a-b > 0; c-a+b > 0 \Rightarrow A > 0$$

Bài 108: CMR với a, b, c là các số dương, ta có: $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$

Lời giải

Ta có:

$$A = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right)$$

Mà $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (BĐT Cô si)

Do đó: $A \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$. Vậy $A \geq 9$

Bài 109: Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác

Chứng minh rằng $A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$

Lời giải

Đặt $b+c-a = x > 0$; $c+a-b = y > 0$; $a+b-c = z > 0$

Từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}$; $b = \frac{x+z}{2}$; $c = \frac{x+y}{2}$

Thay vào ta được $A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2} \cdot (2+2+2)$ hay $A \geq 3$

Bài 110: Chứng minh rằng $\left(a - \frac{1}{b}\right)\left(b - \frac{1}{c}\right)\left(c - \frac{1}{a}\right) \geq \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right)\left(c - \frac{1}{c}\right)$, trong đó a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1.

Lời giải

$$\begin{aligned} & \left(a - \frac{1}{b}\right)\left(b - \frac{1}{c}\right)\left(c - \frac{1}{a}\right) \geq \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right)\left(c - \frac{1}{c}\right) \\ \Leftrightarrow & \frac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc} \geq \frac{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}{abc} \\ \Leftrightarrow & (ab-1)(bc-1)(ca-1) \geq (a^2-1)(b^2-1)(c^2-1) \\ \Leftrightarrow & a^2b^2c^2 - abc(a+b+c) + (ab+bc+ca) \geq a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ \Leftrightarrow & 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 2abc(a+b+c) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow & (ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \\ \Leftrightarrow & (a-c)^2 \cdot (b^2-1) + (b-a)^2 \cdot (c^2-1) + (c-b)^2 \cdot (a^2-1) \geq 0 \text{ (đúng với mọi } a, b, c \geq 1) \end{aligned}$$

Bài 111: Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab+bc+ca)$ với mọi số thực a, b, c.

Lời giải

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có:

$$0 < a < b+c \Rightarrow a^2 < ab+ca ; \quad 0 < b < c+a \Rightarrow b^2 < bc+ab$$

$$0 < c < a+b \Rightarrow c^2 < ca+bc$$

Do đó, suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab+bc+ca)$

Bài 112: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{a+3c}{a+b} + \frac{a+3b}{a+c} + \frac{2a}{b+c} \geq 5$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

$$VT = \left(\frac{a+c}{a+b} + \frac{a+b}{a+c} \right) + 2 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right)$$

Áp dụng bất côsi ta có: $\frac{a+c}{a+b} + \frac{a+b}{a+c} \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &= (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 \geq (a+b+c) \frac{9}{2 \cdot (a+b+c)} - 3 = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \frac{a+3c}{a+b} + \frac{a+3b}{a+c} + \frac{2a}{b+c} &\geq 2 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 5. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } a = b = c \end{aligned}$$

Bài 113: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c = abc$. Chứng minh rằng

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$a+b+c \geq 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a+b+c &\geq 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \Leftrightarrow a+b+c \geq 3\left(\frac{bc+ac+ab}{abc}\right) \\ \Leftrightarrow a+b+c &\geq 3\left(\frac{bc+ac+ab}{a+b+c}\right) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(bc+ac+ab) \\ \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 &\geq bc+ac+ab \\ \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2) &\geq 2(bc+ac+ab) \\ \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bài 114: Cho a và b là hai số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b}) \geq \frac{25}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

$$P = (ab + \frac{1}{ab}) + (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) \geq \frac{25}{4} \quad (*)$$

$$\text{Vì } (a+b)^2 \geq 4ab, a+b=1, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq 4$$

$$\text{Mà } P = (ab + \frac{1}{ab}) + (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) = (ab + \frac{1}{16ab}) + (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) + \frac{15}{16ab} \geq \frac{1}{2} + 2 + \frac{15}{16} \cdot 4 = \frac{25}{4} \text{ (Theo BĐT Cauchy) nên BĐT (*) đúng do đó bất được CM.}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } a=b=\frac{1}{2}.$$

Bài 115: Cho a, b, c là độ dài các cạnh và p là nửa chu vi của một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \quad (x, y > 0)$$

Áp dụng kết quả này ta được:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{(p-a)+(p-b)} = \frac{4}{2p-a-b} = \frac{4}{c}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}; \quad \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{b}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên, thu gọn ta được:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hay tam giác đã cho là đều.

Bài 116: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho cặp số $\frac{a^2}{b+c}$, $\frac{b+c}{4}$ không âm ta có :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = 2 \cdot \frac{a}{2} = a$$

Suy ra $\frac{a^2}{b+c} \geq a - \frac{b+c}{4}$

Tương tự $\frac{b^2}{c+a} \geq b - \frac{a+c}{4}$

$$\frac{c^2}{a+b} \geq c - \frac{a+b}{4}$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq (a+b+c) - \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

Vậy $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$ (đpcm)

Bài 117: Cho $x > y > 0$. Chứng minh: $\frac{x-y}{x+y} < \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Lời giải

Với $x > 0$; $y > 0$. Ta có $x+y \neq 0$

Áp dụng tính chất cơ bản của phân thức ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{x+y} &= \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2} \\ &= \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác : $x > 0$; $y > 0$ nên $x^2 + 2xy + y^2 > x^2 + y^2$

$$\Rightarrow \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} < \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{x-y}{x+y} < \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (đpcm).

Bài 118: Chứng minh biểu thức: $A = 4a(a+b)(a+b+c)(a+c) + b^2c^2 \geq 0$ với mọi a, b, c .

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 4a(a+b)(a+b+c)(a+c) + b^2c^2 \\ &= 4(a+b)(a+c)a(a+b+c) + b^2c^2 \\ &= 4(a^2+ab+ac+bc)(a^2+ab+ac) + b^2c^2 \end{aligned}$$

Đặt $a^2 + ab + ac = m$, ta có:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$A = 4(m + bc)m + b^2c^2 = 4m^2 + 4mbc + b^2c^2 = (2m + bc)^2 \\ = (2a^2 + 2ab + 2ac + bc)^2 \geq 0 \text{ với mọi } a, b, c \text{ (đpcm)}$$

Bài 119: Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

Lời giải

$$\text{Từ } a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \\ \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

Bài 120: Cho $a, b, c > 0$; $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$.

Lời giải

$$\text{Do } a, b > 0 \text{ và } 1 + b^2 \geq 2b \text{ với mọi } b \text{ nên } \frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$$

$$\text{mà } a + b + c = 3 \text{ nên } \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{ab+bc+ca}{2} \quad (1)$$

$$\text{Cũng từ } a + b + c = 3 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 9$$

$$\text{mà } a^2 + b^2 \geq 2ab; b^2 + c^2 \geq 2bc; c^2 + a^2 \geq 2ac \text{ nên } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \text{ suy ra } 3(ab + bc + ca) \leq 9 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 121: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2 \Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ta có:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc = 1)$$

Hay

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 122: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Đặt

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \text{ và } \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \text{ với } a, b, c \text{ dương; dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + 1\right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + 1\right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z} + 1\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Bởi vậy } P &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1\right) \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 123: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 6$. Chứng minh rằng $\frac{x+y}{xyz} \geq \frac{4}{9}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x+y)^2 \geq 4xy \quad (1)$$

$$\Rightarrow [(x+y)+z]^2 \geq 4(x+y)z$$

$$\Leftrightarrow 36 \geq 4(x+y)z \text{ (vì } x+y+z=6)$$

$$\Leftrightarrow 36(x+y) \geq 4(x+y)^2 z \text{ (vì } x, y \text{ dương nên } x+y \text{ dương) (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } 36(x+y) \geq 16xyz$$

$$\Leftrightarrow x+y \geq \frac{4}{9}xyz \Leftrightarrow \frac{x+y}{xyz} \geq \frac{4}{9} \text{ (đpcm)}$$

Bài 124: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} + \frac{b}{3b^2+2c^2+a^2} + \frac{c}{3c^2+2a^2+b^2} \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM với $a, b, c > 0$ ta có

$$\frac{18a}{3a^2+2b^2+c^2} = \frac{18a}{2(a^2+b^2)+a^2+c^2} \leq \frac{18a}{2.2\sqrt{(ab)^2}+2\sqrt{(ac)^2}} = \frac{18a}{4ab+2ac}$$

$$\frac{18a}{3a^2+2b^2+c^2} \leq \frac{18a}{4ab+2ac} = \frac{18a}{2a.(2b+c)} = \frac{9}{2b+c}$$

Áp dụng BĐT Cauchy Schwarz $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$.

Ta có: $\frac{(2+1)^2}{2b+c} \leq \frac{2^2}{2b} + \frac{1^2}{c} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$

Suy ra: $\frac{18a}{3a^2+2b^2+c^2} \leq \frac{9}{(2b+c)} = \frac{(2+1)^2}{2b+c} \leq \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$

Tương tự:

$$\frac{18b}{3b^2+2c^2+a^2} \leq \frac{9}{(2c+a)} = \frac{(2+1)^2}{2c+a} \leq \frac{2}{c} + \frac{1}{a}$$

$$\frac{18c}{3c^2+2a^2+b^2} \leq \frac{9}{2a+b} = \frac{(2+1)^2}{2a+b} \leq \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta có:

$$\frac{18a}{3a^2+2b^2+c^2} + \frac{18b}{3b^2+2c^2+a^2} + \frac{18c}{3c^2+2a^2+b^2} \leq \frac{2}{c} + \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} + \frac{b}{3b^2+2c^2+a^2} + \frac{c}{3c^2+2a^2+b^2} \leq \left(\frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c}\right) : 18 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \Rightarrow DPCM$$

Bài 125: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a+b}{bc+a^2} + \frac{b+c}{ac+b^2} + \frac{c+a}{ab+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Lời giải

Ký hiệu vế trái là A , vế phải là B , xét hiệu $A - B$

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{bc+a^2} - \frac{1}{a} + \frac{b+c}{ac+b^2} - \frac{1}{b} + \frac{c+a}{ab+c^2} - \frac{1}{c} \\ &= \frac{a^2+ab-bc-a^2}{a(bc+a^2)} + \frac{b^2+bc-ac-b^2}{b(ac+b^2)} + \frac{c^2+ac-ab-c^2}{c(ab+c^2)} \\ &= \frac{b(a-c)}{a(bc+a^2)} + \frac{c(b-a)}{b(ac+b^2)} + \frac{a(c-b)}{c(ab+c^2)} \end{aligned}$$

Do a, b, c bình đẳng nên giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $b(a-c) \geq 0, c(b-a) \leq 0, a(c-b) \leq 0$

$$a^3 \geq b^3 \geq c^3 \Rightarrow abc + a^3 \geq abc + b^3 \geq abc + c^3 \Rightarrow \frac{b(a-c)}{a(bc+a^2)} \leq \frac{b(a-c)}{b(ac+b^2)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A - B &\leq \frac{b(a-c)}{b(ac+b^2)} + \frac{c(b-a)}{b(ac+b^2)} + \frac{a(c-b)}{c(ab+c^2)} = \frac{ab-ac}{b(ac+b^2)} + \frac{ac-ab}{c(ab+c^2)} \\ &= \frac{a(b-c)}{b(ac+b^2)} - \frac{a(b-c)}{c(ab+c^2)} \end{aligned}$$

Mà $\frac{1}{b(ac+b^2)} \leq \frac{1}{c(ab+c^2)}$ nên $A - B \leq 0$ đpcm

Bài 126: Cho a, b, c là các số không âm và không lớn hơn 2 thỏa mãn $a + b + c = 3$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$$(2-a)(2-b)(2-c) \geq 0 \Leftrightarrow 8 + 2(ab+bc+ca) - 4(a+b+c) - abc \geq 0$$

Cộng hai vế với $a^2 + b^2 + c^2$, sau đó thu gọn ta được:

$$(a+b+c)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + abc + 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + abc \leq 5$$

Mà $abc \geq 0$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

Dấu bằng xảy ra khi trong ba số a, b, c có một số bằng 0, một số bằng 2, một số bằng 1.

Bài 127: Chứng minh rằng: $\left(a - \frac{1}{b}\right)\left(b - \frac{1}{c}\right)\left(c - \frac{1}{a}\right) \geq \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right)\left(c - \frac{1}{c}\right)$, trong đó a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1

Lời giải

$$\begin{aligned} c) & \left(a - \frac{1}{b}\right)\left(b - \frac{1}{c}\right)\left(c - \frac{1}{a}\right) \geq \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{b}\right)\left(c - \frac{1}{c}\right) \\ \Leftrightarrow & \frac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc} \geq \frac{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}{abc} \\ \Leftrightarrow & (ab-1)(bc-1)(ca-1) \geq (a^2-1)(b^2-1)(c^2-1) \\ \Leftrightarrow & a^2b^2c^2 - abc(a+b+c) + (ab+bc+ca) \geq a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ \Leftrightarrow & 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 2abc(a+b+c) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow & (ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \\ \Leftrightarrow & (a-c)^2(b^2-1) + (b-a)^2(c^2-1) + (c-b)^2(a^2-1) \geq 0 \text{ (đúng với mọi } a, b, c \geq 1) \end{aligned}$$

Bài 128: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Lời giải

Đặt $b+c-a = x > 0$; $c+a-b = y > 0$; $a+b-c = z > 0$

từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}$; $b = \frac{x+z}{2}$; $c = \frac{x+y}{2}$;

$$\text{Thay vào ta được: } A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \right]$$

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A \geq 3$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 129: Chứng minh rằng: $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} \\ &= \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{100.100} \\ &< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1 \end{aligned}$$

Bài 130: Chứng minh $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$ với mọi số dương a, b, c .

Lời giải

Với mọi số dương a, b, c ta có:

$$\begin{aligned} \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c &\Leftrightarrow \frac{(bc)^2}{abc} + \frac{(ac)^2}{abc} + \frac{(ab)^2}{abc} \geq a + b + c \\ &\Leftrightarrow (bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab \\ &\Leftrightarrow 2(bc)^2 + 2(ac)^2 + 2(ab)^2 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0 \\ &\Leftrightarrow [(ac)^2 - 2a^2bc + (ab)^2] + [(bc)^2 - 2b^2ac + (ab)^2] + [(ac)^2 - 2c^2ab + (bc)^2] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (ac - ab)^2 + (bc - ab)^2 + (ac - bc)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

BĐT cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 131: Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Lời giải

Đặt $b+c-a = x > 0; c+a-b = y > 0; a+b-c = z > 0$

$$\text{Từ đó suy ra } a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$$

$$\text{Thay vào ta được: } A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

$$\text{Từ đó suy ra } A \geq \frac{1}{2}(2+2+2) \text{ hay } A \geq 3$$

Bài 132: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2$$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Nhận xét có: $a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(c + a)$

Tương tự có: $b + ca = (b + a)(b + c)$; $c + ab = (c + a)(c + b)$

$$\text{Do đó } VT = \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+a)(b+c)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+a)(b+c)}{c+a} \geq 2(a+b)$$

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(a+c)$$

$$\frac{(b+a)(b+c)}{a+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(b+c)$$

$$\text{Vậy } 2.VT \geq 4(a+b+c) = 4 \quad \text{hay} \quad VT \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 133: Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

Lời giải

Học sinh chứng minh $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ với mọi $x, y > 0$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \geq 0; \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 2 \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y > 0$

Bài 134: Biết a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 < 0$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 &= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab) \\
 &= [(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2] \\
 &= -(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)
 \end{aligned}$$

Tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba nên cả 4 thừa số đều dương, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 135: Cho a, b, c là các số dương.

Chứng minh:
$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô si cho ba số dương ta được:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}} \quad (*)$$

Cũng theo BĐT Cô si :

$$0 < 3^3 abc \leq (a+b+c)^3 \quad (1) \text{ và } 0 < 3^3 (a+b)(b+c)(c+a) \leq 8(a+b+c)^3 \quad (2)$$

Nhân tương ứng hai vế các BĐT (1) và (2) được:

$$3^6 abc(a+b)(b+c)(c+a) \leq 8(a+b+c)^6$$

Hay
$$\frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra
$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 136: Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{3}{2} \text{ với } a \geq b \geq c > 0$$

Lời giải

Gọi vế trái là A , ta có:

$$\begin{aligned}
A - \frac{3}{2} &= \left(\frac{a}{a+b} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{b}{b+c} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{c}{c+a} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{b-c}{2(b+c)} + \frac{c-a}{2(c+a)} \\
&= \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{(b-a) + (a-c)}{2(b+c)} + \frac{c-a}{2(c+a)} \\
&= \frac{a-b}{2} \cdot \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c} \right) + \frac{a-c}{2} \cdot \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} \right) \\
&= \frac{a-b}{2} \cdot \frac{c-a}{(a+b)(b+c)} + \frac{a-c}{2} \cdot \frac{a-b}{(b+c)(c+a)} \\
&= \frac{(a-b)(a-c)}{2(b+c)} \cdot \left(\frac{-1}{a+b} + \frac{1}{c+a} \right) \\
&= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{2(b+c)(a+b)(c+a)} \geq 0 \text{ (Do } a \geq b \geq c \geq 0)
\end{aligned}$$

Vậy $A \geq \frac{3}{2}$

Bài 137: Cho $a - b = 1$. Chứng minh $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

Lời giải

Từ $a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b \Rightarrow a^2 = 1 + 2b + b^2$, thay vào đẳng thức cần chứng minh ta có:

$$1 + 2b + 2b^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4b^2 + 4b + 1 \geq 0 \Rightarrow (2b + 1)^2 \geq 0. \text{ BĐT này luôn đúng. Vậy } a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (2b + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 138: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$\text{rằng: } A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Lời giải

$$\text{Đặt } b+c-a = x > 0; \quad c+a-b = y > 0; \quad a+b-c = z > 0$$

$$\text{Từ đó suy ra } a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$$

Thay vào ta được:

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A \geq 3 \Leftrightarrow a=b=c$

Bài 139: Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

Lời giải

$$\text{Từ } a+b+c=1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 140: Cho x, y thỏa mãn $xy \geq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$

Lời giải

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2 \cdot (xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \quad (2)$$

Vì $x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0 \Rightarrow$ BĐT (2) luôn đúng nên BĐT (1) đúng.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Bài 141: Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz \text{ với mọi } x, y, z$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \text{Có } (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x, y, z \\ & \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + xz) \\ & \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \quad (dfcm) \end{aligned}$$

Bài 142: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**) \\ & \Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2 \\ & \Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Áp dụng bất đẳng thức $(**)$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Ta có:
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$. (đpcm)

Bài 143: Cho x, y, z là các số lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

Lời giải

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2 \cdot (xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \quad (2)$$

Vì $x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0$

\Rightarrow BĐT (2) đúng nên BĐT (1) đúng. Dấu “=” xảy ra khi $x = y$

Bài 144: a) Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, p là nửa chu vi.

$$\text{CMR: } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

b) Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} > \frac{a-d}{a+b}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{p-a+p-c} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{p-c+p-a} = \frac{2}{b}$$

Cộng từng vế ta có điều phải chứng minh

b) Ta có:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} \geq 4$$

Xét

$$\begin{aligned} & \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} - 4 \\ &= (a+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} \right) + (b+d) \left(\frac{1}{c+d} + \frac{1}{a+b} \right) - 4 \\ &\geq (a+c) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} + (b+d) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} - 4 = 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow đpcm

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = d$

ĐS8-Chuyên đề 7: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

Qua Các Đề Thi HSG Môn Toán Lớp 8

A. Bài toán

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x-1)(2x-1)(2x^2-3x-1) + 2017$

Bài 2: a) Tìm GTLN : $x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x - 8y + 2015$

b) Tìm GTLN: $\frac{3(x+1)}{x^3+x^2+x+1}$

Bài 3: Cho $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất (*GTNN*) của biểu thức

$$A = a(a^2 + 2b) + b(b^2 - a)$$

Bài 4: Cho a, b, c là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Bài 5: Cho số thực x thỏa mãn điều kiện $0 \leq x \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{x^2}{2-x^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x - 2012)^2 + (x + 2013)^2$

Bài 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2015}{|x| - 3}$, với x là số nguyên.

Bài 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

$$\text{a) } A = |3x+1| + |x+2| - 4x + 3 \qquad \text{b) } B = \frac{14x^2 - 8x + 9}{3x^2 + 6x + 9}$$

Bài 9: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x^2 + 3x + 4)^2$

Bài 10: Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A_{(x)} = (x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10$

Bài 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 13x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 16x + 2015$

Bài 12: Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của

$$B = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9}$$

Bài 13: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 5$

Bài 14: Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 - 8x + 1$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Bài 15:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

Bài 16: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 2y + 18$

Bài 17: Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức sau (nếu có): $M = 4x^2 + 4x + 5$

Bài 18: Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = 2x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 2028$

Bài 19: Cho biểu thức $M = \frac{x^4 + 2}{x^6 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^4 + 4x^2 + 3}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị lớn nhất của M

Bài 20: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + 2y \geq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$

Bài 21: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

Bài 22: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x+y) - 2010$

Bài 23: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Bài 24: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Bài 25: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x-1)(2x-1)(2x^2-3x-1) + 2017$

Bài 26: Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức: $A = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

Bài 27:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Bài 28: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = |x - 2006| + |x - 2007| + 2006$

Bài 29: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Bài 30. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A , biết:

$$A = (x-1)^4 + (x-3)^4 + 6(x-1)^2 \cdot (x-3)^2$$

Bài 31.

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$

Bài 32. Tìm giá trị nhỏ nhất : $A = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$

Bài 33. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$

Bài 34. Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Bài 35. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$.

Bài 36. Cho $a + b = 3$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a^2 + b^2$

Bài 37. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$

Bài 38. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = 4 - x^2 + 2x$

Bài 39. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z}$

Bài 40: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$

Bài 41: Cho $a > 0; b > 0$ và $a^2 + b^2 = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

Bài 42: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = (x-2)(x-5)(x^2-7x-10)$$

Bài 43: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Bài 44: Cho hai số không âm a và b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = a + b$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

Bài 45: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$$

Bài 46: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x-2012)^2 + (x+2013)^2$

Bài 47: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

Bài 48: Cho biểu thức $M = \frac{x^4+2}{x^6+1} + \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} - \frac{x^2+3}{x^4+4x^2+3}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị lớn nhất của M

Bài 49: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + 2y \geq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$

Bài 50: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x+y) - 2010$

Bài 51: Cho $a, b, c \in [0;1]$ và $a + b + c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$

Bài 52: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: } B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Bài 53: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Bài 54: Tìm các giá trị của x để biểu thức:

$$P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) \text{ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.}$$

Bài 55: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x+y) - 2010$

Bài 56: Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 - 8x + 1$.

Bài 57: Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = 4x^2 + 4x + 5$

Bài 58: Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: $A = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$.

Bài 59: Tìm giá trị của biến x để:

a) $P = \frac{1}{x^2 + 2x + 6}$ đạt giá trị lớn nhất

b) $Q = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 60: a) Tìm GTLN của $A = |x - 4|(2 - |x - 4|)$

b) Tìm GTNN của biểu thức $B = \frac{9x}{2 - x} + \frac{2}{x}$, với $0 < x < 2$

Bài 61: Tìm GTNN của:

a) $A = x + \frac{16}{x - 3} + 2007, x > 3$; b) $B = \frac{x^2 - 2x + 2018}{2018x^2}, x \neq 0$; c) $C = \frac{x^3 + 2000}{x}, x > 0$

Bài 62: Cho hai số x và y thỏa mãn điều kiện: $3x + y = 1$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 3x^2 + y^2$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $N = xy$

Bài 63: a) Cho x, y là các số dương thỏa mãn $2x + 3y = 7$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{8}{x} + \frac{3}{y}$

b) Tìm GTLN của $A = -x^2 - y^2 + xy + x + y$

Bài 64: a) Cho $x + y = 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3$

b) Tìm GTNN của $B = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2023$

Bài 65: a) Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2$ biết $x + y = 4$

b) Tìm GTNN của $B = x^4 + (3 - x)^2$

c) Tìm GTNN của $C = (x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7)$

d) Tìm GTLN của $D(x) = \frac{x}{(x + 2019)^2}$ với $x > 0$

Bài 66: Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = (2x - 3)^2 - 4|2x - 3| + 7$ và các giá trị của x tương ứng.

Bài 67: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + 2y \geq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$ GTLN

Bài 68: Cho hai số không âm a và b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = a + b$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

Bài 69: Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = 2$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = \frac{a^3}{2016a + 2017b} + \frac{b^3}{2017a + 2016b}$

Bài 70: Cho x, y, z là các số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $x^4 + y^4 + z^4$ biết $x + y + z = 2$

Bài 71: Tìm các giá trị của x để biểu thức: $P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 72: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $L = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 20$

Bài 73: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Bài 74: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$

Bài 75: Cho $x, y, z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$

Bài 76: Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: $A = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$.

Bài 77: Tìm giá trị của biến x để:

a) $P = \frac{1}{x^2 + 2x + 6}$ đạt giá trị lớn nhất b) $Q = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 78: a) Tìm GTLN của $A = |x-4|(2-|x-4|)$

b) Tìm GTNN của biểu thức $B = \frac{9x}{2-x} + \frac{2}{x}$, với $0 < x < 2$

Bài 79: Tìm GTNN của:

a) $A = x + \frac{16}{x-3} + 2007, x > 3$; b) $B = \frac{x^2 - 2x + 2018}{2018x^2}, x \neq 0$; c) $C = \frac{x^3 + 2000}{x}, x > 0$

Bài 80: Cho hai số x và y thỏa mãn điều kiện: $3x + y = 1$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 3x^2 + y^2$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $N = xy$

Bài 81: a) Cho x, y là các số dương thỏa mãn $2x + 3y = 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{8}{x} + \frac{3}{y}$$

b) Tìm GTLN của $A = -x^2 - y^2 + xy + x + y$

Bài 82: a) Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2$ biết $x + y = 4$

b) Tìm GTNN của $B = x^4 + (3-x)^2$

c) Tìm GTNN của $C = (x-1)(x-3)(x+5)(x+7)$

d) Tìm GTLN của $D(x) = \frac{x}{(x+2019)^2}$ với $x > 0$

Bài 83: a) Cho $x + y = 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3$

b) Tìm GTNN của $B = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2023$

Bài 84: Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = (2x-3)^2 - 4|2x-3| + 7$ và các giá trị của x tương ứng.

Bài 85: Cho $a > 0; b > 0$ và $a^2 + b^2 = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

Bài 86: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Bài 87: Cho hai số không âm a và b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = a + b$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

Bài 88: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$$

Bài 89: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = (x-2012)^2 + (x+2013)^2$

Bài 90: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Bài 91: a. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $x + y + z$ biết rằng $x + 5y = 21$ và $2x + 3z = 51$ với $x, y, z \geq 0$

b. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của các phân thức $B = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Bài 92: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 - 2x^2 - 3|x^2 - 1| - 9$.

Bài 93: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2012}{x^2 + y^2 - 20(x+y) + 2213}$

Bài 94: Cho các số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2$$

Bài 95: Cho hai số dương x, y có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = (1 - \frac{1}{x^2})(1 - \frac{1}{y^2}) + xy$$

Bài 96: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 1 - xy$, trong đó x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x^{2013} + y^{2013} = 2x^{1006}y^{1006}$.

Bài 97:

a) Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2m}, m \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $a_1 < a_2 < \dots < a_{2m}$.

Tìm GTNN của biểu thức $A = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{2m-1}| + |x - a_{2m}|$.

b) Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2m-1}, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ thỏa mãn $a_1 < a_2 < \dots < a_{2m-1}$.

Tìm GTNN của biểu thức $B = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{2m-2}| + |x - a_{2m-1}|$.

Bài 98:

Cho m, n là các số thực thay đổi sao cho $m^2 + n^2 \leq 5$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = m + n + mn + 1$.

Bài 99: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $K = \frac{3-4x}{2x^2+2}$

Bài 100: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$

Bài 101: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z}$

Bài 102: Cho hai số x, y thỏa mãn điều kiện $(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$

Bài 103: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$

Bài 104: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$.

Bài 105: Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = abc$.

Bài 106: Cho $6a - 5b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $4a^2 + 25b^2$

Bài 107: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Bài 108: Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$$

Bài 109:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013$

Bài 110: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = (x-2)(x-5)(x^2 - 7x - 10)$$

B.Lời giải

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x-1)(2x-1)(2x^2 - 3x - 1) + 2017$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) A &= (x-1)(2x-1)(2x^2 - 3x - 1) + 2017 \\ &= (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 3x - 1) + 2017 \\ &= (2x^2 - 3x)^2 - 1 + 2017 = (2x^2 - 3x)^2 + 2016 \geq 2016 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 2016 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Bài 2: a) Tìm GTLN : $x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x - 8y + 2015$

$$b) \text{ Tìm GTLN : } \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Lời giải

$$a) P = x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x - 8y + 2015$$

$$P = x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x - 8y + 2015$$

$$P = (x^2 + 2xy + y^2) - 4(x + y) + 4 + 4y^2 - 4y + 1 + 2010$$

Bài 1.

$$= (x + y)^2 - 4(x + y) + 4 + (2y - 1)^2 + 2010$$

$$= (x + y - 2)^2 + (2y - 1)^2 + 2010 \geq 2010$$

$$\text{Suy ra } \min P = 2010 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}; y = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } Q = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + (x+1)} = \frac{3(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{3}{x^2+1}$$

$$Q \text{ đạt GTLN} \Leftrightarrow x^2 + 1 \text{ đạt GTNN mà } x^2 + 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \text{GTNN của } C \text{ là } 3 \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 3: Cho $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức

$$A = a(a^2 + 2b) + b(b^2 - a)$$

Lời giải

$$\text{Do: } a + b = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} + x, b = \frac{1}{2} + y \text{ với } x + y = 0$$

$$\text{Ta có: } A = a(a^2 + 2b) + b(b^2 - a) = a^3 + b^3 + ab = a^2 + b^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + y\right)^2 = \frac{1}{2} + x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{GTNN}(A) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Bài 4: Cho a, b, c là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Lời giải

$$P = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$$

$$\Rightarrow P \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 9 \Leftrightarrow a = b = c$$

Bài 5: Cho số thực x thỏa mãn điều kiện $0 \leq x \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{x^2}{2-x^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Lời giải

Đặt $x^2 = a, 0 \leq a \leq 1$. Biểu thức đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{2-a} + \frac{1-a}{1+a} = \frac{a}{2-a} + 1 + \frac{1-a}{1+a} + 1 - 2 = \frac{2}{2-a} + \frac{2}{1+a} - 2 \\ &= 2 \left(\frac{3}{(2-a)(1+a)} - 1 \right) = 2 \left[\frac{3}{2+a(1-a)} - 1 \right] \end{aligned}$$

*) Vì $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow P \leq 2 \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = 1$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

*) $0 \leq a \leq 1$ nên a và $1-a$ là hai số không âm

Áp dụng BDT Cô si ta có: $a(1-a) \leq \frac{(a+1-a)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow P \leq 2 \left(\frac{3}{2+\frac{1}{4}} - 1 \right) = \frac{2}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 1-a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ hay $x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Vậy $\max P = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x-2012)^2 + (x+2013)^2$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= (x-2012)^2 + (x+2013)^2 = x^2 - 4024x + 4048144 + x^2 + 4026x + 4052169 \\ &= 2x^2 + 2x + 8100313 = 2 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + 8100312,5 \geq 8100312,5 \quad \forall x \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \min P = 8100312,5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Bài 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2015}{|x| - 3}$, với x là số nguyên.

Lời giải

- Xét $|x| > 3 \Rightarrow |x| - 3 > 0 \Rightarrow B > 0$
- Xét $|x| < 3$ thì do $x \in \mathbb{Z}$ nên $|x| \in \{0; 1; 2\}$

$$+ \text{ Khi } |x| = 0 \Rightarrow B = -403$$

$$+ \text{ Khi } |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow B = -503,75$$

$$+ \text{ Khi } |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow B = -2015$$

$$\text{Vậy } \min B = -2015 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Bài 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

$$\text{a) } A = |3x + 1| + |x + 2| - 4x + 3$$

$$\text{b) } B = \frac{14x^2 - 8x + 9}{3x^2 + 6x + 9}$$

Lời giải

a) Áp dụng tính chất $|a| \geq a$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a \geq 0$, ta có:

$$A = |3x + 1| + |x + 2| - 4x + 3 \geq 3x + 1 + x + 2 - 4x + 3 = 6 \Rightarrow A \geq 6$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow 3x + 1 \geq 0 \text{ và } x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{3} \text{ và } x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{3}$$

$$\text{Vậy } \min A = 6 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B - \frac{2}{3} &= \frac{14x^2 - 8x + 9}{3x^2 + 6x + 9} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{(14x^2 - 8x + 9) - 2(x^2 + 2x + 3)}{3(x^2 + 2x + 3)} \\ &= \frac{12x^2 - 12x + 3}{3(x^2 + 2x + 3)} = \frac{(2x - 1)^2}{(x + 1)^2 + 2} \end{aligned}$$

$$\text{Với mọi } x, \text{ ta có: } 3(2x - 1)^2 \geq 0, (x + 1)^2 + 2 \geq 2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2x-1)^2}{(x+1)^2+2} \geq 0 \Leftrightarrow B - \frac{2}{3} \geq 0 \Rightarrow B \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bài 9: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x^2 + 3x + 4)^2$

Lời giải

Ta có: $A = x^2 + 3x + 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$

$$\Rightarrow A \geq \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Vậy $\min A = \frac{49}{16} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

Bài 10: Tìm giá trị nhỏ nhất của : $A_{(x)} = (x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10$

Lời giải

$$A_{(x)} = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 10$$

Đặt $x^2 - 7x + 6 = t \Rightarrow A_{(t)} = t(t+6) + 10 = t^2 + 6t + 9 + 1 = (t+3)^2 + 1 \geq 1$

$$\text{Khi đó: } t = -3 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min A_{(x)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Bài 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 13x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 16x + 2015$

Lời giải

$$A = 13x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 16x + 2015$$

$$= y^2 + 4xy - 2y + 13x^2 - 16x + 2015$$

$$= y^2 + 2y(2x-1) + (2x-1)^2 + 9x^2 - 12x + 2015$$

$$= (y + 2x - 1)^2 + (3x - 2)^2 + 2010$$

Chúng tỏ $A \geq 2010$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{2}{3}; y = -\frac{1}{3}$

$$\text{Vậy } \min A = 2010 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Bài 12: Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của

$$B = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9} = \frac{-x^2 - 9 + x^2 - 12x + 36}{x^2 + 9} = -1 + \frac{(x-6)^2}{x^2 + 9} \geq -1$$

$$\min B = -1 \Leftrightarrow x = 6$$

$$\text{Ta có: } B = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9} = \frac{4x^2 + 36 - 4x^2 - 12x - 9}{x^2 + 9} = 4 - \frac{(2x+3)^2}{x^2 + 9} \leq 4$$

$$\max B = 4 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Bài 13: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 5$

Lời giải

Biến đổi để có:

$$\begin{aligned} A &= a^2(a^2 + 2) - 2a(a^2 + 2) + (a^2 + 2) + 3 \\ &= (a^2 + 2)(a^2 - 2a + 1) + 3 = (a^2 + 2)(a-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } a^2 + 2 > 0 \forall a \text{ và } (a-1)^2 \geq 0 \forall a \text{ nên } (a^2 + 2)(a-1)^2 \geq 0 \forall a$$

$$\text{Do đó: } (a^2 + 2)(a-1)^2 + 3 \geq 3 \quad \forall a$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a-1=0 \Leftrightarrow a=1$$

Bài 14: Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 - 8x + 1$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 E &= 2x^2 - 8x + 1 \\
 &= 2x^2 - 8x + 8 - 7 \\
 &= 2(x-2)^2 - 7 \geq -7 \quad (\forall x)
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $E = -7 \Leftrightarrow x = 2$

Bài 15: a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1 \\
 &= (x-y)^2 + (y-2)^2 + 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Do } (x-y)^2 \geq 0; (y-2)^2 \geq 0$$

$$\text{Nên } A = (x-y)^2 + (y-2)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } 1 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Vậy GTNN của A là $1 \Leftrightarrow x = y = 2$

$$b) B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + x + 1} = \frac{3(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{3}{x^2+1}$$

$$\text{Do } x^2 + 1 \geq 1 \text{ nên } B = \frac{3}{x^2+1} \leq 3. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy GTLN của B là $3 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 16: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 2y + 18$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 2(x^2 + 2xy + y^2) + y^2 - 8x - 2y + 18$$

$$A = 2[(x+y)^2 - 4(x+y) + 4] + (y^2 + 6y + 9) + 1$$

$$A = 2(x+y-2)^2 + (y+3)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Vậy } \min A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

Bài 17: Tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức sau (nếu có): $M = 4x^2 + 4x + 5$

Lời giải

$$\text{Ta có } M = 4x^2 + 4x + 5 = (4x^2 + 4x + 1) + 4 = (2x + 1)^2 + 4$$

$$\text{Vì } (2x + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x + 1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow M \geq 4$$

$$\text{Vậy } \min_M = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Bài 18: Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = 2x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 2028$

Lời giải

$$B = 2x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 2028$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 8x + 16 + 2012$$

$$= (x + y)^2 + (x - 4)^2 + 2012 \geq 2012$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất của B là } 2012 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -4 \end{cases}$$

Bài 19: Cho biểu thức $M = \frac{x^4 + 2}{x^6 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^4 + 4x^2 + 3}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị lớn nhất của M

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} M &= \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} \\ &= \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^4 + 2 + (x^2 - 1)(x^2 + 1) - (x^4 - x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^4 + 2 + x^4 - 1 - x^4 + x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} \\ &= \frac{x^4 + x^2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2 \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x

b) Ta có: $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x

- Nếu $x = 0$ ta có $M = 0$

- Nếu $x \neq 0$, chia cả tử và mẫu của M cho x^2 ta có: $M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}$

Ta có: $x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + 1 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1 \geq 1$

Nên ta có: $M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \leq 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

Vậy M lớn nhất là $M = 1$ khi $x = 1$

Bài 20: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + 2y \geq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } H &= x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y} \\ &= (x^2 - 2x + 1) + (2y^2 - 8y + 8) + \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) + \left(\frac{24}{y} + 6y - 24\right) + (x + 2y) + 17 \\ &= (x-1)^2 + 2(y-2)^2 + \frac{(x-1)^2}{x} + \frac{6(y-2)^2}{y} + (x+2y) + 17 \\ &\geq 0 + 0 + 0 + 0 + 5 + 17 = 22 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2(y-2)^2 = \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{6(y-2)^2}{y} = 0 \text{ và } x+2y=5$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ và } y=2. \text{ Vậy } H \text{ nhỏ nhất là } H=22 \Leftrightarrow x=1, y=2$$

Bài 21: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

Lời giải

$$B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

$$*)x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 \geq 2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$y^2 + 6y + 9 = (y+3)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 12 \geq 3 \text{ với mọi } y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} +B &= xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045 \\ &= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y) + 12(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 6y) + 36 + 2009 \\ &= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y + 12) + 3(y^2 + 6y + 12) + 2009 \\ &= (x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) + 2009 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow B \geq 2.3 + 2009 \Rightarrow B \geq 2015$$

$$*)B = 2015 \Leftrightarrow x = 1 \text{ \& } y = -3$$

$$*)\text{Min}B = 2015 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Bài 22: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010 \\ &= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 2018 \\ &= (x-2)^2 + (y-2)^2 - 2018 \geq -2018 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -2018 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Bài 23: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x} \right)$

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn P
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Lời giải

$$\text{a) ĐKXĐ: } x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left[\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right] \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \end{aligned}$$

b)

$$P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1) + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$P = x + 1 + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2$$

Vì $x > 1$ nên $x - 1 > 0$. Áp dụng BĐT Cosi ta có: $x - 1 + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1)\frac{1}{x-1}} = 2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2(TM)$

Vậy GTNN của P là 4 $\Leftrightarrow x = 2$

Bài 24: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

$$= \frac{-335x^2 - 335 + 335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} = -335 + \frac{335(x+3)^2}{x^2 + 1} \geq -335$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -335 khi $x = -3$

Bài 25: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x-1)(2x-1)(2x^2-3x-1) + 2017$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= (x-1)(2x-1)(2x^2-3x-1) + 2017 \\ &= (2x^2-3x+1)(2x^2-3x-1) + 2017 \\ &= (2x^2-3x)^2 - 1 + 2017 = (2x^2-3x)^2 + 2016 \geq 2016 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 2016 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Bài 26: Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức: $A = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{3(x^2 - x + 1) + x^2 + x + 1 - 3(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = 3 - \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 - x + 1} = 3 - \frac{2(x-1)^2}{x^2 - x + 1} \leq 3$$

Vậy $\text{Max}A = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Bài 27: a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Lời giải

a) Ta có: $A = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1 = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1$

Do $(x - y)^2 \geq 0; (y - 2)^2 \geq 0$

Nên $A = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geq 1$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy $\text{Min}A = 1 \Leftrightarrow x = y = 2$

b) $B = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + (x+1)} = \frac{3(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{x^2+1}$

Do $x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{B}{x^2+1} \leq 3$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy $\text{Max}B = 3 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 28: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = |x - 2006| + |x - 2007| + 2006$

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} P &= |x - 2006| + |x - 2007| + 2006 \\ &= |x - 2006| + |2007 - x| + 2006 \geq |(x - 2006) + (2007 - x)| + 2006 = 2007 \end{aligned}$$

Vậy $\min P = 2007 \Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$

Bài 29: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Lời giải

$$A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-335x^2 - 335 + 335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} = -335 + \frac{335(x+3)^2}{x^2 + 1} \geq -335$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -335 khi $x = -3$

Bài 30. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A , biết:

$$A = (x-1)^4 + (x-3)^4 + 6(x-1)^2 \cdot (x-3)^2$$

Lời giải

Đặt $a = x-1, b = 3-x$ ta có: $a+b=2$

$$A = a^4 + b^4 + 6(ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2$$

$$= \left[(a+b)^2 - 2ab \right]^2 + 4a^2b^2 = (4-2ab)^2 + 4a^2b^2$$

$$= 8a^2b^2 - 16ab + 16 = 8(ab-1)^2 + 8 \geq 8$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a+b=2$ và $ab=1 \Leftrightarrow a=b=1 \Rightarrow x=2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 8 tại $x=2$

Bài 31.

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$

Lời giải

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = (x+y+z) \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) = \left(\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \right) + \left(\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{21}{16}$$

Theo BĐT Cô si ta có: $\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \geq \frac{1}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y=2x$

Tương tự: $\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2}$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z=4x$

$\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \geq 1$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z=2y$

$\Rightarrow P \geq \frac{49}{16}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$

Vậy $\min P = \frac{49}{16}$ khi với $x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Bài 32. Tìm giá trị nhỏ nhất : $A = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45 \\ &= x^2 + y^2 + 36 - 2xy - 12x + 12y + 5y^2 - 10y + 5 + 4 \\ &= (x - y - 6)^2 + 5(y - 1)^2 + 4 \geq 4 \end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất $A = 4$ khi $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 33. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$

Lời giải

Ta có: $B = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3} = 3 + \frac{1}{x^2 + 2x + 3} = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2}$

Mà $3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -1$

Bài 34. Cho ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} &\text{Từ giả thiết } 0 \leq a, b, c \leq 2 \text{ suy ra } (2-a)(2-b)(2-c) + abc \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 8 - 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 8 - 12 + 2ab + 2bc + 2ac \geq 0 \text{ (vì } a+b+c=3) \\ &\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ac \geq 4 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \geq 4 + a^2 + b^2 + c^2 \\ &\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 4 + a^2 + b^2 + c^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 5 \text{ (vì } a+b+c=3) \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a; b; c) = (0; 1; 2)$ và các hoán vị của bộ số này.

Vậy P có GTLN nhất là $5 \Leftrightarrow (a; b; c) = (0; 1; 2)$ và các hoán vị của bộ số này.

Bài 35. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$.

Lời giải

$$C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) + (x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1} = 2 + \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \geq 2$$

Vậy $\min C = 2 \Leftrightarrow x = 1$

$$C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{4(x^2 + 1) - (x^2 + 2x + 1)}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \leq 4$$

Vậy $\max C = 4 \Leftrightarrow x = -1$

Bài 36. Cho $a + b = 3$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a^2 + b^2$

Lời giải

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ (với mọi } a, b)$$

$$a + b = 3 \Leftrightarrow (a + b)^2 = 9 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 9$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq 9 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 4,5$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2 = 4,5$

Bài 37. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$

Lời giải

$$P = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 - 8x + 8 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{2(x-2)^2}{x^2 + 1} - 1 \geq -1 \Rightarrow P_{\min} = -1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$P = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1} = \frac{9x^2 + 9 - 8x^2 - 8x - 2}{x^2 + 1} = 9 - \frac{2(2x+1)^2}{x^2 + 1} \leq 9 \Rightarrow P_{\max} = 9 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Bài 38. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = 4 - x^2 + 2x$

Lời giải

$$C = 4 - x^2 + 2x = 5 - (x^2 - 2x + 1) = 5 - (x-1)^2 \leq 5$$

Vậy $C_{\max} = 5 \Leftrightarrow x = 1$

Bài 39. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P &= \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)} \\
 &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)
 \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ và $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ với a, b, c dương, dấu bằng xảy ra

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 \right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + 1 \right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + 1 \right)$$

Bởi vậy :

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1 \right) \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Bài 40: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x + y + z = 1$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: } M = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$$

Lời giải

Vì $x + y + z = 1$ nên:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) (x + y + z) \\
 &= \frac{21}{16} + \left(\frac{x}{4y} + \frac{y}{16x} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{16x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{4y} \right)
 \end{aligned}$$

Ta có:

$$\frac{x}{4y} + \frac{y}{16x} = \frac{16x^2 + 4y^2}{64xy} = \frac{(4x - 2y)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 2y}{64xy} = \frac{(4x - 2y)^2}{64xy} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} (\forall x, y > 0)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{x}{z} + \frac{z}{16x} \geq \frac{1}{2}; \frac{y}{z} + \frac{z}{4y} \geq 1 (\forall x, y > 0)$$

Từ đó $M \geq \frac{21}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{49}{16}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2y = z \\ x + y + z = 1 \\ x, y, z > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = \frac{2}{7} \\ z = \frac{4}{7} \end{cases}$

Vậy GTNN của M là $\frac{49}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$

Bài 41: Cho $a > 0; b > 0$ và $a^2 + b^2 = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

Lời giải

$$a^2 + b^2 \geq 2ab; \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2 \frac{1}{ab}$$

$$(a^2 + b^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \geq 2ab \cdot \frac{2}{ab} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Vậy $\text{Min} Q = \frac{2}{5} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{5}$

Bài 42: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = (x-2)(x-5)(x^2-7x-10)$$

Lời giải

$$A = (x-2)(x-5)(x^2-7x-10)$$

$$= (x^2-7x+10)(x^2-7x-10)$$

Đặt $x^2 - 7x = t$, ta có biểu thức:

$$A = (t-10)(t+10) = t^2 - 100 \geq -100$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -100

Bài 43: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 P &= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) + (2x^3 + 2x) + x^2 \\
 &= (x^2 + 1)^2 + 2x(x^2 + 1) + x^2 = (x^2 + x + 1)^2
 \end{aligned}$$

$$\forall x \quad x^2 + x + 1 = \left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow P \geq \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Bài 44: Cho hai số không âm a và b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = a + b$. Tính giá trị lớn nhất của biểu

thức:
$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b \Rightarrow a + b \leq 2$$

$$\text{Chứng minh được với hai số dương } x, y \text{ thì } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

$$\text{Do đó: } S = 2 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) \leq 2 - \frac{4}{a+1+b+1} \leq 1$$

Vậy GTLN của S là 1, đạt được khi $a = b = 1$

Bài 45: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$$

Lời giải

Ta có:

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = (x + y + z) \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) = \left(\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \right) + \left(\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{21}{16} \text{ Theo}$$

$$\text{BĐT cô si ta có: } \frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \geq \frac{1}{4}. \text{ Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow y = 2x$$

$$\text{Tương tự: } \frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2}, \text{ dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow z = 4x$$

$$\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \geq 1, \text{ dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow z = 2y;$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{49}{16}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$$

$$\text{Vậy } \text{Min}P = \frac{49}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$$

Bài 46: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = (x - 2012)^2 + (x + 2013)^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= (x - 2012)^2 + (x + 2013)^2 = x^2 - 4024x + 4048144 + x^2 + 4026x + 4052169 \\ &= 2x^2 + 2x + 8100313 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 8100312,5 \geq 8100312,5 \quad \forall x \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \text{Min}P = 8100312,5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Bài 47: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = xy(x - 2)(y + 6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

Lời giải

$$B = xy(x - 2)(y + 6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

$$*)x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 \geq 2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 12 \geq 3 \text{ với mọi } y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} +B &= xy(x - 2)(y + 6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045 \\ &= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y) + 12(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 6y) + 36 + 2009 \\ &= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y + 12) + 3(y^2 + 6y + 12) + 2009 \\ &= (x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) + 2009 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow B \geq 2.3 + 2009 \Rightarrow B \geq 2015$$

$$*)B = 2015 \Leftrightarrow x = 1 \& y = -3$$

$$*)\text{Min}B = 2015 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Bài 48: Cho biểu thức $M = \frac{x^4 + 2}{x^6 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^4 + 4x^2 + 3}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị lớn nhất của M

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } M &= \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} \\
 &= \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \\
 &= \frac{x^4 + 2 + (x^2 - 1)(x^2 + 1) - (x^4 - x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^4 + 2 + x^4 - 1 - x^4 + x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} \\
 &= \frac{x^4 + x^2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2 \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x

b) Ta có : $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x

- Nếu $x = 0$ ta có $M = 0$

- Nếu $x \neq 0$, chia cả tử và mẫu của M cho x^2 ta có: $M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}$

Ta có: $x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + 1 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1 \geq 1$

Nên ta có: $M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \leq 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

Vậy M lớn nhất là $M = 1$ khi $x = 1$

Bài 49: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + 2y \geq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$

Lời giải

Ta có: $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$

$$= (x^2 - 2x + 1) + (2y^2 - 8y + 8) + \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) + \left(\frac{24}{y} + 6y - 24\right) + (x + 2y) + 17$$

$$= (x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 + \frac{(x - 1)^2}{x} + \frac{6(y - 2)^2}{y} + (x + 2y) + 17$$

$$\geq 0 + 0 + 0 + 0 + 5 + 17 = 22$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2(y-2)^2 = \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{6(y-2)^2}{y} = 0 \text{ và } x+2y=5$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ và } y=2. \text{ Vậy } H \text{ nhỏ nhất là } H=22 \Leftrightarrow x=1, y=2$$

Bài 50: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x+y) - 2010$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= x^2 + y^2 - 4(x+y) - 2010 \\ &= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 2018 \\ &= (x-2)^2 + (y-2)^2 - 2018 \geq -2018 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -2018 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Bài 51: Cho $a, b, c \in [0;1]$ và $a+b+c=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải

$$\text{Vì } a, b, c \in [0;1] \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$$

$$\text{Ta có: } (1-a)(1-b)(1-c) = 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ac) - abc \quad (\text{Vì } a+b+c=2)$$

$$= -1 + (ab+bc+ac) - abc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ac \geq abc+1 \geq 1 \quad (\text{Vì } abc \geq 0) \Rightarrow -2(ab+bc+ac) \leq -2$$

$$\text{Lại có: } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$$

$$\Rightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 4 - 2(ab+bc+ac) \leq 4 - 2 = 2$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 2 \Leftrightarrow (a, b, c) \text{ là hoán vị của } (0;1;1)$$

Bài 52: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 5$

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: } B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1 \\ &= (x-y)^2 + (y-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Do } (x-y)^2 \geq 0; (y-2)^2 \geq 0$$

$$\text{Nên } A = (x-y)^2 + (y-2)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = y = 2$$

Vậy GTNN của A là $1 \Leftrightarrow x = y = 2$

$$B) B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + x + 1} = \frac{3(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{3}{x^2+1}$$

Do $x^2 + 1 \geq 1$ nên $B = \frac{3}{x^2+1} \leq 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy GTLN của B là $3 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 53: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1} \\ &= \frac{-335x^2 - 335 + 335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} = -335 + \frac{335(x+3)^2}{x^2 + 1} \geq -335 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -335 khi $x = -3$

Bài 54: Tìm các giá trị của x để biểu thức:

$P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

$$P = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36$$

Ta thấy $(x^2 + 5x)^2 \geq 0$ nên $P = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$

$$\text{Do đó } \min P = -36 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

Bài 55: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x+y) - 2010$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= x^2 + y^2 - 4(x+y) - 2010 \\ &= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 2018 \\ &= (x-2)^2 + (y-2)^2 - 2018 \geq -2018 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = -2018 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Bài 56: Tìm giá trị nhỏ nhất của $E = 2x^2 - 8x + 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} E &= 2x^2 - 8x + 1 \\ &= 2x^2 - 8x + 8 - 7 \end{aligned}$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$= 2(x^2 - 4x + 4) - 7$$

$$= 2(x - 2)^2 - 7 \geq -7$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $E = -7$ khi $x = 2$

Bài 57: Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = 4x^2 + 4x + 5$

Lời giải

Ta có : $M = 4x^2 + 4x + 5 = \left[(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1 \right] + 4 = (2x+1)^2 + 4$

Vì $(2x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow (2x+1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow M \geq 4$

Vậy GTNN của $M = 4 \Leftrightarrow x = -0,5$

Bài 58: Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: $A = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$.

Lời giải:

HD: + Tìm GTLN:

Ta có: $A = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \frac{2(x^2 + 2) - (x-1)^2}{x^2 + 2} = 2 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2} \leq 2$

Dấu “=” $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Suy ra GTLN(A) = 2 $\Leftrightarrow x = 1$.

+ Tìm GTNN:

Ta có: $A = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \frac{2x^2 + 4x + 6}{2 \cdot (x^2 + 2)} = \frac{(x^2 + 2) + (x+2)^2}{2 \cdot (x^2 + 2)} = \frac{1}{2} + \frac{(x+2)^2}{2(x^2 + 2)} \geq \frac{1}{2}$

Dấu “=” $\Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Suy ra GTNN(A) = $\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2$

Bài 59: Tìm giá trị của biến x để:

a) $P = \frac{1}{x^2 + 2x + 6}$ đạt giá trị lớn nhất

b) $Q = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải:

a) $P = \frac{1}{x^2 + 2x + 6}$ đạt giá trị lớn nhất.

HD: Ta có: $P = \frac{1}{x^2 + 2x + 6} = \frac{1}{(x+1)^2 + 5} \leq \frac{1}{5}$ (Vì $1 > 0$ và $(x+1)^2 + 5 \geq 5$)

Dấu “=” $\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Suy ra GTLN(P) = $\frac{1}{5} \Leftrightarrow x = -1$.

b) $Q = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất

HD: ĐKXD: $x \neq -1$

Ta có: $Q = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x+1)^2 - (x+1) + 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$

Đặt $t = \frac{1}{x+1}$. Ta có: $Q = 1 - t + t^2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

Dấu « = » $\Leftrightarrow t - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$

Suy ra GTNN(Q) = $\frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 1$

Bài 60 : a) Tìm GTLN của $A = |x-4|(2-|x-4|)$

b) Tìm GTNN của biểu thức $B = \frac{9x}{2-x} + \frac{2}{x}$, với $0 < x < 2$

Lời giải:

a) Tìm GTLN của $A = |x-4|(2-|x-4|)$

Ta có: $A = |x-4|(2-|x-4|) = 2|x-4| - (|x-4|)^2$

Đặt $t = |x-4| \geq 0$, khi đó: $A = 2t - t^2 = \dots = -(t-1)^2 + 1 \leq 1$

Dấu “=” $\Leftrightarrow t-1=0 \Leftrightarrow |x-4|-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases}$

Suy ra $GTLN(A) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{9x}{2-x} + \frac{2}{x}$, với $0 < x < 2$.

Ta có: $B = \frac{9x}{2-x} + \frac{2}{x} = \frac{9x}{2-x} + \frac{2-x}{x} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{9x}{2-x} \cdot \frac{2-x}{x}} + 1 = 2\sqrt{9} + 1 = 7$

Dấu “=” $\Leftrightarrow \frac{9x}{2-x} = \frac{2-x}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy, GTNN(B) = 7 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Chú ý: BĐT AM-GM cho 2 số a, b không âm, ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b \geq 0$

* **Cách biến đổi B :** Ta viết $B = \frac{9x}{2-x} + \frac{2}{x} = m \cdot \frac{9x}{2-x} + n \cdot \frac{2-x}{x} + p$.

Biến đổi và đồng nhất thức hai vế, suy ra $m=1, n=1, p=1$.

Bài 61: Tìm GTNN của:

a) $A = x + \frac{16}{x-3} + 2007, x > 3$; b) $B = \frac{x^2 - 2x + 2018}{2018x^2}, x \neq 0$; c) $C = \frac{x^3 + 2000}{x}, x > 0$

Lời giải:

Tìm GTNN của:

a) Ta có:

$$A = x + \frac{16}{x-3} + 2007 = (x-3) + \frac{16}{x-3} + 2010 \geq 2\sqrt{(x-3) \cdot \frac{16}{x-3}} + 2010 = 2.4 + 2010 = 2018$$

(Vì $x > 3$ nên $x - 3 > 0$, dùng BĐT Cô-si cho hai số dương $(x - 3)$ và $\frac{16}{x - 3}$)

$$\text{Dấu «} = \text{»} \Leftrightarrow x - 3 = \frac{16}{x - 3}, x > 3 \Leftrightarrow x = 7$$

Suy ra $GTNN(A) = 2018 \Leftrightarrow x = 7$.

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{x^2 - 2x + 2018}{2018x^2}, x \neq 0 \\ &= \frac{1}{2018} - 2 \cdot \frac{1}{2018} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2018} + \left(\frac{1}{2018}\right)^2 - \left(\frac{1}{2018}\right)^2 + \frac{1}{2018} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2018}\right)^2 + \frac{2017}{2018^2} \geq \frac{2017}{2018^2} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu «} = \text{»} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{2018} = 0 \Leftrightarrow x = 2018 \text{ (thỏa } x \neq 0 \text{)}$$

$$\text{Suy ra } GTNN(B) = \frac{2017}{2018^2} \Leftrightarrow x = 2018$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \frac{x^3 + 2000}{x}, x > 0 \\ &= x^2 + \frac{2000}{x} = x^2 + \frac{1000}{x} + \frac{1000}{x} \geq 3\sqrt{x^2 \cdot \frac{1000}{x} \cdot \frac{1000}{x}} = 3 \cdot 100 = 300 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu «} = \text{»} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1000}{x} \Leftrightarrow x = 10 \text{ (thỏa } x > 0 \text{)}$$

$$\text{Suy ra } GTNN(C) = 300 \Leftrightarrow x = 10.$$

Bài 62: Cho hai số x và y thỏa mãn điều kiện: $3x + y = 1$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 3x^2 + y^2$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $N = xy$

Lời giải:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 3x^2 + y^2$

$$\text{Từ } 3x + y = 1 \Leftrightarrow y = -3x + 1,$$

$$\text{Khi đó, } M = 3x^2 + y^2 = 3x^2 + (-3x + 1)^2 = 3x^2 + 9x^2 - 6x + 1$$

$$= 12x^2 - 6x + 1 = 12\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\right) = 12\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48}\right) = 12\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$$

$$\text{Dấu «} = \text{»} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}; y = \frac{1}{4}$$

$$\text{Suy ra } GTNN(M) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}; y = \frac{1}{4}$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $N = xy$

$$\text{Từ } 3x + y = 1 \Leftrightarrow y = -3x + 1,$$

$$\text{Khi đó, } N = xy = x(-3x + 1) = -3x^2 + x = -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right)$$

$$= -3\left(x^2 - 2x\frac{1}{6} + \frac{1}{36} - \frac{1}{36}\right) = -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} \leq \frac{1}{12}$$

$$\text{Dấu « = »} \Leftrightarrow x - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$\text{Suy ra } GTLN(N) = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

Bài 63: a) Cho x, y là các số dương thỏa mãn $2x + 3y = 7$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{8}{x} + \frac{3}{y}$

b) Tìm GTLN của $A = -x^2 - y^2 + xy + x + y$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } Q &= \frac{8}{x} + \frac{3}{y} = \left(\frac{8}{x} + 2x\right) + \left(\frac{3}{y} + 3y\right) - 7 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{8}{x} \cdot 2x} + 2\sqrt{\frac{3}{y} \cdot 3y} - 7 = 2.4 + 2.3 - 7 = 7 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu « = »} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ \frac{8}{x} = 2x \\ \frac{3}{y} = 3y \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Suy ra GTNN(Q) = 7 $\Leftrightarrow x = 2, y = 1$.

b) Ta có: $A = -x^2 - y^2 + xy + x + y$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2A &= -(x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 2y + 1) + 2 \\ &= -[(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2] + 2 \leq 2 \\ \Rightarrow A &\leq 1 \end{aligned}$$

Dấu « = » $\Leftrightarrow x = y = 1$

Suy ra GTLN(A) = 1 $\Leftrightarrow x = y = 1$

Bài 64: a) Cho $x + y = 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3$

b) Tìm GTNN của $B = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2023$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^2 - xy + y^2 \quad (\text{Vì } x + y = 1) \\ &= x^2 - x(1 - x) + (1 - x)^2 \quad (\text{Vì } y = 1 - x) \\ &= 3\left(x^2 - x + \frac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dấu « = » $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Suy ra $GTNN(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{4}$.

b) Tìm GTNN của $B = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2023$

Ta có: $B = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2023$

$$= (4x^2 + 4xy + y^2) + (y^2 + 4y + 4) + (x^2 - 2x + 1) + 2018$$

$$= (2x + y)^2 + (y + 2)^2 + (x - 1)^2 + 2018 \geq 2018$$

$$\text{Dấu “=”} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Suy ra $GTNN(B) = 2018 \Leftrightarrow x = 1$ và $y = -2$.

Bài 65: a) Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2$ biết $x + y = 4$

b) Tìm GTNN của $B = x^4 + (3 - x)^2$

c) Tìm GTNN của $C = (x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7)$

d) Tìm GTLN của $D(x) = \frac{x}{(x + 2019)^2}$ với $x > 0$

Lời giải:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = x^2 + y^2$ biết $x + y = 4$

* **Cách 1 :** Ta có: $x + y = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 16$ (1)

Ta lại có: $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2x^2 + 2y^2 \geq 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 8$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2 = 8 \Leftrightarrow x = y = 2$

* **Cách 2:** Ta có : $x + y = 4 \Leftrightarrow y = 4 - x$

Suy ra $A = x^2 + y^2 = x^2 + (4 - x)^2 = \dots = 2x^2 - 8x + 16 = \dots = 2(x - 2)^2 + 8 \geq 8$

$$\text{Dấu “=”} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy, $GTNN(A) = 8 \Leftrightarrow x = y = 2$.

b) Ta có : $B = x^4 + (3 - x)^2 = \dots = (x^4 - 2x^2 + 1) + 3(x^2 - 2x + 1) + 5$
 $= (x^2 - 1)^2 + 3(x - 1)^2 + 5 \geq 5$

$$\text{Dấu “=”} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Suy ra $GTNN(B) = 5 \Leftrightarrow x = 1$

c) Ta có: $C = (x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7) = \dots = (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x - 21)$

Đặt $t = x^2 + 4x - 13$ (**chú ý**: $-13 = \frac{(-5) + (-21)}{2}$)

Khi đó, $C = (t+8)(t-8) = t^2 - 64 \geq -64$

Dấu “=” $\Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 13 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x+2)^2 = 17 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{17} \\ x = -2 - \sqrt{17} \end{cases}$

d) Tìm giá trị của x để biểu thức sau đạt GTLN: $D(x) = \frac{x}{(x+2019)^2}$ với $x > 0$

***Cách 1:** Đặt $a = 2019$

Khi đó $D(x) = \frac{x}{(x+a)^2} = \frac{(x+a)^2 - (x+a)^2 + 4ax}{4a(x+a)^2} = \frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{4a(x+a)^2} = \frac{1}{4a} - \frac{(x-a)^2}{4a(x+a)^2} \leq \frac{1}{4a}$

(Vì $a > 0, x > 0$).

Dấu “=” $\Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$.

Suy ra $GTLN(D(x)) = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4 \cdot 2019} \Leftrightarrow x = a = 2019$.

***Cách 2:** Đặt $a = 2019 > 0$

Ta có: $(x-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+a)^2 \geq 4ax \Leftrightarrow \frac{1}{(x+a)^2} \leq \frac{1}{4ax}$ (Vì $a > 0, x > 0$ nên $4ax > 0$)

Suy ra $D(x) = \frac{x}{(x+a)^2} \leq \frac{x}{4ax} = \frac{1}{4a}$ (Vì $a > 0, x > 0$)

Dấu “=” $\Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$.

Suy ra $GTLN(D(x)) = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4 \cdot 2019} \Leftrightarrow x = a = 2019$.

Bài 66: Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = (2x-3)^2 - 4|2x-3| + 7$ và các giá trị của x tương ứng.

Lời giải:

Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = (2x-3)^2 - 4|2x-3| + 7$ và các giá trị của x tương ứng.

Ta biết: $|A|^2 = A^2$.

Đặt: $X = |2x-3|$, $X \geq 0$.

Khi đó biểu thức (*) viết thành: $Q = X^2 - 4X + 7 = (X-2)^2 + 3 \geq 3$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow X = 2$

$$\Leftrightarrow |2x-3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 = 2 \\ 2x-3 = -2 \end{cases}$$

$$*) \ 2x-3 = 2 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

$$*) 2x - 3 = -2 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \min P = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Bài 67: Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + 2y \geq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $H = x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y}$ GTLN

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } H &= x^2 + 2y^2 + \frac{1}{x} + \frac{24}{y} \\ &= (x^2 - 2x + 1) + (2y^2 - 8y + 8) + \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) + \left(\frac{24}{y} + 6y - 24\right) + (x + 2y) + 17 \\ &= (x-1)^2 + 2(y-2)^2 + \frac{(x-1)^2}{x} + \frac{6(y-2)^2}{y} + (x+2y) + 17 \\ &\geq 0 + 0 + 0 + 0 + 5 + 17 = 22 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2(y-2)^2 = \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{6(y-2)^2}{y} = 0 \text{ và } x+2y=5$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ và } y=2. \text{ Vậy } H \text{ nhỏ nhất là } H=22 \Leftrightarrow x=1, y=2$$

Bài 68: Cho hai số không âm a và b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = a + b$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b \Rightarrow a + b \leq 2$$

$$\text{Chứng minh được với hai số dương } x, y \text{ thì } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

$$\text{Do đó: } S = 2 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \right) \leq 2 - \frac{4}{a+1+b+1} \leq 1$$

Vậy GTLN của S là 1, đạt được khi $a = b = 1$

Bài 69: Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = 2$

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của } M = \frac{a^3}{2016a + 2017b} + \frac{b^3}{2017a + 2016b}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
M &= \left[\frac{a^3}{2016a + 2017b} + \frac{a(2016a + 2017b)}{4033^2} \right] + \\
&+ \left[\frac{b^3}{2017a + 2016b} + \frac{b(2017a + 2016b)}{4033^2} \right] - \frac{2016(a^2 + b^2) + 4034ab}{4033^2} \\
&\geq \frac{2a^2}{4033} + \frac{2b^2}{4033} - \frac{2016(a^2 + b^2) + 4034 \cdot \frac{a^2 + b^2}{2}}{4033^2} = \frac{a^2 + b^2}{4033} = \frac{2}{4033} \\
M &\geq \frac{2}{4033}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b = 1
\end{aligned}$$

Vậy GTNN của $M = \frac{2}{4033} \Leftrightarrow a = b = 1$

Bài 70: Cho x, y, z là các số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4 + y^4 + z^4$ biết $x + y + z = 2$

Lời giải

Áp dụng công thức Bunhiacopski ta có:

$$\begin{aligned}
(x + y + z)^4 &\leq \left[(x + y + z)^2 \right]^2 \leq \left[3(x + y + z)^2 \right]^2 \\
&\leq 9(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 27(x^4 + y^4 + z^4) \\
\Rightarrow 16 &\leq 27(x^4 + y^4 + z^4) \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{16}{27}
\end{aligned}$$

Vậy GTNN của $x^4 + y^4 + z^4$ là $\frac{16}{27} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$

Bài 71: Tìm các giá trị của x để biểu thức: $P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

$$P = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36$$

Ta thấy $(x^2 + 5x)^2 \geq 0$ nên $P = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$

Do đó $\min P = -36 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$

Bài 72: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $L = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 20$

Lời giải

$$\begin{aligned}
L &= x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 20 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3x^2 - 12x + 12 + 8 \\
&= x^2(x^2 - 4x + 4) + 3(x^2 - 4x + 4) + 8 = (x-2)^2(x^2 + 3) + 8
\end{aligned}$$

Do $(x-2)^2 \geq 0 (\forall x); (x^2 + 3) > 0 (\forall x) \Rightarrow L \geq 8 \quad \forall x$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy với $x = 2$ thì L có giá trị nhỏ nhất.

Giá trị nhỏ nhất của L là 8

Bài 73: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1} \\ &= \frac{335x^2 - 335 + 335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} = -335 + \frac{335(x+3)^2}{x^2 + 1} \geq -335 \end{aligned}$$

Vậy GTNN của A là -335 khi $x = -3$

Bài 74: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

Lời giải

$$B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

$$*) x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 \geq 2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$y^2 + 6y + 9 = (y+3)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 + 6y + 12 \geq 3 \text{ với mọi } y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$+B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$$

$$= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y) + 12(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 6y) + 36 + 2009$$

$$= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y + 12) + 3(y^2 + 6y + 12) + 2009$$

$$= (x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) + 2009 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow B \geq 2.3 + 2009 \Rightarrow B \geq 2015$

$$*) B = 2015 \Leftrightarrow x = 1 \& y = -3$$

$$*) \text{Min} B = 2015 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Bài 75: Cho $x, y, z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$

Lời giải

$$\text{Đặt } y+z=a; z+x=b; x+y=c \Rightarrow x+y+z = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-a+b+c}{2}; y = \frac{a-b+c}{2}; z = \frac{a+b-c}{2}$$

$$P = \frac{-a+b+c}{2a} + \frac{a-b+c}{2b} + \frac{a+b-c}{2c}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} - 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[-3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \right] \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Min} P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow x = y = z$$

Bài 76: Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: $A = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$.

Lời giải

+ Tìm GTLN:

$$\text{Ta có: } A = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \frac{2(x^2 + 2) - (x-1)^2}{x^2 + 2} = 2 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2} \leq 2$$

$$\text{Dấu “=”} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Suy ra GTLN}(A) = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

+ Tìm GTNN:

$$\text{Ta có: } A = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \frac{2x^2 + 4x + 6}{2(x^2 + 2)} = \frac{(x^2 + 2) + (x+2)^2}{2(x^2 + 2)} = \frac{1}{2} + \frac{(x+2)^2}{x^2 + 2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Dấu “=”} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Suy ra GTNN}(A) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2$$

Bài 77: Tìm giá trị của biến x để:

a) $P = \frac{1}{x^2 + 2x + 6}$ đạt giá trị lớn nhất

b) $Q = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

a)

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{x^2 + 2x + 6} = \frac{1}{(x+1)^2 + 5} \leq \frac{1}{5} \quad (\text{Vì } 1 > 0 \text{ và } (x+1)^2 + 5 \geq 5)$$

$$\text{Dấu “=”} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{Suy ra GTLN}(P) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = -1.$$

b) ĐKXD: $x \neq -1$

$$\text{Ta có: } Q = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x+1)^2 - (x+1) + 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{x+1}. \text{ Ta có: } Q = 1 - t + t^2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{Dấu “=”} \Leftrightarrow t - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

Suy ra GTNN(Q) = $\frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 1$

Bài 78: a) Tìm GTLN của $A = |x-4|(2-|x-4|)$

b) Tìm GTNN của biểu thức $B = \frac{9x}{2-x} + \frac{2}{x}$, với $0 < x < 2$

Lời giải

a) Tìm GTLN của $A = |x-4|(2-|x-4|)$

Ta có: $A = |x-4|(2-|x-4|) = 2|x-4| - (|x-4|)^2$

Đặt $t = |x-4| \geq 0$, khi đó: $A = 2t - t^2 = \dots = -(t-1)^2 + 1 \leq 1$

Dấu “=” $\Leftrightarrow t-1=0 \Leftrightarrow |x-4|-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases}$

Suy ra $GTLN(A) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{9x}{2-x} + \frac{2}{x}$, với $0 < x < 2$.

Ta có: $B = \frac{9x}{2-x} + \frac{2}{x} = \frac{9x}{2-x} + \frac{2-x}{x} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{9x}{2-x} \cdot \frac{2-x}{x}} + 1 = 2\sqrt{9} + 1 = 7$

Dấu “=” $\Leftrightarrow \frac{9x}{2-x} = \frac{2-x}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy, $GTNN(B) = 7 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bài 79: Tìm GTNN của:

a) $A = x + \frac{16}{x-3} + 2007, x > 3$; b) $B = \frac{x^2 - 2x + 2018}{2018x^2}, x \neq 0$; c) $C = \frac{x^3 + 2000}{x}, x > 0$

Lời giải

a) Ta có: $A = x + \frac{16}{x-3} + 2007 = (x-3) + \frac{16}{x-3} + 2010 \geq 2\sqrt{(x-3) \cdot \frac{16}{x-3}} + 2010 = 2.4 + 2010 = 2018$

(Vì $x > 3$ nên $x-3 > 0$, dùng BĐT Cô-si cho hai số dương $(x-3)$ và $\frac{16}{x-3}$)

Dấu “=” $\Leftrightarrow x-3 = \frac{16}{x-3}, x > 3 \Leftrightarrow x = 7$

Suy ra $GTNN(A) = 2018 \Leftrightarrow x = 7$.

b) Ta có $B = \frac{x^2 - 2x + 2018}{2018x^2}, x \neq 0$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2018} - 2 \cdot \frac{1}{2018} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2018} + \left(\frac{1}{2018}\right)^2 - \left(\frac{1}{2018}\right)^2 + \frac{1}{2018} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2018}\right)^2 + \frac{2017}{2018^2} \geq \frac{2017}{2018^2} \end{aligned}$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{2018} = 0 \Leftrightarrow x = 2018$ (thỏa $x \neq 0$)

Suy ra $GTNN(B) = \frac{2017}{2018^2} \Leftrightarrow x = 2018$

c) $C = \frac{x^3 + 2000}{x}, x > 0$

$$= x^2 + \frac{2000}{x} = x^2 + \frac{1000}{x} + \frac{1000}{x} \geq 3\sqrt{x^2 \cdot \frac{1000}{x} \cdot \frac{1000}{x}} = 3 \cdot 100 = 300$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow x^2 = \frac{1000}{x} \Leftrightarrow x = 10$ (thỏa $x > 0$)

Suy ra $GTNN(C) = 300 \Leftrightarrow x = 10$.

Bài 80: Cho hai số x và y thỏa mãn điều kiện: $3x + y = 1$

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 3x^2 + y^2$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $N = xy$

Lời giải

c) **Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 3x^2 + y^2$**

Từ $3x + y = 1 \Leftrightarrow y = -3x + 1$,

Khi đó, $M = 3x^2 + y^2 = 3x^2 + (-3x + 1)^2 = 3x^2 + 9x^2 - 6x + 1$

$$= 12x^2 - 6x + 1 = 12\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\right) = 12\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48}\right) = 12\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}; y = \frac{1}{4}$

Suy ra $GTNN(M) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}; y = \frac{1}{4}$

d) **Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $N = xy$**

Từ $3x + y = 1 \Leftrightarrow y = -3x + 1$,

$$\begin{aligned}\text{Khi đó, } N = xy &= x(-3x+1) = -3x^2 + x = -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) \\ &= -3\left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{36} - \frac{1}{36}\right) = -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} \leq \frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$\text{Dấu «} = \text{»} \Leftrightarrow x - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$\text{Suy ra } GTLN(N) = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

Bài 81: a) Cho x, y là các số dương thỏa mãn $2x + 3y = 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{8}{x} + \frac{3}{y}$$

e) Tìm GTLN của $A = -x^2 - y^2 + xy + x + y$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{a) Ta có: } Q &= \frac{8}{x} + \frac{3}{y} = \left(\frac{8}{x} + 2x\right) + \left(\frac{3}{y} + 3y\right) - 7 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{8}{x} \cdot 2x} + 2\sqrt{\frac{3}{y} \cdot 3y} - 7 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 7 = 7\end{aligned}$$

$$\text{Dấu «} = \text{»} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ \frac{8}{x} = 2x \\ \frac{3}{y} = 3y \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Suy ra $GTNN(Q) = 7 \Leftrightarrow x = 2, y = 1$.

b) Ta có: $A = -x^2 - y^2 + xy + x + y$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2A &= -(x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 2y + 1) + 2 \\ &= -[(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2] + 2 \leq 2 \\ \Rightarrow A &\leq 1\end{aligned}$$

Dấu «} = \text{»} \Leftrightarrow x = y = 1

Suy ra $GTLN(A) = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$

Bài 82: a) Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2$ biết $x + y = 4$

b) Tìm GTNN của $B = x^4 + (3 - x)^2$

c) Tìm GTNN của $C = (x-1)(x-3)(x+5)(x+7)$

d) Tìm GTLN của $D(x) = \frac{x}{(x+2019)^2}$ với $x > 0$

Lời giải

a) * **Cách 1** : Ta có: $x + y = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 16$ (1)

Ta lại có: $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2x^2 + 2y^2 \geq 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 8$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2 = 8 \Leftrightarrow x = y = 2$

* **Cách 2**: Ta có: $x + y = 4 \Leftrightarrow y = 4 - x$

Suy ra $A = x^2 + y^2 = x^2 + (4 - x)^2 = \dots = 2x^2 - 8x + 16 = \dots = 2(x - 2)^2 + 8 \geq 8$

Dấu “=” $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy, $GTNN(A) = 8 \Leftrightarrow x = y = 2$.

b) Ta có: $B = x^4 + (3 - x)^2 = \dots = (x^4 - 2x^2 + 1) + 3(x^2 - 2x + 1) + 5 = (x^2 - 1)^2 + 3(x - 1)^2 + 5 \geq 5$

Dấu “=” $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Suy ra $GTNN(B) = 5 \Leftrightarrow x = 1$

c) Ta có: $C = (x-1)(x-3)(x+5)(x+7) = \dots = (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x - 21)$

Đặt $t = x^2 + 4x - 13$ (**chú ý**: $-13 = \frac{(-5) + (-21)}{2}$)

Khi đó, $C = (t+8)(t-8) = t^2 - 64 \geq -64$

Dấu “=” $\Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 13 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x+2)^2 = 17 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{17} \\ x = -2 - \sqrt{17} \end{cases}$

d) Tìm giá trị của x để biểu thức sau đạt GTLN: $D(x) = \frac{x}{(x+2019)^2}$ với $x > 0$

***Cách 1**: Đặt $a = 2019$

Khi đó $D(x) = \frac{x}{(x+a)^2} = \frac{(x+a)^2 - (x+a)^2 + 4ax}{4a(x+a)^2} = \frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{4a(x+a)^2} = \frac{1}{4a} - \frac{(x-a)^2}{4a(x+a)^2} \leq \frac{1}{4a}$

(Vì $a > 0, x > 0$).

Dấu “=” $\Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$.

Suy ra $GTLN(D(x)) = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4.2019} \Leftrightarrow x = a = 2019$.

***Cách 2:** Đặt $a = 2019 > 0$

Ta có: $(x-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+a)^2 \geq 4ax \Leftrightarrow \frac{1}{(x+a)^2} \leq \frac{1}{4ax}$ (Vì $a > 0, x > 0$ nên $4ax > 0$)

Suy ra $D(x) = \frac{x}{(x+a)^2} \leq \frac{x}{4ax} = \frac{1}{4a}$ (Vì $a > 0, x > 0$)

Dấu “=” $\Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$.

Suy ra $GTLN(D(x)) = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4.2019} \Leftrightarrow x = a = 2019$.

Bài 83: : a) Cho $x + y = 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3$

b) Tìm GTNN của $B = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2023$

Lời giải

a) Ta có: $A = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^2 - xy + y^2$ (Vì $x + y = 1$)

$$= x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 \quad (\text{Vì } y = 1-x)$$

$$= 3\left(x^2 - x + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

Suy ra $GTNN(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{4}$.

b) Tìm GTNN của $B = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2023$

Ta có: $B = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2023$

$$= (4x^2 + 4xy + y^2) + (y^2 + 4y + 4) + (x^2 - 2x + 1) + 2018$$

$$= (2x + y)^2 + (y + 2)^2 + (x - 1)^2 + 2018 \geq 2018$$

$$\text{Dấu “=”} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ y+2=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Suy ra $GTNN(B) = 2018 \Leftrightarrow x = 1$ và $y = -2$.

Bài 84: Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = (2x-3)^2 - 4|2x-3| + 7$ và các giá trị của x tương ứng.

Lời giải

Ta biết: $|A|^2 = A^2$.

Đặt: $X = |2x-3|$, $X \geq 0$.

Khi đó biểu thức (*) viết thành: $Q = X^2 - 4X + 7 = (X-2)^2 + 3 \geq 3$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow X = 2$

$$\Leftrightarrow |2x-3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=2 \\ 2x-3=-2 \end{cases}$$

$$*) 2x-3=2 \Leftrightarrow 2x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}.$$

$$*) 2x-3=-2 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \min P = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Bài 85: Cho $a > 0; b > 0$ và $a^2 + b^2 = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

Lời giải

Ta có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab; \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2 \frac{1}{ab}$$

$$(a^2 + b^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \geq 2ab \cdot \frac{2}{ab} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Vậy } \min Q = \frac{2}{5} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{5}$$

Bài 86: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Lời giải

Ta có:

$$P = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) + (2x^3 + 2x) + x^2 = (x^2 + 1)^2 + 2x(x^2 + 1) + x^2 = (x^2 + x + 1)^2$$

$$\text{Vì } x^2 + x + 1 = \left(x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{Suy ra : } P \geq \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = -\frac{1}{2}$

Bài 87: Cho hai số không âm a và b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = a + b$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

Lời giải

Ta có: $a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b; c^2 + 1 \geq 2c \Rightarrow a + b \leq 2$

Chứng minh được với hai số dương x,y thì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

$$\text{Do đó: } S = 2 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) \leq 2 - \frac{4}{a+1+b+1} \leq 1$$

Vậy GTLN của S là 1, đạt được khi a = b = 1

Bài 88: Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$$

Lời giải

Ta có:

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = (x + y + z) \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) = \left(\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \right) + \left(\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{21}{16}$$

Theo BĐT cô si ta có : $\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \geq \frac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $y = 2x$

Tương tự : $\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $z = 4x$

$$\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \geq 1. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } z = 2y$$

Suy ra: $P \geq \frac{49}{16}$. Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$

Vậy: $\min P = \frac{49}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$

Bài 89: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = (x - 2012)^2 + (x + 2013)^2$

Lời giải

Ta có:

$$P = (x - 2012)^2 + (x + 2013)^2 = x^2 - 4024x + 4048144 + x^2 + 4026x + 4052169$$

$$= 2x^2 + 2x + 8100313 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 8100312,5 \geq 8100312,5 \quad \forall x$$

Vậy $\min P = 8100312,5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Bài 90: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$

Lời giải

$$A = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1} = \frac{-335x^2 - 335 + 335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} = -335 + \frac{335(x + 3)^2}{x^2 + 1} \geq -335$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -335 khi $x = -3$

Bài 91: a. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $x + y + z$ biết rằng $x + 5y = 21$ và $2x + 3z = 51$ với $x, y, z \geq 0$

b. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của các phân thức $B = \frac{4x + 3}{x^2 + 1}$

Lời giải

a) Cộng vế với vế của các đẳng thức $x + 5y = 21$ và $2x + 3z = 51$ ta được

$$3(x + y + z) + 2y = 72$$

Như vậy $3(x + y + z)$ lớn nhất khi và chỉ khi $2y$ nhỏ nhất. Mặt khác $y \geq 0$ nên $2y$ nhỏ nhất khi $y = 0 \Rightarrow x = 21$ và $z = 3$

Do đó $3(x + y + z)$ lớn nhất bằng 72 $\Rightarrow x + y + z$ lớn nhất bằng 24 khi $x = 21; y = 0$ và $z = 3$

b) Ta có $\frac{4x + 3}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 4x + 4 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x + 2)^2}{x^2 + 1} - 1 \geq -1 \Rightarrow \min B = -1$ với $x = -2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $B = -1$ khi $x = -2$

$$\text{Mặt khác ta lại có } \frac{4x + 3}{x^2 + 1} = \frac{4x^2 + 4 - 4x^2 + 4x - 1}{x^2 + 1} = \frac{4(x^2 + 1) - (4x^2 - 4x + 1)}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(2x - 1)^2}{x^2 + 1} \leq 4$$

$$\Rightarrow \max B = 4 \text{ với } x = \frac{1}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $B = 4$ khi $x = \frac{1}{2}$

Bài 92: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^4 - 2x^2 - 3|x^2 - 1| - 9$.

Lời giải

Ta có $P = x^4 - 2x^2 - 3|x^2 - 1| - 9 = (x^2 - 1)^2 - 3|x^2 - 1| - 10$

$$= \left(|x^2 - 1| - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \geq -\frac{49}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $|x^2 - 1| - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$

Vậy Min $P = -\frac{49}{4}$ khi $x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$

Bài 93: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2012}{x^2 + y^2 - 20(x + y) + 2213}$

Lời giải

Ta có $x^2 + y^2 - 20(x + y) + 2213 = (x - 10)^2 + (y - 10)^2 + 2013 \geq 2013$ với mọi x, y .

$$\Rightarrow P = \frac{2012}{(x - 10)^2 + (y - 10)^2 + 2013} \leq \frac{2012}{2013}$$

$$P = \frac{2012}{2013} \text{ khi } x = 10 \text{ và } y = 10$$

Vậy Max $P = \frac{2012}{2013}$ khi $x = 10$ và $y = 10$.

Bài 94: Cho các số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2$$

Lời giải

Ta có: $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ với mọi a

$$\Leftrightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} \geq 0 \text{ với mọi } a$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{4} \geq a \text{ với mọi } a \quad (1)$$

Tương tự: $b^2 + \frac{1}{4} \geq b$ với mọi b (2)

$$c^2 + \frac{1}{4} \geq c \text{ với mọi } c \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2) và (3) ta được :

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c.$$

$$\text{Vì } a + b + c = \frac{3}{2} \text{ nên: } P = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{3}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{3}{4}$ đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Bài 95: Cho hai số dương x, y có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = (1 - \frac{1}{x^2})(1 - \frac{1}{y^2}) + xy$$

Lời giải

$$\begin{aligned} Q &= (1 - \frac{1}{x^2})(1 - \frac{1}{y^2}) + xy \\ &= 1 - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 y^2} + xy = 1 - \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} + \frac{1}{x^2 y^2} + xy \\ &= 1 - \frac{(x+y)^2 - 2xy}{x^2 y^2} + \frac{1}{x^2 y^2} + xy = 1 - \frac{1-2xy}{x^2 y^2} + \frac{1}{x^2 y^2} + xy = 1 + xy + \frac{2}{xy} \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 1 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq 4$ (*)

$$Q = 1 + xy + \frac{2}{xy} = 1 + (xy + \frac{1}{16xy}) + \frac{31}{16xy}$$

Áp dụng BĐT AM-GM và kết hợp (*) ta có:

$$Q \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{31}{16} \cdot 4 = \frac{37}{4}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy $\text{Min} Q = \frac{37}{4}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Bài 96:

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 1 - xy$, trong đó x, y là các số thực thoả mãn điều kiện: $x^{2013} + y^{2013} = 2x^{1006}y^{1006}$.

Lời giải

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 1 - xy$, trong đó x, y là các số thực thoả mãn điều kiện: $x^{2013} + y^{2013} = 2x^{1006}y^{1006}$.

$$\text{Ta có: } x^{2013} + y^{2013} = 2x^{1006}y^{1006} \Rightarrow (x^{2013} + y^{2013})^2 = 4x^{2012}y^{2012} \quad (2)$$

Mặt khác: $(x^{2013} + y^{2013})^2 \geq 4x^{2013}y^{2013}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $4x^{2012}y^{2012} \geq 4x^{2013}y^{2013}$

Hay : $4x^{2012}y^{2012}(1-xy) \geq 0$. Do đó $P = 1-xy \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi: $xy = 1 \Leftrightarrow x^{2013}y^{2013} = 1$ (4).

Từ (1) và (4) ta có: $\begin{cases} x^{2013}y^{2013} = 1 \\ x^{2013} + y^{2013} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy $\min(P) = 0$ khi $x = y = 1$.

Bài 97:

a) Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2m}, m \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $a_1 < a_2 < \dots < a_{2m}$.

Tìm GTNN của biểu thức $A = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{2m-1}| + |x - a_{2m}|$.

b) Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2m-1}, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ thỏa mãn $a_1 < a_2 < \dots < a_{2m-1}$.

Tìm GTNN của biểu thức $B = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{2m-2}| + |x - a_{2m-1}|$.

Lời giải

a) Ta có: $A = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{2m-1}| + |x - a_{2m}|$
 $= |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_m| + |a_{m+1} - x| + |a_{m+2} - x| + \dots + |a_{2m} - x|$
 $\geq (x - a_1) + (x - a_2) + \dots + (x - a_m) + (a_{m+1} - x) + (a_{m+2} - x) + \dots + (a_{2m} - x)$
 $= (a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_m)$

Dấu “=” $\Leftrightarrow a_m \leq x \leq a_{m+1}$.

Vậy, $GTNN(A) = (a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_m)$. Dấu “=” $\Leftrightarrow a_m \leq x \leq a_{m+1}$.

b) Ta có: $B = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{2m-2}| + |x - a_{2m-1}|$
 $= |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_m| + |a_{m+1} - x| + |a_{m+2} - x| + \dots + |a_{2m-1} - x|$
 $\geq (x - a_1) + (x - a_2) + \dots + (x - a_{m-1}) + 0 + (a_{m+1} - x) + (a_{m+2} - x) + \dots + (a_{2m-1} - x)$
 $= (a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m-1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1})$

Dấu “=” $\Leftrightarrow x = a_m$.

Vậy, $GTNN(B) = (a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m-1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1})$. Dấu “=” $\Leftrightarrow x = a_m$.

Bài 98: Cho m, n là các số thực thay đổi sao cho $m^2 + n^2 \leq 5$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = m + n + mn + 1$.

Lời giải

Cho m, n là các số thực thay đổi sao cho $m^2 + n^2 \leq 5$ (1). Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = m + n + mn + 1$ (2).

Từ (2) ta có: $2Q = 2(m + n) + 2mn + 2$

Do đó: $2Q + m^2 + n^2 = m^2 + n^2 + 2m + 2n + 2mn + 2$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$= (m+n+1)^2 + 1 \geq 1$$

Suy ra: $2Q \geq 1 - (m^2 + n^2) \geq -4$ (do (1)) $\Rightarrow Q \geq -2$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + n^2 = 5 \\ m + n + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 1 \\ m = 1 \\ n = -2 \end{cases}.$$

Vậy Min $Q = -2$ khi $m = -2, n = 1$ hoặc $m = 1, n = -2$.

Bài 99:

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $K = \frac{3-4x}{2x^2+2}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } K = \frac{3-4x}{2x^2+2} = \frac{x^2-4x+4-x^2-1}{2(x^2+1)} = \frac{(x-2)^2 - (x^2+1)}{2(x^2+1)} = \frac{(x-2)^2}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \geq \frac{-1}{2}$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$\text{Suy ra } GTNN(K) = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x=2$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } K &= \frac{3-4x}{2x^2+2} = \frac{4x^2+4-4x^2-4x-1}{2(x^2+1)} = \frac{(4x^2+4)-(4x^2+4x+1)}{2(x^2+1)} \\ &= \frac{4(x^2+1)-(2x+1)^2}{2(x^2+1)} = 2 - \frac{(2x+1)^2}{2(x^2+1)} \leq 2 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Suy ra } GTLN(K) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$$

Bài 100:

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x + y + z = 1$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: } M = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Vì } x+y+z=1 \text{ nên: } M &= \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) (x+y+z) \\ &= \frac{21}{16} + \left(\frac{x}{4y} + \frac{y}{16x} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{16x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{4y} \right) \end{aligned}$$

Ta có: $\frac{x}{4y} + \frac{y}{16x} = \frac{16x^2 + 4y^2}{64xy} = \frac{(4x-2y)^2 + 2.4x.2y}{64xy} = \frac{(4x-2y)^2}{64xy} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} (\forall x, y > 0)$

Tương tự: $\frac{x}{z} + \frac{z}{16x} \geq \frac{1}{2}; \frac{y}{z} + \frac{z}{4y} \geq 1 (\forall x, y > 0)$

Từ đó $M \geq \frac{21}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{49}{16}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2y = z \\ x + y + z = 1 \\ x, y, z > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = \frac{2}{7} \\ z = \frac{4}{7} \end{cases}$

Vậy GTNN của M là $\frac{49}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$

Bài 101: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z}$

Lời giải

a) $P = \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)}$
 $= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ và $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ với a, b, c dương, dấu bằng xảy ra

$\Leftrightarrow a = b = c$

Ta có: $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 \right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + 1 \right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + 1 \right)$

Bởi vậy :

$P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1 \right)$
 $= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

Vậy $\text{Min} P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Bài 102: Cho hai số x, y thỏa mãn điều kiện $(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 &= 0 \Leftrightarrow x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + x^2 - 2y^2 &= 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 = -3x^2 + 1 \\
 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 &= -3x^2 + 1
 \end{aligned}$$

Ta có: $-3x^2 + 1 \leq 1 \forall x \Rightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 + y^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq A \leq 2$

$$A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0. \text{ Vậy } \min A = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } \max A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}$$

Bài 103: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 P &= x^2 + y^2 - 4(x + y) - 2010 \\
 &= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 2018 \\
 &= (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 2018 \geq -2018 \\
 \text{Vậy } P_{\min} &= -2018 \Leftrightarrow x = y = 2
 \end{aligned}$$

Bài 104: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Lời giải

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = (x + y + z) \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) = \left(\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \right) + \left(\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{21}{16}$$

Theo BĐT cô si ta có: $\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = 2x$

Tương tự $\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = 4x; \frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \geq 1 \Leftrightarrow z = 2y$

$$\Rightarrow P \geq \frac{49}{16}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$$

Bài 105: Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức $Q = abc$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+b} + 1 - \frac{1}{1+c} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}$

Tương tự: $\frac{1}{1+b} \geq 2\sqrt{\frac{ac}{(1+a)(1+c)}}; \frac{1}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}$

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 8\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 8\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1+b} = \frac{1}{1+c} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c = \frac{1}{2}$

Bài 106: Cho $6a - 5b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $4a^2 + 25b^2$

Lời giải

Đặt $x = 2a, y = -5b$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$(3x + y)^2 \leq (x^2 + y^2)(9 + 1) \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{10} \text{ hay } 4a^2 + 25b^2 \geq \frac{1}{10} \quad \text{Dấu bằng xảy ra}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow 3y = x \Leftrightarrow -15b = 2a \Leftrightarrow 6a = -45b \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{50} \\ a = \frac{3}{20} \end{cases}$$

Bài 107: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1$

Lời giải

$$4M = 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x + 4y + 4$$

$$= (2x - y - 1)^2 + 3y^2 + 2y + 3$$

$$= (2x - y - 1)^2 + 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) + \frac{8}{3}$$

$$= (2x - y - 1)^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}$$

Giá trị nhỏ nhất của $4M$ là $\frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$ nên

Giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{-1}{3} \end{cases}$

Bài 108: Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$$

Lời giải

$$M = \left(1 + \frac{a+b}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{a+b}{b}\right)^2 \quad (\text{Vi} \quad a+b=1)$$

$$M = \left(2 + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(2 + \frac{a}{b}\right)^2$$

$$M = 4 + \frac{4b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + 4 + \frac{4a}{b} + \frac{a^2}{b^2}$$

$$M = 8 + \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right) + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 8 + 2 + 4 \cdot 2 = 18 \text{ (Co - si)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ & $a + b = 1 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Vậy $\text{Min} M = 18 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Bài 109:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 + 1 \\ &= (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Do } (x - y)^2 \geq 0; (y - 2)^2 \geq 0$$

$$\text{Nên } A = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geq 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y = 2$$

$$\text{Vậy GTNN của } A \text{ là } 1 \Leftrightarrow x = y = 2$$

$$b) \quad B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + x + 1} = \frac{3(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{3}{x^2+1}$$

Do $x^2 + 1 \geq 1$ nên $B = \frac{3}{x^2+1} \leq 3$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy GTLN của B là $3 \Leftrightarrow x = 0$

c) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013 = x^2 + 2x(y+1) + y^2 + 2y + 1 + y^2 - 6y + 9 + 2003 \\ &= (x+y+1)^2 + (y-3)^2 + 2003 \end{aligned}$$

Nhận thấy với mọi x, y ta có: $(x+y+1)^2 \geq 0; (y-3)^2 \geq 0 \Rightarrow A \geq 2003$

Dấu "=" xảy ra khi $x = -4, y = 3$

Vậy Giá trị nhỏ nhất của A là 2003 đạt được khi $x = -4, y = 3$

Bài 110: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = (x-2)(x-5)(x^2-7x-10)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= (x-2)(x-5)(x^2-7x-10) \\ &= (x^2-7x+10)(x^2-7x-10) \end{aligned}$$

Đặt $x^2 - 7x = t$, ta có biểu thức:

$$A = (t-10)(t+10) = t^2 - 100 \geq -100$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -100

LỜI NGỎ DỰ ÁN TÁCH CHUYÊN ĐỀ VÀ DẠNG THEO CHUYÊN ĐỀ HSG6789-VÀO 10

1. Sản Phẩm Là Để Chúng Ta Dùng ..Nhìn Đẹp Mắt Thì Bao Giờ Cũng Thấy Thích Và Thấy Được Giá Trị Dự Án ...Đề nghị thầy cô tham gia dự án làm việc nghiêm túc , trách nhiệm và đúng thời gian quy định của các giám sát...Thầy cô làm việc không trách nhiệm , sẽ kích khởi Tổ và khởi nhận sản phẩm...

2. Sản phẩm là công sức của các thầy cô tham gia dự án. Vì vậy khi nhận sản phẩm ,thầy cô hạn chế chia sẻ hay cho , tặng ...

TRIỂN KHAI DỰ ÁN

I.GIÁM SÁT :Cần 4 Giám Sát

Bước 1:Giám sát 1 (Lập danh sách và gmail trong tổ...):

-Xây dựng chuyên đề , các dạng bài thường gặp của HSG 6789 hoặc vào 10 tương ứng với tổ (Chú ý :Chuyên đề và dạng bài trong chuyên đề phải có tính tổng quát...)

-Nhận đề của tổ từ Toán Học Sơ Đò qua gmail (đã lời giải chi tiết).

-Phân chia thu nhận chuyên đề phù hợp cho các Giám sát 2,3,4 ...từ tổ viên nộp về.

(Ví dụ :GS1 thu nhận chuyên đề 1,2,3,4.GS2 là 5,6,7,8...)

-Chuyển mẫu chuyên đề vừa xây dựng trên mẫu chung và chia đề cho tổ viên tổ mình (Ví dụ có 300 đề -tổ gồm 15 giáo viên.Thì chia mỗi giáo viên 20 đề ngẫu nhiên (ko trùng lặp các GV,kèm chú thích riêng...)

Bước 2:Giám sát 2,3,4,

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

- Nhận nhiệm vụ thu nhận Chuyên đề từ Giám sát 1 .(Ví dụ tổ có 15 chuyên đề .Giám sát 1 thu nhận chuyên đề 1,2,3,4...Tương Tự GS 3,4...Thu 5678...)

-Đội thu nhận bài từ tổ viên khi hoàn thành với các chuyên đề được phân công thu nhận từ Giám sát 1 ...

-Sau nhận bài Hoàn thiện chuyên đề , mỗi chuyên đề là 1 file (ghi file ...ví dụ :HH9-CHUYÊN ĐỀ 9.TỨ GIÁC NỘI TIẾP) .

Lưu ý hoàn thiện :Chuyên đề - Dạng bài -Thứ tự Bài 1,2,3,... làm đẹp và gửi về gmail cho Giám sát 1...

Bước 3:Giám sát 1 Gửi lại sản phẩm về gmail: toanhocsodo0945943199@gmail.com

Bước 4:Toán Học Sơ Đò copy gmail theo tổ và gửi sản phẩm gồm 6 bộ tách cho tất cả GV.

II.TỔ VIÊN Do Minh Cân Đối Phê Duyệt

Bước 1.Nhận nhiệm vụ.Nhận phân công số lượng đề từ Giám sát 1.

Bước 2.Tiến hành nhiệm vụ.Tách dạng bài theo chuyên đề trên mẫu chung ...Mỗi chuyên đề là 1 file (Ví dụ File 1 là chuyên đề :A , File 2 là chuyên đề B (Không cần ghi rõ bài ,đề nào...)

Bước 3.Hoàn thành nhiệm vụ.Gửi chuyên đề về thầy cô giám sát 2,3,4 được phân công nhận.(Ví dụ :Giám sát 2 được phân công nhận 2 Chuyên đề :Tứ Giác Nội Tiếp và Phương Trình.Thì tổ viên chỉ gửi 2 chuyên đề trên về cho giám sát 2...Tương tự là Giám sát 3,4...)

Lưu ý:Thầy cô tách dạng - làm trực tiếp trên mẫu trên , với font Time New Roma cỡ chữ 12 (đề đã làm sẵn font này) ...Màu , mẫu chữ các đề mục trên được giữ nguyên kể cả dấu : hay dấu chấm (.) theo mẫu trên và dẫn dòng 1.5

PHÂN CÔNG GIÁM SÁT CÁC TỔ**Tổ 5-TÁCH CHUYÊN ĐỀ -PHÂN DẠNG .Đại trà vào 10 Chính Thức Và Đề Thi Thử****Giám sát 1:Hoàng Yến****Giám sát 2.Phạm Dương****Giám sát 3.Quang Trí****Giám sát 4.Nguyễn Xuân Trường****Tổ 1-TÁCH CHUYÊN ĐỀ -TỪ ĐỀ HSG 6 (Đã có lời giải chi tiết)****Giám sát 1.Dương Thị Phương Thảo****Giám sát 2.Vhph****Giám sát 3.Thanh Dũng**

ĐS8-Chuyên đề 8: PHƯƠNG TRÌNH
Qua Các Đề Thi HSG Toán 8

A. Bài toán

Bài 1: Giải phương trình:

a) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$

b) $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

c) $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ (phương trình có hệ số đối xứng bậc 4)

Bài 2: Giải phương trình: $(6x+8)(6x+6)(6x+7)^2 = 72$

Bài 3: Giải phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = y(x+z)$

Bài 4: Giải phương trình: $\frac{3x-1}{x-1} - 1 = \frac{2x+5}{x+3} - \frac{4}{x^2+2x-3}$

Bài 5:

a) Tìm m để phương trình có nghiệm (với m tham số) $\frac{x-m}{x+3} + \frac{x-3}{x+m} = 2$

b) Giải phương trình: $2x(8x-1)^2 \cdot (4x-1) = 9$

Bài 6: Giải các phương trình sau: $\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$

Bài 7: Giải các phương trình sau:

a) $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$ b) $\frac{15x}{x^2+3x-4} = \frac{12}{x+4} + \frac{4}{x-1} + 1$

Bài 8: Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4 \cdot (x^2 - 5x - 2012)^2 = 4 \cdot (2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

Bài 9: Giải các phương trình:

a) $|2x-1| + |2x-5| = 4(1)$ b) $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 - \frac{7(x^2-9)}{x^2-4} = 0$

Bài 10: Giải các phương trình:

a) $\left(\frac{1}{4}x+3\right)^3 + \left(\frac{3}{4}x-4\right)^3 + (1-x)^3 = 0$ b) $x\left(\frac{3-x}{x+1}\right)\left(x+\frac{3-x}{x+1}\right) = 2$

Bài 11:

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

1) Tìm x :

$$a) |x+1| + |x+3| + |x+5| = 4x$$

$$b) (x^2 - 5x + 6)\sqrt{1-x} = 0$$

2) Tìm x, y biết: $7x^2 + y^2 + 4xy - 24x - 6y + 21 = 0$

Bài 12: Tìm x biết:

$$a) \frac{2}{3}x + 4 = -12$$

$$b) \frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$$

$$c) |3x - 5| = 4$$

$$d) \frac{x+4}{2011} + \frac{x+3}{2012} = \frac{x+2}{2013} + \frac{x+1}{2014}$$

Bài 13: Giải các phương trình sau:

$$a) x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$b) |5 - 3x| = 3x - 5$$

$$c) \frac{3}{x^2 + 5x + 4} + \frac{2}{x^2 + 10x + 24} = \frac{4}{3} + \frac{9}{x^2 + 3x - 18}$$

Bài 14: Giải phương trình:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} = \frac{1}{8}$$

Bài 15: Giải phương trình:

$$a) \frac{8}{81} \cdot \left(\frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x \right)^3 = \frac{9}{64}$$

$$b) \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6}$$

Bài 16: Một người đi xe đạp, một người đi xe máy và một người đi ô tô xuất phát từ địa điểm A lần lượt lúc 8 giờ, 9 giờ, 10 giờ với vận tốc theo thứ tự là 10km/h , 30km/h , 50km/h . Hỏi đến mấy giờ thì ô tô ở vị trí cách đều xe máy và xe đạp?

Bài 17: Năm 2016, số công nhân ở xí nghiệp I và II tỉ lệ với 4 và 5. Năm 2017, xí nghiệp I tăng thêm 60 công nhân nữa, xí nghiệp II tăng thêm 90 công nhân; do đó số công nhân của 2 xí nghiệp tỉ lệ với 5 và 7. Hỏi năm 2017, mỗi xí nghiệp có bao nhiêu công nhân?

Bài 18: Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số mới là nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó.

Bài 19: Giải các phương trình sau:

$$a) (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$$

$$b) \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

Bài 20: Giải phương trình

$$\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + \frac{x+1}{x-4} - 12\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^2 = 0$$

Bài 21: Ký hiệu $[a]$ (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a . Tìm x biết

$$\text{rằng: } \left[\frac{34x+19}{11}\right] = 2x+1$$

Bài 22: Lúc 7 giờ, một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau 36km , rồi ngay lập tức quay trở về A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc dòng nước chảy là 6km/h

Bài 23 : Giải các phương trình sau:

$$1) 2x^2 - x = 3 - 6x$$

$$2) (x+2).(x^2 - 3x + 5) = (x+2).x^2$$

Bài 24: Một xe đạp, một xe máy và một ô tô cùng đi từ A đến B. Khởi hành lần lượt lúc 5 giờ, 6 giờ, 7 giờ và vận tốc theo thứ tự là 15km/h ; 45km/h và 60km/h .

Hỏi lúc mấy giờ ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Bài 25 : Giải các phương trình sau:

$$a) (6x+8)(6x+6)(6x+7)^2 = 72$$

$$b) \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

Bài 26 : Giải các phương trình:

$$a) \frac{x+7}{2003} + \frac{x+6}{2004} + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2025}{5} = 0$$

$$b) x^4 - 2x^2 = 400x + 9999$$

Bài 27: Giải phương trình:

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

Bài 28: Tìm x biết:
$$\frac{(2009 - x^2) + (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2}{(2009 - x)^2 - (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2} = \frac{19}{49}$$

Bài 29: Giải phương trình:
$$\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$

Bài 30: Tìm x, y, z thỏa mãn phương trình sau:

$$9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$$

Bài 31: Giải phương trình sau:

$$\frac{2010x + 2010}{x^2 + x + 1} - \frac{2010x - 2010}{x^2 - x + 1} = \frac{2011}{x(x^4 + x^2 + 1)}$$

Bài 32: Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó

Bài 33: Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 - x = 3 - 6x$

b) $(x + 2) \cdot (x^2 - 3x + 5) = (x + 2) \cdot x^2$

Bài 34: Một xe đạp, một xe máy và một ô tô cùng đi từ A đến B . Khởi hành lần lượt lúc 5 giờ, 6 giờ, 7 giờ và vận tốc theo thứ tự là 15km/h ; 45km/h và 60km/h .

Hỏi lúc mấy giờ ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Bài 35: Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - x^2 - 12x = 0$

b) $\frac{x - 214}{86} + \frac{x - 132}{84} + \frac{x - 54}{82} = 6$

Bài 36: Tìm giá trị của m để cho phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm số gấp ba nghiệm số

của phương trình: $(x + 1)(x - 1) - (x + 2)^2 = 3$

Bài 37: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x + 2}{98} + \frac{x + 4}{96} = \frac{x + 6}{94} + \frac{x + 8}{92}$

b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Bài 38: Tìm m để phương trình sau vô nghiệm

$$\frac{1 - x}{x - m} + \frac{x - 2}{x + m} = \frac{2(x - m) - 2}{m^2 - x^2}$$

Bài 39: Giải phương trình : $\frac{x-1}{2012} + \frac{x-2}{2011} + \frac{x-3}{2010} + \dots + \frac{x-2012}{1} = 2012$

Bài 40: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

b) $2x(8x-1)^2 \cdot (4x-1) = 9$

c) $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$ với x, y nguyên dương.

Bài 41: Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$

b) $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

Bài 42: Giải phương trình: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$

Bài 43: Một tổ sản xuất lập kế hoạch sản xuất, mỗi ngày sản xuất được 50 sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ đó sản xuất được 57 sản phẩm. Do đó đã hoàn thành trước kế hoạch một ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và thực hiện trong bao nhiêu ngày.

Bài 44: Giải phương trình:

1) $x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0$

2) $8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2$

Bài 45: Giải phương trình

a) $\frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12\left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3}\right)$

b) $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$

c) $||x-2|+3| = 5$

Bài 46: Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm $5\text{km} / h$ thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó

Bài 47: Giải phương trình: $\frac{x+2005}{4} + \frac{x+2004}{5} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004}$

Bài 148: Tìm x biết:

a) $x^2 - 4x + 4 = 25$

b) $\frac{x-17}{1990} + \frac{x-21}{1986} + \frac{x+1}{1004} = 4$

c) $4^x - 12.2^x + 32 = 0$

Bài 49: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2$

Bài 50: Tìm x biết :

a) $-3^x = -6561$

b) $(2x-1)^{2012} = (2x-1)^{2010}$

Bài 51: Tìm x, y, z biết: $10x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x - 4y - 4xz + 5 = 0$

Bài 52: Một khối 8 có $\frac{2}{3}$ số học sinh đội tuyển Toán bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh đội tuyển Anh và bằng

$\frac{4}{5}$ số học sinh đội tuyển Văn. Đội tuyển Văn có số học sinh ít hơn tổng số học sinh của hai đội

tuyển kia là 38 học sinh. Tính số học sinh của mỗi đội tuyển ?

Bài 53: Một người dự định đi xe máy từ A đến B với vận tốc $30\text{km} / h$, nhưng sau khi đi được 1 giờ người ấy nghỉ hết 15 phút, do đó phải tăng vận tốc thêm $10\text{km} / h$ để đến B đúng giờ đã định. Tính quãng đường AB ?

Bài 54: Giải các phương trình sau

a) $\frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$

b) $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$

c) $||x-2|+3|=5$

Bài 55: Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm 5km / h thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó

Bài 56: Giải phương trình:

$$1) x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$$

$$2) 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2$$

Bài 57: Giải phương trình:

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

Bài 58: Giải phương trình:

$$\frac{(2009 - x^2) + (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2}{(2009 - x)^2 - (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2} = \frac{19}{49}$$

Bài 59: Giải các phương trình sau:

$$a) (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12; \quad b) \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

Bài 60: Giải các phương trình sau:

Lúc 7 giờ, một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau 36km, rồi ngay lập tức quay trở về A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc dòng nước chảy là 6km / h

Bài 61: Giải các phương trình sau:

$$1) 2x^2 - x = 3 - 6x$$

$$2) (x + 2) \cdot (x^2 - 3x + 5) = (x + 2) \cdot x^2$$

Bài 62: Giải Câu toán bằng cách lập phương trình

Một xe đạp, một xe máy và một ô tô cùng đi từ A đến B. Khởi hành lần lượt lúc 5 giờ, 6 giờ, 7 giờ và vận tốc theo thứ tự là 15km / h; 45km / h và 60km / h. Hỏi lúc mấy giờ ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Bài 63: Giải phương trình

$$a) -2|-3x + 4| - 2 = 0 \quad b) \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 1} = \frac{4}{x^2 + x + 1}$$

Bài 64: Giải các phương trình sau:

$$a) (6x + 8)(6x + 6)(6x + 7)^2 = 72$$

$$b) \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$

Bài 65: Giải các phương trình sau:

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$a) \frac{x+7}{2003} + \frac{x+6}{2004} + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2025}{5} = 0$$

$$b) x^4 - 2x^2 = 400x + 9999$$

Bài 66: Giải phương trình:

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

Bài 67: Tìm x biết:
$$\frac{(2009-x^2) + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

Bài 68: Hai người làm chung một công việc trong 12 ngày thì xong. Năng suất làm việc trong một ngày của người thứ hai chỉ bằng $\frac{2}{3}$ người thứ nhất. Hỏi nếu làm riêng, mỗi người làm trong bao lâu sẽ xong công việc

Bài 69: Ký hiệu $[a]$ (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a . Tìm x biết

rằng:
$$\left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1$$

Bài 70: Giải các phương trình sau:

$$a) x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$$

$$b) y^2 + 4^x + 2y - 2^{x+1} + 2 = 0$$

$$c) \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6}$$

Bài 71: Giải phương trình: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8) = -16$

Bài 72: Giải phương trình: $(x^2-x+1)(x^2-x+2) = 12$

Bài 73: Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $4m$ thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp $8m$ dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp $12m$ dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc $2m$ / giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

Bài 74: Giải phương trình

$$a) \frac{x+43}{57} + \frac{x+46}{54} = \frac{x+49}{51} + \frac{x+52}{48}$$

$$b) (2x+3)(x+2)^2(2x+5) = 3$$

Bài 75.

- a) Lúc 7 giờ sáng một xe buýt đi từ vị trí A đến vị trí B với độ dài là 60 km. Khi đi tới vị trí C cách vị trí A $39km$ thì xe bị hỏng. Xe phải dừng lại và sửa chữa mất 15 phút, sau đó xe tiếp

tục đi từ C đến B với vận tốc giảm hơn so với vận tốc đi từ A tới C là $3\text{km} / \text{h}$. Tổng thời gian xe đi từ A đến B hết $\frac{11}{6}$ giờ (tính cả thời gian dừng lại sửa xe). Hỏi xe buýt bị hỏng lúc mấy giờ ?

b) Giải phương trình

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3}$$

Bài 76. Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

Bài 77.

Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

Bài 78.

Giải các phương trình sau:

$$1) \quad x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$$

$$2) \quad \frac{9x}{2x^2 + x + 3} - \frac{x}{2x^2 - x + 3} = 8$$

Bài 79: Giải phương trình : $\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x+7} = 1 - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}$

Bài 80

Giải phương trình:

$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2005.2006.2007} \right) x = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2006.2007$$

Bài 81: Giải các phương trình sau:

$$a) \quad (x - 2008)^4 + (x - 2010)^4 = 2$$

$$|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$$

Bài 82. Tìm k để phương trình sau có nghiệm dương: $\frac{k(x+1)}{2x-1} = k+1$

Bài 83. Hưởng ứng ngày chủ nhật xanh – sạch – đẹp. Học sinh khối lớp 8 nhận làm vệ sinh một đoạn đường em chăm. Lớp 8/1 nhận 10 mét và $\frac{1}{10}$ của phần còn lại, lớp 8/2 nhận 20 mét và $\frac{1}{10}$ của phần còn lại, lớp 8/3 nhận 30 mét và $\frac{1}{10}$ của phần còn lại ... cứ chia như vậy cho đến lớp cuối

cùng thì vừa đủ và phần đường của mỗi lớp dài bằng nhau. Hỏi khối 8 có bao nhiêu lớp và đoạn đường mỗi lớp nhận dài bao nhiêu mét ?

Bài 84. Nhân ngày 1/6 một phân đội thiếu niên được tặng một số kẹo. Số kẹo này được chia hết và chia đều cho mọi người trong phân đội. Để đảm bảo nguyên tắc ấy phân đội trưởng đề xuất cách nhận phần kẹo của mỗi người như sau:

Bạn thứ nhất 1 cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại. Sau khi bạn thứ nhất đã lấy phần mình,

bạn thứ hai nhận 2 cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại. Cứ tiếp tục như thế đến bạn cuối

cùng thứ n nhận n cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại.

Hỏi phân đội thiếu niên nói trên có bao nhiêu đội viên và mỗi đội viên nhận bao nhiêu kẹo.

Bài 85. Giải các phương trình sau:

a) $2x^4 + x^3 - 22x^2 + 15x - 36 = 0$

b) $\frac{x-2}{2009} + \frac{x-42}{1969} + \frac{x-121}{1890} = 3$

Bài 86

Giải phương trình: $\frac{x}{x^2 + 4x + 4} + \frac{5x}{x^2 + 4} = -2$

Bài 87

a) Tìm x , biết: $4(x+1)^2 + (2x-1)^2 - 8(x-1)(x+1) = 11$

b) Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $x + y + z = 195$

Bài 88:

a) Giải phương trình: $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$

b) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: $x^2 + 2x - 10 = y^2$

Bài 89: Giải phương trình sau: $\frac{x^2 + 3x + 7}{x^2 + 5x - 6} = \frac{3x + 2}{x + 15}$

Bài 90:

1. Giải phương trình: $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6 = 0$

2. Bạn Nam hỏi bạn Bắc: “Năm nay cha và mẹ của bạn bao nhiêu tuổi”. Bắc trả lời: “Cha tôi hơn mẹ tôi 4 tuổi. Trước đây tổng số tuổi của cha và mẹ tôi là 66 tuổi thì tổng số tuổi của hai anh em chúng tôi là 10. Hiện nay tổng số tuổi của cha và mẹ tôi gấp 3 lần tổng số tuổi của hai anh em chúng tôi”

Tính xem tuổi của cha và tuổi của mẹ bạn Bắc là bao nhiêu?

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Bài 91: Giải các phương trình sau:

a) $(2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 5) - 16 = 0$

b) $\frac{x+9}{10} + \frac{x+10}{9} = \frac{9}{x+10} + \frac{10}{x+9}$

Bài 92: Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

Bài 93:

1. Tìm m để phương trình có nghiệm (với m tham số) $\frac{x-m}{x+3} + \frac{x-3}{x+m} = 2$

2. Giải phương trình: $2x(8x-1)^2 \cdot (4x-1) = 9$

Bài 94: Để tham gia ngày chạy Olympic vì sức khỏe toàn dân, trường A đã nhận được một số chiếc áo và chia đều cho các lớp. Biết rằng theo thứ tự, lớp thứ nhất nhận được 4 áo và $\frac{1}{9}$ số còn lại, rồi đến lớp thứ n ($n = 2; 3; 4; \dots$) nhận được 4n áo và $\frac{1}{9}$ số áo còn lại. Cứ như thế các lớp đã nhận hết số áo. Hỏi trường A đã nhận được bao nhiêu chiếc áo?

Bài 95: Giải phương trình sau: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$

Bài 96:

a) Giải phương trình sau: $x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0$

b) Xác định giá trị của m để phương trình: $m^3(x-2) - 8(x+m) = 4m^2$ có nghiệm duy nhất là số không lớn hơn 1

Bài 97: Tìm x, biết: $\frac{x+1}{1000} + \frac{x+2}{999} + \frac{x+3}{998} + \frac{x+4}{997} + \frac{x+5}{996} + \frac{x+6}{995} + 6 = 0$

Bài 98: Giải phương trình: $(6x+8)(6x+6)(6x+7)^2 = 72$

Bài 99: Giải các phương trình sau:

a) $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$

b) $y^2 + 4^x + 2y - 2^{x+1} + 2 = 0$

$$\frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6}$$

Bài 100: Giải phương trình: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8) = -16$

Bài 101: Giải phương trình: $(x^2-x+1)(x^2-x+2) = 12$

Bài 102: Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được 4m thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp 8m dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp 12m dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc 2m / giây. Tính khoảng cách từ A đến B.
Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Bài 103: Giải phương trình

$$a) \frac{x+43}{57} + \frac{x+46}{54} = \frac{x+49}{51} + \frac{x+52}{48}$$

$$b) (2x+3)(x+2)^2(2x+5) = 3$$

Bài 104: Giải phương trình: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8) = -16$

Bài 105: Giải phương trình: $x^3 - 6x - x + 30 = 0$

Bài 106: Tìm m sao cho phương trình ẩn x : $(m-1)x + 3m - 2 = 0$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x \geq 1$

Bài 107: Giải phương trình $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 40$

Bài 108: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{101-x^2}{2015} - 1 = \frac{100-x^2}{2016} - \frac{x^2-99}{2017} \quad b) (4x-7)^2(2x-5)(x-1) = -1$$

Bài 109: Giải phương trình sau: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$

Bài 110: Giải phương trình sau: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$

Bài 111: Cho phương trình $\frac{2x-m}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = 3$. Tìm m nguyên để phương trình có nghiệm dương.

Bài 112: Tìm x, y thỏa mãn đẳng thức: $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

Bài 113: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$

Bài 114:

a) Giải phương trình: $\frac{x-2015}{2010} + \frac{x+2007}{2012} = \frac{x+2006}{2011} + \frac{x-2018}{2013}$

b) Tìm x và y thỏa mãn: $y^2 + 2(x^2 + 1) = 2y(x+1)$

Bài 115: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$b) \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

Bài 116: Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó.

Bài 117: Tìm x, y, z thỏa mãn phương trình sau: $9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$

Bài 118: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$

Bài 119: Giải các phương trình sau:

a) $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$

b) $y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0$

c) $\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+16x+72}{x+8}=\frac{x^2+8x+20}{x+4}+\frac{x^2+12x+42}{x+6}$

Bài 120: Giải phương trình a) $-2|-3x+4|-2=0$ b) $\frac{1}{x-1}+\frac{2x^2-5}{x^3-1}=\frac{4}{x^2+x+1}$

Bài 121: Hai người làm chung một công việc trong 12 ngày thì xong. Năng suất làm việc trong một ngày của người thứ hai chỉ bằng $\frac{2}{3}$ người thứ nhất. Hỏi nếu làm riêng, mỗi người làm trong bao lâu sẽ xong công việc

Bài 122: Giải phương trình sau:

$$(2x^2+x-2013)^2+4.(x^2-5x-2012)^2=4.(2x^2+x-2013)(x^2-5x-2012)$$

Bài 223: Tìm m để phương trình có nghiệm (với m tham số): $\frac{x-m}{x+3}+\frac{x-3}{x+m}=2$

Bài 124: Giải phương trình: $2x(8x-1)^2(4x-1)=9$

Bài 125: Giải phương trình sau: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2)=4$

Bài 126:

a) Giải phương trình sau: $x^2-3x+2+|x-1|=0$

b) Xác định giá trị của m để phương trình: $m^3(x-2)-8(x+m)=4m^2$ có nghiệm duy nhất là số không lớn hơn 1

Bài 127: Tìm x biết: $\frac{x+1}{1000}+\frac{x+2}{999}+\frac{x+3}{998}+\frac{x+4}{997}+\frac{x+5}{996}+\frac{x+6}{995}+6=0$

Bài 128: Giải phương trình $(6x+8)(6x+6)(6x+7)^2=72$

Bài 129: Giải phương trình:

$$(2x^2+x-2016)^2+4(x^2-3x-1000)^2=4(2x^2+x-2016)(x^2-3x-1000)$$

Bài 130: Tìm x, y biết :

a) $x^2-2x+y^2+4y+5=0$

b) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=0$ và $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=16$

c) $x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}=4$

Bài 131: Giải và biện luận nghiệm của phương trình $m^2x+1=x+m$ theo m .

Bài 132: Giải các phương trình:

a) $(x+2)(x-2)(x^2-10)=72$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

b) Giải phương trình: $3\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 25\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 20\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0$

Bài 133: Giải phương trình:

a) $\frac{x^2+99x-1}{99} + \frac{x^2+99x-2}{98} + \frac{x^2+99x-3}{97} = \frac{x^2+99x-4}{96} + \frac{x^2+99x-5}{95} + \frac{x^2+99x-6}{94}$

b) $\frac{2-x}{2017} - 1 = \frac{1-x}{2018} - \frac{x}{2019}$

Bài 134: Giải các phương trình sau:

a) $x - a^2x - \frac{b^2}{b^2 - x^2} + a = \frac{x^2}{x^2 - b^2}$ (Phương trình ẩn x)

b) $\frac{1}{(x+2000)(x+2001)} + \frac{1}{(x+2001)(x+2002)} + \dots + \frac{1}{(x+2009)(x+2010)} = \frac{10}{11}$

c) $\frac{(2009-x)^2 + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$

Bài 135: Giải các phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018}\right) \cdot x = \frac{2017}{1} + \frac{2016}{2} + \dots + \frac{2}{2016} + \frac{1}{2017}$;

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2017}{2019}$

c) $\frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$;

d) $\frac{(1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99) \cdot x}{323400} = 2018$

e) $\frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} + \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} = \frac{1}{8}$.

Bài 136: Giải các phương trình sau:

a) $(x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$

b) $(x-6)^4 + (x-8)^4 = 16$

c) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$

Bài 137: Giải phương trình: $\frac{a+b-x}{c} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{c+a-x}{b} + \frac{4x}{a+b+c} = 1$

Bài 138: Giải phương trình: $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{5}{4}$

Bài 139: Hai đội bóng bàn của hai trường A và B thi đấu giao hữu. Biết rằng mỗi đấu thủ của đội A phải lần lượt gặp các đối thủ của đội B một lần và số trận đấu gấp đôi tổng số đấu thủ của hai đội. Tính số đấu thủ của mỗi đội.

Bài 140: Một đoàn học sinh tổ chức đi tham quan bằng ô tô. Nếu mỗi ô tô chở 22 học sinh thì còn thừa 1 học sinh. Nếu bớt đi 1 ô tô thì có thể phân phối đều các học sinh trên các ô tô còn lại. Biết mỗi ô tô chỉ chở không được quá 32 người, hỏi ban đầu có bao nhiêu ô tô và có tất cả bao nhiêu học sinh đi tham quan?

Bài 141: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$

Bài 142: Giải phương trình:

$$\begin{aligned} a) & \frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right) \\ b) & \frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10 \\ c) & ||x-2|+3| = 5 \end{aligned}$$

Bài 143: Giải phương trình: $y^2 - 2y + 3 = \frac{6}{x^2+2x+4}$

Bài 144: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} a) & x^3 - x^2 - 12x = 0 \\ b) & \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6 \end{aligned}$$

Bài 145: Giải phương trình:

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

Bài 146: Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

Bài 147: Giải phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

Bài 148: Tìm x biết: $\frac{(2009-x^2) + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$

Bài 149: Tìm x , biết:

$$\begin{aligned} a) & x^2 - 2005x - 2006 = 0 \\ b) & \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003} \end{aligned}$$

Bài 150: Giải phương trình: $|x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2|$

Bài 151: Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $4m$ thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp $8m$ dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp $12m$ dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc $2m$ / giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

Bài 152: Lúc 7 giờ, một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau 36km, rồi ngay lập tức quay trở về

A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc dòng nước chảy là 6km/h

Bài 153: Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm 5km/h thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó.

Bài 154 Giải phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

Bài 155: Giải các phương trình và bất phương trình sau:

$$8.\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4.\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right).\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2 - 4.\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2$$

Bài 156: Giải phương trình

$$(2x+3)^3 + (3x-5)^3 = (5x-2)^3 - (5x-2)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

Bài 157: Giải các phương trình sau:

$$1) x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0$$

$$2) \frac{9x}{2x^2 + x + 3} - \frac{x}{2x^2 - x + 3} = 8$$

Bài 158: Giải phương trình: $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 = \frac{7(x^2-9)}{x^2-4}$

Bài 159: Giải phương trình: $|x+1| = |x(x+1)|$

Bài 160: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

Bài 161

a) Giải phương trình: $\frac{x^2 - 5x + 1}{2x + 1} + 2 = -\frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1}$

b) Giải phương trình: $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Bài 162: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x-1}{2013} + \frac{x-2}{2012} - \frac{x-3}{2011} = \frac{x-4}{2010} \quad b) (2x-5)^3 - (x-2)^3 = (x-3)^3$$

Bài 163: Giải phương trình sau:

$$a. (2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013).(x^2 - 5x - 2012)$$

b) $|x-1| + |x+3| = 4$

Bài 164: Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Bài 165: Giải phương trình:

$$\begin{aligned} a) & \frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right) \\ b) & \frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10 \\ c) & ||x-2|+3|=5 \end{aligned}$$

Bài 166: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} a) & x^3 - x^2 - 12x = 0 \\ b) & \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6 \end{aligned}$$

Bài 167: Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

Bài 168: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} a) & (2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 5) - 16 = 0 \\ b) & \frac{x+9}{10} + \frac{x+10}{9} = \frac{9}{x+10} + \frac{10}{x+9} \end{aligned}$$

Bài 169: Giải phương trình:

$$\begin{aligned} 1) & x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0 \\ 2) & 8 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^2 - 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = (x+4)^2 \end{aligned}$$

Bài 170: Giải phương trình: $(x+4) \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1,5 \right) = (3-x) \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1,5 \right)$

Bài 171: Giải các phương trình sau :

$$\begin{aligned} a) & \frac{101-x^2}{2015} - 1 = \frac{100-x^2}{2016} - \frac{x^2-99}{2017} \\ b) & (4x-7)^2 (2x-5)(x-1) = -1 \end{aligned}$$

Bài 172: Giải các phương trình sau

$$\begin{aligned} a) & (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12 \\ b) & \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003} \end{aligned}$$

Bài 173: Giải phương trình : $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$

Bài 174: Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$b) \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

Bài 175: Giải phương trình : $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

Bài 176: Tìm x, y thỏa mãn đẳng thức $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

Bài 177: Tìm các giá trị x và y thỏa mãn: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$

Bài 178: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x-1}{2013} + \frac{x-2}{2012} + \frac{x-3}{2011} + \dots + \frac{x-2012}{2} = 2012 .$$

$$b) (x^2 - 4x)^2 + 2(x-2)^2 = 43.$$

Bài 179: Giải các phương trình và bất phương trình sau:

$$a) |x-3| + 7 = 2x .$$

$$b) (1-5x)(x^2+2) \geq 0.$$

Bài 180: Giải các phương trình sau:

$$a) |x^2 - 2x - 1| = 14 .$$

$$b) \frac{5x-150}{50} + \frac{5x-102}{49} + \frac{5x-56}{48} + \frac{5x-12}{47} + \frac{5x-660}{46} = 0.$$

Bài 181: Giải các phương trình sau:

$$a) (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$$

$$b) \frac{x-5}{100} + \frac{x-4}{101} + \frac{x-3}{102} = \frac{x-100}{5} + \frac{x-101}{4} + \frac{x-102}{3}$$

Bài 182: Giải các phương trình sau:

$$a, x^2 - 2 = (2x+3)(x+5) + 23$$

$$b, \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

Bài 183: Giải các phương trình sau:

$$a) |x-2| + 3x - 9 = 0$$

$$b) (x^2 - 5x + 1)^2 - 2x^2 + 10x = 1$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Bài 184: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{6}{x^2+2} + \frac{7}{x^2+3} + \frac{12}{x^2+8} - \frac{3x^2+16}{x^2+10} = 1.$$

$$b) 2x(8x-1)^2(4x-1) = 9.$$

Bài 185: Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

Bài 186: Giải các phương trình sau:

$$a.) \frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x+7} = 1 - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}.$$

$$b. \frac{x+11}{115} + \frac{x+22}{104} = \frac{x+33}{93} + \frac{x+44}{82}$$

Bài 187: Giải phương trình:

$$(2x^2 + x - 2016)^2 + 4(x^2 - 3x - 1000)^2 = 4(2x^2 + x - 2016)(x^2 - 3x - 1000)$$

Bài 188: Giải các phương trình:

$$a)(x+2)(x-2)(x^2-10) = 72$$

$$b) \text{Giải phương trình: } 3\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 25\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 20\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0$$

Bài 189: Giải phương trình:

$$a) \frac{x^2+99x-1}{99} + \frac{x^2+99x-2}{98} + \frac{x^2+99x-3}{97} = \frac{x^2+99x-4}{96} + \frac{x^2+99x-5}{95} + \frac{x^2+99x-6}{94}$$

$$b) \frac{2-x}{2017} - 1 = \frac{1-x}{2018} - \frac{x}{2019}$$

Bài 190: Giải các phương trình sau:

$$a) x - a^2x - \frac{b^2}{b^2 - x^2} + a = \frac{x^2}{x^2 - b^2} \quad (\text{Phương trình ẩn } x)$$

$$b) \frac{1}{(x+2000)(x+2001)} + \frac{1}{(x+2001)(x+2002)} + \dots + \frac{1}{(x+2009)(x+2010)} = \frac{10}{11}$$

$$c) \frac{(2009-x)^2 + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

Bài 191: Giải các phương trình sau:

$$a) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} \right) \cdot x = \frac{2017}{1} + \frac{2016}{2} + \dots + \frac{2}{2016} + \frac{1}{2017};$$

$$b) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2017}{2019}$$

$$c) \frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5;$$

$$d) \frac{(1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99) \cdot x}{323400} = 2018$$

$$e) \frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} = \frac{1}{8}.$$

Bài 192: Giải phương trình: $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{5}{4}$

Bài 193: Giải phương trình sau: $\frac{x^2 + 3x + 7}{x^2 + 5x - 6} = \frac{3x + 2}{x + 15}$

Bài 194: Giải phương trình: $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6 = 0$

Bài 195: Giải các phương trình sau:

a) $(x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$

b) $(x-6)^4 + (x-8)^4 = 16$

c) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$

Bài 196: Tìm x, y biết :

a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = 4$

Bài 197: Giải và biện luận nghiệm của phương trình $m^2x + 1 = x + m$ theo m .

Bài 198: Một đoàn học sinh tổ chức đi tham quan bằng ô tô. Nếu mỗi ô tô chở 22 học sinh thì còn thừa 1 học sinh. Nếu bớt đi 1 ô tô thì có thể phân phối đều các học sinh trên các ô tô còn lại. Biết mỗi ô tô chỉ chở không được quá 32 người, hỏi ban đầu có bao nhiêu ô tô và có tất cả bao nhiêu học sinh đi tham quan?

Bài 199: Bạn Nam hỏi bạn Bắc: “Năm nay cha và mẹ của bạn bao nhiêu tuổi”. Bắc trả lời: “Cha tôi hơn mẹ tôi 4 tuổi. Trước đây tổng số tuổi của cha và mẹ tôi là 66 tuổi thì tổng số tuổi của hai anh em chúng tôi là 10. Hiện nay tổng số tuổi của cha và mẹ tôi gấp 3 lần tổng số tuổi của hai anh em chúng tôi”. Tính xem tuổi của cha và tuổi của mẹ bạn Bắc là bao nhiêu ?

Bài 200: Hai đội bóng bàn của hai trường A và B thi đấu giao hữu. Biết rằng mỗi đấu thủ của đội A phải lần lượt gặp các đối thủ của đội B một lần và số trận đấu gấp đôi tổng số đấu thủ của hai đội. Tính số đấu thủ của mỗi đội.

Bài 201: Giải các phương trình sau:

a) $|x^2 - x + 2| - 3x - 7 = 0$

b) $|x - 1| + |2x + 3| = |x| + 4$

Bài 202: Giải phương trình: $\frac{2x}{x^2 - 4x + 7} + \frac{3x}{2(x^2 - 5x + 7)} = 1$

Bài 203: Giải phương trình sau: $(x - 2018)^3 + (x - 2019)^3 - (2x - 4037)^3 = 0$.

Bài 204: Giải phương trình: $(6x + 8)(6x + 6)(6x + 7)^2 = 72$

Bài 205: Giải phương trình: $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$

Bài 206: Tìm x :

a) $-3^x = -6561$

b) $(2x - 1)^{2012} = (2x - 1)^{2010}$

Bài 207: Giải phương trình : $|x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2|$

Bài 208: Giải phương trình:

$$\frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

Bài 209: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

Bài 2100: Giải phương trình sau:

$$\frac{2010x + 2010}{x^2 + x + 1} - \frac{2010x - 2010}{x^2 - x + 1} = \frac{2011}{x(x^4 + x^2 + 1)}$$

Bài 211: Giải phương trình:

1. $\frac{8}{81} \cdot \left(\frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x \right)^3 = \frac{9}{64}$

2. $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6}$

Bài 212: Giải phương trình:

1) $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

2) $8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2$

B. Lời giải

Bài 1: Giải phương trình:

a) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$

b) $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

c) $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ (phương trình có hệ số đối xứng bậc 4)

Lời giải

a) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$

Giải phương trình được tập nghiệm $S = \{-2; 1\}$

b) $\Leftrightarrow \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2008} + 1 + \frac{x+2}{2007} + 1 + \frac{x+3}{2006} + 1 = \frac{x+4}{2005} + 1 + \frac{x+5}{2004} + 1 + \frac{x+6}{2003} + 1$

$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} = \frac{x+2009}{2005} + \frac{x+2009}{2004} + \frac{x+2009}{2003}$

$\Leftrightarrow (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2009 \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) \neq 0$

c) $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả 2 vế cho x^2 ta được:

$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 6 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 5 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 38 = 0 \quad (*)$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

Thay vào phương trình (*) rồi giải phương trình ta được:

$S = \left\{ -2; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{3} \right\}$

Bài 2: Giải phương trình: $(6x+8)(6x+6)(6x+7)^2 = 72$

Lời giải

Đặt $6x+7=t$. Ta có: $(t+1)(t-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow (t^2-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow t = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3} \right\}$

Bài 3: Giải phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 = y(x + z)$

Lời giải

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + x^2 + z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = y - z = x = z = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Bài 4: Giải phương trình: $\frac{3x-1}{x-1} - 1 = \frac{2x+5}{x+3} - \frac{4}{x^2+2x-3}$

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq 1; x \neq -3$

$$\frac{3x-1}{x-1} - 1 = \frac{2x+5}{x+3} - \frac{4}{x^2+2x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-1)(x+3) - (x^2+2x-3)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(2x+5)(x-1) - 4}{(x-1)(x+3)}$$

$$\Rightarrow (3x-1)(x+3) - (x^2+2x-3) = (2x+5)(x-1) - 4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 3 - x^2 - 2x + 3 = 2x^2 + 3x - 5 - 4$$

$$\Leftrightarrow 3x = -9$$

$$\Leftrightarrow x = -3(tm)$$

Bài 5:

a) Tìm m để phương trình có nghiệm (với m tham số) $\frac{x-m}{x+3} + \frac{x-3}{x+m} = 2$

b) Giải phương trình: $2x(8x-1)^2 \cdot (4x-1) = 9$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq -3; x \neq -m$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x-m}{x+3} + \frac{x-3}{x+m} = 2 &\Rightarrow x^2 - m^2 + x^2 - 9 = 2(x+3)(x+m) \\ \Leftrightarrow 2x^2 - m^2 - 9 = 2(x^2 + 3x + 3m + mx) &\Leftrightarrow -2(m+3)x = (m+3)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Với $m = -3$ thì (1) có dạng $0x = 0$.

Nghiệm đúng mọi x thỏa mãn điều kiện $x \neq -3$, $x \neq -m$, do đó tập nghiệm của phương trình là $x \neq \pm 3$

$$\text{Với } m \neq -3 \text{ thì phương trình (1) có nghiệm } x = -\frac{(m+3)^2}{2(m+3)} = -\frac{m+3}{2}$$

Để giá trị này là nghiệm của phương trình thì ta phải có:

$$-\frac{m+3}{2} \neq -3 \text{ và } -\frac{m+3}{2} \neq -m \text{ tức là } m \neq 3.$$

Vậy nếu $m \neq \pm 3$ thì $x = -\frac{m+3}{2}$ là nghiệm.

Kết luận: với $m = -3$ thì $S = \{x / x \neq \pm 3\}$. Với $m \neq \pm 3$ thì $S = \left\{-\frac{m+3}{2}\right\}$

$$\text{b) Ta có: } 2x(8x-1)^2(4x-1) = 9$$

$$\Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(8x^2 - 2x) = 9 \Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(64x^2 - 16x) = 72 (*)$$

Đặt $64x^2 - 16x = t$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow t(t+1) - 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -9 \\ t = 8 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -9 \text{ ta có: } 64x^2 - 16x = -9 \Leftrightarrow 64x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow (8x-1)^2 + 8 = 0$$

(Vô nghiệm vì $(8x-1)^2 + 8 > 0$)

$$\text{Với } t = 8 \text{ ta có } 64x^2 - 16x = 8 \Leftrightarrow 64x^2 - 16x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Bài 6: Giải các phương trình sau: } \frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

Lời giải

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 258$$

Bài 7: Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } |x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4 \quad \text{b) } \frac{15x}{x^2+3x-4} = \frac{12}{x+4} + \frac{4}{x-1} + 1$$

Lời giải

a)

*) Nếu $x \geq 2$, phương trình đã cho trở thành

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = 4 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) = 4 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2-5) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0(ktm) \\ x=\sqrt{5}(tm) \\ x=-\sqrt{5}(ktm) \end{cases}$$

*) Nếu $x < 2$, phương trình đã cho trở thành

$$(2-x)(x-1)(x+1)(x+2) = 4 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = -4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) = -4 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0(VN)$$

$$\text{Vậy } S = \{\sqrt{5}\}$$

b) ĐKXD: $x \neq -4; x \neq 1$

$$\frac{15x}{x^2+3x-4} = \frac{12}{x+4} + \frac{4}{x-1} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)} = \frac{12}{x+4} + \frac{4}{x-1} + 1$$

$$\Rightarrow 15x = 12(x-1) + 4(x+4) + x^2 + 3x - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \quad (tm) \\ x=-4(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{0\}$$

Bài 8: Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

Khi đó ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2.(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-2011}{11}$

Bài 9: Giải các phương trình:

$$\text{a) } |2x - 1| + |2x - 5| = 4(1) \quad \text{b) } \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 - \frac{7(x^2-9)}{x^2-4} = 0$$

Lời giải

$$\text{a) } |2x - 1| + |2x - 5| = 4(1)$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow |2x - 1| + |5 - 2x| = |2x - 1 + 5 - 2x| \Leftrightarrow (2x - 1)(5 - 2x) \geq 0$$

$$(\text{Áp dụng tính chất: } |a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{b) } \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 - \frac{7(x^2-9)}{x^2-4} = 0 \quad (2)$$

$$\text{ĐKXĐ: } x \neq \pm 2$$

$$\begin{aligned}
(2) &\Rightarrow (x+3)^2(x+2)^2 + 6(x-3)^2(x-2)^2 - 7(x^2-9)(x^2-4) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2+6x+9)(x^2+4x+4) + (6x^2-36x+54)(x^2-4x+4) \\
&\quad - (7x^2-63)(x^2-4) = 0 \\
&\Leftrightarrow 50x^3 - 350x^2 + 300x = 0 \\
&\Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 6x = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (tm) \\ x=1 & (tm) \\ x=6 & (tm) \end{cases}
\end{aligned}$$

Bài 10: Giải các phương trình:

$$\begin{aligned}
a) &\left(\frac{1}{4}x+3\right)^3 + \left(\frac{3}{4}x-4\right)^3 + (1-x)^3 = 0 & b) &x\left(\frac{3-x}{x+1}\right)\left(x+\frac{3-x}{x+1}\right) = 2
\end{aligned}$$

Lời giải

$$a) \text{ Đặt } a = \frac{1}{4}x+3; b = \frac{3}{4}x-4 \Rightarrow a+b = x-1 \Rightarrow 1-x = -(a+b)$$

$$\text{Ta có (pt đề)} \Leftrightarrow a^3 + b^3 - (a+b)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 - a^3 - b^3 - 3ab(a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3ab(a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x+3=0 \\ \frac{3}{4}x-4=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-12 \\ x=\frac{16}{3} \\ x=1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{-12; \frac{16}{3}; 1\right\}$$

$$b) \text{ ĐKXĐ: } x \neq -1$$

$$x\left(\frac{3-x}{x+1}\right)\left(x+\frac{3-x}{x+1}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{3x-x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2+x-3-x}{x+1} = 2$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{(3x-x^2)(x^2+3)}{(x+1)^2} = 2 \\
&\Rightarrow 3x^3 + 9x - x^4 - 3x^2 = 2x^2 + 4x + 2 \\
&\Leftrightarrow x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5x + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (x^2 - x + 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(tm) \\ VN \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $S = \{1\}$

Bài 11:

1) Tìm x :

$$a) |x+1| + |x+3| + |x+5| = 4x$$

$$b) (x^2 - 5x + 6)\sqrt{1-x} = 0$$

2) Tìm x, y biết: $7x^2 + y^2 + 4xy - 24x - 6y + 21 = 0$

Lời giải

$$1a) |x+1| + |x+3| + |x+5| = 4x \quad (1)$$

Về trái luôn luôn không âm nên $\forall x$ ta luôn có $4x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

$x \geq 0$ nên $x+1 > 0, x+3 > 0, x+5 > 0$

$$\Rightarrow |x+1| = x+1; |x+3| = x+3; |x+5| = x+5$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow x+1 + x+3 + x+5 = 4x \Leftrightarrow x = 9$$

$$1b) (x^2 - 5x + 6)\sqrt{1-x} = 0 \quad (1)$$

Điều kiện: $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1(*)$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \sqrt{1-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(ktm) \\ x = 3(ktm) \\ x = 1(tm) \end{cases} \cdot \text{Vậy } x = 1$$

$$2) 7x^2 + y^2 + 4xy - 24x - 6y + 21 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4xy - 6y + 7x^2 - 24x + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y(2x-3) + (2x-3)^2 + 3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y + 2x - 3)^2 + 3(x-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 2x - 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy $x = 2; y = -1$

Bài 12: Tìm x biết:

a) $\frac{2}{3}x + 4 = -12$

b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$

c) $|3x - 5| = 4$

d) $\frac{x+4}{2011} + \frac{x+3}{2012} = \frac{x+2}{2013} + \frac{x+1}{2014}$

Lời giải

a) $\frac{2}{3}x + 4 = -12 \Leftrightarrow x = -24$

b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{15}$

c) $|3x - 5| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5 = 4 (x \geq \frac{5}{3}) \\ 3x - 5 = -4 (x < \frac{5}{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(tm) \\ x = \frac{1}{3}(tm) \end{cases}$

d) $\frac{x+4}{2011} + \frac{x+3}{2012} = \frac{x+2}{2013} + \frac{x+1}{2014} \Leftrightarrow \frac{x+4}{2011} + 1 + \frac{x+3}{2012} + 1 = \frac{x+2}{2013} + 1 + \frac{x+1}{2014} + 1$

$\Leftrightarrow \frac{x+2015}{2011} + \frac{x+2015}{2012} = \frac{x+2015}{2013} + \frac{x+2015}{2014}$

$\Leftrightarrow (x+2015) \left(\frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} \right) = 0$

$\Rightarrow x + 2015 = 0 \quad (Vi \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} \neq 0)$

Vậy $x = -2015$

Bài 13: Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $|5 - 3x| = 3x - 5$

$$c) \frac{3}{x^2+5x+4} + \frac{2}{x^2+10x+24} = \frac{4}{3} + \frac{9}{x^2+3x-18}$$

Lời giải

$$a) x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

$$b) |5-3x| = 3x-5 \Leftrightarrow |3x-5| = 3x-5 \Leftrightarrow 3x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

$$c) \text{ĐKXD: } x \neq -1; -4; -6; 3$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{x^2+5x+4} + \frac{2}{x^2+10x+24} = \frac{4}{3} + \frac{9}{x^2+3x-18} \\ \Leftrightarrow & \frac{3}{(x+1)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} = \frac{4}{3} + \frac{9}{(x-3)(x+6)} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right) + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) = \frac{4}{3} + \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+6} \right) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3} + \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{3(x-3)}{3(x+1)(x-3)} = \frac{4(x+1)(x-3)}{3(x+1)(x-3)} + \frac{3(x+1)}{3(x+1)(x-3)} \\ \Rightarrow & 4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0(tm) \\ x=2(tm) \end{cases} \end{aligned}$$

$$S = \{0; 2\}$$

Bài 14: Giải phương trình:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x^2-9x+20} + \frac{1}{x^2-11x+30} = \frac{1}{8}$$

Lời giải

Ta có điều kiện $x \neq 2, 3, 4, 5, 6$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x^2-9x+20} + \frac{1}{x^2-11x+30} = \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-6} = \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-6} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ x=-2 \end{cases} (TM) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \{-2; 10\}$$

Bài 15: Giải phương trình:

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$a) \frac{8}{81} \cdot \left(\frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x \right)^3 = \frac{9}{64}$$

$$b) \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6}$$

Lời giải

$$a) \frac{8}{81} \cdot \left(\frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x \right)^3 = \frac{9}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x \right)^3 = \frac{9}{64} \cdot \frac{81}{8} = \left(\frac{9}{8} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x = \frac{9}{8} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{9}{8} + \frac{5}{16}}{-\frac{3}{8}} = \frac{-23}{6}$$

$$b) \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = t - 1, \quad DK : t \geq 2$$

$$\text{Phương trình trở thành: } \frac{t-2}{t-1} + \frac{t-1}{t} = \frac{7}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6t(t-2)}{t(t-1)} + \frac{6(t-1)(t-1)}{t} = \frac{7t(t-1)}{6t(t-1)} \Rightarrow 6t^2 - 12t + 6t^2 - 12t + 6 = 7t^2 - 7t$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 17t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3) \left(t - \frac{2}{5} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3(TM) \\ t = \frac{2}{5}(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = 0; x = -2$

Bài 16: Một người đi xe đạp, một người đi xe máy và một người đi ô tô xuất phát từ địa điểm A lần lượt lúc 8 giờ, 9 giờ, 10 giờ với vận tốc theo thứ tự là $10km/h$, $30km/h$, $50km/h$. Hỏi đến mấy giờ thì ô tô ở vị trí cách đều xe máy và xe đạp ?

Lời giải

Gọi thời gian ô tô đi đến vị trí cách đều xe đạp và xe máy là $x(h)$ ($x > 0$)

\Rightarrow Thời gian xe đạp đi là $x + 2(h)$; Thời gian xe máy đi là : $x + 1(h)$

Quãng đường ô tô đi là $50x(km)$

Quãng đường xe đạp đi là $10(x + 2)(km)$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Quãng đường xe máy đi là $30(x+1)(km)$

Vì đến 10 giờ thì xe máy đã vượt trước xe đạp nên ô tô ở vị trí cách đều xe đạp và xe máy nên ta có phương trình

$$50x - 10(x+2) = 30(x+1) - 50x \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} = 50'(tm)$$

Vậy đến 10 giờ 50 phút thì ô tô ở vị trí cách đều xe đạp và xe máy

Bài 17: Năm 2016, số công nhân ở xí nghiệp I và II tỉ lệ với 4 và 5. Năm 2017, xí nghiệp I tăng thêm 60 công nhân nữa, xí nghiệp II tăng thêm 90 công nhân; do đó số công nhân của 2 xí nghiệp tỉ lệ với 5 và 7. Hỏi năm 2017, mỗi xí nghiệp có bao nhiêu công nhân ?

Lời giải

Gọi số công nhân xí nghiệp I năm 2016 là $x (x \in \mathbb{N}^*)$

Số công nhân xí nghiệp II năm 2016 là $\frac{5}{4}x$

Theo bài toán, năm 2017 số công nhân xí nghiệp I và xí nghiệp II tăng 60, 90 người nên ta có

phương trình:
$$\frac{x+60}{5} = \frac{\frac{5}{4}x+90}{7} \Leftrightarrow x = 40(tm)$$

Vậy số công nhân năm 2017 của xí nghiệp I và xí nghiệp II lần lượt là 100 và 140 công nhân.

Bài 18: Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số mới là nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó.

Lời giải

Gọi tử số của phân số cần tìm là x thì mẫu số của phân số cần tìm là $x+11$

Phân số cần tìm là $\frac{x}{x+11} (x \neq -11)$

Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số 4 đơn vị ta được phân số $\frac{x-7}{x+15}$

Theo bài ta có phương trình:
$$\frac{x}{x+11} = \frac{x+15}{x-7}$$

Giải phương trình và tìm được $x = -5$ (thỏa mãn)

Vậy phân số cần tìm là $-\frac{5}{6}$

Bài 19: Giải các phương trình sau:

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$a)(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$$

$$b) \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

Lời giải

$$a)(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12, \text{ đặt } y = x^2 + x$$

$$y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y + 6)(y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = -6 \\ x^2 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} VN \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-2; 1\}$$

$$b) \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2008} + 1 + \frac{x+2}{2007} + 1 + \frac{x+3}{2006} + 1 = \frac{x+4}{2005} + 1 + \frac{x+5}{2004} + 1 + \frac{x+6}{2003} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} = \frac{x+2009}{2005} + \frac{x+2009}{2004} + \frac{x+2009}{2003}$$

$$\Leftrightarrow (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2009$$

Bài 20: Giải phương trình

$$\left(\frac{x+1}{x-2} \right)^2 + \frac{x+1}{x-4} - 12 \left(\frac{x-2}{x-4} \right)^2 = 0$$

Lời giải

$$\left(\frac{x+1}{x-2} \right)^2 + \frac{x+1}{x-4} - 12 \left(\frac{x-2}{x-4} \right)^2 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } \frac{x+1}{x-2} = a \text{ và } \frac{x-2}{x-4} = b \Rightarrow ab = \frac{x-1}{x-4}$$

Phương trình (*) trở thành:

$$a^2 + ab - 12b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 3b)(a + 4b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ a = -4b \end{cases}$$

$$+\text{Nếu } a = 3b \text{ thì } \frac{x+1}{x-2} = 3 \cdot \frac{x-2}{x-4} \Rightarrow (x+1)(x-4) = 3(x-2)^2 \text{ (VN)}$$

$$+\text{Nếu } a = -4b \text{ thì } \frac{x+1}{x-2} = -4 \cdot \frac{x-2}{x-4} \Rightarrow (x+1)(x-4) = -4(x-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(tm) \\ x = \frac{4}{5}(tm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 3; \frac{4}{5} \right\}$$

Bài 21: Ký hiệu $[a]$ (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a . Tìm x biết

$$\text{rằng: } \left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1$$

Lời giải

$$\left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{34x+19}{11} - (2x+1) < 1 \text{ và } 2x+1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 12x+8 < 11 \Leftrightarrow -8 \leq 12x < 3 \Leftrightarrow \frac{-4}{3} \leq 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq 2x+1 < \frac{3}{2}$$

$$\text{Do } 2x+1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 2x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

Bài 22: Lúc 7 giờ, một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau $36km$, rồi ngay lập tức quay trở về A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc dòng nước chảy là $6km/h$

Lời giải

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc ca nô xuôi dòng ($x > 12$)

Vận tốc ca nô khi nước lặng: $x - 6(km/h)$

Vận tốc ca nô khi ngược dòng: $x - 12(km/h)$

Thời gian cả đi và về của ca nô là 4,5 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{36}{x} + \frac{36}{x-12} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x-4)(x-24) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(ktm) \\ x = 24(tm) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $24km/h$

Bài 23: Giải các phương trình sau:

$$1) \quad 2x^2 - x = 3 - 6x$$

$$2) \quad (x+2) \cdot (x^2 - 3x + 5) = (x+2) \cdot x^2$$

Lời giải

$$1) \quad 2x^2 - x = 3 - 6x \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ hoặc } x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -3$$

$$2) \quad (x + 2) \cdot (x^2 - 3x + 5) = (x + 2) \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(5 - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ 5 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -2; \frac{5}{3} \right\}$$

Bài 24: Một xe đạp, một xe máy và một ô tô cùng đi từ A đến B. Khởi hành lần lượt lúc 5 giờ, 6 giờ, 7 giờ và vận tốc theo thứ tự là 15km/h ; 45km/h và 60km/h .

Hỏi lúc mấy giờ ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Lời giải

- Gọi thời gian để ô tô cách đều xe đạp và xe máy kể từ lúc xe đạp chạy là x (giờ). Điều kiện $x > 2$

Khi đó: Xe đạp đi được : $15x$ (km)

Xe máy đi được : $45(x - 1)$ (km)

Ô tô đi được: $60(x - 2)$ (km)

Khi ô tô bắt đầu chạy thì xe đạp đã bị xe máy vượt qua

Hiệu quãng đường đi được của xe máy và ô tô là: $45(x - 1) - 60(x - 2)$

Hiệu quãng đường đi được của ô tô và xe đạp: $60(x - 2) - 15x$

Theo đề bài ta có phương trình: $45(x - 1) - 60(x - 2) = 60(x - 2) - 15x$

Giải phương trình tìm được $x = 3,25$ giờ = 3 giờ 15 phút

Vậy lúc 8 giờ 15 phút thì ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Bài 25: Giải các phương trình sau:

$$a) \quad (6x + 8)(6x + 6)(6x + 7)^2 = 72$$

$$b) \quad \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$

Lời giải

- a) Đặt $6x + 7 = t$. Ta có:

$$(t + 1)(t - 1)t^2 = 72 \Leftrightarrow (t^2 - 1)t^2 = 72$$

$$\Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = -8(ktm) \\ t^2 = 9(tm) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3} \right\}$$

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5); \quad x^2 + 11x + 30 = (x+6)(x+5);$$

$$\text{b) } x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$$

$$DKXD: x \neq \{-4; -5; -6; -7\}$$

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Bài 26: Giải các phương trình:

$$\text{a) } \frac{x+7}{2003} + \frac{x+6}{2004} + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2025}{5} = 0$$

$$\text{b) } x^4 - 2x^2 = 400x + 9999$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{x+7}{2003} + \frac{x+6}{2004} + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2025}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+7}{2003} + 1 + \frac{x+6}{2004} + 1 + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2005}{5} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2010}{2003} + \frac{x+2010}{2004} + \frac{x+2010}{2005} + \frac{x+2010}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2010) \left(\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{5} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2010=0 \Leftrightarrow x=-2010$$

$$\text{b) } x^4 - 2x^2 = 400x + 9999$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000 \text{ (thêm } 4x^2 + 1 \text{ vào 2 vế)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1 + 2x + 100)(x^2 + 1 - 2x - 100) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 101 = 0 \\ x^2 - 2x - 99 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{VN} \\ x = -9 \\ x = 11 \end{cases}$$

Vậy $S = \{11; -9\}$

Bài 27: Giải phương trình:

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

Lời giải

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 258$$

Bài 28: Tìm x biết:
$$\frac{(2009-x^2) + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

Lời giải

$$\frac{(2009-x^2) + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

ĐKXĐ: $x \neq 2009; x \neq 2010$.

Đặt $a = x - 2010$ ($a \neq 0$), ta có hệ thức:

$$\frac{(a+1)^2 - (a+1)a + a^2}{(a+1)^2 + (a+1)a + a^2} = \frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a} = \frac{19}{49}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2 + 49a + 49 = 57a^2 + 57a + 19$$

$$\Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-3)(2a+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \text{ (tm)} \\ a = -\frac{5}{2} \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4023}{2} \\ x = \frac{4015}{2} \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

Bài 29: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

Lời giải

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x+6)(x+5)$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$$

$$\text{ĐKXĐ: } x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 30: Tìm x, y, z thỏa mãn phương trình sau:

$$9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 &= 0 \\
\Leftrightarrow (9x^2 - 18x + 9) + (y^2 - 6y + 9) + 2(z^2 + 2z + 1) &= 0 \\
\Leftrightarrow 9(x-1)^2 + (y-3)^2 + 2(z+1)^2 &= 0(*) \\
\text{Do } (x-1)^2 \geq 0; (y-3)^2 \geq 0; (z+1)^2 \geq 0 & \\
\text{Nên : } x=1; y=3; z=-1 &
\end{aligned}$$

Bài 31: Giải phương trình sau:

$$\frac{2010x + 2010}{x^2 + x + 1} - \frac{2010x - 2010}{x^2 - x + 1} = \frac{2011}{x(x^4 + x^2 + 1)}$$

Lời giải

$$\frac{2010x + 2010}{x^2 + x + 1} - \frac{2010x - 2010}{x^2 - x + 1} = \frac{2011}{x(x^4 + x^2 + 1)} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x; \quad x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$$

Điều kiện xác định của phương trình (1) là : $x \neq 0$

$$\text{Ta có: } x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

Quy đồng mẫu hai vế và khử mẫu:

$$(1) \Rightarrow 2010x(x+1)(x^2-x+1) - 2010x(x-1)(x^2+x+1) = 2011$$

$$\Leftrightarrow 2010x(x^3+1) - 2010x(x^3-1) = 2011$$

$$\Leftrightarrow 2010x(x^3+1-x^3+1) = 2011$$

$$\Leftrightarrow 2010x \cdot 2 = 2011 \Leftrightarrow x = \frac{2011}{4020} (TM)$$

Bài 32: Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó

Lời giải

Gọi tử số của phân số cần tìm là x thì mẫu số của phân số cần tìm là $x + 11$

$$\text{Phân số cần tìm là } \frac{x}{x+11} (x \neq -11)$$

Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì ta được phân số $\frac{x-7}{x+15}$

$$\text{Theo bài ta có phương trình : } \frac{x}{x+11} = \frac{x+15}{x-7}$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Giải phương trình và tìm được $x = -5 (tm)$

Từ đó phân số cần tìm là $-\frac{5}{6}$

Bài 33: Giải các phương trình sau:

a) $2x^2 - x = 3 - 6x$

b) $(x+2).(x^2 - 3x + 5) = (x+2).x^2$

Lời giải

a) $2x^2 - x = 3 - 6x \Leftrightarrow (2x-1)(x+3) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x-1=0 \text{ hoặc } x+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -3$

b) $(x+2).(x^2 - 3x + 5) = (x+2).x^2$

$$\Leftrightarrow (x+2)(5-3x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ 5-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=\frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{-2; \frac{5}{3}\right\}$

Bài 34: Một xe đạp, một xe máy và một ô tô cùng đi từ A đến B. Khởi hành lần lượt lúc 5 giờ, 6 giờ, 7 giờ và vận tốc theo thứ tự là $15km/h$; $45km/h$ và $60km/h$.

Hỏi lúc mấy giờ ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Lời giải

Gọi thời gian để ô tô cách đều xe đạp và xe máy kể từ lúc xe đạp chạy là x (giờ). Điều kiện $x > 2$

Khi đó: Xe đạp đi được : $15x (km)$

Xe máy đi được : $45(x-1) (km)$

Ô tô đi được: $60(x-2) (km)$

Khi ô tô bắt đầu chạy thì xe đạp đã bị xe máy vượt qua

Hiệu quãng đường đi được của xe máy và ô tô là: $45(x-1) - 60(x-2)$

Hiệu quãng đường đi được của ô tô và xe đạp: $60.(x-2) - 15x$

Theo đề bài ta có phương trình: $45(x-1) - 60(x-2) = 60(x-2) - 15x$

Giải phương trình tìm được $x = 3,25$ giờ = 3 giờ 15 phút

Vậy lúc 8 giờ 15 phút thì ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Bài 35: Giải các phương trình sau:

$$a) x^3 - x^2 - 12x = 0$$

$$b) \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

Lời giải

$$a) \quad x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$b) \quad \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-214}{86} - 1 \right) + \left(\frac{x-132}{84} - 2 \right) + \left(\frac{x-54}{82} - 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300) \left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) \Leftrightarrow x-300 = 0 \Leftrightarrow x = 300$$

Bài 36: Tìm giá trị của m để cho phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm số gấp ba nghiệm số của phương trình: $(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3$

Lời giải

$$(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 - x^2 - 4x - 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow -4x = 8 \Leftrightarrow x = -2$$

Để phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm gấp ba lần nghiệm của phương trình

$$(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3 \text{ hay } x = -6$$

Ta có

$$6 \cdot (-6) - 5m = 3 + 3m \cdot (-6)$$

$$\Leftrightarrow -5m + 18m = 39$$

$$\Leftrightarrow 13m = 39 \Leftrightarrow m = 3$$

Vậy với $m = 3$ thì phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm số gấp ba nghiệm số của phương trình $(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3$

Bài 37: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} = \frac{x+6}{94} + \frac{x+8}{92}$

b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Lời giải

a) Ta có:

$$\frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} = \frac{x+6}{94} + \frac{x+8}{92}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{98} + 1 \right) + \left(\frac{x+4}{96} + 1 \right) = \left(\frac{x+6}{94} + 1 \right) + \left(\frac{x+8}{92} + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow (x+100) \cdot \left(\frac{1}{98} + \frac{1}{96} - \frac{1}{94} - \frac{1}{92} \right) = 0$$

$$\forall x \quad \frac{1}{98} + \frac{1}{96} - \frac{1}{94} - \frac{1}{92} \neq 0$$

$$\text{Do đó: } x+100=0 \Leftrightarrow x=-100$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=-100$

b)

Ta có:

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 1)(x^3 - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1)(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0 (*)$$

$$\text{Do } x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ và } x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0 \text{ với mọi } x$$

$$\text{Nên } (*) \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}$$

Bài 38: Tìm m để phương trình sau vô nghiệm

$$\frac{1-x}{x-m} + \frac{x-2}{x+m} = \frac{2(x-m)-2}{m^2-x^2}$$

Lời giải

$$\frac{1-x}{x-m} + \frac{x-2}{x+m} = \frac{2(x-m)-2}{m^2-x^2} \quad (1)$$

$$\text{ĐKXĐ: } x+m \neq 0 \text{ và } x-m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm m$$

$$\Rightarrow (1-x)(x+m) + (x-2)(x-m) = 2 - 2(x-m)$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)x = m-2 (*)$$

$$+\text{Nếu } 2m-1=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2} \text{ ta có: } (*) \Leftrightarrow 0x = \frac{-3}{2} \text{ (vô nghiệm)}$$

+Nếu $m \neq \frac{1}{2}$ ta có (*) $\Leftrightarrow x = \frac{m-2}{2m-1}$

- Xét $x = m$

$$\Leftrightarrow \frac{m-2}{2m-1} = m \Leftrightarrow m-2 = 2m^2 - m$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

(Không xảy ra vì vế trái luôn dương)

Xét $x = -m$

$$\Leftrightarrow \frac{m-2}{2m-1} = -m \Leftrightarrow m-2 = -2m^2 + m$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy phương trình vô nghiệm khi $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = \pm 1$

Bài 39: Giải phương trình : $\frac{x-1}{2012} + \frac{x-2}{2011} + \frac{x-3}{2010} + \dots + \frac{x-2012}{1} = 2012$

Lời giải

$$\frac{x-1}{2012} - 1 + \frac{x-2}{2011} - 1 + \frac{x-3}{2010} - 1 + \dots + \frac{x-2012}{1} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2013}{2012} + \frac{x-2013}{2011} + \frac{x-2013}{2010} + \dots + \frac{x-2013}{1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2013) \left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2010} + \dots + \frac{1}{1} \right) \Leftrightarrow x = 2013$$

Bài 40: Giải các phương trình sau:

d) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

e) $2x(8x-1)^2 \cdot (4x-1) = 9$

f) $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$ với x, y nguyên dương.

Lời giải

a)

$$\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-214}{86} - 1 \right) + \left(\frac{x-132}{84} - 2 \right) + \left(\frac{x-54}{82} - 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300) \left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) = 0 \Leftrightarrow x-300=0 \Leftrightarrow x=300$$

$$\text{Vậy } S = \{300\}$$

b)

$$2x(8x-1)^2 \cdot (4x-1) = 9$$

$$\Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(8x^2 - 2x) = 9 \Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(64x^2 - 16x) = 72$$

$$\text{Đặt } 64x^2 - 16x + \frac{1}{2} = k$$

Ta có:

$$(k+0,5)(k-0,5) = 72 \Leftrightarrow k^2 = 72,25 \Rightarrow k = \pm 8,5$$

Với $k = 8,5$ ta có phương trình :

$$64x^2 - 16x - 8 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(4x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Với $k = -8,5$ ta có phương trình:

$$64x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow (8x-1)^2 + 8 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right\}$$

$$\text{c) } x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - (y+2)^2 = 7 \Leftrightarrow (x-y-1)(x+y+3) = 7$$

Vì x, y nguyên dương nên $x+y+3 > x-y-1$

$$\Rightarrow x+y+3=7 \text{ và } x-y-1=1 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm dương duy nhất $(x; y) = (3; 1)$

Bài 41: Giải các phương trình sau:

$$a) (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$$

$$b) \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

Lời giải

$$a) (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$$

$$\text{Đặt } y = x^2 + x$$

$$y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 6y - 2y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+6)(y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$*x^2 + x = -6 \text{ vô nghiệm vì } x^2 + x + 6 > 0 \text{ với mọi } x$$

$$*x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) - (x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1$$

b)

$$\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2008} + 1 \right) + \left(\frac{x+2}{2007} + 1 \right) + \left(\frac{x+3}{2006} + 1 \right) = \left(\frac{x+4}{2005} + 1 \right) + \left(\frac{x+5}{2004} + 1 \right) + \left(\frac{x+6}{2003} + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} = \frac{x+2009}{2005} + \frac{x+2009}{2004} + \frac{x+2009}{2003}$$

$$\Leftrightarrow (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) = 0$$

$$\forall x \frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \neq 0 \Rightarrow x = -2009$$

Bài 42: Giải phương trình: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$

Lời giải

$$\text{ĐKXD: } x \neq 0; x \neq 2$$

$$\frac{x(x+2)-(x-2)}{x(x-2)} = \frac{2}{x(x-2)} \Rightarrow x^2 + 2x - x + 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (ktm) \\ x = -1 & (tm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-1\}$$

Bài 43: Một tổ sản xuất lập kế hoạch sản xuất, mỗi ngày sản xuất được 50 sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ đó sản xuất được 57 sản phẩm. Do đó đã hoàn thành trước kế hoạch một ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và thực hiện trong bao nhiêu ngày.

Lời giải

Gọi số ngày tổ dự định sản xuất là : x (ngày)

Điều kiện x nguyên dương và $x > 1$

Vậy số ngày tổ đã thực hiện là : $x - 1$ (ngày)

Số sản phẩm làm theo kế hoạch là : $50x$ (sản phẩm)

Số sản phẩm thực hiện là : $57(x - 1)$ (sản phẩm)

Theo đề bài ta có phương trình:

$$57(x - 1) - 50x = 13$$

$$\Leftrightarrow 57x - 57 - 50x = 13$$

$$\Leftrightarrow 7x = 70$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \quad (tm)$$

Vậy số ngày dự định sản xuất là : 10 ngày

Số sản phẩm phải sản xuất theo kế hoạch: $50.10 = 500$ (sản phẩm)

Bài 44: Giải phương trình:

$$1) x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$$

$$2) 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2$$

Lời giải

$$2.1 \quad x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0 \quad (1)$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Nếu $x \geq 1$: $(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 1$)

$$x < 1: (1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x-1) = 0$$

$$\text{Nếu } \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (ktm) \\ x = 3 & (ktm) \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = 1$

2.2

$$8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2 \quad (2)$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $x \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right] = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+4)^2 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (ktm) \\ x = -8 & (tm) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -8$

Bài 45: Giải phương trình

$$a) \frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12\left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3}\right)$$

$$b) \frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$c) ||x-2|+3| = 5$$

Lời giải

a)

$$\frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12\left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)} - 1 = 12 \cdot \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3(x-1)}\right). \quad DK : x \neq -4; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 15x - 3(x+4)(x-1) = 3 \cdot 12(x-1) + 12(x+4)$$

.....

$$\Leftrightarrow 3x(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (tm) \\ x = -4 & (tm) \end{cases}$$

Vậy $S = \{0\}$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

b)

$$\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{148-x}{25} - 1 \right) + \left(\frac{169-x}{23} - 2 \right) + \left(\frac{186-x}{21} - 3 \right) + \left(\frac{199-x}{19} - 4 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (123-x) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} \right) = 0$$

Do $\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} > 0$ nên $123-x=0 \Leftrightarrow x=123$

Vậy $S = \{123\}$

c) $\|x-2\|+3=5$

Ta có: $|x-2| \geq 0 \forall x \Rightarrow |x-2|+3 > 0$ nên $\|x-2\|+3 = |x+2|-3$

Phương trình được viết dưới dạng:

$$|x-2|+3=5$$

$$\Leftrightarrow |x-2|=2$$

$$+) x-2=2 \Leftrightarrow x=4$$

$$+) x-2=-2 \Rightarrow x=0$$

$$S = \{0; 4\}$$

Bài 46: Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm 5 km/h thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó

Lời giải

Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(\text{km})$ ($x > 0$)

Vận tốc dự định của người đi xe gắn máy là: $\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10} (\text{km/h})$ $\left(3^h 20' = 3\frac{1}{3}h \right)$

Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên 5 km/h là: $\frac{3x}{10} + 5 (\text{km/h})$

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\left(\frac{3x}{10} + 5 \right) \cdot 3 = x \Leftrightarrow x = 150 (\text{km})$$

Vậy khoảng cách giữa A và B là $150(\text{km})$

Vận tốc dự định là $\frac{3 \cdot 150}{10} = 45 (\text{km/h})$

Bài 47: Giải phương trình: $\frac{x+2005}{4} + \frac{x+2004}{5} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{x+2005}{4} + \frac{x+2004}{5} &= \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x+2005}{4} + 1 \right) + \left(\frac{x+2004}{5} + 1 \right) &= \left(\frac{x+4}{2005} + 1 \right) + \left(\frac{x+5}{2004} + 1 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{x+2009}{4} + \frac{x+2009}{5} - \frac{x+2009}{2005} - \frac{x+2009}{2004} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2009) \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} \right] &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} \neq 0 \Rightarrow x+2009=0 \Leftrightarrow x=-2009$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -2009$

Bài 48: Tìm x biết:

a) $x^2 - 4x + 4 = 25$

b) $\frac{x-17}{1990} + \frac{x-21}{1986} + \frac{x+1}{1004} = 4$

c) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

Lời giải

a) Tính đúng $x = 7; x = -3$

b) Tính đúng $x = 2007$

c)

$$\begin{aligned} 4^x - 12 \cdot 2^x + 32 &= 0 \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x + 4 \cdot 8 = 0 \\ \Leftrightarrow 2^x \cdot (2^x - 4) - 8 \cdot (2^x - 4) &= 0 \Leftrightarrow (2^x - 8)(2^x - 4) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 8 \\ 2^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 49: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Điều kiện $x \neq 0; x \neq -1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2 &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} + \frac{(x+1)^2-3(x+1)+2}{(x+1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} + \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{x+1}{x^2} + \frac{x}{(x+1)^2} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) \left[(x+1)^3 + x^3 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1}{2} (tm) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ 1; \frac{-1}{2} \right\}$

Bài 50: Tìm x biết :

a) $-3^x = -6561$

b) $(2x-1)^{2012} = (2x-1)^{2010}$

Lời giải

a) $-3^x = -6561$ hay $-3^x = -3^8 \Rightarrow x = 8$

b) $(2x-1)^{2012} = (2x-1)^{2010} \Leftrightarrow (2x-1)^{2012} - (2x-1)^{2010} = 0$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^{2010} \cdot [1 - (2x-1)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^{2010} \cdot (1-2x+1)(1+2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 2-2x=0 \\ 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=0 \end{cases}$$

Bài 51: Tìm x, y, z biết: $10x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x - 4y - 4xz + 5 = 0$

Lời giải

$$10x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x - 4y - 4xz + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2 + 6x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (4z^2 - 4xz + x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+1)^2 + (y-2)^2 + (2z-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=0 \\ y-2=0 \\ 2z-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=2 \\ z=\frac{-1}{6} \end{cases}$$

Bài 52: Một khối 8 có $\frac{2}{3}$ số học sinh đội tuyển Toán bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh đội tuyển Anh và bằng

$\frac{4}{5}$ số học sinh đội tuyển Văn. Đội tuyển Văn có số học sinh ít hơn tổng số học sinh của hai đội

tuyển kia là 38 học sinh. Tính số học sinh của mỗi đội tuyển ?

Lời giải

Gọi số học sinh đội tuyển Toán, Anh, Văn thứ tự là x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}$)

$$\text{Ta có: } \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{(x+y)-z}{(18+16)-15} = \frac{38}{19} = 2$$

Tính đúng $x = 36; y = 32; z = 30$ và kết luận

Bài 53: Một người dự định đi xe máy từ A đến B với vận tốc 30km/h , nhưng sau khi đi được 1 giờ người ấy nghỉ hết 15 phút, do đó phải tăng vận tốc thêm 10km/h để đến B đúng giờ đã định. Tính quãng đường AB ?

Lời giải

Gọi $x(\text{km})$ là độ dài quãng đường AB. ĐK: $x > 0$

Thời gian dự kiến đi hết quãng đường AB: $\frac{x}{30}$ (giờ)

Quãng đường đi được sau 1 giờ: $30(\text{km})$

Quãng đường còn lại: $x - 30(\text{km})$

Thời gian đi quãng đường còn lại: $\frac{x-30}{40}$ (giờ)

Theo bài ta có phương trình: $\frac{x}{30} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{x-30}{40}$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow 4x = 30.5 + 3.(x - 30) \Leftrightarrow x = 60 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy quãng đường AB là 60km .

Bài 54: Giải các phương trình sau

$$\text{a) } \frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$$

$$\text{b) } \frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$\text{c) } ||x-2|+3|=5$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3(x-1)} \right) \quad (\text{DK: } x \neq -4; x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow 3.15x - 3(x+4)(x-1) = 3.12(x-1) + 12(x+4)$$

.....

$$\Leftrightarrow 3x(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(\text{tm}) \\ x = -4(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$S = \{0\}$$

$$\text{b) } \frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{148-x}{25} - 1 + \frac{169-x}{23} - 2 + \frac{186-x}{21} - 3 + \frac{199-x}{19} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (123-x) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 123$$

$$\text{c) Ta có: } |x-2| \geq 0 \forall x \Rightarrow |x-2|+3 > 0 \text{ nên } ||x-2|+3| = |x-2|+3$$

$$\text{Phương trình được viết lại: } |x-2|+3 = 5 \Leftrightarrow |x-2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 2 \\ x-2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{0; 4\}$$

Bài 55: Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm 5km/h thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó

Lời giải

Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(\text{km/h})(x > 0)$

Vận tốc dự định của người đi xe máy là $\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10}(\text{km/h})$ $3^h20' = 3\frac{1}{3}h$

Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên $5\text{km/h} : \frac{3x}{10} + 5(\text{km/h})$

Theo đề Câu ta có phương trình :

$$\left(\frac{3x}{10} + 5\right) \cdot 3 = x \Leftrightarrow x = 150(\text{tm})$$

Vậy khoảng cách giữa A và B là : 150km

Vận tốc dự định: $\frac{3 \cdot 150}{10} = 45\text{km/h}$

Bài 56: Giải phương trình:

$$1) x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$$

$$2) 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2.1 \quad x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0(1)$$

$$\text{Nếu } x \geq 1 : (1) \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 (\text{thỏa mãn điều kiện } x \geq 1)$$

$$\text{Nếu } x < 1 : (1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{ktm}) \\ x = 3 & (\text{ktm}) \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = 1$

$$2.2 \quad \text{Ta có: } 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2 \quad (2)$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $x \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right] = (x + 4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x + 4)^2 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{ktm}) \\ x = -8 & (\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -8$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Bài 57: Giải phương trình:

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} &= 10 \\ \Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 258 \end{aligned}$$

Bài 58: Giải phương trình:

$$\frac{(2009-x^2) + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

Lời giải

Ta có:
$$\frac{(2009-x^2) + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

ĐKXĐ: $x \neq 2009; x \neq 2010$.

Đặt $a = x - 2010$ ($a \neq 0$), ta có hệ thức:
$$\frac{(a+1)^2 - (a+1)a + a^2}{(a+1)^2 + (a+1)a + a^2} = \frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a} = \frac{19}{49}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2 + 49a + 49 = 57a^2 + 57a + 19 \Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-3)(2a+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \text{ (tm)} \\ a = -\frac{5}{2} \text{ (tm)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4023}{2} \\ x = \frac{4015}{2} \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

Bài 59: Giải các phương trình sau:

a) $(x^2+x)^2 + 4(x^2+x) = 12$; b) $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

Lời giải

a) $(x^2+x)^2 + 4(x^2+x) = 12$, đặt $y = x^2+x$

$$y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y+6)(y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = -6 \\ x^2 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{VN} \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy $S = \{-2; 1\}$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003} \\ \Leftrightarrow & \frac{x+1}{2008} + 1 + \frac{x+2}{2007} + 1 + \frac{x+3}{2006} + 1 = \frac{x+4}{2005} + 1 + \frac{x+5}{2004} + 1 + \frac{x+6}{2003} + 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} = \frac{x+2009}{2005} + \frac{x+2009}{2004} + \frac{x+2009}{2003} \\ \Leftrightarrow & (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = -2009 \end{aligned}$$

Bài 60: Giải các phương trình sau:

Lúc 7 giờ, một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau 36km, rồi ngay lập tức quay trở về A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc dòng nước chảy là 6km / h

Lời giải

Gọi x (km / h) là vận tốc ca nô xuôi dòng ($x > 12$)

Vận tốc ca nô khi nước lặng: $x - 6$ (km / h)

Vận tốc ca nô khi ngược dòng: $x - 12$ (km / h)

Thời gian cả đi và về của ca nô là 4,5 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{36}{x} + \frac{36}{x-12} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x-4)(x-24) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(\text{ktm}) \\ x = 24(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là 24km / h

Bài 61: Giải các phương trình sau:

$$1) \quad 2x^2 - x = 3 - 6x$$

$$2) \quad (x+2) \cdot (x^2 - 3x + 5) = (x+2) \cdot x^2$$

Lời giải

$$1) \quad 2x^2 - x = 3 - 6x \Leftrightarrow (2x-1)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x-1=0 \text{ hoặc } x+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -3$

$$2) (x+2) \cdot (x^2 - 3x + 5) = (x+2) \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(5-3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ 5-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -2; \frac{5}{3} \right\}$$

Bài 62: Giải Câu toán bằng cách lập phương trình

Một xe đạp, một xe máy và một ô tô cùng đi từ A đến B. Khởi hành lần lượt lúc 5 giờ, 6 giờ, 7 giờ và vận tốc theo thứ tự là 15km/h; 45km/h và 60km/h.

Hỏi lúc mấy giờ ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Lời giải

- Gọi thời gian để ô tô cách đều xe đạp và xe máy kể từ lúc xe đạp chạy là x (giờ). Điều kiện $x > 2$

Khi đó: Xe đạp đi được : $15x$ (km)

Xe máy đi được : $45(x-1)$ (km)

Ô tô đi được: $60(x-2)$ (km)

Khi ô tô bắt đầu chạy thì xe đạp đã bị xe máy vượt qua

Hiệu quãng đường đi được của xe máy và ô tô là: $45(x-1) - 60(x-2)$

Hiệu quãng đường đi được của ô tô và xe đạp: $60(x-2) - 15x$

Theo đề Câu ta có phương trình: $45(x-1) - 60(x-2) = 60(x-2) - 15x$

Giải phương trình tìm được $x = 3,25$ giờ = 3 giờ 15 phút

Vậy lúc 8 giờ 15 phút thì ô tô cách đều xe đạp và xe máy.

Bài 63: Giải phương trình

$$a) -2|-3x+4|-2=0$$

$$b) \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$$

Lời giải

$$a) -2|-3x+4|-2=0$$

$$\Leftrightarrow |-3x+4| = -1 \text{ (khẳng định sai vì } |-3x+4| \geq 0 \forall x)$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$\begin{aligned}
 & \text{b) } \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1} \quad \text{ĐKXD: } x \neq 1 \\
 & \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^3-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4(x-1)}{x^3-1} \\
 & \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1+2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4(x-1)}{x^3-1} \\
 & \Leftrightarrow 3x^2-3x=0 \\
 & \Leftrightarrow 3x(x-1)=0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (\text{tm}) \\ x=1 & (\text{ktm}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy $S = \{0\}$

Bài 64: Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } (6x+8)(6x+6)(6x+7)^2 = 72$$

$$\text{b) } \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

Lời giải

a) Đặt $6x+7=t$. Ta có:

$$(t+1)(t-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow (t^2-1)t^2 = 72$$

$$\Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = -8 (\text{ktm}) \\ t^2 = 9 (\text{tm}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3} \right\}$$

$$x^2+9x+20 = (x+4)(x+5); \quad x^2+11x+30 = (x+6)(x+5);$$

$$\text{b) } x^2+13x+42 = (x+6)(x+7)$$

$$\text{ĐKXD: } x \neq \{-4; -5; -6; -7\}$$

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18} \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13(\text{tm}) \\ x = 2(\text{tm}) \end{cases}$$

Bài 65: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x+7}{2003} + \frac{x+6}{2004} + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2025}{5} = 0$

b) $x^4 - 2x^2 = 400x + 9999$

Lời giải

a) $\frac{x+7}{2003} + \frac{x+6}{2004} + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2025}{5} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x+7}{2003} + 1 + \frac{x+6}{2004} + 1 + \frac{x+5}{2005} + \frac{x+2005}{5} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2010}{2003} + \frac{x+2010}{2004} + \frac{x+2010}{2005} + \frac{x+2010}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2010) \left(\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{5} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2010 = 0 \Leftrightarrow x = -2010$$

b) $x^4 - 2x^2 = 400x + 9999$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000 \text{ (thêm } 4x^2 + 1 \text{ vào 2 vế)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1 + 2x + 100)(x^2 + 1 - 2x - 100) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 101 = 0 \\ x^2 - 2x - 99 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{VN} \\ \begin{cases} x = -9 \\ x = 11 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy $S = \{11; -9\}$

Bài 66: Giải phương trình:

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

Lời giải

Ta có: $\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$

$$\Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-258)\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}\right)=0 \Leftrightarrow x=258$$

Bài 67: Tìm x biết:
$$\frac{(2009-x^2)+(2009-x)(x-2010)+(x-2010)^2}{(2009-x)^2-(2009-x)(x-2010)+(x-2010)^2}=\frac{19}{49}$$

Lời giải

$$\frac{(2009-x^2)+(2009-x)(x-2010)+(x-2010)^2}{(2009-x)^2-(2009-x)(x-2010)+(x-2010)^2}=\frac{19}{49}$$

ĐKXD: $x \neq 2009; x \neq 2010$.

Đặt $a = x - 2010$ ($a \neq 0$), ta có hệ thức:

$$\frac{(a+1)^2-(a+1)a+a^2}{(a+1)^2+(a+1)a+a^2}=\frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2+a+1}{3a}=\frac{19}{49}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2+49a+49=57a^2+57a+19$$

$$\Leftrightarrow 8a^2+8a-30=0$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)^2-4^2=0 \Leftrightarrow (2a-3)(2a+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \text{ (tm)} \\ a=-\frac{5}{2} \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{4023}{2} \\ x=\frac{4015}{2} \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

Bài 68: Hai người làm chung một công việc trong 12 ngày thì xong. Năng suất làm việc trong một ngày của người thứ hai chỉ bằng $\frac{2}{3}$ người thứ nhất. Hỏi nếu làm riêng, mỗi người làm trong bao lâu sẽ xong công việc

Lời giải

Gọi x (ngày) là thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ($x > 0$).

Một ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Một ngày người thứ hai làm được $\frac{2}{3x}$ (công việc)

Một ngày hai người làm chung được $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}$ (công việc)

Theo Câu ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x = 20$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Vậy người thứ nhất làm xong trong 20 ngày

Người thứ hai làm xong trong 30 ngày.

Bài 69: Ký hiệu $[a]$ (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a . Tìm x biết

rằng: $\left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1$

Lời giải

$$\left[\frac{34x+19}{11} \right] = 2x+1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{34x+19}{11} - (2x+1) < 1 \text{ và } 2x+1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 12x+8 < 11 \Leftrightarrow -8 \leq 12x < 3 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq 2x+1 < \frac{3}{2}$$

Do $2x+1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 2x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x=0 \end{cases}$

Bài 70: Giải các phương trình sau:

a) $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$

b) $y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0$

c) $\frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6}$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} & x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0 \\ \Leftrightarrow & (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1=0 \\ \Leftrightarrow & (x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1=0 \\ \Leftrightarrow & (x^2+2x+1)^2=0 \\ \Leftrightarrow & (x+1)^4=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$

b)

$$\begin{aligned} & y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0 \\ \Leftrightarrow & y^2+2y+1+(2^x)^2-2 \cdot 2^x+1=0 \\ \Leftrightarrow & (y+1)^2+(2^x-1)^2=0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ 2^x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; -1)$

c)

$$\frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6} \quad (1)$$

ĐKXĐ: $x \neq -2; x \neq -4; x \neq -6; x \neq -8$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2+2}{x+2} + \frac{(x+8)^2+8}{x+8} = \frac{(x+4)^2+4}{x+4} + \frac{(x+6)^2+6}{x+6} \\ &\Leftrightarrow x+2 + \frac{2}{x+2} + x+8 + \frac{8}{x+8} = x+4 + \frac{4}{x+4} + x+6 + \frac{6}{x+6} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x+4} = \frac{6}{x+6} - \frac{8}{x+8} \\ &\Leftrightarrow \frac{2x+8-4x-8}{(x+2)(x+4)} = \frac{6x+48-8x-48}{(x+6)(x+8)} \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x}{(x+2)(x+4)} = \frac{-2x}{(x+6)(x+8)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x+2)(x+4)=(x+6)(x+8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 8x=-40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases} \quad (tm) \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=0; x=-5$

Bài 71: Giải phương trình: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8)=-16$

Lời giải

Ta có: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8)=-16 \Leftrightarrow (3x-2)(3x+3)^2(3x+8)=-144$

Đặt $3x+3=t \Rightarrow 3x-2=t-5; 3x+8=t+5$

Ta có phương trình: $(t-5)t^2(t+5)=-144$

$$\Leftrightarrow t^4 - 25t^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow (t^2-9)(t^2-16) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2=9 \\ t^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\pm 3 \\ t=\pm 5 \end{cases}$$

Xét các trường hợp ta tìm được $x=0; x=-2; x=\frac{2}{3}; x=-\frac{8}{3}$

Bài 72: Giải phương trình: $(x^2-x+1)(x^2-x+2)=12$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Lời giải

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$$

Đặt $x^2 - x + 1 = X$ có

$$X^2 + X - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 4X - 3X - 12 = 0 \Leftrightarrow X(X + 4) - 3(X + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - 3)(X + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = -4 \end{cases}$$

$$X = -4 \Rightarrow x^2 - x + 5 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} = 0 \text{ (VN)}$$

$$X = 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 73: Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $4m$ thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp $8m$ dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp $12m$ dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc $2m$ / giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

Lời giải

Gọi x là số lần đi ($x \in \mathbb{N}, x > 0$), số lần dừng là $x - 1$

Thời gian đi

$$\begin{aligned} \frac{4}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} + \dots + \frac{4x}{2} &= 2 + 4 + 6 + \dots + 2x \\ &= 2(1 + 2 + 3 + \dots + x) = x(x + 1) \end{aligned}$$

Thời gian dừng:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (x - 1) = \frac{(x - 1 + 1)(x - 1)}{2} = \frac{x(x - 1)}{2}$$

Lập được phương trình

$$\frac{x(x - 1)}{2} + x(x + 1) = 155 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 310 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (tm)} \\ x = \frac{-31}{3} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Khoảng cách AB là $10 \cdot (10 + 1) \cdot 2 = 220(m)$

Bài 74: Giải phương trình

$$a) \frac{x+43}{57} + \frac{x+46}{54} = \frac{x+49}{51} + \frac{x+52}{48}$$

$$b) (2x+3)(x+2)^2(2x+5) = 3$$

Lời giải

$$a) pt \Leftrightarrow \frac{x+43}{57} + 1 + \frac{x+46}{54} + 1 = \frac{x+49}{51} + 1 + \frac{x+52}{48} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+100}{57} + \frac{x+100}{54} - \frac{x+100}{51} - \frac{x+100}{48} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+100) \left(\frac{1}{57} + \frac{1}{54} - \frac{1}{51} - \frac{1}{48} \right) = 0 \Leftrightarrow x = -100$$

$$b) (2x+3)(x+2)^2(2x+5) = 3$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)(2x+5)(x+2)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 + 16x + 15)(x^2 + 4x + 4) = 3(2)$$

$$\text{Đặt } y = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 4y - 1$$

$$\text{Khi đó } (2) \Leftrightarrow y(4y-1) - 3 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(4y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 4y+3=0 \end{cases}$$

$$y=1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$4y+3 \Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 + 3 = 0 (VN)$$

$$\text{Vậy } S = \{-1; -3\}$$

Bài 75.

- a) Lúc 7 giờ sáng một xe buýt đi từ vị trí A đến vị trí B với độ dài là 60 km. Khi đi tới vị trí C cách vị trí A 39km thì xe bị hỏng. Xe phải dừng lại và sửa chữa mất 15 phút, sau đó xe tiếp tục đi từ C đến B với vận tốc giảm hơn so với vận tốc đi từ A tới C là 3 km/h . Tổng thời gian xe đi từ A đến B hết $\frac{11}{6}$ giờ (tính cả thời gian dừng lại sửa xe). Hỏi xe buýt bị hỏng lúc mấy giờ ?

- b) Giải phương trình

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x+4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x+2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x+3}$$

Lời giải

- a) Gọi vận tốc của xe buýt khi đi từ A đến C là $x (km/h; x > 3)$ thì vận tốc của xe buýt khi đi từ C đến B là $(x-3)(km/h)$

Thời gian để xe buýt đi hết quãng đường AC là $\frac{39}{x}(h)$, thời gian để xe buýt đi hết quãng đường

CB là $\frac{21}{x-3}(h)$. Thời gian dừng lại sửa xe là 15 phút $= \frac{1}{4}(h)$

Theo bài ta có phương trình: $\frac{39}{x} + \frac{21}{x-3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{6}$

Giải ra được
$$\begin{cases} x = 39(tm) \\ x = \frac{36}{19}(ktm) \end{cases}$$

Vậy khi đi từ A tới C xe buýt đi với vận tốc $39km/h$, suy ra thời gian để xe buýt đi hết quãng đường AC là: $39:39 = 1$ (giờ)

Do đó đúng 8 giờ sáng thì xe buýt bị hỏng.

- b) Giải phương trình

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x+4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x+2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x+3} \quad (x \neq -1; -2; -3; -4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 + 1}{x+1} + \frac{(x+4)^2 + 4}{x+4} = \frac{(x+2)^2 + 2}{x+2} + \frac{(x+3)^2 + 3}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow x+1 + \frac{1}{x+1} + x+4 + \frac{4}{x+4} = x+2 + \frac{2}{x+2} + x+3 + \frac{3}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+4} = \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4+4x+4}{x^2+5x+4} = \frac{2x+6+3x+6}{x^2+5x+6}$$

$$\Rightarrow (5x+8)(x^2+5x+6) = (5x+12)(x^2+5x+4)$$

$$\Leftrightarrow 5x^3 + 33x^2 + 70x + 48 = 5x^3 + 37x^2 + 80x + 48$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(tm) \\ x = -\frac{5}{2}(tm) \end{cases}$$

Bài 76. Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Lời giải

$$x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x + 5)(x + 6) = 0 (*)$$

$$\forall x \quad x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow (x - 5)(x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -6 \end{cases}$$

Bài 77.

Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

Khi đó ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2.(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm duy nhất } x = \frac{-2011}{11}$$

Bài 78.

Giải các phương trình sau:

$$1) \quad x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$$

$$2) \quad \frac{9x}{2x^2 + x + 3} - \frac{x}{2x^2 - x + 3} = 8$$

Lời giải

1.

* Với $x \geq 1$ (*) ta có phương trình

$$x^2 - 3x + 2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (Thỏa *)}$$

* Với $x < 1$ (**) ta có phương trình

$$x^2 - 3x + 2 + 1 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$+ x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (không thỏa mãn điều kiện **)}$$

$$+ x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (không thỏa mãn điều kiện **)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$

2.

Xét $x = 0$ không phải là nghiệm

Xét $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{9x}{2x^2 + x + 3} - \frac{x}{2x^2 - x + 3} &= 8 \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2x + 1 + \frac{3}{x}} - \frac{1}{2x - 1 + \frac{3}{x}} &= 8 \end{aligned}$$

Đặt $2x + \frac{3}{x} = t$, ta có phương trình:

$$\frac{9}{t+1} - \frac{1}{t-1} = 8$$

$$PT \Leftrightarrow 8t^2 - 8t + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{3}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{95}{16} = 0$$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Bài 79: Giải phương trình : $\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x+7} = 1 - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}$

Lời giải

a) ĐK: $x \neq \frac{-1}{2}; x \neq \frac{-7}{2}$

$$\begin{aligned} & \frac{(2x+3)(2x+7)}{(2x+1)(2x+7)} - \frac{(2x+5)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{(2x+7)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+7)(2x+1)} \\ \Leftrightarrow & \frac{4x^2+20x+21-4x^2-12x-5}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{4x^2+16x+7-6x^2-9x+9}{(2x+7)(2x+1)} \\ \Leftrightarrow & \frac{8x+16}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{-2x^2+7x+16}{(2x+7)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 8x+16 = -2x^2+7x+16 \Leftrightarrow 2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (tm) \\ x=\frac{-1}{2} & (ktm) \end{cases}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x=0$

Bài 80:

Giải phương trình:

$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2005.2006.2007} \right) x = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2006.2007$$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2005.2006.2007} \right) x = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2006.2007$$

Nhân cả 2 vế với 6 ta được:

$$3. \left(\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{2005.2006.2007} \right) x = 2[1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + \dots + 2006.2007.(2008-2005)]$$

$$3. \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots - \frac{1}{2006.2007} \right) x$$

$$= 2.(1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + \dots + 2006.2007.2008 - 2005.2006.2007)$$

$$\Leftrightarrow 3. \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2006.2007} \right) x = 2.2006.2007.2008 \Leftrightarrow x = \frac{1003.1004.669}{5.100.651}$$

Bài 81: Giải các phương trình sau:

a) $(x-2008)^4 + (x-2010)^4 = 2$

b) $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$a) (x-2008)^4 + (x-2010)^4 = 2 \text{ (I)}$$

Đặt $y = x - 2009$ ta có:

$$(I) \Leftrightarrow (y+1)^4 + (y-1)^4 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2y^4 + 12y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2(y^2 + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x - 2009 = 0 \Leftrightarrow x = 2009$$

$$b) |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4 \text{ (II)}$$

+Nếu $x < 1$ ta có (II) $\Leftrightarrow -2x + 6 = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (ktm)

+Nếu $1 \leq x < 2$ ta có: (II) $\Leftrightarrow 0.x + 4 = 4$, Phương trình nghiệm đúng với $1 \leq x < 2$

+Nếu $2 \leq x < 3$ ta có: (II) $\Leftrightarrow -4x = -8 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

+Nếu $3 \leq x$ ta có: (II) $\Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình (II) là $x = 5$ hoặc $1 \leq x \leq 2$.

Bài 82. Tìm k để phương trình sau có nghiệm dương: $\frac{k(x+1)}{2x-1} = k+1$

Lời giải

Ta có phương trình tương đương:

$$k(x+1) = (k+1)(2x-1) \Leftrightarrow kx + k = 2xk - k + 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{k+2}$$

Vậy $x > 0$ thì k phải thỏa mãn 2 điều kiện sau:

$$*) k(x+1) = (k+1)(2x-1) \Leftrightarrow kx + k = 2xk - k + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{k+2} \text{ và } k+2 > 0 \text{ hoặc } 2k+1 < 0 \text{ và } k+2 < 0$$

$$*) k \neq 0 \text{ (vì } x \neq \frac{1}{2})$$

$$\text{Vậy } x > 0 \Leftrightarrow k < -2 \text{ hoặc } k > -\frac{1}{2} \text{ và } k \neq 0$$

Bài 83. Hướng ứng ngày chủ nhật xanh – sạch – đẹp. Học sinh khối 8 nhận làm vệ sinh một đoạn đường em chăm. Lớp 8/1 nhận 10 mét và 1/10 của phần còn lại, lớp 8/2 nhận 20 mét và 1/10 của phần còn lại, lớp 8/3 nhận 30 mét và 1/10 của phần còn lại ... cứ chia như vậy cho đến lớp cuối cùng thì vừa đủ và phần đường của mỗi lớp dài bằng nhau. Hỏi khối 8 có bao nhiêu lớp và đoạn đường mỗi lớp nhận dài bao nhiêu mét?

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Lời giải

Gọi $x(m)$ là chiều dài đoạn đường cả khối 8 là vệ sinh ($x > 0$)

Lớp 8/1 nhận đoạn đường dài : $10 + 0,1(x - 10) = 0,1x + 9$

Sau khi lớp 8 / 1 nhận, đoạn đường còn lại: $x - (0,1x + 9) = 0,9x - 9$

Lớp 8/2 nhận đoạn đường dài : $20 + 0,1.(0,9x - 9 - 20) = 0,09x + 17,1$

Ta có phương trình : $0,1x + 9 = 0,09x + 17,1$

Giải ra : $x = 810$ (thích hợp)

Khối 8 có 9 lớp

Bài 84. Nhân ngày 1/6 một phân đội thiếu niên được tặng một số kẹo. Số kẹo này được chia hết và chia đều cho mọi người trong phân đội. Để đảm bảo nguyên tắc ấy phân đội trưởng đề xuất cách nhận phần kẹo của mỗi người như sau:

Bạn thứ nhất 1 cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại. Sau khi bạn thứ nhất đã lấy phần mình,

bạn thứ hai nhận 2 cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại. Cứ tiếp tục như thế đến bạn cuối

cùng thứ n nhận n cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại.

Hỏi phân đội thiếu niên nói trên có bao nhiêu đội viên và mỗi đội viên nhận bao nhiêu kẹo.

Lời giải

Gọi số kẹo phân đội được tặng là x (cái) ; $x \in \mathbb{N}^*$

Số kẹo bạn thứ nhất nhận: $1 + \frac{1}{11}(x - 1) = \frac{x}{11} + \frac{10}{11}$ (cái)

Số kẹo còn lại sau khi bạn thứ nhất nhận $x - \left(\frac{x}{11} + \frac{10}{11}\right) = \frac{10x}{11} - \frac{10}{11}$ (cái)

Số kẹo bạn thứ hai nhận : $2 + \frac{1}{11} \cdot \left(\frac{10x}{11} - \frac{10}{11} - 2\right) = \frac{10x}{121} + \frac{210}{121}$ (cái)

Vì số kẹo của mỗi bạn bằng nhau nên ta có phương trình:

$$\frac{x}{11} + \frac{10}{11} = \frac{10x}{121} + \frac{210}{121} \Leftrightarrow \frac{11x}{121} - \frac{10x}{121} = \frac{210}{121} - \frac{110}{121} \Leftrightarrow x = 100$$

Số kẹo mỗi đội viên nhận là: $\frac{100}{11} + \frac{10}{11} = 10$

Số đội viên là : $100 : 10 = 10$ (bạn)

Bài 85. Giải các phương trình sau:

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$a) 2x^4 + x^3 - 22x^2 + 15x - 36 = 0$$

$$b) \frac{x-2}{2009} + \frac{x-42}{1969} + \frac{x-121}{1890} = 3$$

Lời giải

$$\begin{aligned} PT &\Leftrightarrow (x-3)(2x^3 + 7x^2 - x + 12) = 0 \\ a) &\Leftrightarrow (x-3)(x+4)(2x^2 - x + 3) = 0 \end{aligned}$$

Do $2x^2 - x + 3 > 0$ với mọi x nên phương trình có tập nghiệm $S = \{3; -4\}$

$$b) PT \Leftrightarrow \frac{x-2}{2009} - 1 + \frac{x-42}{1969} - 1 + \frac{x-121}{1890} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2011}{2009} + \frac{x-2011}{1969} + \frac{x-2011}{1890} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2011 = 0 \Leftrightarrow x = 2011$$

Bài 86

Giải phương trình: $\frac{x}{x^2 + 4x + 4} + \frac{5x}{x^2 + 4} = -2$

Lời giải

Điều kiện $x \neq -2$

Với $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình: $\frac{x}{x^2 + 4x + 4} + \frac{5x}{x^2 + 4} = -2$

Với $x \neq 0$ phương trình $\frac{x}{x^2 + 4x + 4} + \frac{5x}{x^2 + 4} = -2$ trở thành:

$$\frac{1}{x + \frac{4}{x} + 4} + \frac{5}{x + \frac{4}{x}} = -2 (*). \text{ Đặt } y = x + \frac{4}{x} + 2 \text{ phương trình } (*) \text{ trở thành:}$$

$$\frac{1}{y+2} + \frac{5}{y-2} = -2$$

Điều kiện: $y \neq \pm 2$

$$\text{Phương trình trở thành: } y^2 + 3y = 0 \Leftrightarrow y(y+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 0 \text{ thì } x + \frac{4}{x} + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + 3 = 0 \quad (VN)$$

Với

$y = -3$ thì

$$x + \frac{4}{x} + 2 = -3 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \{-1; -4\}$

Bài 87

a) Tìm x , biết: $4(x+1)^2 + (2x-1)^2 - 8(x-1)(x+1) = 11$

b) Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $x + y + z = 195$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} &4(x+1)^2 + (2x-1)^2 - 8(x-1)(x+1) = 11 \\ \Leftrightarrow &4(x^2 + 2x + 1) + (4x^2 - 4x + 1) - 8(x^2 - 1) = 11 \\ \Leftrightarrow &4x^2 + 8x + 4 + 4x^2 - 4x + 1 - 8x^2 + 8 = 11 \\ \Leftrightarrow &4x + 13 = 11 \\ \Leftrightarrow &4x = -2 \Leftrightarrow x = -0,5 \end{aligned}$$

b)

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{14}$$

Do đó: $\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{14}$ và $x + y + z = 195$

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{14} = \frac{x+y+z}{15+10+14} = \frac{195}{39} = 5$$

Vậy $x = 5.15 = 75; y = 5.10 = 50; z = 5.14 = 70$

Bài 88:

a) Giải phương trình: $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$

b) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: $x^2 + 2x - 10 = y^2$

Lời giải

a) Phân tích được $(x-1)(x^3 + x^2 + 2x + 8) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2-x+4)=0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } x^2-x+4>0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\text{b) Ta có: } x^2+2x-10=y^2 \Leftrightarrow (x+1)^2-y^2=11$$

$$\Leftrightarrow (x+1+y)(x+1-y)=11 \quad (2)$$

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $x+1+y > x+1-y > 0$

$$(2) \text{ viết thành: } (x+1+y)(x+1-y)=11.1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1+y=11 \\ x+1-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = (5; 5)$$

Bài 89: Giải phương trình sau: $\frac{x^2+3x+7}{x^2+5x-6} = \frac{3x+2}{x+15}$

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq -15; x \neq 1; x \neq -6$

$$\frac{x^2+3x+7}{x^2+5x-6} = \frac{3x+2}{x+15} = \frac{x^2+3x+7+3x+2}{x^2+5x-6+x+15} = \frac{x^2+6x+9}{x^2+6x+9} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)^2}$$

Thay $x = -3$ vào phương trình và kết luận nghiệm của phương trình

Với $x \neq -3$ ta có:

$$\frac{x^2+3x+7}{x^2+5x-6} = \frac{3x+2}{x+15} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)^2} = 1 \Leftrightarrow 3x+2 = x+15 \Leftrightarrow x = \frac{13}{2} \text{ (tm)}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{13}{2}; -3 \right\}$$

Bài 90:

$$1. \text{ Giải phương trình: } \frac{21}{x^2-4x+10} - x^2 + 4x - 6 = 0$$

2. Bạn Nam hỏi bạn Bắc: “Năm nay cha và mẹ của bạn bao nhiêu tuổi”. Bắc trả lời: “Cha tôi hơn mẹ tôi 4 tuổi. Trước đây tổng số tuổi của cha và mẹ tôi là 66 tuổi thì tổng số tuổi của hai anh em chúng tôi là 10. Hiện nay tổng số tuổi của cha và mẹ tôi gấp 3 lần tổng số tuổi của hai anh em chúng tôi”

Tính xem tuổi của cha và tuổi của mẹ bạn Bắc là bao nhiêu ?

Lời giải

1. Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$, đặt $t = x^2 - 4x + 8$

$$\frac{21}{x^2-4x+10} - x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{21}{t+2} - (t-2) = 0 \quad (t \neq -2)$$

$$\Leftrightarrow 21 - (t+2)(t-2) = 0 \Leftrightarrow 21 - (t^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = \pm 5$$

$$x^2 - 4x + 8 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ giải ra } x = 1; x = 3$$

$$x^2 - 4x + 8 = -5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 13 = 0 \text{ vô nghiệm vì } x^2 - 4x + 13 > 0$$

Vậy $x = 1; x = 3$

2. Gọi x là tuổi của mẹ bạn Bắc khi tổng số tuổi của cha và mẹ là 66 (x nguyên dương)

$$\text{Ta có: } x + x + 4 = 66 \Leftrightarrow 2x = 62 \Leftrightarrow x = 31$$

Gọi y là số tuổi thêm từ khi mẹ Bắc 31 tuổi đến nay (y nguyên dương)

Tổng số tuổi hiện nay của hai người là $66 + 2y$

Tổng số tuổi của hai người con hiện nay là $10 + 2y$

Ta có phương trình:

$$3(10 + 2y) = 66 + 2y \Leftrightarrow 30 + 6y = 66 + 2y \Leftrightarrow y = 9$$

Tuổi của mẹ Bắc hiện nay là $9 + 31 = 40$ tuổi

Tuổi của cha Bắc hiện nay là $9 + 35 = 44$ tuổi

Bài 91: Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } (2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 5) - 16 = 0$$

$$\text{b) } \frac{x+9}{10} + \frac{x+10}{9} = \frac{9}{x+10} + \frac{10}{x+9}$$

Lời giải

$$\text{a) } (2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 5) - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 1) - 4 = 0(*)$$

$$\text{Đặt } t = 2x^2 - 3x - 1$$

$$\Rightarrow Pt(*) \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 1 = -1 \\ 2x^2 - 3x - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x-3) = 0 \\ (x+1)(2x-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ -1; 0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right\}$$

$$\text{b) } \frac{x+9}{10} + \frac{x+10}{9} = \frac{9}{x+10} + \frac{10}{x+9} (*)$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

ĐKXĐ: $x \neq -9; x \neq -10$

$$(*) \Leftrightarrow x(x+19)(19x+181) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -19 \text{ (TMDK)} \\ x = \frac{-181}{19} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 0; -19; \frac{-181}{19} \right\}$$

Bài 92: Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

Khi đó ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2.(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm duy nhất } x = \frac{-2011}{11}$$

Bài 93:

$$1. \text{ Tìm } m \text{ để phương trình có nghiệm (với } m \text{ tham số)} \quad \frac{x-m}{x+3} + \frac{x-3}{x+m} = 2$$

$$2. \text{ Giải phương trình: } 2x(8x-1)^2.(4x-1) = 9$$

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \neq -3; x \neq -m$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x-m}{x+3} + \frac{x-3}{x+m} = 2 &\Rightarrow x^2 - m^2 + x^2 - 9 = 2(x+3)(x+m) \\ \Leftrightarrow 2x^2 - m^2 - 9 &= 2(x^2 + 3x + 3m + mx) \Leftrightarrow -2(m+3)x = (m+3)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Với $m = 3$ thì (1) có dạng $0x = 0$. Nghiệm đúng mọi x thỏa mãn điều kiện $x \neq -3$

$x \neq -m$, do đó tập nghiệm của phương trình là $x \neq \pm 3$

Với $m \neq -3$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = -\frac{(m+3)^2}{2(m+3)} = -\frac{m+3}{2}$

Để giá trị này là nghiệm của phương trình thì ta phải có:

$$-\frac{m+3}{2} \neq -3 \text{ và } -\frac{m+3}{2} \neq -m \text{ tức là } m \neq 3. \text{ Vậy nếu } m \neq \pm 3 \text{ thì } x = -\frac{m+3}{2} \text{ là nghiệm.}$$

Kết luận : với $m = -3$ thì $S = \{x / x \neq \pm 3\}$. Với $m \neq \pm 3$ thì $S = \left\{ -\frac{m+3}{2} \right\}$

$$2) \text{ Ta có: } 2x(8x-1)^2(4x-1) = 9$$

$$\Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(8x^2 - 2x) = 9 \Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(64x^2 - 16x) = 72 (*)$$

Đặt $64x^2 - 16x = t$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow t(t+1) - 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -9 \\ t = 8 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -9 \text{ ta có: } 64x^2 - 16x = -9 \Leftrightarrow 64x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow (8x-1)^2 + 8 = 0$$

(Vô nghiệm vì $(8x-1)^2 + 8 > 0$)

$$\text{Với } t = 8 \text{ ta có } 64x^2 - 16x = 8 \Leftrightarrow 64x^2 - 16x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Bài 94: Để tham gia ngày chạy Olympic vì sức khỏe toàn dân, trường A đã nhận được một số chiếc áo và chia đều cho các lớp. Biết rằng theo thứ tự, lớp thứ nhất nhận được 4 áo và $\frac{1}{9}$ số còn lại, rồi đến lớp thứ n ($n = 2; 3; 4; \dots$) nhận được $4n$ áo và $\frac{1}{9}$ số áo còn lại. Cứ như thế các lớp đã nhận hết số áo. Hỏi trường A đã nhận được bao nhiêu chiếc áo ?

Lời giải

Gọi số lớp của trường A được nhận áo là x

Vì lớp thứ x nhận áo cuối cùng và số áo được phát hết nên số áo lớp thứ x nhận được là $4x$.

$$\text{Lớp thứ } x-1 \text{ nhận số áo là } 4(x-1) + \frac{1}{8}.4x = 4,5x - 4$$

Vì số áo các lớp nhận được như nhau nên ta có phương trình:

$$4,5x - 4 = 4x \Leftrightarrow x = 8$$

Suy ra số áo mỗi lớp nhận được: $4.8 = 32$ (áo)

Suy ra số áo trường A nhận được: $32.8 = 256$ (áo)

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Bài 95: Giải phương trình sau: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2)=4$

Lời giải

+Nếu $x \geq 2$, phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{aligned}(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) &= 4 \\ \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) &= 4 \\ \Leftrightarrow x^4-5x^2 &= 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2-5) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0(\text{ktm}) \\ x=\sqrt{5}(\text{tm}) \\ x=-\sqrt{5}(\text{ktm}) \end{cases}\end{aligned}$$

+)Nếu $x < 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned}(2-x)(x-1)(x+1)(x+2) &= 4 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2) &= -4 \\ \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) &= -4 \\ \Leftrightarrow x^4-5x^2+8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x^2-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} &= 0 \text{ vô nghiệm}\end{aligned}$$

Phương trình có một nghiệm $x = \sqrt{5}$

Bài 96:

a) Giải phương trình sau: $x^2-3x+2+|x-1|=0$

b) Xác định giá trị của m để phương trình: $m^3(x-2)-8(x+m)=4m^2$ có nghiệm duy nhất là số không lớn hơn 1

Lời giải

a) $x^2-3x+2+|x-1|=0 \quad (1)$

+ Nếu $x \geq 1: (1) \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1(\text{TM})$

+Nếu $x < 1: (1) \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x^2-x-3(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1(\text{ktm}) \\ x=3(\text{ktm}) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

$$m^3(x-2) - 8(x+m) = 4m^2$$

$$\Leftrightarrow (m^3 - 8)x = 2m(m^2 + 2m + 4)$$

b) Ta có:

$$\Leftrightarrow (m-2)(m^2 + 2m + 4)x = 2m(m^2 + 2m + 4)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2m}{m-2} \text{ (Do } m^2 + 2m + 4 > 0)$$

Để nghiệm này không lớn hơn 1 thì $\frac{2m}{m-2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$ (TM)

Vậy $-2 \leq m \leq 2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất và nghiệm đó không lớn hơn 1

Bài 97: Tìm x , biết: $\frac{x+1}{1000} + \frac{x+2}{999} + \frac{x+3}{998} + \frac{x+4}{997} + \frac{x+5}{996} + \frac{x+6}{995} + 6 = 0$

Lời giải

$$\frac{x+1}{1000} + \frac{x+2}{999} + \frac{x+3}{998} + \frac{x+4}{997} + \frac{x+5}{996} + \frac{x+6}{995} + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{1000} + 1 + \frac{x+2}{999} + 1 + \frac{x+3}{998} + 1 + \frac{x+4}{997} + 1 + \frac{x+5}{996} + 1 + \frac{x+6}{995} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1001}{1000} + \frac{x+1001}{999} + \frac{x+1001}{998} + \frac{x+1001}{997} + \frac{x+1001}{996} + \frac{x+1001}{995} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1001) \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{999} + \frac{1}{998} + \frac{1}{997} + \frac{1}{996} + \frac{1}{995} \right) = 0 \Rightarrow x = -1001$$

Bài 98: Giải phương trình: $(6x+8)(6x+6)(6x+7)^2 = 72$

Lời giải

Đặt $6x+7 = t$. Ta có:

$$(t+1)(t-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow (t^2-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2 + 8 = 0 \text{ (VN)} \\ t^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Bài 99: Giải các phương trình sau:

a) $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$

b) $y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0$

$$\frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6}$$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned}
& x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0 \\
& \Leftrightarrow (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1=0 \\
& \Leftrightarrow (x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+1=0 \\
& \Leftrightarrow (x^2+2x+1)^2=0 \\
& \Leftrightarrow (x+1)^4=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$

b)

$$\begin{aligned}
& y^2 + 4^x + 2y - 2^{x+1} + 2 = 0 \\
& \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 + (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow (y+1)^2 + (2^x - 1)^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ 2^x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; -1)$

c)

$$\frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6} \quad (1)$$

ĐKXD: $x \neq -2; x \neq -4; x \neq -6; x \neq -8$

$$\begin{aligned}
(1) & \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2+2}{x+2} + \frac{(x+8)^2+8}{x+8} = \frac{(x+4)^2+4}{x+4} + \frac{(x+6)^2+6}{x+6} \\
& \Leftrightarrow x+2 + \frac{2}{x+2} + x+8 + \frac{8}{x+8} = x+4 + \frac{4}{x+4} + x+6 + \frac{6}{x+6} \\
& \Leftrightarrow \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x+4} = \frac{6}{x+6} - \frac{8}{x+8} \\
& \Leftrightarrow \frac{2x+8-4x-8}{(x+2)(x+4)} = \frac{6x+48-8x-48}{(x+6)(x+8)} \\
& \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x+2)(x+4)} = \frac{-2x}{(x+6)(x+8)} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x+2)(x+4)=(x+6)(x+8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 8x=-40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases} \text{ (tm)}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 0; x = -5$

Bài 100: Giải phương trình: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8) = -16$

Lời giải

Ta có: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8) = -16 \Leftrightarrow (3x-2)(3x+3)^2(3x+8) = -144$

Đặt $3x+3 = t \Rightarrow 3x-2 = t-5; 3x+8 = t+5$

Ta có phương trình: $(t-5)t^2(t+5) = -144$

$$\Leftrightarrow t^4 - 25t^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 9)(t^2 - 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 9 \\ t^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm 3 \\ t = \pm 5 \end{cases}$$

Xét các trường hợp ta tìm được $x = 0; x = -2; x = \frac{2}{3}; x = -\frac{8}{3}$

Bài 101: Giải phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

Lời giải

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$$

Đặt $x^2 - x + 1 = X$ có

$$X^2 + X - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 4X - 3X - 12 = 0 \Leftrightarrow X(X+4) - 3(X+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X-3)(X+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = -4 \end{cases}$$

$$X = -4 \Rightarrow x^2 - x + 5 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} = 0 \text{ (VN)}$$

$$X = 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 102: Một vật **thể** chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được 4m thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp 8m dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp 12m dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc 2m / giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

Lời giải

Gọi x là số lần đi ($x \in \mathbb{N}, x > 0$), số lần dừng là $x-1$

$$\text{Thời gian đi: } \frac{4}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} + \dots + \frac{4x}{2} = 2 + 4 + 6 + \dots + 2x = 2(1 + 2 + 3 + \dots + x) = x(x+1)$$

$$\text{Thời gian dừng: } 1 + 2 + 3 + \dots + (x-1) = \frac{(x-1+1)(x-1)}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$$

Lập được phương trình: $\frac{x(x-1)}{2} + x(x+1) = 155 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 310 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (tm)} \\ x = -\frac{31}{3} \text{ (ktm)} \end{cases}$

Khoảng cách AB là $10 \cdot (10+1) \cdot 2 = 220(\text{m})$

Bài 103: Giải phương trình

a) $\frac{x+43}{57} + \frac{x+46}{54} = \frac{x+49}{51} + \frac{x+52}{48}$

b) $(2x+3)(x+2)^2(2x+5) = 3$

Lời giải

a) pt $\Leftrightarrow \frac{x+43}{57} + 1 + \frac{x+46}{54} + 1 = \frac{x+49}{51} + 1 + \frac{x+52}{48} + 1$

$\Leftrightarrow \frac{x+100}{57} + \frac{x+100}{54} - \frac{x+100}{51} - \frac{x+100}{48} = 0$

$\Leftrightarrow (x+100) \left(\frac{1}{57} + \frac{1}{54} - \frac{1}{51} - \frac{1}{48} \right) = 0 \Leftrightarrow x = -100$

b) $(2x+3)(x+2)^2(2x+5) = 3$

$\Leftrightarrow (2x+3)(2x+5)(x+2)^2 = 3$

$\Leftrightarrow (4x^2 + 16x + 15)(x^2 + 4x + 4) = 3(2)$

Đặt $y = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 4y - 1$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow y(4y-1) - 3 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(4y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 4y + 3 = 0 \end{cases}$

+) $y = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

+) $4y + 3 \Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 + 3 = 0 \text{ (VN)}$

Vậy $S = \{-1; -3\}$

Bài 104: Giải phương trình: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8) = -16$

Lời giải

Ta có: $(3x-2)(x+1)^2(3x+8) = -16 \Leftrightarrow (3x-2)(3x+3)^2(3x+8) = -144$

Đặt $3x+3 = t \Rightarrow 3x-2 = t-5; 3x+8 = t+5$

Ta có phương trình: $(t-5)t^2(t+5) = -144$

$\Leftrightarrow t^4 - 25t^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 9)(t^2 - 16) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = 9 \\ t^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm 3 \\ t = \pm 4 \end{cases}$

Xét các trường hợp ta tìm được $x = 0; x = -2; x = \frac{2}{3}; x = -\frac{8}{3}$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Bài 105: Giải phương trình: $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

Lời giải

Ta có: $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x-5) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+2=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \\ x=5 \end{cases}$$

Bài 106: Tìm m sao cho phương trình ẩn x : $(m-1)x + 3m - 2 = 0$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x \geq 1$

Lời giải

$m = 1$ phương trình đã cho trở thành $1=0$ (vô lý) nên phương trình vô nghiệm, loại

$m \neq 1$ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{-3m+2}{m-1}$

$$x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-3m+2}{m-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-4m+3}{m-1} \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq m \leq 1$$

Kết hợp điều kiện ta có $\frac{3}{4} \leq m < 1$ thì $(m-1)x + 3m - 2 = 0$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x \geq 1$

Bài 107: Giải phương trình $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 40$

Lời giải

ĐKXD: $x \neq -3$

$$x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 40 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 + \frac{6x^2}{x+3} = 40 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+3}\right) + \frac{6x^2}{x+3} - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+3} + 10\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x+3} - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x+3} = -10 \\ \frac{x^2}{x+3} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 10x + 30 = 0 \\ x^2 - 4x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)^2 = -5(VN) \\ (x-2)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6(tm) \\ x = -2(tm) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm phương trình $S = \{-2; 6\}$

Bài 108: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{101-x^2}{2015} - 1 = \frac{100-x^2}{2016} - \frac{x^2-99}{2017} \qquad b) (4x-7)^2 (2x-5)(x-1) = -1$$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

a)

$$\begin{aligned} \frac{101-x^2}{2015} - 1 &= \frac{100-x^2}{2016} - \frac{x^2-99}{2017} \\ \Leftrightarrow \frac{101-x^2}{2015} + 1 &= \frac{100-x^2}{2016} + 1 - \frac{x^2-99}{2017} + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2116-x^2}{2015} &= \frac{2116-x^2}{2016} + \frac{2116-x^2}{2017} \\ \Leftrightarrow (2116-x^2) \left(\frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2116-x^2 = 0 &\Leftrightarrow x = \pm 46 \end{aligned}$$

$$b) (4x-7)^2(2x-5)(x-1) = -1 \Leftrightarrow (16x^2-56x+49)(2x^2-7x+5) = -1$$

Đặt $2x^2-7x+5 = a$ thì $16x^2-56x+49 = 8a+9$

Ta có phương trình: $a(8a+9) = -1 \Leftrightarrow 8a^2+9a+1 = 0$

$$\Leftrightarrow (a+1)(8a+1) = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ hoặc } a = -\frac{1}{8}$$

$$+) 2x^2-7x+5 = -1 \Leftrightarrow 2x^2-7x+6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$+) 2x^2-7x+5 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow 16x^2-56x+41 = 0 \Leftrightarrow (4x-7)^2 = 8 \Leftrightarrow s = \frac{\pm\sqrt{8}+7}{4}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 2; \frac{3}{2}; \frac{\pm\sqrt{8}+7}{4} \right\}$$

Bài 109: Giải phương trình sau: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 2$

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} &= \frac{2}{x(x-2)} \\ \Leftrightarrow \frac{x(x+2)-(x-2)}{x(x-2)} &= \frac{2}{x(x-2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(x+2)-(x-2) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-x+2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2+x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ (loại) hoặc } x = -1 \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$

Bài 110: Giải phương trình sau: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$

Lời giải

+Nếu $x \geq 2$, phương trình đã cho trở thành :

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) = 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(ktm) \\ x = \sqrt{5}(tm) \\ x = -\sqrt{5}(ktm) \end{cases}$$

+) Nếu $x < 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$(2-x)(x-1)(x+1)(x+2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = -4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) = -4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \text{ vô nghiệm}$$

Phương trình có một nghiệm $x = \sqrt{5}$

Bài 111: Cho phương trình $\frac{2x-m}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = 3$. Tìm m nguyên để phương trình có nghiệm dương.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq \pm 2$

$$\frac{2x-m}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = 3$$

$$\Rightarrow (2x-m)(x+2) + (x-1)(x-2) = 3(x^2-4)$$

$$\Leftrightarrow x(1-m) = 2m-14 (*)$$

Nếu $m = 1$ thì phương trình (*) có dạng $0 = -12$ vô nghiệm.

Nếu $m \neq 1$ phương trình (*) trở thành $x = \frac{2m-14}{1-m}$

Khi đó phương trình đã cho có nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-14}{1-m} \neq 2 \\ \frac{2m-14}{1-m} \neq -2 \\ \frac{2m-14}{1-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ 1 < m < 7 \end{cases}$$

Mà m nguyên.

Vậy $m \in \{2; 3; 5; 6\}$ thì thỏa mãn đầu bài

Bài 112: Tìm x, y thỏa mãn đẳng thức: $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Lời giải

$$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 25y^2 + 40xy + 10y - 10x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x + 4y - 1)^2 + 9(y + 1)^2 = 0$$

Do $(5x + 4y - 1)^2 \geq 0$ và $9(y + 1)^2 \geq 0$ với mọi x, y

$$\text{Nên } (5x + 4y - 1)^2 = 9(y + 1)^2 = 0$$

Suy ra $x = 1; y = -1$

Bài 113: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

Lời giải

$$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5); \quad x^2 + 11x + 30 = (x + 6)(x + 5); \quad x^2 + 13x + 42 = (x + 6)(x + 7)$$

ĐKXĐ: $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x + 4)(x + 5)} + \frac{1}{(x + 5)(x + 6)} + \frac{1}{(x + 6)(x + 7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x + 4} - \frac{1}{x + 5} + \frac{1}{x + 5} - \frac{1}{x + 6} + \frac{1}{x + 6} - \frac{1}{x + 7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x + 4} - \frac{1}{x + 7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x + 7) - 18(x + 4) = (x + 7)(x + 4)$$

$$\Leftrightarrow (x + 13)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 114:

a) Giải phương trình: $\frac{x - 2015}{2010} + \frac{x + 2007}{2012} = \frac{x + 2006}{2011} + \frac{x - 2018}{2013}$

b) Tìm x và y thỏa mãn: $y^2 + 2(x^2 + 1) = 2y(x + 1)$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned}
& \frac{x-2015}{2010} + \frac{x+2007}{2012} = \frac{x+2006}{2011} + \frac{x-2018}{2013} \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{x-2015}{2010} + 1 \right) + \left(\frac{x+2007}{2012} - 1 \right) = \left(\frac{x+2006}{2011} - 1 \right) + \left(\frac{x-2018}{2013} + 1 \right) \\
& \Leftrightarrow \frac{x-5}{2010} + \frac{x-5}{2012} - \frac{x-5}{2011} - \frac{x-5}{2013} = 0 \\
& \Leftrightarrow (x-5) \left(\frac{1}{2010} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow x = 5 \left(\text{Do } \frac{1}{2010} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} \neq 0 \right)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
& y^2 + 2(x^2 + 1) = 2y(x+1) \Leftrightarrow y^2 - 2y(x+1) + 2(x^2 + 1) = 0 \\
& \Leftrightarrow [y^2 - 2y(x+1) + (x+1)^2] + (x^2 - 2x + 1) = 0 \\
& \Leftrightarrow (y - x - 1)^2 + (x - 1)^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} y - x - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Bài 115: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned}
a) & \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6 \\
b) & \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
a) & \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6 \\
& \Leftrightarrow \frac{x-214}{86} - 1 + \frac{x-132}{84} - 2 + \frac{x-54}{82} - 3 = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0 \\
& \Leftrightarrow (x-300) \left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow x = 300
\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x+6)(x+5)$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$$

ĐKXD: $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow & 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4) \\ \Leftrightarrow & (x+13)(x-2) = 0 \\ \text{Từ đó tìm được } & x = -13; x = 2 \end{aligned}$$

Bài 116: Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó.

Lời giải

Gọi tử số của phân số cần tìm là x thì mẫu số của phân số cần tìm là $x+11$. Phân số cần tìm là

$$\frac{x}{x+11} \quad (x \neq -11)$$

Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị ta được phân số: $\frac{x-7}{x+15} \quad (x \neq -15)$

Theo bài ta có phương trình: $\frac{x}{x+11} = \frac{x+15}{x-7} \Rightarrow x = -5$ (thỏa mãn)

Từ đó ta tìm được phân số $\frac{-5}{6}$

Bài 117: Tìm x, y, z thỏa mãn phương trình sau: $9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$ **Lời giải**

$$9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2 - 18x + 9) + (y^2 - 6y + 9) + 2(z^2 + 2z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(x-1)^2 + (y-3)^2 + 2(z+1)^2 = 0 (*)$$

$$\text{Do: } (x-1)^2 \geq 0; (y-3)^2 \geq 0; (z+1)^2 \geq 0$$

$$\text{Nên: } (*) \Leftrightarrow x = 1; y = 3; z = -1$$

$$\text{Vậy } (x, y, z) = (1; 3; -1)$$

Bài 118: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$ **Lời giải**

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x+6)(x+5)$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x + 6)(x + 7)$$

$$\text{TXĐ: } x \neq \{-4; -5; -6; -7\}$$

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\ \Rightarrow & 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4) \\ \Leftrightarrow & (x+13)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases} \\ S = & \{-13; 2\} \end{aligned}$$

Bài 119: Giải các phương trình sau:

a) $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$

b) $y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0$

c) $\frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6}$

Lời giải

d)

$$x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)(x^2+2x+2)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)^2 + 2(x^2+2x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^4 = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$

e)

$$y^2+4^x+2y-2^{x+1}+2=0$$

$$\Leftrightarrow y^2+2y+1+(2^x)^2-2.2^x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^2+(2^x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ 2^x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; -1)$

f)

$$\frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6} \quad (1)$$

ĐKXD: $x \neq -2; x \neq -4; x \neq -6; x \neq -8$

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2+2}{x+2} + \frac{(x+8)^2+8}{x+8} = \frac{(x+4)^2+4}{x+4} + \frac{(x+6)^2+6}{x+6} \\
 &\Leftrightarrow x+2 + \frac{2}{x+2} + x+8 + \frac{8}{x+8} = x+4 + \frac{4}{x+4} + x+6 + \frac{6}{x+6} \\
 &\Leftrightarrow \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x+4} = \frac{6}{x+6} - \frac{8}{x+8} \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x+8-4x-8}{(x+2)(x+4)} = \frac{6x+48-8x-48}{(x+6)(x+8)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{-2x}{(x+2)(x+4)} = \frac{-2x}{(x+6)(x+8)} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x+2)(x+4)=(x+6)(x+8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 8x=-40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases} (tm)
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x=0; x=-5$

Bài 120: Giải phương trình a) $-2|-3x+4|-2=0$ b) $\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$

Lời giải

$$a) -2|-3x+4|-2=0$$

$$\Leftrightarrow |-3x+4| = -1 \text{ (khẳng định sai vì } |-3x+4| \geq 0 \forall x)$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

$$\begin{aligned}
 b) \quad &\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1} \quad \text{ĐKXD: } x \neq 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^3-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4(x-1)}{x^3-1} \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1+2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4(x-1)}{x^3-1} \\
 &\Leftrightarrow 3x^2-3x=0 \\
 &\Leftrightarrow 3x(x-1)=0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (tm) \\ x=1 & (ktm) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \{0\}$$

Bài 121: Hai người làm chung một công việc trong 12 ngày thì xong. Năng suất làm việc trong một ngày của người thứ hai chỉ bằng $\frac{2}{3}$ người thứ nhất. Hỏi nếu làm riêng, mỗi người làm trong bao lâu sẽ xong công việc

Lời giải

Gọi x (ngày) là thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ($x > 0$).

Một ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

Một ngày người thứ hai làm được $\frac{2}{3x}$ (công việc)

Một ngày hai người làm chung được $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}$ (công việc)

Theo bài ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x = 20$

Vậy người thứ nhất làm xong trong 20 ngày

Người thứ hai làm xong trong 30 ngày.

Bài 122: Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

Khi đó ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2.(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-2011}{11}$.

Bài 123: Tìm m để phương trình có nghiệm (với m tham số): $\frac{x-m}{x+3} + \frac{x-3}{x+m} = 2$

Lời giải

ĐKXD : $x \neq -3; x \neq -m$ ta có:

$$\frac{x-m}{x+3} + \frac{x-3}{x+m} = 2 \Leftrightarrow x^2 - m^2 + x^2 - 9 = 2(x+3)(x+m)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - m^2 - 9 = 2(x^2 + 3x + 3m + mx) \Leftrightarrow -2(m+3)x = (m+3)^2 \quad (1)$$

Với $m = 3$ thì (1) có dạng $0x = 0$. Nghiệm đúng với mọi x thỏa mãn điều kiện $x \neq -3; x \neq -m$, do đó tập nghiệm của phương trình là $x \neq \pm 3$.

Với $m \neq -3$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = -\frac{(m+3)^2}{2(m+3)} = -\frac{m+3}{2}$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Để giá trị này là nghiệm của phương trình thì ta phải có:

$$-\frac{m+3}{2} \neq -3 \text{ và } -\frac{m+3}{2} \neq -m \text{ tức là } m \neq 3.$$

Vậy nếu $m \neq \pm 3$ thì $x = -\frac{m+3}{2}$ là nghiệm

Kết luận :

+ Với $m = -3$ thì $S = \{x/x \neq \pm 3\}$

+ Với $m \neq \pm 3$ thì $S = \left\{-\frac{m+3}{2}\right\}$

Bài 124: Giải phương trình: $2x(8x - 1)^2(4x - 1) = 9$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2x(8x - 1)^2(4x - 1) = 9 \Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(8x^2 - 2x) = 9$$

$$\Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(64x^2 - 16x) = 72 (*)$$

Đặt : $64x^2 - 16x = t$ ta có :

$$(*) \Leftrightarrow t(t + 1) - 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -9 \\ t = 8 \end{cases}$$

$$\text{- Với } t = -9 \text{ ta có: } 64x^2 - 16x = -9 \Leftrightarrow 64x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow (8x - 1)^2 + 8 = 0$$

Vô nghiệm vì $(8x - 1)^2 + 8 > 0$

$$\text{- Với } t = 8 \text{ ta có } 64x^2 - 16x = 8 \Leftrightarrow 64x^2 - 16x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Bài 125: Giải phương trình sau: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$

Lời giải

+ Nếu $x \geq 2$ phương trình đã cho trở thành :

$$(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = \sqrt{5} \text{ (tm)} \\ x = -\sqrt{5} \text{ (loại)} \end{cases}$$

+) Nếu $x < 2$ phương trình đã cho trở thành:

$$(2 - x)(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 4 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2) = -4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = -4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \text{ (Vô nghiệm)}$$

Bài 126: Phương trình có một nghiệm $x = \sqrt{5}$

a) Giải phương trình sau: $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

b) Xác định giá trị của m để phương trình: $m^3(x - 2) - 8(x + m) = 4m^2$ có nghiệm duy nhất là số không lớn hơn 1

Lời giải

$$a) x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0 \quad (1)$$

$$+ \text{ Nếu } x \geq 1: (1) \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+ \text{ Nếu } x < 1: (1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

$$b) \text{Ta có: } m^3(x - 2) - 8(x + m) = 4m^2$$

$$\Leftrightarrow (m^3 - 8)x = 2m(m^2 + 2m + 4)$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)(m^2 + 2m + 4)x = 2m(m^2 + 2m + 4)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2m}{m-2} \text{ (Do } m^2 + 2m + 4 > 0)$$

$$\text{Để nghiệm này không lớn hơn 1 thì } \frac{2m}{m-2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$$

Vậy $-2 \leq m \leq 2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất và nghiệm đó không lớn hơn 1.

Bài 127: Tìm x biết: $\frac{x+1}{1000} + \frac{x+2}{999} + \frac{x+3}{998} + \frac{x+4}{997} + \frac{x+5}{996} + \frac{x+6}{995} + 6 = 0$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x+1}{1000} + \frac{x+2}{999} + \frac{x+3}{998} + \frac{x+4}{997} + \frac{x+5}{996} + \frac{x+6}{995} + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{1000} + 1 + \frac{x+2}{999} + 1 + \frac{x+3}{998} + 1 + \frac{x+4}{997} + 1 + \frac{x+5}{996} + 1 + \frac{x+6}{995} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1001}{1000} + \frac{x+1001}{999} + \frac{x+1001}{998} + \frac{x+1001}{997} + \frac{x+1001}{996} + \frac{x+1001}{995} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1001) \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{999} + \frac{1}{998} + \frac{1}{997} + \frac{1}{996} + \frac{1}{995} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1001$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1001$.

Bài 128: Giải phương trình $(6x + 8)(6x + 6)(6x + 7)^2 = 72$

Lời giải

$$(6x + 8)(6x + 6)(6x + 7)^2 = 72$$

Đặt $6x + 7 = t$. Ta có:

$$(t + 1)(t - 1)t^2 = 72 \Leftrightarrow (t^2 - 1)t^2 = 72 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2 + 8 = 0 \text{ (VN)} \\ t^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{3} \\ x = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{-2}{3}$ hoặc $x = \frac{-5}{3}$

Bài 129: Giải phương trình:

$$(2x^2 + x - 2016)^2 + 4(x^2 - 3x - 1000)^2 = 4(2x^2 + x - 2016)(x^2 - 3x - 1000)$$

Lời giải:

$$\text{Giải phương trình: } (2x^2 + x - 2016)^2 + 4(x^2 - 3x - 1000)^2 = 4(2x^2 + x - 2016)(x^2 - 3x - 1000)$$

$$\text{Ta có: } (2x^2 + x - 2016)^2 + 4(x^2 - 3x - 1000)^2 = 4(2x^2 + x - 2016)(x^2 - 3x - 1000)$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + x - 2016)^2 - 4(2x^2 + x - 2016)(x^2 - 3x - 1000) + 4(x^2 - 3x - 1000)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + x - 2016)^2 - 2(2x^2 + x - 2016)[2(x^2 - 3x - 1000)] + [2(x^2 - 3x - 1000)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(2x^2 + x - 2016) - 2(x^2 - 3x - 1000)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (7x - 16)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16}{7}.$$

Bài 130: Tìm x, y biết :

a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5 = 0$

b) $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 0$ và $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = 16$

c) $x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = 4$

Lời giải:

Tìm x, y biết :

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$a) x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ và } y=-2$$

$$b) (x+2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 0 \text{ và } (x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = 16$$

$$\text{Ta có: } (x+2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8y^3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{và } (x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = 16 \Leftrightarrow x^3 - 8y^3 = 16 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 2x^3 = 16 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Thay } x = 2 \text{ vào (1) suy ra } y = -1.$$

$$\text{Vậy, } x = 2 \text{ và } y = -1.$$

$$c) x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = 4 \quad (\text{ĐK: } x \neq 0, y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \text{ và } y - \frac{1}{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ và } y = \pm 1$$

$$\text{Vậy, } x=1, y=1 \text{ hoặc } x=1, y=-1 \text{ hoặc } x=-1, y=1 \text{ hoặc } x=-1, y=-1$$

Bài 131: Giải và biện luận nghiệm của phương trình $m^2x + 1 = x + m$ theo m .

Lời giải:

Giải và biện luận nghiệm của phương trình $m^2x + 1 = x + m$ theo m .

$$\text{Ta có: } m^2x + 1 = x + m \Leftrightarrow m^2x - x = m - 1 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = m - 1 \Leftrightarrow (m+1)(m-1)x = m-1 \quad (*)$$

$$+ \text{ Nếu } m=1 \text{ thì pt } (*) \text{ trở thành } 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$+ \text{ Nếu } m=-1 \text{ thì pt } (*) \text{ trở thành } 0x = -2 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$+ \text{ Nếu } m \neq \pm 1 \text{ thì pt } (*) \text{ có một nghiệm duy nhất } x = \frac{1}{m+1}$$

KL: + Nếu $m=1$ thì pt $(*)$ có vô số nghiệm.

+ Nếu $m=-1$ thì pt $(*)$ vô nghiệm.

$$+ \text{ Nếu } m \neq \pm 1 \text{ thì pt } (*) \text{ có một nghiệm duy nhất } x = \frac{1}{m+1}$$

Bài 132: Giải các phương trình:

$$a) (x+2)(x-2)(x^2-10) = 72$$

b) Giải phương trình: $3\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 25\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 20\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0$

Lời giải:

a) $(x+2)(x-2)(x^2-10) = 72$

$$\Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-10) = 72$$

$$\Leftrightarrow [(x^2-7)+3][(x^2-7)-3] = 72$$

$$\Leftrightarrow (x^2-7) = 9^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7=9 \\ x^2-7=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 4 \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 4$$

Vậy, $S = \{-4; 4\}$

b) Giải phương trình: $3\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 25\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 20\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0$

Điều kiện $x \neq \pm 1$. Dễ thấy hệ $\begin{cases} \frac{x+2}{x-1} = 0 \\ \frac{x-2}{x+1} = 0 \end{cases}$ vô nghiệm nên $x \neq \pm 2$.

Đặt $y = \frac{x+2}{x-1} : \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-1)}$. Chia 2 vế phương trình đã cho cho $\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$ ta được:

$$3y^2 - 20y + 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

*) Với $y = 5$, ta có: $\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

*) Với $y = \frac{5}{3}$, ta có:

$$\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x^2 - 12x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + \sqrt{34} \\ x = 6 - \sqrt{34} \end{cases}$$

Các nghiệm trên đều thỏa điều kiện. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$x = 4, x = \frac{1}{2}, x = 6 + \sqrt{34}, x = 6 - \sqrt{34}.$$

Bài 133: Giải phương trình:

a) $\frac{x^2+99x-1}{99} + \frac{x^2+99x-2}{98} + \frac{x^2+99x-3}{97} = \frac{x^2+99x-4}{96} + \frac{x^2+99x-5}{95} + \frac{x^2+99x-6}{94}$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$b) \frac{2-x}{2017} - 1 = \frac{1-x}{2018} - \frac{x}{2019}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} a) & \frac{x^2+99x-1}{99} + \frac{x^2+99x-2}{98} + \frac{x^2+99x-3}{97} = \frac{x^2+99x-4}{96} + \frac{x^2+99x-5}{95} + \frac{x^2+99x-6}{94} \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{x^2+99x-1}{99} - 1 \right) + \left(\frac{x^2+99x-2}{98} - 1 \right) + \left(\frac{x^2+99x-3}{97} - 1 \right) \\ & = \left(\frac{x^2+99x-4}{96} - 1 \right) + \left(\frac{x^2+99x-5}{95} - 1 \right) + \left(\frac{x^2+99x-6}{94} - 1 \right) \\ & \Leftrightarrow \frac{x^2+99x-100}{99} + \frac{x^2+99x-100}{98} + \frac{x^2+99x-100}{97} = \frac{x^2+99x-100}{96} + \frac{x^2+99x-100}{95} + \frac{x^2+99x-100}{94} \\ & \Leftrightarrow (x^2+99x-100) \left(\frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} - \frac{1}{96} - \frac{1}{95} + \frac{1}{94} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow x^2+99x-100=0 \quad (\forall i \quad \frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} - \frac{1}{96} - \frac{1}{95} + \frac{1}{94} \neq 0) \\ & \Leftrightarrow (x-1)(x+100)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-100 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{Ta có: } \frac{2-x}{2017} - 1 &= \frac{1-x}{2018} - \frac{x}{2019} \Leftrightarrow \left(\frac{2-x}{2017} + 1 \right) = \left(\frac{1-x}{2018} + 1 \right) + \left(1 - \frac{x}{2019} \right) \\ & \Leftrightarrow \frac{2019-x}{2017} = \frac{2019-x}{2018} + \frac{2019-x}{2019} \Leftrightarrow (2019-x) \left(\frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow 2019-x=0 \quad (\forall i \quad \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \neq 0) \\ & \Leftrightarrow x=2019 \end{aligned}$$

Bài 134: Giải các phương trình sau:

$$a) x - a^2x - \frac{b^2}{b^2-x^2} + a = \frac{x^2}{x^2-b^2} \quad (\text{Phương trình ẩn } x)$$

$$b) \frac{1}{(x+2000)(x+2001)} + \frac{1}{(x+2001)(x+2002)} + \dots + \frac{1}{(x+2009)(x+2010)} = \frac{10}{11}$$

$$c) \frac{(2009-x)^2 + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

Lời giải:

Giải các phương trình sau:

$$a) x - a^2x - \frac{b^2}{b^2-x^2} + a = \frac{x^2}{x^2-b^2} \quad (\text{Phương trình ẩn } x) \quad (\text{ĐK: } x \neq \pm b)$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow (1-a^2)x = \frac{x^2}{x^2-b^2} - \frac{b^2}{x^2-b^2} - a$$

$$\Leftrightarrow (1-a^2)x = \frac{(x^2-b^2)(1-a)}{x^2-b^2}$$

$$\Rightarrow (1-a^2)x = 1-a \quad (\text{Vì } x^2-b^2 \neq 0)$$

+ Nếu $a=1$, phương trình có vô số nghiệm $x \in R, x \neq \pm b$.

+ Nếu $a=-1$, phương trình vô nghiệm, $S = \emptyset$.

+ Nếu $a \neq \pm 1$, phương trình có nghiệm duy nhất, $S = \left\{ \frac{1}{1+a} \right\}$.

$$\text{b) } \frac{1}{(x+2000)(x+2001)} + \frac{1}{(x+2001)(x+2002)} + \dots + \frac{1}{(x+2009)(x+2010)} = \frac{10}{11}$$

ĐKXĐ: $x \notin \{-2000; -2001; \dots; -2010\}$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{(x+2000)(x+2001)} + \frac{1}{(x+2001)(x+2002)} + \dots + \frac{1}{(x+2009)(x+2010)} = \frac{10}{11}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+2000} - \frac{1}{x+2001} + \frac{1}{x+2001} - \frac{1}{x+2002} + \dots + \frac{1}{x+2009} - \frac{1}{x+2010} = \frac{10}{11}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+2000} - \frac{1}{x+2010} = \frac{10}{11}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{(x+2000)(x+2010)} = \frac{10}{11}$$

$$\Rightarrow (x+2000)(x+2010) = 11$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 + 2011x + 1999x + 2011 \cdot 1999 = 0$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x+2011)(x+1999) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2011 \\ x = -1999 \end{cases} \quad (\text{Thỏa ĐKXĐ})$$

Vậy, $S = \{-2011; -1999\}$

$$\text{c) } \frac{(2009-x)^2 + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49} \quad (\text{ĐKXĐ: } x \neq 2009, x \neq 2010)$$

Đặt $a = x - 2010$ khi đó $a \neq 0$, ta có pt viết theo ẩn a là:

$$\frac{(a+1)^2 - (a+1)a + a^2}{(a+1)^2 + (a+1)a + a^2} = \frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a^2 + 3a + 1} = \frac{19}{49}$$

$$\Rightarrow 49a^2 + 49a + 49 = 57a^2 + 57a + 19$$

$$\Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 = 0 \Leftrightarrow (2a-1)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-3)(2a+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

+ Với $a = \frac{3}{2}$, ta có: $x - 2010 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4023}{2}$

+ Với $a = \frac{-5}{2}$, ta có: $x - 2010 = \frac{-5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4015}{2}$

Vậy, $S = \left\{ \frac{4015}{2}; \frac{4023}{2} \right\}$

Bài 135: Giải các phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} \right) \cdot x = \frac{2017}{1} + \frac{2016}{2} + \dots + \frac{2}{2016} + \frac{1}{2017}$;

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2017}{2019}$

c) $\frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$;

d) $\frac{(1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99) \cdot x}{323400} = 2018$

e) $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} = \frac{1}{8}$.

Lời giải:

Giải các phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} \right) \cdot x = \frac{2017}{1} + \frac{2016}{2} + \dots + \frac{2}{2016} + \frac{1}{2017}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} \right) \cdot x = \left(\frac{2016}{2} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{2}{2016} + 1 \right) + \left(\frac{1}{2017} + 1 \right) + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} \right) \cdot x = \frac{2018}{2} + \frac{2018}{3} + \dots + \frac{2018}{2017} + \frac{2018}{2018}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} \right) \cdot x = 2018 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = 2018$$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2017}{2019}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2017}{2019}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2017}{2019}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2017}{2019} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} - \frac{2017}{2 \cdot 2019} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2019} \Leftrightarrow x = 2018$$

$$c) \frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{59-x}{41} + 1 \right) + \left(\frac{57-x}{43} + 1 \right) + \left(\frac{55-x}{45} + 1 \right) + \left(\frac{53-x}{47} + 1 \right) + \left(\frac{51-x}{49} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-100) \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{45} + \frac{1}{47} + \frac{1}{49} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 100 \quad (?)$$

$$d) \frac{(1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99) \cdot x}{323400} = 2018$$

* Nhớ công thức: $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1).n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ (HS suy nghĩ c/m)

Ta có: $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99 = \frac{98.99 \cdot 100}{3} = 323400$

$$\frac{(1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99) \cdot x}{323400} = 2018$$

$$\Leftrightarrow \frac{323400}{323400} \cdot x = 2018 \Leftrightarrow x = 2018$$

e) ĐKXĐ: $x \notin \{-2; -3; -4; -5; -6\}$

$$\frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} + \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{4}{(x+2)(x+6)} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^2 + 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -10 \end{cases} \text{ (thỏa ĐKXĐ)}$$

Bài 136: Giải các phương trình sau:

a) $(x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$

b) $(x-6)^4 + (x-8)^4 = 16$

c) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$

Lời giải:

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$a) (x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$$

HD: Chú ý: $x+2$ là giá trị trung bình cộng của $x+1$ và $x+3$, ta đặt $x+2=y$.

Khi đó phương trình trở thành $(y+1)^3 - (y-1)^3 = 56$

$$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1 = 56$$

$$\Leftrightarrow 6y^2 + 2 = 56$$

$$\Leftrightarrow y = \pm 3$$

+ Với $y=3$ thì $x=1$

+ Với $y=-3$ thì $x=-5$

Vậy $S = \{1; -5\}$

$$b) (x-6)^4 + (x-8)^4 = 16$$

Đặt $x-7=y$, phương trình đã cho trở thành: $(y+1)^4 + (y-1)^4 = 16$

Rút gọn ta được: $2y^4 + 12y^2 + 2 = 16 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 7 = 0$

Đặt $y^2 = z \geq 0$, ta có: $z^2 + 6z - 7 = 0$

Giải phương trình trên $z=1$ (nhận) và $z=-7$ (loại)

Với $z=1$ thì $y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$

Khi đó, $x=8$ hoặc $x=6$

Vậy $S = \{6; 8\}$

* **Chú ý:** Khi giải pt bậc bốn dạng $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c (c \neq 0)$, ta thường đặt $y = x + \frac{a+b}{2}$

$$c) x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$$

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của pt đã cho. Chia hai vế của pt cho $x^2 \neq 0$, ta được :

$$x^2 + 3x + 4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, ta được $y^2 + 3y + 2 = 0$.

Giải pt trên $y=-1$ hoặc $y=-2$

+ Với $y=-1$, ta có: $x + \frac{1}{x} = -1$ nên $x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$ (vô nghiệm)

+ Với $y=-2$, ta có: $x + \frac{1}{x} = -2$ nên $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy, $S = \{-1\}$

Bài 137: Giải phương trình: $\frac{a+b-x}{c} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{c+a-x}{b} + \frac{4x}{a+b+c} = 1$

Lời giải:

a) Giải phương trình: $\frac{a+b-x}{c} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{c+a-x}{b} + \frac{4x}{a+b+c} = 1$

Ta có: $\frac{a+b-x}{c} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{c+a-x}{b} + \frac{4x}{a+b+c} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b-x}{c} + 1 + \frac{b+c-x}{a} + 1 + \frac{c+a-x}{b} + 1 + \frac{4x}{a+b+c} + 1 = 1 + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c-x}{c} + \frac{b+c+a-x}{a} + \frac{c+a+b-x}{b} + \frac{4x+(a+b+c)}{a+b+c} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c-x}{c} + \frac{b+c+a-x}{a} + \frac{c+a+b-x}{b} + \frac{4x+(a+b+c)}{a+b+c} - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c-x}{c} + \frac{a+b+c-x}{a} + \frac{a+b+c-x}{b} - \frac{4(a+b+c-x)}{a+b+c} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c-x) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{4}{a+b+c} \right) = 0 (*)$$

Xét $A = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{4}{a+b+c} \right)$:

Khi đó, $A.(a+b+c) = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{4}{a+b+c} \right)$ với $a+b+c > 0$ (gt)

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 4 \geq 9 - 4 = 5 > 0 \text{ (theo câu a)}$$

Suy ra $A > 0$.

Theo (*) suy ra $a+b+c-x=0 \Leftrightarrow x=a+b+c > 0$

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=a+b+c > 0$.

Bài 138: Giải phương trình: $x^2 + \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 = \frac{5}{4}$

Lời giải:

ĐKXĐ: $x \neq -1$, ta có: $x^2 + \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 = \frac{5}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{x}{x+1} \right)^2 + 2 \cdot \frac{x^2}{x+1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 + 2 \cdot \frac{x^2}{x+1} + 1 = \frac{5}{4} + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1} + 1\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} + 1 = \frac{3}{2} \\ \frac{x}{x+1} + 1 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x + 1 = 0 \\ 2x^2 + 5x + 5 = 0 \end{cases}$$

+ Xét phương trình: $2x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa ĐKXD)} \end{cases}$

+ Xét phương trình: $2x^2 + 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

Vậy, $S = \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$

Bài 139: Hai đội bóng bàn của hai trường A và B thi đấu giao hữu. Biết rằng mỗi đấu thủ của đội A phải lần lượt gặp các đối thủ của đội B một lần và số trận đấu gấp đôi tổng số đấu thủ của hai đội. Tính số đấu thủ của mỗi đội.

Lời giải:

Gọi a và b lần lượt là số đấu thủ ở đội trường A và trường B, với $a, b \in N^*$.

Theo đề bài, ta có: $ab = 2(a+b) \Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 4$

Nhận xét: Do $a, b \in N^* \Rightarrow a-2 \in Z; b-2 \in Z$

Lập bảng:

$a-2$	-4	-2	-1	1	2	4
$b-2$	-1	-2	-4	4	2	1
a	-2	0	1	3	4	6
b	1	0	-2	6	4	3

KL: $a = 4; b = 4$ hoặc $a = 3; b = 6$ hoặc $a = 6; b = 3$

Bài 140: Một đoàn học sinh tổ chức đi tham quan bằng ô tô. Nếu mỗi ô tô chở 22 học sinh thì còn thừa 1 học sinh. Nếu bớt đi 1 ô tô thì có thể phân phối đều các học sinh trên các ô tô còn lại. Biết mỗi ô tô chỉ chở không được quá 32 người, hỏi ban đầu có bao nhiêu ô tô và có tất cả bao nhiêu học sinh đi tham quan?

Lời giải

+ Gọi số ô tô lúc đầu là x (x nguyên và $x \geq 2$)

Số học sinh đi cắm trại là: $22x + 1$.

+ Theo giả thiết: Nếu số xe là $x-1$ thì số học sinh phân phối đều cho tất cả các xe, mỗi xe chở số học sinh là y (y là số nguyên và $0 < y \leq 30$).

+ Do đó ta có phương trình: $(x-1)y = 22x+1 \Leftrightarrow y = \frac{22x+1}{x-1} = 22 + \frac{23}{x-1}$

+ Vì x và y đều là số nguyên dương, nên $x-1$ phải là ước số của 23.

Mà 23 nguyên tố, nên: $x-1=1 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x-1=23 \Leftrightarrow x=24$

– Nếu $x=2$ thì $y=22+23=45 > 30$ (trái giả thiết)

– Nếu $x=24$ thì $y=22+1=23 < 30$ (thỏa điều kiện bài toán).

+ Vậy số ô tô là: 24 và tổng số học sinh đi cắm trại là: $22 \times 24 + 1 = 23 \times 23 = 529$ học sinh.

Bài 141: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$

Lời giải

Ta có:

$$x^2+9x+20=(x+4)(x+5)$$

$$x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$$

$$x^2+13x+42=(x+6)(x+7)$$

$$\text{TXĐ: } x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 & (tm) \\ x = 2 & (tm) \end{cases}$$

Bài 142: Giải phương trình:

$$a) \frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$$

$$b) \frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$c) ||x-2|+3|=5$$

Lời giải

a)

$$\frac{15x}{x^2+3x-4}-1=12\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{3x-3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)}-1=12\cdot\left[\frac{1}{x+4}+\frac{1}{3(x-1)}\right] \quad DK : x \neq -4; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 3.15x-3(x+4)(x-1)=3.12(x-1)+12(x+4)$$

.....

$$\Leftrightarrow 3x(x+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=0 \\ x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (TM) \\ x=-4 & (KTM) \end{cases}$$

$$S=\{0\}$$

b)

$$\frac{148-x}{25}+\frac{169-x}{23}+\frac{186-x}{21}+\frac{199-x}{19}=10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{148-x}{25}-1\right)+\left(\frac{169-x}{23}-2\right)+\left(\frac{186-x}{21}-3\right)+\left(\frac{199-x}{19}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (123-x)\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{23}+\frac{1}{21}+\frac{1}{19}\right)=0 \Leftrightarrow 123-x=0 \Leftrightarrow x=123$$

$$S=\{123\}$$

c) $|x-2|+3=5$

Ta có: $|x-2| \geq 0 \forall x \Rightarrow |x-2|+3 > 0$ nên $||x-2|+3|=|x-2|+3$

Phương trình được viết dưới dạng:

$$|x-2|+3=5 \Leftrightarrow |x-2|=5-3 \Leftrightarrow |x-2|=2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy $S=\{0;4\}$

Bài 143: Giải phương trình: $y^2-2y+3=\frac{6}{x^2+2x+4}$

Lời giải

$$y^2-2y+3=\frac{6}{x^2+2x+4} \Leftrightarrow (y^2-2y+3)(x^2+2x+4)=6$$

$$\Leftrightarrow [(y-1)^2+2] \cdot [(x+1)^2+3]=6$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot (y-1)^2 + 3(y-1)^2 + 2(x+1)^2 + 6 = 6$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot (y-1)^2 + 3(y-1)^2 + 2(x+1)^2 = 0$$

Vì $(x+1)^2 \geq 0; (y-1)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Bài 144: Giải các phương trình sau:

$$a) x^3 - x^2 - 12x = 0$$

$$b) \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

Lời giải

$$c) \quad x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$d) \quad \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-214}{86} - 1 \right) + \left(\frac{x-132}{84} - 2 \right) + \left(\frac{x-54}{82} - 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300) \left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) \Leftrightarrow x-300 = 0 \Leftrightarrow x = 300$$

Bài 145: Giải phương trình:

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

Lời giải

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 258$$

Bài 146: Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

Lời giải

$$x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x-5)(x+6) = 0 (*)$$

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x$$

$$\forall x \Rightarrow (*) \Leftrightarrow (x-5)(x+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-6 \end{cases}$$

Bài 147: Giải phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

Lời giải

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$$

Đặt $x^2 - x + 1 = X$ có

$$X^2 + X - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 4X - 3X - 12 = 0 \Leftrightarrow X(X + 4) - 3(X + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - 3)(X + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = -4 \end{cases}$$

$$X = -4 \Rightarrow x^2 - x + 5 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} = 0 \text{ (VN)}$$

$$X = 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 148: Tìm x biết: $\frac{(2009 - x^2) + (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2}{(2009 - x)^2 - (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2} = \frac{19}{49}$

Lời giải

$$\frac{(2009 - x^2) + (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2}{(2009 - x)^2 - (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2} = \frac{19}{49}$$

ĐKXĐ: $x \neq 2009; x \neq 2010$.

Đặt $a = x - 2010 (a \neq 0)$, ta có hệ thức:

$$\frac{(a + 1)^2 - (a + 1)a + a^2}{(a + 1)^2 + (a + 1)a + a^2} = \frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a} = \frac{19}{49}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2 + 49a + 49 = 57a^2 + 57a + 19$$

$$\Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a + 1)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (2a - 3)(2a + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \text{ (tm)} \\ a = -\frac{5}{2} \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4023}{2} \\ x = \frac{4015}{2} \end{cases} \text{ (TMDK)}$$

Bài 149: Tìm x , biết:

a) $x^2 - 2005x - 2006 = 0$

b) $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2005x - 2006 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 1 - 2005x - 2005 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) - 2005(x+1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x+1)(x-1-2005) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2006 \end{cases}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} &= \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003} \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2008} + 1\right) + \left(\frac{x+2}{2007} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{2006} + 1\right) &= \left(\frac{x+4}{2005} + 1\right) + \left(\frac{x+5}{2004} + 1\right) + \left(\frac{x+6}{2003} + 1\right) \\
 \Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} - \frac{x+2009}{2005} - \frac{x+2009}{2004} - \frac{x+2009}{2003} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x = -2009
 \end{aligned}$$

Bài 150: Giải phương trình : $|x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2|$ **Lời giải**

$$\begin{aligned}
 |x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 &= 2x - |x^2 - 3x + 2| \\
 \Leftrightarrow |(x-y+1)^2 + x - 2| + |(x-1)(x-2)| &= 2x - 4 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Do

$$\begin{aligned}
 |(x-y+1)^2 + x - 2| + |(x-1)(x-2)| &\geq 0 \quad (\forall x, y) \\
 \Rightarrow 2x - 4 \geq 0 &\Leftrightarrow 2(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2
 \end{aligned}$$

Với $x \geq 2$ thì $|(x-y+1)^2 + x - 2| = (x-y+1)^2 + x - 2$; $|(x-1)(x-2)| = x^2 - 3x + 2$

Khi đó từ phương trình (1)

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (x-y+1)^2 + x - 2 + (x-1) &= 2(x-2) \Leftrightarrow (x-y+1)^2 = (x-2)(2-x+1-1) = -(x-2)^2 \\
 \Leftrightarrow (x-y+1)^2 + (x-2)^2 &= 0 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ và } x-y+1=0 \Leftrightarrow x=2; y=3(tm)
 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $(x; y) = (2; 3)$

Bài 151: Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $4m$ thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp $8m$ dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp $12m$ dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc $2m$ / giây. Tính khoảng cách từ A đến B .

Lời giảiGọi x là số lần đi ($x \in \mathbb{N}, x > 0$), số lần dừng là $x-1$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Thời gian đi

$$\frac{4}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} + \dots + \frac{4x}{2} = 2 + 4 + 6 + \dots + 2x$$

$$= 2(1 + 2 + 3 + \dots + x) = x(x+1)$$

Thời gian dừng:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (x-1) = \frac{(x-1+1)(x-1)}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$$

Lập được phương trình

$$\frac{x(x-1)}{2} + x(x+1) = 155 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 310 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (tm)} \\ x = \frac{-31}{3} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Khoảng cách AB là $10 \cdot (10+1) \cdot 2 = 220(m)$

Bài 152: Lúc 7 giờ, một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau 36km, rồi ngay lập tức quay trở về A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc dòng nước chảy là 6km/h

Lời giải

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc ca nô xuôi dòng ($x > 12$)

Vận tốc ca nô khi nước lặng: $x - 6(km/h)$

Vận tốc ca nô khi ngược dòng: $x - 12(km/h)$

Thời gian cả đi và về của ca nô là 4,5 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{36}{x} + \frac{36}{x-12} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x-4)(x-24) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (ktm)} \\ x = 24 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là 24km/h

Bài 153: Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm 5km/h thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó.

Lời giải

Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(km)$ ($x > 0$)

Vận tốc dự định của người đi xe gắn máy là: $\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10}(km/h)$ $3h20' = 3\frac{1}{3}(h)$

Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên 5km/h là: $\frac{3x}{10} + 5(km/h)$

Theo đề bài ta có phương trình: $\left(\frac{3x}{10} + 5\right) \cdot 3 = x \Leftrightarrow x = 150(tm)$

Vậy khoảng cách giữa A và B là 150km

Vận tốc dự định là: $\frac{3 \cdot 150}{10} = 45(km/h)$

Bài 154: Giải phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$

Lời giải

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12$$

Đặt $x^2 - x + 1 = X$ có

$$X^2 + X - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 4X - 3X - 12 = 0 \Leftrightarrow X(X + 4) - 3(X + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X - 3)(X + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 \\ X = -4 \end{cases}$$

$$X = -4 \Rightarrow x^2 - x + 5 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} = 0 \text{ (VN)}$$

$$X = 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 155: Giải các phương trình và bất phương trình sau:

$$\text{a)} \quad 8 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2 - 4 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2$$

Lời giải

$$8 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2 - 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 \quad (2b)$$

Điều kiện $x \neq 0$, Khi đó:

$$(2b) \Leftrightarrow 8 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \right] = (x + 4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x + 4)^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 4)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$$

Vì $x \neq 0$ nên $S = \{-8\}$

Bài 156: Giải pt

$$(2x + 3)^3 + (3x - 5)^3 = (5x - 2)^3 - (5x - 2)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Lời giải

Trước hết chứng minh được rằng:

Nếu có 3 số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (2c)

Ta có:

$$(2x+3)^3 + (3x-5)^3 = (5x-2)^3 - (5x-2)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)^3 + (3x-5)^3 + (2-5x)^3 = (2-5x)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

Áp dụng đẳng thức (2c) và vì $(2x+3) + (3x-5) + (2-5x) = 0$ nên phương trình đã cho tương đương với :

$$3(2x+3)(3x-5)(2-5x) = (2-5x)(17x^2 + 2016x - 2063)$$

$$\Leftrightarrow (2-5x)[3(6x^2 - x - 15) - (17x^2 + 2016x - 2063)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-5x)(x^2 - 2019x + 2018) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-5x)(x-1)(x-2018) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ x = 1 \\ x = 2018 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{2}{5}; 1; 2018 \right\}$

Bài 157: Giải các phương trình sau:

$$1) x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0$$

$$2) \frac{9x}{2x^2 + x + 3} - \frac{x}{2x^2 - x + 3} = 8$$

Lời giải

1)

*Với $x \geq 1$ ta có phương trình: $x^2 - 3x + 2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1(tm)$

*Với $x < 1$ ta có phương trình: $x^2 - 3x + 2 + 1 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (ktm) \\ x = 3 & (tm) \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$

2) Xét $x = 0$ không phải là nghiệm

Xét $x \neq 0$

$$\frac{9x}{2x^2 + x + 3} - \frac{x}{2x^2 - x + 3} = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2x+1+\frac{3}{x}} - \frac{1}{2x-1+\frac{3}{x}} = 8$$

Đặt $2x + \frac{3}{x} = t$ ta có phương trình:

$$\frac{9}{t+1} - \frac{1}{t-1} = 8$$

ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$

$$PT \Rightarrow 8t^2 - 8t + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{3}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{95}{16} = 0 \Rightarrow PTVN$$

Bài 158: Giải phương trình : $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 = \frac{7(x^2-9)}{x^2-4}$

Lời giải

$$\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 = \frac{7(x^2-9)}{x^2-4}$$

ĐK: $x \neq \pm 2$

Đặt $\frac{x+3}{x-2} = u, \frac{x-3}{x+2} = v$, phương trình đã cho trở thành:

$$u^2 + 6v^2 = 7uv$$

$$\Leftrightarrow u^2 - uv + 6v^2 - 6uv = 0$$

$$\Leftrightarrow u(u-v) - 6v(u-v) = 0$$

$$\Leftrightarrow (u-v)(u-6v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 6v \end{cases}$$

Xét $u = v$ ta có: $\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-3}{x+2} \Rightarrow x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 \Leftrightarrow x = 0(tm)$

Xét $u = 6v$ ta có: $\frac{x+3}{x-2} = 6 \cdot \frac{x-3}{x+2}$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2x + 6 = 6x^2 - 18x - 12x + 36$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 35x + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{0; 1; 6\}$$

Bài 159: Giải phương trình : $|x+1| = |x(x+1)|$

Lời giải

$$|x+1| = |x(x+1)|$$

$$\Leftrightarrow |x(x+1)| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x| \cdot |x+1| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x+1| \cdot (|x| - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| = 0 \\ |x| - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ |x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bài 160: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

Lời giải

$$\text{ĐKXD: } x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bài 161:

a) Giải phương trình: $\frac{x^2 - 5x + 1}{2x + 1} + 2 = -\frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1}$

b) Giải phương trình: $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$a) \frac{x^2 - 5x + 1}{2x + 1} + 2 = -\frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1} \quad (\text{ĐKXĐ: } x \neq -1; x \neq -\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1} + 1 + \frac{x^2 - 5x + 1}{2x + 1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 - 3x + 2}{2x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2x + 1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)(3x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(3x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad (TMDK)$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 1; 2; -\frac{2}{3} \right\}$$

b)

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 1)(x^3 - 8) = 0$$

$$\text{Ta có: } \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = -1 \\ x^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$S = \{-1; 2\}$$

Bài 162: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x-1}{2013} + \frac{x-2}{2012} - \frac{x-3}{2011} = \frac{x-4}{2010}$$

$$b) (2x-5)^3 - (x-2)^3 = (x-3)^3$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{x-1}{2013} - 1 + \frac{x-2}{2012} - 1 = \frac{x-4}{2010} - 1 + \frac{x-3}{2011} - 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x-2014}{2013} + \frac{x-2014}{2012} = \frac{x-2014}{2010} + \frac{x-2014}{2011} \\
 \text{a)} \quad &\Leftrightarrow (x-2014) \left(\frac{1}{2013} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 2014
 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \text{Đặt } 2x-5=a; \quad x-2=b \Rightarrow a-b=x-3$$

Phương trình đã cho trở thành: $a^3 - b^3 = (a-b)^3$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3ab(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \\ b=0 \Rightarrow x=2 \\ a=b \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

Bài 163: Giải phương trình sau:

$$a.(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013).(x^2 - 5x - 2012)$$

$$\text{b)} \quad |x-1| + |x+3| = 4$$

Lời giải

$$\text{a)} \quad \text{Đặt: } \begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a-2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a-2b=0 \Leftrightarrow a=2b$$

Khi đó, ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

$$S = \left\{ \frac{-2011}{11} \right\}$$

$$\text{b)} \quad \text{Lập bảng xét dấu các nhị thức: } x-1 \text{ và } x+3$$

Xét $x < -3$ (1)

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 1 - x - 3 - x = 4 \Leftrightarrow x = -3 \text{ (không thỏa (1))}$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$\text{Xét } -3 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 1 - x + x + 3 = 4 \Leftrightarrow 0x = 0 \text{ (Thỏa mãn với mọi } x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 1$$

$$\text{Xét } x \geq 1 \quad (3)$$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow x - 1 + x + 3 = 4 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn (3))}$$

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm $-3 \leq x \leq 1$

Bài 164: Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

Lời giải

$$\text{: Đặt } \begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

Khi đó ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2.(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm duy nhất } x = \frac{-2011}{11}$$

Bài 165: Giải phương trình:

$$a) \frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$$

$$b) \frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$c) ||x-2|+3|=5$$

Lời giải

d)

$$\frac{15x}{x^2 + 3x - 4} - 1 = 12 \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)} - 1 = 12 \cdot \left[\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3(x-1)} \right] \quad DK : x \neq -4; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 3.15x - 3(x+4)(x-1) = 3.12(x-1) + 12(x+4)$$

.....

$$\Leftrightarrow 3x(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (TM)} \\ x = -4 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

$$S = \{0\}$$

e)

$$\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{148-x}{25} - 1\right) + \left(\frac{169-x}{23} - 2\right) + \left(\frac{186-x}{21} - 3\right) + \left(\frac{199-x}{19} - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (123-x) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19}\right) = 0 \Leftrightarrow 123-x = 0 \Leftrightarrow x = 123$$

$$S = \{123\}$$

f) $\|x-2\|+3=5$

Ta có: $|x-2| \geq 0 \forall x \Rightarrow |x-2|+3 > 0$ nên $\|x-2\|+3 = |x-2|+3$

Phương trình được viết dưới dạng:

$$|x-2|+3=5 \Leftrightarrow |x-2|=5-3 \Leftrightarrow |x-2|=2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 4\}$

Bài 166: Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - x^2 - 12x = 0$

b) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

Lời giải

e) $x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ x=-3 \end{cases}$

f) $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-214}{86} - 1 \right) + \left(\frac{x-132}{84} - 2 \right) + \left(\frac{x-54}{82} - 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300) \left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) \Leftrightarrow x-300 = 0 \Leftrightarrow x = 300$$

Bài 167: Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2013)^2 + 4.(x^2 - 5x - 2012)^2 = 4.(2x^2 + x - 2013)(x^2 - 5x - 2012)$$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 2x^2 + x - 2013 \\ b = x^2 - 5x - 2012 \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$$

Khi đó ta có:

$$2x^2 + x - 2013 = 2.(x^2 - 5x - 2012) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2013 = 2x^2 - 10x - 4024$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2011 \Leftrightarrow x = \frac{-2011}{11}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-2011}{11}$

Bài 168: Giải các phương trình sau:

a) $(2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 5) - 16 = 0$

b) $\frac{x+9}{10} + \frac{x+10}{9} = \frac{9}{x+10} + \frac{10}{x+9}$

Lời giải

b) $(2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 5) - 16 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 3x - 1)^2 - 3(2x^2 - 3x - 1) - 4 = 0(*)$$

Đặt $t = 2x^2 - 3x - 1$

$$\Rightarrow Pt(*) \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 1 = -1 \\ 2x^2 - 3x - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x - 3) = 0 \\ (x + 1)(2x - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ -1; 0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right\}$$

$$\text{b) } \frac{x+9}{10} + \frac{x+10}{9} = \frac{9}{x+10} + \frac{10}{x+9} (*)$$

$$\text{ĐKXĐ: } x \neq -9; x \neq -10$$

$$(*) \Leftrightarrow x(x+19)(19x+181) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -19 \text{ (TMDK)} \\ x = \frac{-181}{19} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ 0; -19; \frac{-181}{19} \right\}$$

Bài 169: Giải phương trình:

$$1) x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$$

$$2) 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2$$

Lời giải

$$1) x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0 \quad (1)$$

$$\text{Nếu } x \geq 1: (1) \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \geq 1)$$

$$x < 1: (1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x - 1) = 0$$

$$\text{Nếu } \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (ktm) \\ x = 3 & (ktm) \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = 1$

2)

$$8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2 \quad (2)$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
 (2) &\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right] = (x+4)^2 \\
 &\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+4)^2 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 16 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(ktm) \\ x = -8(tm) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -8$.

Bài 170: Giải phương trình: $(x+4)\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1,5\right) = (3-x)\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1,5\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 a) &(x+4)\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1,5\right) = (3-x)\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1,5\right) \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x-1)(x-1)(2x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ x = 1 \\ x = -1,5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Bài 171: Giải các phương trình sau :

$$\begin{aligned}
 a) &\frac{101-x^2}{2015} - 1 = \frac{100-x^2}{2016} - \frac{x^2-99}{2017} & b) &(4x-7)^2(2x-5)(x-1) = -1
 \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 a) &\frac{101-x^2}{2015} - 1 = \frac{100-x^2}{2016} - \frac{x^2-99}{2017} \\
 &\Leftrightarrow \frac{101-x^2}{2015} + 1 = \frac{100-x^2}{2016} + 1 - \frac{x^2-99}{2017} + 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2116-x^2}{2015} = \frac{2116-x^2}{2016} + \frac{2116-x^2}{2017} \\
 &\Leftrightarrow (2116-x^2)\left(\frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2116-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 46 \\
 b) &(4x-7)^2(2x-5)(x-1) = -1 \Leftrightarrow (16x^2-56x+49)(2x^2-7x+5) = 0
 \end{aligned}$$

Đặt $2x^2 - 7x + 5 = a$ thì $16x^2 - 56x + 49 = 8a + 9$

Ta có phương trình

$$\begin{aligned}
 a(8a+9) &= -1 \Leftrightarrow 8a^2 + 9a + 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (a+1)(8a+1) = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ hoặc } a = -\frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +) 2x^2 - 7x + 5 = -1 &\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \\
 +) 2x^2 - 7x + 5 = \frac{-1}{8} &\Leftrightarrow 16x^2 - 56x + 41 = 0 \Leftrightarrow (4x-7)^2 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{\pm\sqrt{8}+7}{4}
 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ 2; \frac{3}{2}; \frac{\pm\sqrt{8}+7}{4} \right\}$

Bài 172: Giải các phương trình sau

$$a) (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$$

$$b) \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

Lời giải

$$a) (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12 \quad \text{đặt } y = x^2 + x$$

$$\Rightarrow y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 6y - 2y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+6)(y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$

$x^2 + x = -6$ vô nghiệm vì $x^2 + x + 6 > 0$ với mọi x

$$x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy $S = \{-2; 1\}$

$$b) \frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2008} + 1 \right) + \left(\frac{x+2}{2007} + 1 \right) + \left(\frac{x+3}{2006} + 1 \right) = \left(\frac{x+4}{2005} + 1 \right) + \left(\frac{x+5}{2004} + 1 \right) + \left(\frac{x+6}{2003} + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} = \frac{x+2009}{2005} + \frac{x+2009}{2004} + \frac{x+2009}{2003}$$

$$\Leftrightarrow (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) = 0$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \neq 0 \Rightarrow x = -2009$$

Bài 173: Giải phương trình: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$

Lời giải

Điều kiện xác định $x \neq 0; x \neq 2$

$$\frac{x(x+2)-(x-2)}{x(x-2)} = \frac{2}{x(x-2)} \Leftrightarrow x^2 + 2x - x + 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 (\text{loại}) \text{ vs } x = -1$$

Vậy $S = \{-1\}$

Bài 174: Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$b) \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

Lời giải

$$a) \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-214}{86} - 1 + \frac{x-132}{84} - 2 + \frac{x-54}{82} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-300) \left(\frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 300$$

$$b) \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

Ta có: $x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$

$$x^2 + 11x + 30 = (x+6)(x+5) \quad ; \quad x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$$

ĐKXD: $x \neq -4$; $x \neq -5$; $x \neq -6$; $x \neq -7$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+4)(x+7)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 (t/m) \\ x = 2 (t/m) \end{cases}$$

$$S = \{-13; 2\}$$

Bài 175: Giải phương trình : $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

Lời giải

$$\text{Ta có : } x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-2; 3; 5\}$$

Bài 176: Tìm x, y thỏa mãn đẳng thức $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

Lời giải

$$a) 5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 25y^2 + 40xy + 10y - 10x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x + 4y - 1)^2 + 9(y + 1)^2 = 0$$

$$\text{Do } (5x + 4y - 1)^2 \geq 0 \text{ và } 9(y + 1)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$\text{Nên } (5x + 4y - 1)^2 = 9(y + 1)^2 = 0$$

$$\text{Suy ra } x = 1; y = -1$$

Bài 177: Tìm các giá trị x và y thỏa mãn: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$

Lời giải

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ và } y = 1$$

Bài 178: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x-1}{2013} + \frac{x-2}{2012} + \frac{x-3}{2011} + \dots + \frac{x-2012}{2} = 2012.$$

$$b) (x^2 - 4x)^2 + 2(x-2)^2 = 43.$$

Lời giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2013} - 1 + \frac{x-2}{2012} - 1 + \frac{x-3}{2011} - 1 + \dots + \frac{x-2012}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{x-2014}{2013} + \frac{x-2014}{2012} + \frac{x-2014}{2011} + \dots + \frac{x-2014}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2014) \left(\frac{1}{2013} + \frac{1}{2012} + \dots + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2014$$

Bài 179: Giải các phương trình và bất phương trình sau:

$$a) |x-3| + 7 = 2x.$$

b) $(1-5x)(x^2+2) \geq 0$.

Lời giải

a) Nếu $x-3 \geq 0$ hay $x \geq 3$ thì $|x-3| = x-3$.

Nếu $x-3 < 0$ hay $x < 3$ thì $|x-3| = 3-x$.

* TH1: Với $x \geq 3$, PT đã cho trở thành $x-3+7=2x \Leftrightarrow x=4$ (t/m).

* TH2: Với $x < 3$, PT đã cho trở thành $3-x+7=2x \Leftrightarrow x=\frac{10}{3}$ (loại).

Vậy PT đã cho có nghiệm $x=4$.

b) Vì $x^2+2 > 0$ với mọi x nên BPT đã cho tương đương với $1-5x \geq 0$

$1-5x \geq 0 \Leftrightarrow 5x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{5}$. Vậy nghiệm của BPT ban đầu là $x \leq \frac{1}{5}$.

Bài 180: Giải các phương trình sau:

a) $|x^2-2x-1|=14$.

b) $\frac{5x-150}{50} + \frac{5x-102}{49} + \frac{5x-56}{48} + \frac{5x-12}{47} + \frac{5x-660}{46} = 0$.

Lời giải

a) $|x^2-2x-1|=14 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-1=14 \\ x^2-2x-1=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-15=0 \\ x^2-2x+13=0 \end{cases}$

Pt $x^2-2x-15=0 \Leftrightarrow (x-5)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=5$ hoặc $x=-3$

CM Pt $x^2-2x+13=0$ vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-3; 5\}$

b) $\frac{5x-150}{50} + \frac{5x-102}{49} + \frac{5x-56}{48} + \frac{5x-12}{47} + \frac{5x-660}{46} = 0$

$\Leftrightarrow (\frac{5x-150}{50}-1) + (\frac{5x-102}{49}-2) + (\frac{5x-56}{48}-3) + (\frac{5x-12}{47}-4) + (\frac{5x-660}{46}+10) = 0$

$\Leftrightarrow (\frac{5x-200}{50}) + (\frac{5x-200}{49}) + (\frac{5x-200}{48}) + (\frac{5x-200}{47}) + (\frac{5x-200}{46}) = 0$

$\Leftrightarrow (5x-200)(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \frac{1}{47} + \frac{1}{46}) = 0$

$\Leftrightarrow (5x-200) = 0 \Leftrightarrow x=40$.

Vậy tập nghiệm của Pt đã cho là $S = \{40\}$

Bài 181: Giải các phương trình sau:

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$a) (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$$

$$b) \frac{x-5}{100} + \frac{x-4}{101} + \frac{x-3}{102} = \frac{x-100}{5} + \frac{x-101}{4} + \frac{x-102}{3}$$

Lời giải

$$a) \text{ Đặt } x^2 + x + 1 = y$$

$$\text{pt đã cho trở thành } y(y + 1) - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 3)(y + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 3 \text{ hoặc } y = -4$$

+ Với $y = 3$ ta được $x_1 = 1$; $x_2 = -2$

+ Với $y = -4$, vô nghiệm

KL: Vậy PT đã cho có nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = -2$

$$b) \frac{x-5}{100} + \frac{x-4}{101} + \frac{x-3}{102} = \frac{x-100}{5} + \frac{x-101}{4} + \frac{x-102}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-5}{100} - 1\right) + \left(\frac{x-4}{101} - 1\right) + \left(\frac{x-3}{102} - 1\right) = \left(\frac{x-100}{5} - 1\right) + \left(\frac{x-101}{4} - 1\right) + \left(\frac{x-102}{3} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow (x - 105) \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 105$$

KL: Vậy PT đã cho có nghiệm $x = 105$.

Bài 182: Giải các phương trình sau:

$$a, x^2 - 2 = (2x + 3)(x + 5) + 23$$

$$b, \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$

Lời giải

$$a) x^2 - 2 = (2x + 3)(x + 5) + 23$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25 = (2x + 3)(x + 5)$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) = (2x + 3)(x + 5)$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) - (2x + 3)(x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 5) [x - 5 - (2x + 3)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)(-x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ hoặc } x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \text{ hoặc } x = -8$$

b) Phương trình được biến đổi thành: (Với ĐKXD: $\{x \neq -4; -5; -6; -7\}$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} &= \frac{1}{18} \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}\right) + \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6}\right) + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7}\right) &= \frac{1}{18} \\ \Rightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} &= \frac{1}{18} \Rightarrow (x+4)(x+7) = 54 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -13 \text{ hoặc } x = 2 \text{ (Thỏa mãn ĐKXD)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $S = \{-13; 2\}$

Bài 183: Giải các phương trình sau:

a) $|x-2| + 3x - 9 = 0$

b) $(x^2 - 5x + 1)^2 - 2x^2 + 10x = 1$

Lời giải

a) $|x-2| + 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow |x-2| = 9 - 3x$

ĐK: $9 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=9-3x \\ x-2=3x-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=11 \\ -2x=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{11}{4} \\ x=\frac{7}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{11}{4}$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x^2 - 5x + 1)^2 - 2x^2 + 10x &= 1 \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 1)^2 - 2(x^2 - 5x + 1) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 1 - 1)^2 &= 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-5=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x_1 = 0; x_2 = 5$.

Bài 184: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{6}{x^2+2} + \frac{7}{x^2+3} + \frac{12}{x^2+8} - \frac{3x^2+16}{x^2+10} = 1$.

b) $2x(8x-1)^2(4x-1) = 9$.

Lời giải

a) PT $\Leftrightarrow \left(\frac{6}{x^2+2} - 1\right) + \left(\frac{7}{x^2+3} - 1\right) + \left(\frac{12}{x^2+8} - 1\right) + \left(2 - \frac{3x^2+16}{x^2+10}\right) = 0$

$$\frac{4-x^2}{x^2+2} + \frac{4-x^2}{x^2+3} + \frac{4-x^2}{x^2+8} + \frac{4-x^2}{x^2+10} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-x^2)\left(\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{x^2+10}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{x^2+10} > 0 \text{ với mọi giá trị của } x.$$

$$\text{Nên } (1) \Leftrightarrow 4-x^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-2; 2\}$.

$$\text{b) } 2x(8x-1)^2(4x-1) = 9 \Leftrightarrow (64x^2-16x+1)(8x^2-2x) = 9$$

$$\Leftrightarrow (64x^2-16x+1)(64x^2-16x) = 72$$

$$\text{Đặt } 64x^2-16x = t \text{ ta có } (*) \Leftrightarrow t(t+1) - 72 = 0 \Leftrightarrow t = -9 \text{ hoặc } t = 8.$$

$$\text{Với } t = -9 \text{ ta có } 64x^2-16x = -9 \Leftrightarrow 64x^2-16x+9 = 0 \Leftrightarrow (8x-1)^2 + 8 = 0$$

(vô nghiệm vì $(8x-1)^2 + 8 > 0$)

$$\text{Với } t = 8 \text{ ta có } 64x^2-16x = 8 \Leftrightarrow 64x^2-16x-8 = 0 \Leftrightarrow (8x-1)^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x-1=3 \\ 8x-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \left\{-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}$

Bài 185: Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

Lời giải

$$x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x-5)(x+6) = 0 \quad (*)$$

$$\text{Vì } x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-6 \end{cases}$$

Bài 186: Giải các phương trình sau:

$$\text{a.) } \frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x+7} = 1 - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}.$$

$$\text{b.) } \frac{x+11}{115} + \frac{x+22}{104} = \frac{x+33}{93} + \frac{x+44}{82}$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Lời giải

$$\text{a) ĐK: } x \neq \frac{-1}{2}; x \neq \frac{-7}{2}$$

$$\frac{(2x+3)(2x+7)}{(2x+1)(2x+7)} - \frac{(2x+5)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{(2x+7)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+7)(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+20x+21-4x^2-12x-5}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{4x^2+16x+7-6x^2-9x+9}{(2x+7)(2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x+16}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{-2x^2+7x+16}{(2x+7)(2x+1)}$$

$$\Rightarrow 8x+16 = -2x^2+7x+16 \Leftrightarrow 2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(2x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \text{ (Loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x=0$

$$\text{b) PT } \Leftrightarrow \left(\frac{x+11}{115}+1\right) + \left(\frac{x+22}{104}+1\right) = \left(\frac{x+33}{93}+1\right) + \left(\frac{x+44}{82}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+126}{115} + \frac{x+126}{104} = \frac{x+126}{93} + \frac{x+126}{82}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+126}{115} + \frac{x+126}{104} - \frac{x+126}{93} - \frac{x+126}{82} = 0$$

$$\Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow x+126=0$$

$$\Leftrightarrow x=-126$$

Bài 187: Giải phương trình:

$$(2x^2+x-2016)^2 + 4(x^2-3x-1000)^2 = 4(2x^2+x-2016)(x^2-3x-1000)$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (2x^2+x-2016)^2 + 4(x^2-3x-1000)^2 = 4(2x^2+x-2016)(x^2-3x-1000)$$

$$\Leftrightarrow (2x^2+x-2016)^2 - 4(2x^2+x-2016)(x^2-3x-1000) + 4(x^2-3x-1000)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2+x-2016)^2 - 2(2x^2+x-2016)[2(x^2-3x-1000)] + [2(x^2-3x-1000)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(2x^2+x-2016) - 2(x^2-3x-1000)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (7x-16)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16}{7}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{16}{7}$

Bài 188: Giải các phương trình:

a) $(x+2)(x-2)(x^2-10)=72$

b) Giải phương trình: $3\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 25\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 20\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0$

Lời giải

a) $(x+2)(x-2)(x^2-10)=72$

$$\Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-10)=72$$

$$\Leftrightarrow [(x^2-7)+3][(x^2-7)-3]=72$$

$$\Leftrightarrow (x^2-7)=9^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7=9 \\ x^2-7=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 4 \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm 4$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-4; 4\}$

b) Giải phương trình: $3\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 25\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 20\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0$

Điều kiện $x \neq \pm 1$. Dễ thấy hệ $\begin{cases} \frac{x+2}{x-1}=0 \\ \frac{x-2}{x+1}=0 \end{cases}$ vô nghiệm nên $x \neq \pm 2$.

Đặt $y = \frac{x+2}{x-1} : \frac{x-2}{x+1} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-1)}$. Chia 2 vế phương trình đã cho cho $\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$ ta được:

$$3y^2 - 20y + 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

*) Với $y = 5$, ta có: $\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

*) Với $y = \frac{5}{3}$, ta có:

$$\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x^2 - 12x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + \sqrt{34} \\ x = 6 - \sqrt{34} \end{cases}$$

Các nghiệm trên đều thỏa điều kiện. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$x = 4, x = \frac{1}{2}, x = 6 + \sqrt{34}, x = 6 - \sqrt{34}.$$

Bài 189: Giải phương trình:

$$a) \frac{x^2 + 99x - 1}{99} + \frac{x^2 + 99x - 2}{98} + \frac{x^2 + 99x - 3}{97} = \frac{x^2 + 99x - 4}{96} + \frac{x^2 + 99x - 5}{95} + \frac{x^2 + 99x - 6}{94}$$

$$b) \frac{2-x}{2017} - 1 = \frac{1-x}{2018} - \frac{x}{2019}$$

Lời giải

$$a) \frac{x^2 + 99x - 1}{99} + \frac{x^2 + 99x - 2}{98} + \frac{x^2 + 99x - 3}{97} = \frac{x^2 + 99x - 4}{96} + \frac{x^2 + 99x - 5}{95} + \frac{x^2 + 99x - 6}{94}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2 + 99x - 1}{99} - 1 \right) + \left(\frac{x^2 + 99x - 2}{98} - 1 \right) + \left(\frac{x^2 + 99x - 3}{97} - 1 \right)$$

$$= \left(\frac{x^2 + 99x - 4}{96} - 1 \right) + \left(\frac{x^2 + 99x - 5}{95} - 1 \right) + \left(\frac{x^2 + 99x - 6}{94} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 99x - 100}{99} + \frac{x^2 + 99x - 100}{98} + \frac{x^2 + 99x - 100}{97} = \frac{x^2 + 99x - 100}{96} + \frac{x^2 + 99x - 100}{95} + \frac{x^2 + 99x - 100}{94}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 99x - 100) \left(\frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} - \frac{1}{96} - \frac{1}{95} + \frac{1}{94} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 99x - 100 = 0 \quad (\text{Vì } \frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} - \frac{1}{96} - \frac{1}{95} + \frac{1}{94} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+100) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -100 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -100\}$

$$b) \text{Ta có: } \frac{2-x}{2017} - 1 = \frac{1-x}{2018} - \frac{x}{2019} \Leftrightarrow \left(\frac{2-x}{2017} + 1 \right) = \left(\frac{1-x}{2018} + 1 \right) + \left(1 - \frac{x}{2019} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2019-x}{2017} = \frac{2019-x}{2018} + \frac{2019-x}{2019} \Leftrightarrow (2019-x) \left(\frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2019-x = 0 \quad (\text{Vì } \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 2019$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2019\}$

Bài 190: Giải các phương trình sau:

$$a) x - a^2x - \frac{b^2}{b^2 - x^2} + a = \frac{x^2}{x^2 - b^2} \quad (\text{Phương trình ẩn } x)$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$\text{b) } \frac{1}{(x+2000)(x+2001)} + \frac{1}{(x+2001)(x+2002)} + \dots + \frac{1}{(x+2009)(x+2010)} = \frac{10}{11}$$

$$\text{c) } \frac{(2009-x)^2 + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49}$$

Lời giải

$$\text{a) } x - a^2x - \frac{b^2}{b^2 - x^2} + a = \frac{x^2}{x^2 - b^2} \quad (\text{Phương trình ẩn } x) \quad (\text{ĐK: } x \neq \pm b)$$

$$\Leftrightarrow (1 - a^2)x = \frac{x^2}{x^2 - b^2} - \frac{b^2}{x^2 - b^2} - a$$

$$\Leftrightarrow (1 - a^2)x = \frac{(x^2 - b^2)(1 - a)}{x^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow (1 - a^2)x = 1 - a \quad (\text{Vì } x^2 - b^2 \neq 0)$$

+ Nếu $a = 1$, phương trình có vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}, x \neq \pm b$.

+ Nếu $a = -1$, phương trình vô nghiệm, $S = \emptyset$.

+ Nếu $a \neq \pm 1$, phương trình có nghiệm duy nhất, $S = \left\{ \frac{1}{1+a} \right\}$.

$$\text{b) } \frac{1}{(x+2000)(x+2001)} + \frac{1}{(x+2001)(x+2002)} + \dots + \frac{1}{(x+2009)(x+2010)} = \frac{10}{11}$$

ĐKXD: $x \notin \{-2000; -2001; \dots; -2010\}$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{(x+2000)(x+2001)} + \frac{1}{(x+2001)(x+2002)} + \dots + \frac{1}{(x+2009)(x+2010)} = \frac{10}{11}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+2000} - \frac{1}{x+2001} + \frac{1}{x+2001} - \frac{1}{x+2002} + \dots + \frac{1}{x+2009} - \frac{1}{x+2010} = \frac{10}{11}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+2000} - \frac{1}{x+2010} = \frac{10}{11}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{(x+2000)(x+2010)} = \frac{10}{11}$$

$$\Rightarrow (x+2000)(x+2010) = 11$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 + 2011x + 1999x + 2011 \cdot 1999 = 0$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x+2011)(x+1999) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2011 \\ x = -1999 \end{cases} \quad (\text{Thỏa ĐKXD})$$

Vậy, $S = \{-2011; -1999\}$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$c) \frac{(2009-x)^2 + (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2}{(2009-x)^2 - (2009-x)(x-2010) + (x-2010)^2} = \frac{19}{49} \quad (\text{ĐKXĐ: } x \neq 2009, x \neq 2010)$$

Đặt $a = x - 2010$ khi đó $a \neq 0$, ta có pt viết theo ẩn a là:

$$\begin{aligned} \frac{(a+1)^2 - (a+1)a + a^2}{(a+1)^2 + (a+1)a + a^2} &= \frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a^2 + 3a + 1} = \frac{19}{49} \\ \Rightarrow 49a^2 + 49a + 49 &= 57a^2 + 57a + 19 \\ \Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 &= 0 \Leftrightarrow (2a-1)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-3)(2a+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = -\frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$+ \text{ Với } a = \frac{3}{2}, \text{ ta có: } x - 2010 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4023}{2}$$

$$+ \text{ Với } a = -\frac{5}{2}, \text{ ta có: } x - 2010 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4015}{2}$$

$$\text{Vậy, } S = \left\{ \frac{4015}{2}; \frac{4023}{2} \right\}$$

Bài 191: Giải các phương trình sau:

$$a) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} \right) \cdot x = \frac{2017}{1} + \frac{2016}{2} + \dots + \frac{2}{2016} + \frac{1}{2017};$$

$$b) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2017}{2019}$$

$$c) \frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5;$$

$$d) \frac{(1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99) \cdot x}{323400} = 2018$$

$$e) \frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} = \frac{1}{8}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} \right) \cdot x &= \frac{2017}{1} + \frac{2016}{2} + \dots + \frac{2}{2016} + \frac{1}{2017} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} \right) \cdot x &= \left(\frac{2016}{2} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{2}{2016} + 1 \right) + \left(\frac{1}{2017} + 1 \right) + 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} \right) \cdot x &= \frac{2018}{2} + \frac{2018}{3} + \dots + \frac{2018}{2017} + \frac{2018}{2018} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} \right) \cdot x = 2018 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = 2018$$

$$\text{b) } \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2017}{2019}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2017}{2019}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2017}{2019}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2017}{2019} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} - \frac{2017}{2 \cdot 2019} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2019} \Leftrightarrow x = 2018$$

$$\text{c) } \frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{59-x}{41} + 1 \right) + \left(\frac{57-x}{43} + 1 \right) + \left(\frac{55-x}{45} + 1 \right) + \left(\frac{53-x}{47} + 1 \right) + \left(\frac{51-x}{49} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-100) \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{45} + \frac{1}{47} + \frac{1}{49} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 100 \quad (?)$$

$$\text{d) } \frac{(1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99) \cdot x}{323400} = 2018$$

$$* \text{ Nhớ công thức: } 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1).n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \quad (\text{HS suy nghĩ c/m})$$

$$\text{Ta có: } 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99 = \frac{98.99 \cdot 100}{3} = 323400$$

$$\frac{(1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99) \cdot x}{323400} = 2018$$

$$\Leftrightarrow \frac{323400}{323400} \cdot x = 2018 \Leftrightarrow x = 2018$$

$$\text{e) ĐKXD: } x \notin \{-2; -3; -4; -5; -6\}$$

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{4}{(x+2)(x+6)} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^2 + 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-10 \end{cases} \text{ (thỏa ĐKXD)}$$

Bài 192: Giải phương trình: $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{5}{4}$

Lời giải

ĐKXD: $x \neq -1$, ta có: $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{5}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x^2}{x+1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x^2}{x+1} + 1 = \frac{5}{4} + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1} + 1\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} + 1 = \frac{3}{2} \\ \frac{x}{x+1} + 1 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x + 1 = 0 \\ 2x^2 + 5x + 5 = 0 \end{cases}$$

+ Xét phương trình: $2x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa ĐKXD)}$

+ Xét phương trình: $2x^2 + 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Vậy, $S = \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$

Bài 193: Giải phương trình sau: $\frac{x^2 + 3x + 7}{x^2 + 5x - 6} = \frac{3x + 2}{x + 15}$

Lời giải

ĐKXD: $x \neq -15; x \neq 1; x \neq -6$

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x^2 + 5x - 6} = \frac{3x + 2}{x + 15} = \frac{x^2 + 3x + 7 + 3x + 2}{x^2 + 5x - 6 + x + 15} = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 6x + 9} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)^2}$$

Thay $x = -3$ vào phương trình và kết luận nghiệm của phương trình

Với $x \neq -3$ ta có:

$$\frac{x^2 + 3x + 7}{x^2 + 5x - 6} = \frac{3x + 2}{x + 15} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)^2} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2 = x + 15 \Leftrightarrow x = \frac{13}{2} (tm)$$

Vậy $S = \left\{\frac{13}{2}; -3\right\}$

Lời giải

Bài 194: Giải phương trình: $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6 = 0$

Lời giải

Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$, đặt $t = x^2 - 4x + 8$

$$\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{21}{t + 2} - (t - 2) = 0 \quad (t \neq -2)$$

$$\Leftrightarrow 21 - (t + 2)(t - 2) = 0 \Leftrightarrow 21 - (t^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = \pm 5$$

$$x^2 - 4x + 8 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ giải ra } x = 1; x = 3$$

$$x^2 - 4x + 8 = -5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 13 = 0 \text{ vô nghiệm vì } x^2 - 4x + 13 > 0$$

Vậy $x = 1; x = 3$

Bài 195: Giải các phương trình sau:

a) $(x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$

b) $(x-6)^4 + (x-8)^4 = 16$

c) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$

Lời giải

a) $(x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$

HD: Chú ý: $x + 2$ là giá trị trung bình cộng của $x + 1$ và $x + 3$, ta đặt $x + 2 = y$.

Khi đó phương trình trở thành $(y+1)^3 - (y-1)^3 = 56$

$$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1 = 56$$

$$\Leftrightarrow 6y^2 + 2 = 56$$

$$\Leftrightarrow y = \pm 3$$

+ Với $y = 3$ thì $x = 1$

+ Với $y = -3$ thì $x = -5$

Vậy $S = \{1; -5\}$

b) $(x-6)^4 + (x-8)^4 = 16$

Đặt $x - 7 = y$, phương trình đã cho trở thành: $(y+1)^4 + (y-1)^4 = 16$

Rút gọn ta được: $2y^4 + 12y^2 + 2 = 16 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 7 = 0$

Đặt $y^2 = z \geq 0$, ta có: $z^2 + 6z - 7 = 0$

Giải phương trình trên $z = 1$ (nhận) và $z = -7$ (loại)

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Với $z=1$ thì $y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$

Khi đó, $x=8$ hoặc $x=6$

Vậy $S=\{6;8\}$

* **Chú ý:** Khi giải pt bậc bốn dạng $(x+a)^4+(x+b)^4=c (c \neq 0)$, ta thường đặt $y=x+\frac{a+b}{2}$

$$c) x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$$

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của pt đã cho. Chia hai vế của pt cho $x^2 \neq 0$, ta được :

$$x^2+3x+4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$

Đặt $x+\frac{1}{x}=y$ thì $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, ta được $y^2+3y+2=0$.

Giải pt trên $y=-1$ hoặc $y=-2$

+Với $y=-1$, ta có : $x+\frac{1}{x}=-1$ nên $x^2+x+1=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$ (vô nghiệm)

+Với $y=-2$, ta có : $x+\frac{1}{x}=-2$ nên $(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$

Vậy, $S=\{-1\}$

Bài 196: Tìm x, y biết :

$$a) x^2-2x+y^2+4y+5=0$$

$$b) x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}=4$$

Lời giải

$$a) x^2-2x+y^2+4y+5=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ và } y=-2$$

KL :.....

$$b) x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}=4 \text{ (ĐK: } x \neq 0, y \neq 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(y-\frac{1}{y}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=0 \text{ và } y-\frac{1}{y}=0$$

$$\Leftrightarrow x=\pm 1 \text{ và } y=\pm 1$$

Vậy, $x=1, y=1$ hoặc $x=1, y=-1$ hoặc $x=-1, y=1$ hoặc $x=-1, y=-1$.

Bài 197: Giải và biện luận nghiệm của phương trình $m^2x+1=x+m$ theo m .

Lời giải

Ta có: $m^2x+1=x+m \Leftrightarrow m^2x-x=m-1 \Leftrightarrow (m^2-1)x=m-1 \Leftrightarrow (m+1)(m-1)x=m-1 (*)$

+ Nếu $m=1$ thì pt (*) trở thành $0x=0 \Leftrightarrow x \in R$

+ Nếu $m=-1$ thì pt (*) trở thành $0x=-2 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

+ Nếu $m \neq \pm 1$ thì pt (*) có một nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{m+1}$

KL: + Nếu $m=1$ thì pt (*) có vô số nghiệm.

+ Nếu $m=-1$ thì pt (*) vô nghiệm.

+ Nếu $m \neq \pm 1$ thì pt (*) có một nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{m+1}$

Bài 198: Một đoàn học sinh tổ chức đi tham quan bằng ô tô. Nếu mỗi ô tô chở 22 học sinh thì còn thừa 1 học sinh. Nếu bớt đi 1 ô tô thì có thể phân phối đều các học sinh trên các ô tô còn lại. Biết mỗi ô tô chỉ chở không được quá 32 người, hỏi ban đầu có bao nhiêu ô tô và có tất cả bao nhiêu học sinh đi tham quan?

Lời giải

+ Gọi số ô tô lúc đầu là x (x nguyên và $x \geq 2$)

Số học sinh đi tham quan là: $22x+1$.

+ Theo giả thiết: Nếu số xe là $x-1$ thì số học sinh phân phối đều cho tất cả các xe, mỗi xe chở số học sinh là y (y là số nguyên và $0 < y \leq 30$).

+ Do đó ta có phương trình: $(x-1)y = 22x+1 \Leftrightarrow y = \frac{22x+1}{x-1} = 22 + \frac{23}{x-1}$

+ Vì x và y đều là số nguyên dương, nên $x-1$ phải là ước số của 23.

Mà 23 nguyên tố, nên: $x-1=1 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x-1=23 \Leftrightarrow x=24$

– Nếu $x=2$ thì $y = 22 + \frac{23}{1} = 45 > 32$ (trái giả thiết)

– Nếu $x=24$ thì $y = 22 + \frac{23}{23} = 23 < 32$ (thỏa điều kiện bài toán).

+ Vậy số ô tô là: 24 và tổng số học sinh đi tham quan là: $22 \times 24 + 1 = 23 \times 23 = 529$ học sinh.

Bài 199: Bạn Nam hỏi bạn Bắc: “Năm nay cha và mẹ của bạn bao nhiêu tuổi”. Bắc trả lời: “Cha tôi hơn mẹ tôi 4 tuổi. Trước đây tổng số tuổi của cha và mẹ tôi là 66 tuổi thì tổng số tuổi của hai anh em chúng tôi là 10. Hiện nay tổng số tuổi của cha và mẹ tôi gấp 3 lần tổng số tuổi của hai anh em chúng tôi”. Tính xem tuổi của cha và tuổi của mẹ bạn Bắc là bao nhiêu ?

Lời giải

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

Gọi x là tuổi của mẹ bạn Bắc khi tổng số tuổi của cha và mẹ là 66 (x nguyên dương)

Ta có: $x + x + 4 = 66 \Leftrightarrow 2x = 62 \Leftrightarrow x = 31$

Gọi y là số tuổi thêm từ khi mẹ Bắc 31 tuổi đến nay (y nguyên dương)

Tổng số tuổi hiện nay của hai người là $66 + 2y$

Tổng số tuổi của hai người con hiện nay là $10 + 2y$

Ta có phương trình:

$$3(10 + 2y) = 66 + 2y \Leftrightarrow 30 + 6y = 66 + 2y \Leftrightarrow y = 9$$

Tuổi của mẹ Bắc hiện nay là $9 + 31 = 40$ tuổi

Tuổi của cha Bắc hiện nay là $9 + 35 = 44$ tuổi

Bài 200: Hai đội bóng bàn của hai trường A và B thi đấu giao hữu. Biết rằng mỗi đấu thủ của đội A phải lần lượt gặp các đối thủ của đội B một lần và số trận đấu gấp đôi tổng số đấu thủ của hai đội. Tính số đấu thủ của mỗi đội.

Lời giải

Gọi a và b lần lượt là số đấu thủ ở đội trường A và trường B, với $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Theo đề bài, ta có: $ab = 2(a + b) \Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 4$

Nhận xét : Do $a, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a - 2 \in \mathbb{Z}; b - 2 \in \mathbb{Z}$

Lập bảng :

$a - 2$	-4	-2	-1	1	2	4
$b - 2$	-1	-2	-4	4	2	1
a	-2	0	1	3	4	6
b	1	0	-2	6	4	3

KL : $a = 4; b = 4$ hoặc $a = 3; b = 6$ hoặc $a = 6; b = 3$

Bài 201: Giải các phương trình sau:

a) $|x^2 - x + 2| - 3x - 7 = 0$

b) $|x - 1| + |2x + 3| = |x| + 4$

Lời giải

Giải các phương trình sau:

a) $|x^2 - x + 2| - 3x - 7 = 0$

Ta có $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ với mọi x .

Do đó, $|x^2 - x + 2| - 3x - 7 = 0$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x^2 - x + 2 - 3x - 7 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) - 9 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-5)(x+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy, $S = \{-1; 5\}$

$$\text{b) } \frac{x^3 + x^2 - x}{x|x-2|} = 1$$

ĐKXĐ: $x \neq 0, x \neq 2$

$$\text{Ta có } \frac{x^3 + x^2 - x}{x|x-2|} = 1 \Rightarrow x^3 + x^2 - x - x|x-2| = 0$$

$$+ \text{ Với } x < 2, \text{ ta có pt } x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (\text{loại}) \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } x > 2, \text{ ta có pt } x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 (\text{loại})$$

Vậy, $S = \{-3; 1\}$.

$$\text{c) Ta có: } |x-1| + |2x+3| = |x| + 4 \Leftrightarrow |x-1| + |2x+3| - |x| = 4 \quad (*)$$

Các giá trị đặc biệt: $x = 1; x = \frac{-3}{2}; x = 0$

Lập bảng xét dấu bỏ giá trị tuyệt đối:

x	$\frac{-3}{2}$	0	1	
$ x-1 $	$-(x-1)$	$-(x-1)$	$-(x-1)$	$x-1$
$ 2x+3 $	$-(2x+3)$	$2x+3$	$2x+3$	$2x+3$
$ x $	$-x$	$-x$	x	x
VT	$-2x-2$	$2x+4$	4	$2x+2$

+ Xét $x \leq \frac{-3}{2}$, pt đã cho trở thành $-2x-2=4 \Leftrightarrow x=-3$ (nhận)

+ Xét $\frac{-3}{2} \leq x \leq 0$, pt đã cho trở thành $2x+4=4 \Leftrightarrow x=0$ (nhận)

+ Xét $0 \leq x \leq 1$, pt đã cho trở thành $4=4 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$ (nhận)

+ Xét $x \geq 1$, pt đã cho trở thành $2x+2=4 \Leftrightarrow x=1$ (nhận)

KL: Pt đã cho có các nghiệm là: $x = -3; 0 \leq x \leq 1$.

Bài 202: Giải phương trình: $\frac{2x}{x^2-4x+7} + \frac{3x}{2(x^2-5x+7)} = 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{2x}{x^2-4x+7} + \frac{3x}{2(x^2-5x+7)} = 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{2x^2-8x+14} + \frac{3x}{2x^2-10x+14} = 1$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

+ Với $x = 0$ không là nghiệm của phương trình

+ Với $x \neq 0$ phương trình đã cho được viết lại: $\frac{4}{2x + \frac{14}{x} - 8} + \frac{3}{2x + \frac{14}{x} - 10} = 1$

Đặt $y = 2x + \frac{14}{x} - 9$, phương trình viết lại theo ẩn y là $\frac{4}{y+1} + \frac{3}{y-1} = 1$

$$\Rightarrow 4(y-1) + 3(y+1) = (y+1)(y-1)$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 7y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 7 \end{cases}$$

+ Với $y = 0$ thì $2x^2 - 9x + 14 = 0$ (vô nghiệm)

+ Với $y \neq 0$ thì $x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 7 \end{cases}$ (nhân)

Vậy, $S = \{1; 7\}$

Bài 203: Giải phương trình sau: $(x-2018)^3 + (x-2019)^3 - (2x-4037)^3 = 0$.

Lời giải

Ta có: $(x-2018)^3 + (x-2019)^3 - (2x-4037)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2018)^3 + (x-2019)^3 + (4037-2x)^3 = 0$$

Vì $(x-2018) + (x-2019) + (4037-2x) = 0$ nên theo câu a) ta có:

$$(x-2018)^3 + (x-2019)^3 + (4037-2x)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2018)(x-2019)(4037-2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2018=0 \\ x-2019=0 \\ 4037-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2018 \\ x=2019 \\ x=\frac{4037}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là : $S = \left\{ 2018; 2019; \frac{4037}{2} \right\}$

Bài 204: Giải phương trình: $(6x+8)(6x+6)(6x+7)^2 = 72$

Lời giải

Đặt $6x+7 = t$. Ta có: $(t+1)(t-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow (t^2-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0$

$$\Leftrightarrow t = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-2}{3}; \frac{-5}{3} \right\}$

Bài 205: Giải phương trình: $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$

Lời giải

Phân tích được $(x-1)(x^3 + x^2 + 2x + 8) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2 - x + 4) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } x^2 - x + 4 > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Bài 206: Tìm x :

a) $-3^x = -6561$

b) $(2x-1)^{2012} = (2x-1)^{2010}$

Lời giải

a) $-3^x = -6561$ hay $-3^x = -3^8 \Rightarrow x = 8$

c) $(2x-1)^{2012} = (2x-1)^{2010} \Leftrightarrow (2x-1)^{2012} - (2x-1)^{2010} = 0$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^{2010} \cdot [1 - (2x-1)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^{2010} \cdot (1-2x+1)(1+2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 2-2x=0 \\ 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=0 \end{cases}$$

Bài 207: Giải phương trình : $|x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2|$

Lời giải

$$|x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2|$$

$$\Leftrightarrow |(x-y+1)^2 + x - 2| + |(x-1)(x-2)| = 2x - 4 \quad (1)$$

Do

$$|(x-y+1)^2 + x - 2| + |(x-1)(x-2)| \geq 0 \quad (\forall x, y)$$

$$\Rightarrow 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Với $x \geq 2$ thì $|(x-y+1)^2 + x - 2| = (x-y+1)^2 + x - 2; |(x-1)(x-2)| = x^2 - 3x + 2$

Khi đó từ phương trình (1)

$$\Rightarrow (x-y+1)^2 + x - 2 + (x-1) = 2(x-2) \Leftrightarrow (x-y+1)^2 = (x-2)(2-x+1-1) = -(x-2)^2$$

Liên hệ tài liệu word môn toán: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow (x-y+1)^2 + (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ và } x-y+1=0 \Leftrightarrow x=2; y=3(\text{tm})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $(x; y) = (2; 3)$

Bài 208: Giải phương trình:

$$\frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

Lời giải

$$\frac{59-x}{41} + 1 + \frac{57-x}{43} + 1 + \frac{55-x}{45} + 1 + \frac{53-x}{47} + 1 + \frac{51-x}{49} + 1 = 0$$

.....

$$\Leftrightarrow (100-x) \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{45} + \frac{1}{47} + \frac{1}{49} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 100$$

Bài 209: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$

Lời giải

Ta có:

$$x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x+5)(x+6)$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x+6)(x+7)$$

$$\text{TXĐ: } x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 & (\text{tm}) \\ x = 2 & (\text{tm}) \end{cases}$$

Bài 210: Giải phương trình sau:

$$\frac{2010x+2010}{x^2+x+1} - \frac{2010x-2010}{x^2-x+1} = \frac{2011}{x(x^4+x^2+1)}$$

Lời giải

Ta có:
$$\frac{2010x+2010}{x^2+x+1} - \frac{2010x-2010}{x^2-x+1} = \frac{2011}{x(x^4+x^2+1)} \quad (1)$$

Ta có: $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x; \quad x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$

Điều kiện xác định của phương trình (1) là : $x \neq 0$

Ta có: $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = (x^2-x+1)(x^2+x+1)$

Quy đồng mẫu hai vế và khử

mẫu: $(1) \Rightarrow 2010x(x+1)(x^2-x+1) - 2010x(x-1)(x^2+x+1) = 2011$

$\Leftrightarrow 2010x(x^3+1) - 2010x(x^3-1) = 2011 \Leftrightarrow 2010x(x^3+1-x^3+1) = 2011$

$\Leftrightarrow 2010x \cdot 2 = 2011 \Leftrightarrow x = \frac{2011}{4020} \quad (\text{TM})$

Bài 211: Giải phương trình:

1) $\frac{8}{81} \cdot \left(\frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x\right)^3 = \frac{9}{64}$

2) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}$

Lời giải

2.1. $\frac{8}{81} \cdot \left(\frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x\right)^3 = \frac{9}{64}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x\right)^3 = \frac{9}{64} \cdot \frac{81}{8} = \left(\frac{9}{8}\right)^3$

$\Leftrightarrow \frac{-5}{16} - \frac{3}{8}x = \frac{9}{8}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{9}{8} + \frac{5}{16}}{-\frac{3}{8}} = \frac{-23}{6}$

2.2 $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6} \quad (x \in \mathbb{R})$

Đặt $t = x^2+2x+3 \Rightarrow x^2+2x+2 = t-1$, DK : $t \geq 2$

Phương trình trở thành:

$$\frac{t-2}{t-1} + \frac{t-1}{t} = \frac{7}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6t(t-2)}{t(t-1)} + \frac{6(t-1)(t-1)}{t} = \frac{7t(t-1)}{6t(t-1)}$$

$$\Rightarrow 6t^2 - 12t + 6t^2 - 12t + 6 = 7t^2 - 7t$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 17t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)\left(t-\frac{2}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3(\text{TM}) \\ t = \frac{2}{5}(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = 0; x = -2$

Bài 212: Giải phương trình:

$$1) x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$$

$$2) 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2$$

Lời giải

$$2.1 \quad x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0(1)$$

Nếu $x \geq 1$: $(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 1$)

$$x < 1: (1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x-1) = 0$$

$$\text{Nếu } \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{ktm}) \\ x = 3 & (\text{ktm}) \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = 1$

2.2

$$8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2 \quad (2)$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $x \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right] = (x+4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x+4)^2 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(\text{ktm}) \\ x = -8(\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -8$

ĐS8-Chuyên đề 9: Bất phương trình
Qua Các Đề Thi HSG Môn Toán Lớp 8

A. Bài toán

Bài 1: Giải bất phương trình: $(x-3)(x+3) < (x+2)^2 + 3$

Bài 2: Tìm x biết: $\left|x - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{3}$

Bài 3: Giải bất phương trình: $(a+1)x + \frac{ax-1}{a} > \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$

Bài 4: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn:

$$10x^2 + 50y + 42xy + 14x - 6y + 57 < 0$$

Bài 5: Trong một cuộc thi “Đố vui để học”, mỗi học sinh tham gia thi phải trả lời 10 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm; ngược lại, mỗi câu trả lời sai thì bị trừ 2 điểm. Qua cuộc thi, những học sinh đạt từ 30 điểm trở lên thì được thưởng. Hỏi: Mỗi học sinh được thưởng thì phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu hỏi?

Bài 6: Giải bất phương trình: $\frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x^2-9x+20} + \frac{1}{x^2-11x+30} \geq 0$

Bài 7: Giải bất phương trình: $x + \frac{1}{x} < 2$

Bài 8: Giải bất phương trình: $(x-3)(x+3) < (x+2)^2 + 3$

Bài 9: Giải bất phương trình sau: $x-1 - \frac{x-1}{3} \leq \frac{2x+3}{2} + \frac{x}{3} - 1$

Bài 10: Giải BPT Sau

$$x + \frac{x-1}{m} < \frac{x+1}{m} - (m-2)x \quad (\text{với } m \text{ là tham số, } m \neq 0)$$

Bài 11: Tìm số nguyên x thỏa mãn cả hai bất phương trình

$$\frac{3x-2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0,8 \quad \text{và} \quad 1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4}$$

Bài 12: Trong một cuộc thi “Đố vui để học”, mỗi học sinh tham gia thi phải trả lời 10 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm; ngược lại, mỗi câu trả lời sai thì bị trừ 2 điểm. Qua cuộc thi, những học sinh đạt từ 30 điểm trở lên thì được thưởng. Hỏi: Mỗi học sinh được thưởng thì phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu hỏi

Bài 13: Tìm x biết:

a) $\left|x - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{3}$

Bài 14: Giải bất phương trình: $x + \frac{1}{x} < 2$

Bài 15: Giải bất phương trình sau: $x - 1 - \frac{x-1}{3} \leq \frac{2x+3}{2} + \frac{x}{3} - 1$

Bài 16: Với giá trị nào của x thì $\frac{x-1}{x+1} > 0$

B. Lời giải bài minh họa.

Bài 1: Giải bất phương trình: $(x-3)(x+3) < (x+2)^2 + 3$

Lời giải

$$(x-3)(x+3) < (x+2)^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 < x^2 + 4x + 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^2 - 4x < 7 + 9 \Leftrightarrow x > -4$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x > -4$

Bài 2: Tìm x biết: $\left|x - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{3}$

Lời giải

$$\left|x - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} < x - \frac{2}{3} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1$$

Bài 3: $(a+1)x + \frac{ax-1}{a} > \frac{1}{a} \quad (a \neq 0) \text{ (III)}$

Lời giải

Với $a \neq 0$ ta có $(\text{III}) \Leftrightarrow (a+2)x > \frac{2}{a} (*)$

$$(*) \Leftrightarrow x > \frac{2}{a(a+2)} \text{ nếu } a > -2 \text{ và } a \neq 0$$

$$(*) \Leftrightarrow 0x > \frac{2}{-2} \text{ đúng với mọi } x \text{ nếu } a = -2$$

$$(*) \Leftrightarrow x < \frac{2}{a(a+2)} \text{ nếu } a < -2$$

Bài 4: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn:

$$10x^2 + 50y + 42xy + 14x - 6y + 57 < 0$$

Lời giải

Ta có:

$$10x^2 + 50y^2 + 42xy + 14x - 6y + 57 < 0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2 + 42xy + 49y^2) + (x^2 + 14x + 49) + (y^2 - 6y + 9) - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 7y)^2 + (x + 7)^2 + (y - 3)^2 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3x + 7y)^2 + (x + 7)^2 + (y - 3)^2 < 1$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (3x + 7y)^2 \geq 0 \\ (x + 7)^2 \geq 0 \\ (y - 3)^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{và } x, y \in \mathbb{Z} \text{ nên } (3x + 7y)^2 + (x + 7)^2 + (y - 3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (3x + 7y)^2 = (x + 7)^2 = (y - 3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Bài 5: Trong một cuộc thi “Đố vui để học”, mỗi học sinh tham gia thi phải trả lời 10 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm; ngược lại, mỗi câu trả lời sai thì bị trừ 2 điểm. Qua cuộc thi, những học sinh đạt từ 30 điểm trở lên thì được thưởng. Hỏi: Mỗi học sinh được thưởng thì phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu hỏi?

Lời giải

Gọi x là số câu trả lời đúng (x nguyên và $0 \leq x \leq 10$)

Số câu trả lời sai là $10 - x$

Số điểm được cộng là $5x$

Số điểm bị trừ là $2 \cdot (10 - x)$

Nếu được thưởng thì phải đạt từ 30 điểm trở lên. Nên ta có: $5x - 2(10 - x) \geq 30$

Giải bất phương trình trên ta được: $x \geq 8(tm)$

Vậy để được thưởng học sinh phải trả lời đúng ít nhất 8 câu hỏi.

Bài 6: Giải bất phương trình: $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} \geq 0$

Lời giải

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x^2-9x+20} + \frac{1}{x^2-11x+30} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)} \geq 0 \quad (x \neq 1; 2; 3; 4; 5; 6) \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-6} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x-2)(x-6)} \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6) < 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 6 \\ x \in \emptyset \end{cases}
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $2 < x < 6$ và $x \neq 3; 4; 5$

Bài 7: Giải bất phương trình: $x + \frac{1}{x} < 2$

Lời giải

$$x + \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} < 2, DK : x \neq 0$$

$$x > 0; x^2 + 1 < 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 < 0 \text{ (ktm)}$$

$$x < 0: x^2 + 1 > 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 \text{ (đúng } \forall x < 0)$$

Vậy $x < 0$

Bài 8: Giải bất phương trình : $(x-3)(x+3) < (x+2)^2 + 3$

Lời giải

$$(x-3)(x+3) < (x+2)^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - 9 < x^2 + 4x + 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^2 - 4x < 7 + 9 \Leftrightarrow -4x < 16 \Leftrightarrow x > -4$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x > -4$

Bài 9: Giải bất phương trình sau: $x - 1 - \frac{x-1}{3} \leq \frac{2x+3}{2} + \frac{x}{3} - 1$

Lời giải

$$x - 1 - \frac{x-1}{3} \leq \frac{2x+3}{2} + \frac{x}{3} - 1 \Leftrightarrow 6x - 6 - 2x + 2 \leq 6x + 9 + 2x - 6 \Leftrightarrow 4x \geq -7 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{4}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $S = \left\{ x / x \geq -\frac{7}{4} \right\}$

Bài 10: Giải BPT Sau

$$x + \frac{x-1}{m} < \frac{x+1}{m} - (m-2)x \quad (\text{với } m \text{ là tham số, } m \neq 0)$$

Lời giải

$$a) \quad x + \frac{x-1}{m} < \frac{x+1}{m} - (m-2)x \Leftrightarrow (m-1)x < \frac{2}{m} \quad (2a)$$

$$+) \text{ Nếu } m < 1 \text{ và } m \neq 0 \text{ thì } m-1 < 0. \Rightarrow (2a) \Leftrightarrow x > \frac{2}{m(m-1)}$$

$$+) \text{ Nếu } m > 1 \text{ thì } m-1 > 0. (2a) \Leftrightarrow x < \frac{2}{m(m-1)}$$

$$+) \text{ Nếu } m = 1 \text{ thì } m-1 = 0. \Rightarrow (2a) \Leftrightarrow 0x < 2 \text{ (luôn đúng)}$$

Kết luận:

$$+ \text{ Với } m < 1 \text{ và } m \neq 0 \text{ thì tập nghiệm BPT là } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{2}{m(m-1)} \right\}$$

$$+ \text{ Với } m = 1 \text{ thì tập nghiệm của BPT là } S = \mathbb{R}$$

$$+ \text{ Với } m > 1 \text{ thì tập nghiệm của BPT là: } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x < \frac{2}{m(m-1)} \right\}$$

Bài 11: Tìm số nguyên x thỏa mãn cả hai bất phương trình

$$\frac{3x-2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0,8 \quad \text{và} \quad 1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4}$$

Lời giải

$$a) \text{ Giải bất phương trình (1): } \frac{3x-2}{5} \geq \frac{x}{2} + 0,8$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-2}{5} - \frac{x}{2} \geq \frac{8}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-4}{10} \geq \frac{8}{10} \Leftrightarrow x-12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 12$$

$$b) \text{ Giải bất phương trình (2): } 1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{3-x}{4} + \frac{2x-5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{x-1}{12} \Leftrightarrow \frac{x-13}{12} < 0 \Leftrightarrow x < 13$$

Vì x là nghiệm chung của hai bất phương trình (1), (2) $\Rightarrow x = 12$

Bài 12: Trong một cuộc thi “Đố vui để học”, mỗi học sinh tham gia thi phải trả lời 10 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm; ngược lại, mỗi câu trả lời sai thì bị trừ 2

điểm. Qua cuộc thi, những học sinh đạt từ 30 điểm trở lên thì được thưởng. Hỏi: Mỗi học sinh được thưởng thì phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu hỏi

Lời giải

Gọi x là số câu trả lời đúng (x nguyên và $0 \leq x \leq 10$)

Số câu trả lời sai là : $10 - x$

Số điểm được cộng là $5x$

Số điểm bị trừ là $2 \cdot (10 - x)$

Nếu được thưởng thì phải đạt từ 30 điểm trở lên. Nên ta có:

$$5x - 2(10 - x) \geq 30$$

Giải bất phương trình trên ta được: $x \geq 8$ (tm)

Vậy để được thưởng học sinh phải trả lời đúng ít nhất 8 câu hỏi.

Bài 13: Tìm x biết : $\left| x - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{3}$

Lời giải

$$a) \left| x - \frac{2}{3} \right| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} < x - \frac{2}{3} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1$$

Bài 14: Giải bất phương trình: $x + \frac{1}{x} < 2$

Lời giải

$$x + \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} < 2, \text{DK: } x \neq 0$$

$$x > 0; x^2 + 1 < 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 < 0 \text{ (ktm)}$$

$$x < 0: x^2 + 1 > 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 \text{ (đúng } \forall x < 0)$$

Vậy $x < 0$

Bài 15: Giải bất phương trình sau: $x - 1 - \frac{x-1}{3} \leq \frac{2x+3}{2} + \frac{x}{3} - 1$

Lời giải

$$x - 1 - \frac{x-1}{3} \leq \frac{2x+3}{2} + \frac{x}{3} - 1 \Leftrightarrow 6x - 6 - 2x + 2 \leq 6x + 9 + 2x - 6$$

$$\Leftrightarrow 4x \geq -7 \Leftrightarrow x \geq \frac{-7}{4}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left\{ x / x \geq \frac{-7}{4} \right\}$

Bài 16: Với giá trị nào của x thì $\frac{x-1}{x+1} > 0$

Lời giải

$$+\frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 1 \\ x > -1 \end{array} \right\} \Rightarrow x > 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} x-1 < 0 \\ x+1 < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ x < -1 \end{array} \right\} \Rightarrow x < -1 \end{array} \right.$$

Vậy $x > 1$ hoặc $x < -1$

HSG8-Chuyên đề 10: Biểu thức hữu tỉ**A. Bài minh họa**

Bài 1: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} \quad (x \neq \pm 1)$

- Rút gọn biểu thức A
- Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -1\frac{2}{3}$
- Tìm giá trị của x để $A < 0$.

Bài 2: Cho $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 4.(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$
 Chứng minh rằng $a = b = c$

Bài 3: Cho $a + b + c = 0$, chứng minh rằng : $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Bài 4: Cho biểu thức: $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+4}{3-x}$

- Rút gọn A
- Tính giá trị của A biết $2x - x^2 = 1$
- Có giá trị nào của x để $A = 1$ không ?
- Tìm x nguyên để A nhận giá trị là số nguyên.

Bài 5: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
- Tìm x để $|A| = A$

Bài 6: Cho biểu thức $Q = 1 + \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$

- Rút gọn Q
- Tính giá trị của Q biết $\left| x - \frac{3}{4} \right| = \frac{5}{4}$
- Tìm giá trị nguyên của x để Q có giá trị nguyên

Bài 7: Cho biểu thức $M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$

- Rút gọn M
- Tìm a để $M > 0$

c) Tìm giá trị của a để biểu thức M đạt giá trị lớn nhất.

Bài 8: Cho $x + y + z = 1$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Tính $A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}$

Bài 10: Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính $S = a^2 + b^{2012} + c^{2013}$

Bài 11: Tìm số tự nhiên n để: $B = \frac{n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 6n - 2}{n^2 + 2}$ có giá trị là một số nguyên

Bài 12: Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} = 1$ biết $abc = 1$

b) Với $a+b+c=0$ thì $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab+bc+ca)^2$

Bài 13: Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3} = 0$

Bài 14: Cho phân thức $\frac{5x+5}{2x^2+2x}$

- a) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định
b) Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức bằng 1

Bài 15: Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1} \right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$$

- a) Rút gọn P
b) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$
c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.
d) Tìm x để $P > 0$

Bài 16: a) Rút gọn biểu thức: $\frac{x^2+x-6}{x^3-4x^2-18x+9}$

b) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ ($x, y, z \neq 0$). Tính $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Bài 17: Thực hiện phép tính: $A = \frac{1}{x-2} + \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 7x + 10} - \frac{2x - 4}{x - 5}$

Bài 18: Cho x, y, z đôi một khác nhau và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{xz}{y^2 + 2xz} + \frac{xy}{z^2 + 2xy}$

Bài 19: Cho ba số a, b, c khác nhau đôi một và khác 0, đồng thời thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}. \text{ Tính giá trị của biểu thức: } A = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$$

Bài 20: Cho $x(m+n) = y(n+p) = z(p+m)$ trong đó x, y, z là các số khác nhau và khác 0,

Chứng minh rằng: $\frac{m-n}{x(y-z)} = \frac{n-p}{y(z-x)} = \frac{p-m}{z(x-y)}$

Bài 21: Cho biểu thức $A = \frac{3x^3 - 14x^2 + 3x + 36}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$

- Tìm giá trị của x để biểu thức A xác định
- Tìm giá trị của x để biểu thức A có giá trị bằng 0
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị nguyên.

Bài 22:

- Chứng minh: $(x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) = x^4 - y^4$
- Tìm a, b, c biết: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ và $a^8 + b^8 + c^8 = 3$

Bài 23: Cho biểu thức:

$$P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2} \text{ với } x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$$

- Rút gọn biểu thức P .
- Tính giá trị của biểu thức P , biết x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$$

Bài 24: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Bài 25: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x+2} \right)$

- Rút gọn biểu thức A
- Tính giá trị của A , biết $|x| = \frac{1}{2}$
- Tìm giá trị của x để $A < 0$
- Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 26: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$. Tính: $a^{2013} + b^{2014}$

Bài 27: Cho biểu thức $A = \frac{x^2}{x-3} \left(\frac{x^2+9}{x} - 6 \right) + 5$

- a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm giá trị của x để A đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó

Bài 28: Cho 3 số a, b, c khác 0, thỏa mãn $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = (a^{2015} + b^{2015})(b^{2017} + c^{2017})(c^{2019} + a^{2019})$$

Bài 29: Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng:

$$\text{Nếu } a+b+c=0 \text{ thì } \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) = 9$$

Bài 30: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right) : \left(1 - \frac{x-8}{x^2+x+1} \right) \quad (x \neq 1)$

- a) Rút gọn biểu thức P
b) Tính giá trị của P khi x là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$

Bài 31: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2013}{x}$

- a) Tìm điều kiện của x để biểu thức xác định
b) Rút gọn biểu thức A
c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Bài 32: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

- a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
c) Tìm x để $|A| + A = 0$

Bài 33: Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 210$

Tính giá trị của biểu thức $B = |a-b| + |b-c| + |c-a|$

Bài 34:

a) Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Hãy rút gọn phân thức : $P = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

b) Tìm tích: $M = \frac{1^4+4}{3^4+4} \cdot \frac{5^4+4}{7^4+4} \cdot \frac{9^4+4}{11^4+4} \cdots \frac{17^4+4}{19^4+4}$

c) Cho $x = by + cz$; $y = ax + cz$; $z = ax + by$ và $x + y + z \neq 0$; $xyz \neq 0$.

$$\text{CMR: } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$$

d) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, tính giá trị của biểu thức $P = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Bài 35: Cho biểu thức : $P = \frac{x^2+x}{x^2-2x+1} : \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức P

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

b) Tìm x để $P < 1$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Bài 36:

a) Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

b) Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$$

Bài 37:

a) Chứng minh rằng: Nếu $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ thì $x = y = z$

b) Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$

Chứng minh rằng $a = b = c$

Bài 38: Rút gọn biểu thức $B = \frac{x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz}{(x+y)^2 + (y-z)^2 + (x+z)^2}$

Bài 39: Cho biểu thức $A = \left(\frac{3}{x^2 - 1} + \frac{x+1}{2x-2} - \frac{x+3}{2x+2} \right) : \frac{5}{4x^2 - 4}$

a) Hãy tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức A được xác định

b) Chứng minh rằng khi giá trị của biểu thức xác định thì nó không phụ thuộc vào giá trị của biến x

Bài 40:

a) Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn: $ab + bc + ca = 1$

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$

b) Cho $\begin{cases} x + y = a + b \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có: $x^n + y^n = a^n + b^n$

Bài 41:

a) Tìm a, b, c biết $5a - 3b - 4c = 46$ và $\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6}$

b) Tìm 2 số hữu tỉ a và b biết: $a + b = ab = a : b (b \neq 0)$

c) Cho $a + b + c = 1$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Tính $a^2 + b^2 + c^2$

d) Cho $a + b + c = 2014$ và $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{1}{2014}$

Tính $S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$

Bài 42:

a) Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào biến:

$$(6x+7)(2x-3)-(4x+1)\left(3x-\frac{7}{4}\right)$$

b) Tính giá trị biểu thức $P = \frac{x-y}{x+y}$. Biết $x^2 - 2y^2 = xy$ ($x+y \neq 0; y \neq 0$)

Bài 43: Cho biểu thức : $A = \frac{4xy}{y^2 - x^2} : \left(\frac{1}{y^2 - x^2} + \frac{1}{y^2 + 2xy + x^2} \right)$

a) Tìm điều kiện của x, y để giá trị của A được xác định

b) Rút gọn A

c) Nếu x, y là các số thực làm cho A xác định và thỏa mãn: $3x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1$, hãy tìm tất cả các giá trị nguyên dương của A .

Bài 44: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

Bài 45: Cho biểu thức : $P = \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1}$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P = 6$

Bài 46: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} (x \neq -1; 1)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -1\frac{2}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Bài 47: Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 48: Cho biểu thức: $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+4}{3-x}$

5) Rút gọn A

6) Tính giá trị của A biết $2x - x^2 = 1$

7) Có giá trị nào của x để $A = 1$ không?

8) Tìm x nguyên để A nhận giá trị là số nguyên.

Bài 49: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A , biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Bài 50: Cho biểu thức $M = \left[\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right] : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

a) Rút gọn M

b) Tính giá trị của M khi $|x| = \frac{1}{2}$

Bài 51: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm các giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 52: Cho $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Bài 53: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{2 + x}{2 - x} - \frac{4x^2}{x^2 - 4} - \frac{2 - x}{2 + x} \right) : \frac{x^2 - 3x}{2x^2 - x^3}$

a) Tìm ĐKXĐ rồi rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị của x để $A > 0$

c) Tính giá trị của A trong trường hợp $|x - 7| = 4$

Bài 54: Cho biểu thức : $P = \left(\frac{x}{x^2 - 25} + \frac{5 - x}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x - 5}{x^2 + 5x} - \frac{2x}{5 - x}$

a) Rút gọn biểu thức P

Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để P có giá trị là một số nguyên

Bài 55. Cho biểu thức : $P = \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{x^2 - 4y^2}{x + 2y} \right) : \left(\frac{2}{y^2x} - \frac{3}{x^2y} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị biểu thức P khi x, y thỏa mãn ; $|x| + |y| = 6; x^2 + y^2 = 26$

- c) Nếu x, y là các số thực dương làm cho P xác định và thỏa mãn: $x + y = 2$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P

Bài 56. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} \quad (x \neq \pm 1)$

- a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Bài 57. Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3} \right) : \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

Bài 58. Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$$

Bài 59 Biết $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$. Tính giá trị biểu thức: $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Bài 60. Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{6x+3}{x^3+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \right) : (x+2)$

- a) Tìm điều kiện xác định của Q , rút gọn Q
b) Tìm x khi $Q = \frac{1}{3}$
c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức Q .

Bài 61. Cho $abc \neq \pm 1$ và $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a}$. Chứng minh rằng $a = b = c$

Bài 62. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1}{a^2+a} + \frac{1}{a^2+3a+2} + \frac{1}{a^2+5a+6} + \frac{1}{a^2+7a+12} + \frac{1}{a^2+9a+20}$$

Bài 63. Cho x, y là hai số thay đổi thỏa mãn điều kiện $x > 0, y < 0$ và $x + y = 1$.

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{y-x}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2} \right]$.

b) Chứng minh rằng: $A < -4$.

Bài 64. Cho ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0,$$

Tính giá trị của biểu thức $T = (x-4)^{2014} + (y-4)^{2014} + (z-4)^{2014}$.

Bài 65. Cho x, y là hai số thay đổi thỏa mãn điều kiện $x > 0, y < 0$ và $x + y = 1$.

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{y-x}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2} \right]$.

b) Chứng minh rằng: $A < -4$.

Bài 66. Cho ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0,$$

Tính giá trị của biểu thức $T = (x-4)^{2014} + (y-4)^{2014} + (z-4)^{2014}$.

Bài 67. Cho $Q = \frac{a^4 + a^3 - a^2 - 2a - 2}{a^4 + 2a^3 - a^2 - 4a - 2}$

a) Rút gọn Q

b) Xác định a để Q_{\min}

Bài 68 Cho $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{a+c}, z = \frac{c}{a+b}$. Tính $A = yz + zx + xy + 2xyz$

Bài 69. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x^4 + x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} \right) \cdot \frac{x(x+1) - (1+x)}{x^3 - 1}$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên ? Cho biểu thức:

Bài 70: Cho ba số x, y, z đôi một khác nhau, thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ và $xyz \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{16(x+y)}{z} + \frac{3(y+z)}{x} - \frac{2038(z+x)}{y}$.

Bài 71. Cho biểu thức: $M = \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{2x^2 + x - 1} + \frac{x}{2x - 1}$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa

b) Rút gọn biểu thức M

c) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức M có giá trị nguyên.

Bài 72. Cho $\frac{1}{x^2} + x^2 = 14 (x \neq 0)$. Hãy tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x^3} + x^3$

Bài 73. Tính tổng $S = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$

Bài 74. Cho a, b, c là 3 số thỏa mãn $(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc$. Chứng minh rằng:

$$a^{2009} + b^{2009} + c^{2009} = (a+b+c)^{2009}$$

Bài 75: a) Cho x, y thỏa mãn $y(x+y) \neq 0$ và $x^2 - xy = 2y^2$. Tính $A = \frac{3x-y}{x+y}$

$$\text{b) Tính } B = \frac{2.1+1}{[1.(1+1)]^2} + \frac{2.2+1}{[2.(2+1)]^2} + \frac{2.3+1}{[3.(3+1)]^2} + \dots + \frac{2.99+1}{[99.(99+1)]^2}$$

Bài 76.

- a) Tính giá trị của biểu thức $A = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$ tại $x = 16$
- b) Cho $x + y = a$ và $xy = b$. Tính giá trị của biểu thức sau theo a và b : $B = x^2 + y^2$

Bài 77. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} (x \neq -1; 1)$

- a) Rút gọn biểu thức A
- b) Tính giá trị của biểu thức tại $x = -1\frac{2}{3}$
- c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Bài 78. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $abc = 2004$

$$\text{Tính: } M = \frac{2004a}{ab + 2004a + 2004} + \frac{b}{bc + b + 2004} + \frac{c}{ac + c + 1}.$$

Bài 79. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x-y}{x+y}$. Biết $x^2 - 2y^2 = xy (x+y \neq 0; y \neq 0)$

Bài 80. Cho a và b thỏa mãn: $a + b = 1$. Tính giá trị của biểu thức $B = a^3 + b^3 + 3ab$

Bài 81: a) Tính giá trị của biểu thức sau: $\frac{x^{16} - 1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}$ với $x = 2011$

b) Cho $(x+3y)^3 - 6(x+3y)^2 + 12(x+3y) = -19$. Tìm giá trị của biểu thức $x+3y$

Bài 82: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x}{x+2} - \frac{x^3-8}{x^3+8} \cdot \frac{x^2-2x+4}{x^2-4} \right) : \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P
- b) Tìm các giá trị của x để $P > 0$

Bài 83: Cho biểu thức $A = \left(\frac{2017}{x-1} - \frac{2016}{x+1} - \frac{2014+2016}{x^2-1} \right) : \frac{x^2-4}{x^2-1}$

- a) Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định
- b) Rút gọn biểu thức A
- c) Tìm x để $A \geq 0$ và biểu diễn tập các giá trị tìm được của x trên trục số
- d) Tìm tất cả các số nguyên x để A có giá trị là số nguyên

Bài 84: Cho phân thức $\frac{5x+5}{2x^2+2x}$

- a) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định
- b) Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức bằng 1

Bài 85: Cho biểu thức $P = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

- Rút gọn P
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P có giá trị nguyên
- Tìm x để $P \leq 1$

Bài 86: Cho biết $\frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{3}$. Hãy tìm giá trị của biểu thức $Q = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$

Bài 87: Cho biểu thức: $P = \frac{1}{x^2 - x} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20}$

- Tìm điều kiện của x để biểu thức P có giá trị.
- Rút gọn biểu thức P.

Bài 88: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+1} - 3 \right) \cdot \frac{x+1}{2-4x} - \frac{3x-x^2+1}{3x}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm x để A có giá trị bằng 671
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $\frac{2}{A} \in \mathbb{Z}$

Bài 89: Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} - \frac{10}{5x+10} + \frac{1}{x-2} \right) : \left(x+2 + \frac{6-x^2}{x-2} \right)$, với $x \neq 0$ và $x \neq \pm 2$.

- Rút gọn biểu thức Q.
- Tính giá trị của Q biết $|x| = \frac{1}{2}$.
- Tìm x để $Q > 0$.

Bài 90: Cho biểu thức $P(x) = \left(x - 3 + \frac{1}{x-1} \right) : \left(x - 1 - \frac{1}{x-1} \right)$ với $x \notin \{0; 1; 2\}$.

- Rút gọn P.
- Tìm x để $P(x) \geq 1$.

Bài 91: Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} + \frac{2x^2}{x^2(x-2) + 4(x-2)} \right) \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right)$, với $x \neq 0$ và $x \neq 2$.

- Rút gọn biểu thức Q.
- Tìm giá trị của x để Q có giá trị là $\frac{1}{4}$.

Bài 92: Cho $x \neq \pm y$ và $\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 2016$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$

Bài 93: Cho $x+y=1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3} = 0$

Bài 94: Tìm đa thức A, biết rằng $\frac{4x^2-16}{x^2+2} = \frac{A}{x}$

Bài 95: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Bài 96: a) Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x + y = 4$ và $xy = 1$. Tính giá trị biểu thức

$$A = (x^2 + 1)(y + 2) + (x + 2)(y^2 + 1).$$

b) Cho a, b, c là ba số thực khác 0 thỏa mãn $abc = a + b + c$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Tính giá trị biểu thức

$$B = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Bài 97: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ (Với x, y, z, a, b, c khác 0).

Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Bài 98: Cho $a + b + c \neq 0$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Tính $N = \frac{a^{2016} + b^{2016} + c^{2016}}{(a + b + c)^{2016}}$

Bài 99: Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} + \frac{5-x}{x^2-x-6} \right) \left(x - \frac{6}{x-1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x , để $A < 0$

c) Tìm các số tự nhiên x , thỏa mãn: $A^2 - |A| = 6$

Bài 100: Cho các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ và $a + b + c = 3$.

Tính $M = a^{2016} + 2015b^{2015} + 2020c$

Bài 101: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$.

Bài 102: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Bài 103: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị của A , biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Bài 104: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$

Tính $a^{2011} + b^{2011}$

Bài 105: Cho biểu thức :

$$P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} \text{ với } x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y.$$

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tính giá trị của biểu thức P biết x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y).$$

Bài 106: $P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1} \right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

d) Tìm x để $P > 0$

Bài 107: Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3} = 0$

Bài 108: Cho biểu thức: $P = \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1}$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P = 6$

Bài 109: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} (x \neq -1; 1)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -1\frac{2}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Bài 110: Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 111: Cho biểu thức: $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+4}{3-x}$

a) Rút gọn A

b) Tính giá trị của A biết $2x - x^2 = 1$

c) Có giá trị nào của x để $A = 1$ không? Tìm x nguyên để A nhận giá trị là số nguyên

Bài 112: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A, biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Bài 113: Cho: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và $x + y + z = xyz$ ($x, y, z \neq 0$)

Chứng minh $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 2$

Bài 114: Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Bài 115: Cho biểu thức $M = \left[\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right] : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

a) Rút gọn M b) Tính giá trị của M khi $|x| = \frac{1}{2}$

Bài 116: Cho $a > b > 0$ thỏa mãn $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a - b}{a + b}$

Bài 117: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Bài 118: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

- Rút gọn biểu thức A
- Tính giá trị của A biết $|x| = \frac{1}{2}$
- Tìm các giá trị của x để $A < 0$
- Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 119: Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

Bài 120: Chứng minh rằng nếu $\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$ với $x \neq y; xyz \neq 0; yz \neq 1; xz \neq 1$

Thì $xy + xz + yz = xyz(x + y + z)$

Bài 121: Cho ba số a, b, c thỏa mãn $abc = 2004$. Tính

$M = \frac{2004a}{ab + 2004a + 2004} + \frac{b}{bc + b + 2004} + \frac{c}{ac + c + 1}$

Bài 122: Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

Bài 123: Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

- a) Rút gọn biểu thức A
 b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

Bài 124: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

- d) Rút gọn biểu thức A
 e) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
 f) Tìm x để $|A| = A$

Bài 125: $P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1} \right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$

- a) Rút gọn P
 b) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$
 c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên
 d) Tìm x để $P > 0$

Bài 126: Cho $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

- a) Rút gọn P
 b) Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Bài 127: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức A
 b) Tính giá trị của A , biết $|x| = \frac{1}{2}$
 c) Tìm giá trị của x để $A < 0$
 d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 128: Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

- a) Rút gọn A
 b) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 129: Rút gọn biểu thức: $\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$

Bài 130: Cho biểu thức : $A = \frac{3x^3 - 14x^2 + 3x + 36}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$

- a) Tìm giá trị của biểu thức A xác định
 b) Tìm giá trị của biểu thức A có giá trị bằng 0
 c) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Bài 131: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$. Tính $a^{2011} + b^{2011}$

Bài 132: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Bài 133: Cho $a + b + c = 0$, chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Bài 134: a) Cho $a + b = 2$ và $a^2 + b^2 = 20$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^3 + b^3$

b) Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Tính giá trị của biểu thức $N = a^4 + b^4 + c^4$

Bài 135: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Bài 136: Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3} = 0$$

Bài 137: Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab}$

Bài 138: Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Bài 139: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 140: Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Bài 141: Cho x, y là số hữu tỉ khác 1 thỏa mãn $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1$

Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 142: Cho x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 7$; $x^2 + y^2 + z^2 = 23$; $xyz = 3$

Tính giá trị của biểu thức $H = \frac{1}{xy+z-6} + \frac{1}{yz+x-6} + \frac{1}{zx+y-6}$

Bài 143: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Bài 144: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính: $a^{2011} + b^{2011}$

Bài 145: Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Bài 146:

a) Cho $a^2 + a + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^{2013} + \frac{1}{a^{2013}}$

b) Cho hai số x, y thỏa mãn: $x^2 + x^2y^2 - 2y = 0$ và $x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0$

Tính giá trị của biểu thức $Q = x^2 + y^2$

Bài 147: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$

Bài 148: Cho $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0$, tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

Bài 149: Cho biểu thức $M = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức M bằng 0.

Bài 150: Cho biểu thức $R = \left[\frac{(x-1)^2}{3x + (x-1)^2} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức R được xác định;

b) Tìm giá trị của x để giá trị của R bằng 0;

c) Tìm giá trị của x để $|R| = 1$.

Bài 151: Tính giá trị của biểu thức

$$P = x^{15} - 2018x^{14} + 2018x^{13} - 2018x^{12} + \dots - 2018x^2 + 2018x - 2018, \text{ với } x = 2017.$$

Bài 152: Cho biểu $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

a) Tìm ĐKXĐ và rút gọn P .

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Bài 153: Cho $P = \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} - \frac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)}$

a) Tìm ĐKXĐ của P , rút gọn P

b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình $P = 2$

Bài 154: Cho $a + b + c = 2p$. Chứng minh: $2bc + b^2 + c^2 - a^2 = 4p(p - a)$

Bài 155: a) Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ và $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$

b) Áp dụng: Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \geq 16$

Bài 156: Cho biểu thức $M = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + x^2$

Tính M theo a, b, c biết rằng $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

Bài 157: Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn đẳng thức: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{b+c-a}{a}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$

Bài 158: a) Biết $a \neq \frac{-7}{3}, b \neq \frac{7}{2}$ và $2a - b = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{5a-b}{3a+7} - \frac{3b-2a}{2b-7}$

b) Biết $b \neq \pm 3a$ và $6a^2 - 15ab + 5b^2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$

Bài 159: Tính giá trị của biểu thức

$$P = x^{15} - 2018x^{14} + 2018x^{13} - 2018x^{12} + \dots - 2018x^2 + 2018x - 2018, \text{ với } x = 2017.$$

Bài 160: Cho x, y là hai số khác nhau, biết $x^2 - y = y^2 - x$.

Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y$

Bài 161: Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + a^2c + b^2c - abc = 0$

Bài 162: Cho $x^2 + y^2 + z^2 = 10$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = (xy + yz + zx)^2 + (x^2 - yz)^2 + (y^2 - xz)^2 + (z^2 - xy)^2$$

Bài 163: Chứng minh rằng nếu ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 2018$ và

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2018} \text{ thì một trong ba số } a, b, c \text{ phải có một số bằng } 2018.$$

Bài 164: Rút gọn các phân thức:

$$a) A = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2};$$

$$b) B = \frac{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}$$

Bài 165: a) Rút gọn phân thức: $A = \frac{x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1}{x^{45} + x^{40} + x^{35} + \dots + x^5 + 1}$

$$b) \text{ Rút gọn phân thức: } B = \frac{x^{24} + x^{20} + x^{16} + \dots + x^4 + 1}{x^{26} + x^{24} + x^{22} + \dots + x^2 + 1}$$

Bài 166: Cho các số a, b, c khác 0, thỏa mãn $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1$.

Tính giá trị của biểu thức $(a^{23} + b^{23})(a^5 + b^5)(a^{2019} + b^{2019})$

Bài 167: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $(x+y)(y+z)(z+x) = 8xyz$.

Chứng minh rằng: $x = y = z$

Bài 168: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Bài 169: Chứng minh rằng nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ và $a+b+c = abc$ thì $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

Bài 170: Cho x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=0$ và $xy+yz+zx=0$.

Hãy tính giá trị của biểu thức: $S = (x-1)^{2017} + y^{2018} + (z+1)^{2019}$

Bài 171: Rút gọn biểu thức:

a) $M = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}{x^2+5x+5}$

b) $N = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$

Bài 172: Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^4 + b^4 + c^4$

Bài 173: Cho phân thức $A = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 3x - 2}$

a) Rút gọn A.

b) Tính x để $A < 1$

Bài 174: a) Cho $\frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$, hãy tính $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

b) Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, hãy tính $B = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$

Bài 175: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right)$

a) Rút gọn P;

b) Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào?

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Bài 176: Cho biểu thức: $Q = 1 + \frac{x+3}{x^2+5x+6} : \left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \frac{3x}{3x^2-12} - \frac{1}{x+2} \right)$

a) Rút gọn Q;

b) Tìm các giá trị của x để $Q=0, Q=1$;

c) Tìm các giá trị của x để $Q > 0$.

Bài 177: Cho phân thức: $A = \frac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 2a^2 - 4a - 8}$

a) Rút gọn A;

b) Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Bài 178: Cho $\left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) : \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = a$. Tính $M = \left(x^4 - \frac{1}{x^4} \right) : \left(x^4 + \frac{1}{x^4} \right)$ theo a.

Bài 179: Cho a, b, c là ba số dương khác 0 thỏa mãn: $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$ (Với giả thiết các tỉ số

đều có nghĩa). Tính: $M = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$.

Bài 180: Cho $a+b=1$ và $ab \neq 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$

Bài 181: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $abc = 2019$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2019a}{ab+2019a+2019} + \frac{b}{bc+b+2019} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$$

Bài 182: Cho $3y - x = 6$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6}$

Bài 183: Cho biểu thức $P = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}, n \in N^*$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P tại $n = 99$.

Bài 184: Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

a) Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab}$

b) Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Bài 185: Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

Bài 186: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right) : \left(1 - \frac{x-8}{x^2+x+1} \right) \quad (x \neq 1)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P khi x là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$

Bài 187: Cho biểu thức $R = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4026}{x}$

Tìm x để biểu thức xác định, khi đó hãy rút gọn biểu thức

Bài 188: Cho $x^2 + x = 1$. Tính giá trị biểu thức $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Bài 189: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3+x-x^2-1} \right) : \left(1 - \frac{2x}{x^2+1} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để A nhận giá trị là số âm

c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $(x+2).A$ nhận giá trị là số nguyên.

Bài 190: Cho biểu thức $A = \frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị của x để A nhận giá trị nguyên?

c) Tìm giá trị lớn nhất của A

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 191: Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 2010$

Tính giá trị của biểu thức $A = |a - b| + |b - c| + |c - a|$

Bài 192: Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x :

$$(x - 1)^4 - x^2(x^2 + 6) + 4x(x^2 + 1)$$

Bài 193: Chứng minh rằng:

$$a(b - c)(b + c - a)^2 + c(a - b)(a + b - c)^2 = b(a - c)(a + c - b)^2$$

Bài 194: Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng:

$$\text{Nếu } a + b + c = 0 \text{ thì } \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) = 9$$

Bài 1195: Tìm 3 số dương a, b, c thỏa mãn :

$$\frac{a^2 + 7}{4} = \frac{b^2 + 6}{5} = \frac{c^2 + 3}{6} \text{ và } a^2 + 2c^2 = 3c^2 + 19$$

Bài 196: Chứng minh rằng $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$ biết $x + y + z = 0$

Bài 197: Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Bài 198: Biết $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$. Tính giá trị biểu thức $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Bài 199: Cho $10a^2 = 10b^2 - c^2$. Chứng minh rằng: $(7a - 3b - 2c)(7a - 3b + 2c) = (3a - 7b)^2$

Bài 200: Chứng minh rằng: Với mọi $x \in \mathbb{Q}$ thì giá trị của đa thức :

$$M = (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16 \text{ là bình phương của một số hữu tỉ}$$

Bài 201: Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $ab + bc + ca \leq 0$

Bài 202: Chứng minh rằng:

$$a(b - c)(b + c - a)^2 + c(a - b)(a + b - c)^2 = b(a - c)(a + c - b)^2$$

Bài 203: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính $a^{2011} + b^{2011}$

Bài 204: Tìm a, b biết $\frac{1 + 2a}{15} = \frac{3b}{23 + 7a} = \frac{7 - 3a}{20}$

Bài 205: Chứng minh rằng:

$$a(b - c)(b + c - a)^2 + c(a - b)(a + b - c)^2 = b(a - c)(a + c - b)^2$$

Bài 206:

a) Cho $x^2 - 4x + 1 = 0$. Tính $E = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}$

b) Cho $\frac{x}{x^2 - x + 1} = a$. Tính $F = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ theo a

Bài 207: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{(1^4 + 4)(5^4 + 4)(9^4 + 4) \dots (21^4 + 4)}{(3^4 + 4)(7^4 + 4)(11^4 + 4) \dots (23^4 + 4)}$

Bài 208: Cho biểu thức $M = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức M . b) Tính giá trị của M , biết $|x| = \frac{1}{2}$.
 c) Tìm giá trị của x để $M < 0$. d) Tìm các giá trị nguyên của x để M có giá trị nguyên.

Bài 209: Cho biểu thức: $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$ với

$x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$

- 1) Rút gọn biểu thức P .
 2) Tính giá trị của biểu thức P , biết x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$$

Bài 210: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{2}{1 + x} - \frac{5 - x}{1 - x^2} \right) : \frac{1 - 2x}{x^2 - 1}$

- a) Rút gọn biểu thức A
 b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
 c) Tìm x để $|A| = A$

Bài 211: Cho biểu thức: $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x + 1}{x} - \frac{1}{1 - x} + \frac{2 - x^2}{x^2 - x} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức P
 b) Tìm x để $P < 1$
 c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Bài 212: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{4x}{2 + x} + \frac{8x^2}{4 - x^2} \right) : \left(\frac{x - 1}{x^2 - 2x} - \frac{2}{x} \right)$

- a) Tìm điều kiện xác định, rồi rút gọn biểu thức A
 b) Tìm x để $A = -1$
 c) Tìm các giá trị của x để $A < 0$

Bài 213: Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x - y}{x + y}$. Biết $x^2 - 2y^2 = xy$ ($x + y \neq 0; y \neq 0$)

Bài 214: Rút gọn các biểu thức

$$A = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

$$B = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

Bài 215: Cho 3 số x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 2009$. Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào các biến x, y, z :

$$\frac{2009x}{xy + 2009x + 2009} + \frac{y}{yz + y + 2009} + \frac{z}{xz + z + 1}$$

Bài 216: Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

- c) Rút gọn biểu thức A
- d) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

Bài 217: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x}{x^2 - 25} + \frac{5-x}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x-5}{x^2 + 5x} - \frac{2x}{5-x}$

- b) Rút gọn biểu thức P
- c) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để P có giá trị là một số nguyên.

Bài 218:

a) Tính giá trị của biểu thức sau: $\frac{x^{16} - 1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}$ với $x = 2011$

b) Cho $(x+3y)^3 - 6(x+3y)^2 + 12(x+3y) = -19$

Tìm giá trị của biểu thức $x+3y$

Bài 219: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x}{x+2} - \frac{x^3-8}{x^3+8} \cdot \frac{x^2-2x+4}{x^2-4} \right) : \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P
- b) Tìm các giá trị của x để $P > 0$

Bài 220: Cho $x(m+n) = y(n+p) = z(p+m)$ trong đó x, y, z là các số khác nhau và khác 0,

Chứng minh rằng: $\frac{m-n}{x(y-z)} = \frac{n-p}{y(z-x)} = \frac{p-m}{z(x-y)}$

Bài 221: Tính tổng: $S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{2007.2009}$

a) Rút gọn $A = 1$

b) Rút gọn $B = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

Bài 222:

a) Hãy viết biểu thức sau : $\frac{2a+1}{a^2(a+1)}$ thành hiệu hai bình phương

b) Cho $M = \frac{2.1+1}{(1^2+1)^2} + \frac{2.2+1}{(2^2+2)^2} + \frac{2.3+1}{(3^2+3)^2} + \dots + \frac{2.2012+1}{(2012^2+2012)^2}$

Chứng minh rằng $M < 1$

Bài 223: Cho biểu thức: $M = \left(\frac{x^2}{x^3-4x} + \frac{6}{6-3x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn M

b) Tính giá trị của biểu thức M khi $x = -1$

c) Với giá trị nào của x thì $M = -2$

d) Tìm giá trị nguyên của x để M có giá trị nguyên.

Bài 224: Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3} \right) : \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

Bài 225: Chứng minh rằng: $a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$

Bài 226: Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng:

Nếu $a+b+c=0$ thì $\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) = 9$

Bài 227: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right) : \left(1 - \frac{x-8}{x^2+x+1} \right) \quad (x \neq 1)$

c) Rút gọn biểu thức P

d) Tính giá trị của P khi x là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$

Bài 228: Tìm 3 số dương a, b, c thỏa mãn : $\frac{a^2+7}{4} = \frac{b^2+6}{5} = \frac{c^2+3}{6}$ và $a^2+2c^2 = 3b^2+19$

Bài 229: Một giải bóng chuyền có 9 đội bóng tham gia thi đấu vòng tròn 1 lượt (hai đội bất kỳ chỉ thi đấu với nhau 1 trận). Biết đội thứ nhất thắng a_1 trận và thua b_1 trận, đội thứ 2 thắng a_2 trận và thua b_2 trận, ..., đội thứ 9 thắng a_9 trận và thua b_9 trận.

Chứng minh rằng $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_9^2$

Bài 230: Cho $x^2 + x = 1$. Tính giá trị biểu thức $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Bài 231: Cho biểu thức $R = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4026}{x}$. Tìm x để biểu thức xác định, khi đó hãy rút gọn biểu thức

Bài 232: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3+x-x^2-1} \right) : \left(1 - \frac{2x}{x^2+1} \right)$

- d) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A
- e) Tìm x để A nhận giá trị là số âm
- f) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $(x+2).A$ nhận giá trị là số nguyên.

Bài 233: Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x

$$(x-1)^4 - x^2(x^2+6) + 4x(x^2+1)$$

Bài 234: Chứng minh rằng $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$

Bài 235: Cho biểu thức $A = \frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1}$

- d) Rút gọn biểu thức A
- e) Tìm giá trị của x để A nhận giá trị nguyên?
- f) Tìm giá trị lớn nhất của A

Bài 236: Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$. Tính giá trị của biểu thức $A = |a-b| + |b-c| + |c-a|$

Bài 237: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3} \right) : \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- c) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A.
- d) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 238: Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Bài 239: Cho x, y là số hữu tỉ khác 1 thỏa mãn $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1$

Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 240: Cho x, y, z thỏa mãn $x+y+z=7; x^2+y^2+z^2=23; xyz=3$

Tính giá trị của biểu thức $H = \frac{1}{xy+z-6} + \frac{1}{yz+x-6} + \frac{1}{zx+y-6}$

Bài 241: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính : $a^{2011} + b^{2011}$

Bài 242: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Bài 243: Rút gọn biểu thức:
$$\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$$

Bài 244: Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2+b^2}{2018}$

Bài 245:

a) Cho $a^2 + a + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^{2013} + \frac{1}{a^{2013}}$

b) Cho hai số x, y thỏa mãn: $x^2 + x^2y^2 - 2y = 0$ và $x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0$

Tính giá trị của biểu thức $Q = x^2 + y^2$

Bài 246: Cho biểu thức $P = \frac{x^2+x}{x^2-2x+1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Bài 247: Cho $a+b+c=0$ và $abc \neq 0$, tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{a^2+c^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2}$$

Bài 248: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

Bài 249: Cho biểu thức $M = \frac{x^4+2}{x^6+1} + \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} - \frac{x^2+3}{x^4+4x^2+3}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị lớn nhất của M

Bài 250: Cho x, y là số hữu tỉ khác 1 thỏa mãn $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1$ Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ là

binh phương của một số hữu tỷ.

Bài 251: Cho x, y, z thỏa mãn $x+y+z=7; x^2+y^2+z^2=23; xyz=3$. Tính giá trị của biểu thức

$$H = \frac{1}{xy+z-6} + \frac{1}{yz+x-6} + \frac{1}{zx+y-6}$$

Bài 252: Cho $x^2+x=1$. Tính giá trị biểu thức $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Bài 253: Cho biểu thức $R = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4026}{x}$. Tìm x để biểu thức xác định, khi đó hãy rút gọn biểu thức

Bài 254: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $\left(x - \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$

c) Tìm giá trị của x , để $A < 0$.

Bài 255: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x^2+3x}{x^3+3x^2+9x+27} + \frac{3}{x^2+9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3-3x^2+9x-27} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

b) Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào ?

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Bài 256: Cho biểu thức $M = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$. Chứng minh rằng:

a) Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì $M > 1$

b) Nếu $M = 1$ thì hai trong ba phân thức đã cho của biểu thức M bằng 1, phân thức còn lại bằng -1

Bài 257: Cho biểu thức $P = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$ BTHH

a) Rút gọn P

b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P có giá trị nguyên

c) Tìm x để $P \leq 1$

Bài 258: Cho biết $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{2}{3}$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $Q = \frac{x^2}{x^4+x^2+1}$

Bài 259: Cho x, y, a, b là những số thực thỏa mãn: $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{x^2+y^2}{a+b}$ và $x^2+y^2=1$. Chứng minh:

$$\frac{x^{2006}}{a^{1003}} + \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{2}{(a+b)^{1003}}$$

Bài 260: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^3-1}{x^2-x} + \frac{x^2-4}{x^2-2x} - \frac{2-x}{x} \right) : \frac{x+1}{x}$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2; x \neq -1$ BTHH

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính A biết x thỏa mãn $x^3-4x^2+3x=0$.

Bài 261: Cho a, b, c là các số hữu tỷ khác 0 thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$M = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ là bình phương của một số hữu tỷ

Bài 262: Rút gọn biểu thức sau và tìm giá trị nguyên của x để biểu thức có giá trị nguyên:

$$M = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

Bài 263: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{2017}{x-1} - \frac{2016}{x+1} - \frac{2014+2016}{x^2-1} \right) : \frac{x^2-4}{x^2-1}$

- Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định
- Rút gọn biểu thức A
- Tìm x để $A \geq 0$ và biểu diễn tập các giá trị tìm được của x trên trục số
- Tìm tất cả các số nguyên x để A có giá trị là số nguyên.

Bài 264: Cho $x \neq \pm y$ và $\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 2016$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$?

Bài 265: Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Tính: $P = \frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3}$

Bài 266: Cho $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

- Rút gọn P
- Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Bài 267:

a) Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, (với $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$) Tính giá trị của biểu thức $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Bài 268: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{4x}{2+x} + \frac{8x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x-1}{x^2-2x} - \frac{2}{x} \right)$

- Tìm điều kiện xác định, rồi rút gọn biểu thức A
- Tìm x để $A = -1$
- Tìm các giá trị của x để $A < 0$

Bài 269: Cho biểu thức $M = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- Rút gọn M
- Tìm x nguyên để M có giá trị là số nguyên dương

c) Tìm x để $M \geq -3$

Bài 270: Cho biểu thức : $C = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn biểu thức C

b) Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức B là số nguyên.

Bài 271: Cho biểu thức : $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 272: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 273: Cho x, y là hai số dương và $x^{2010} + y^{2010} = x^{2011} + y^{2011} = x^{2012} + y^{2012}$. Tính giá trị của biểu thức $S = x^{2020} + y^{2020}$

Bài 274: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Bài 275: Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Bài 276: Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

Bài 277: Cho $a + b + c = 2p$. Chứng minh : $2bc + b^2 + c^2 - a^2 = 4p(p - a)$

Bài 278: Cho biểu thức $M = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

c) Rút gọn M

d) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức M bằng 0.

Bài 279: Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức sau có giá trị là số nguyên.

$$A = \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 5}{2x + 1}$$

Bài 280: Cho biểu thức $M = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + x^2$

Tính M theo a, b, c biết rằng $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

Bài 281: Cho biểu thức $R = \left[\frac{(x-1)^2}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$

- d) Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức R được xác định;
 e) Tìm giá trị của x để giá trị của R bằng 0;
 f) Tìm giá trị của x để $|R| = 1$.

Bài 282: Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn đẳng thức: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{b+c-a}{a}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$

Bài 283: Cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2018}$ là 2018 số thực thỏa mãn $a_k = \frac{2k+1}{(k^2+k)^2}$, với $k = 1, 2, 3, \dots, 2018$.

Tính $S_{2018} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2017} + a_{2018}$

Bài 284: a) Biết $a \neq \frac{-7}{3}, b \neq \frac{7}{2}$ và $2a - b = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{5a-b}{3a+7} - \frac{3b-2a}{2b-7}$

b) Biết $b \neq \pm 3a$ và $6a^2 - 15ab + 5b^2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$

Bài 285: Rút gọn:

a) $M = 90 \cdot 10^k - 10^{k+2} + 10^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$; b) $N = (20^2 + 18^2 + \dots + 2^2) - (19^2 + 17^2 + \dots + 1^2)$.

Bài 286: Tính giá trị của biểu thức

$$P = x^{15} - 2018x^{14} + 2018x^{13} - 2018x^{12} + \dots - 2018x^2 + 2018x - 2018, \text{ với } x = 2017.$$

Bài 287: a) So sánh hai số $A = 3^{32} - 1$ và $B = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$

b) $C = \frac{2019-2018}{2019+2018}$ và $D = \frac{2019^2-2018^2}{2019^2+2018^2}$

Bài 288: Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng: $a^3+b^3+a^2c+b^2c-abc=0$

Bài 289: Cho $x^2+y^2+z^2=10$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = (xy + yz + zx)^2 + (x^2 - yz)^2 + (y^2 - xz)^2 + (z^2 - xy)^2$$

Bài 290: Chứng minh rằng nếu ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=2018$ và

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2018} \text{ thì một trong ba số } a, b, c \text{ phải có một số bằng 2018.}$$

Bài 291: Cho biểu $P = \frac{x^2+x}{x^2-2x+1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

a) Tìm ĐKXĐ và rút gọn P .

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Bài 292: Rút gọn các phân thức:

$$a) A = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2};$$

$$b) B = \frac{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}$$

Bài 293: Chứng tỏ rằng đa thức: $A = (x^2 + 1)^4 + 9(x^2 + 1)^3 + 21(x^2 + 1)^2 - x^2 - 31$ luôn không âm với mọi giá trị của biến x .

Bài 294: a) Rút gọn phân thức: $A = \frac{x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1}{x^{45} + x^{40} + x^{35} + \dots + x^5 + 1}$

$$b) \text{ Rút gọn phân thức: } B = \frac{x^{24} + x^{20} + x^{16} + \dots + x^4 + 1}{x^{26} + x^{24} + x^{22} + \dots + x^2 + 1}$$

Bài 295: Cho các số a, b, c khác 0, thỏa mãn $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1$.

Tính giá trị của biểu thức $(a^{23} + b^{23})(a^5 + b^5)(a^{2019} + b^{2019})$

Bài 296: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $(x+y)(y+z)(z+x) = 8xyz$.

Chứng minh rằng: $x = y = z$

Bài 297: Thực hiện phép tính:

$$a) A = \frac{1 + 2 \cdot 3^6}{2^3 \cdot 3^6 - 2^3 \cdot 5^3} - \frac{1 + 3^6}{8(9^3 - 125)} - \frac{5^3}{18^3 - 10^3}.$$

$$b) B = \frac{x^3 y + xy^3 + xy}{x^3 + y^3 + x^2 y + xy^2 + x + y}$$

Bài 298: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Bài 299: Chứng minh rằng nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ và $a+b+c = abc$ thì $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

Bài 300: a) Xác định $n \in \mathbb{N}$ để $A = \frac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên

$$b) \text{ Tính tổng } S(n) = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+2)}$$

Bài 301: Cho x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=0$ và $xy+yz+zx=0$.

Hãy tính giá trị của biểu thức: $S = (x-1)^{2017} + y^{2018} + (z+1)^{2019}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 302: Cho $P = \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} - \frac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)}$

- c) Tìm ĐKXĐ của P , rút gọn P
 d) Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình $P = 2$

Bài 303: Rút gọn biểu thức:

a) $M = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}{x^2+5x+5}$

b) $N = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$

Bài 304: Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^4 + b^4 + c^4$

Bài 305: Cho phân thức $A = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 3x - 2}$

- a) Rút gọn A .
 b) Tính x để $A < 1$

Bài 306: a) Cho $\frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$, hãy tính $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

b) Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, hãy tính $B = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$

c) Cho $a > b > 0$ thỏa mãn: $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính $C = \frac{a-b}{a+b}$

Bài 307: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right)$

- c) Rút gọn P ;
 d) Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào?
 c) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Bài 308: Cho $\frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-2} = \frac{32x-19}{x^2-x-2}$. Tính $M \cdot N$?

Bài 309: Cho biểu thức: $Q = 1 + \frac{x+3}{x^2+5x+6} : \left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \frac{3x}{3x^2-12} - \frac{1}{x+2} \right)$

- c) Rút gọn Q ;
 d) Tìm các giá trị của x để $Q = 0, Q = 1$;
 e) Tìm các giá trị của x để $Q > 0$.

Bài 310: Cho phân thức: $A = \frac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 2a^2 - 4a - 8}$

b) Rút gọn A ;

c) Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Bài 311: Cho $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = a$. Tính $M = \left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) : \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$ theo a .

Bài 312: a) Cho a, b, c là ba số dương khác 0 thỏa mãn: $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$ (Với giả thiết các tỉ số đều có nghĩa). Tính: $M = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$.

b) Tìm số tự nhiên n khác 0, biết: $\left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{2017}{6045}$.

c) Tính: $M = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right)$

Bài 313: Cho $a+b=1$ và $ab \neq 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$

Bài 314: Cho biểu thức $E = \frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{8} + \frac{a}{12}$ với a là một số tự nhiên chẵn. Hãy chứng tỏ E có giá trị nguyên.

Bài 315: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $abc = 2019$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2019a}{ab+2019a+2019} + \frac{b}{bc+b+2019} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$$

Bài 316: Cho $3y - x = 6$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6}$

Bài 317: Cho biểu thức $P = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}, n \in \mathbb{N}^*$

b) Rút gọn P

c) Tính giá trị của P tại $n = 99$.

Bài 318: Cho đa thức $E = x^4 + 2017x^2 + 2016x + 2017$.

Tính giá trị của E với x là nghiệm của phương trình: $|x^2 - x + 1| = 1$.

Bài 319: So sánh A và B , biết: $A = (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2017}$; $B = (2017^{2017} + 2016^{2017})^{2016}$.

Bài 320: Hãy viết biểu thức sau: $\frac{2a+1}{a^2(a+1)}$ thành hiệu hai bình phương

Bài 321: Cho biểu thức : $P = \left(\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x^2-x} \right) : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} \right)$

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm giá trị của x để $P > -1$
- Giải phương trình $|P| = 2$

Bài 322: Cho $x^2 + y^2 = 2$ và $M = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2x^2y^2$

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức M không phụ thuộc vào giá trị của biến số x, y

Bài 323: Cho $A = \left[\frac{x-1}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-3x+x^2}{x^3-1} - \frac{1}{1-x} \right] : \frac{x^2+2x+1}{x-1}$

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A
- Tìm các giá trị thực của x để A và $\frac{2}{A}$ có giá trị là số nguyên.

Bài 324: Chứng minh rằng: nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thỏa mãn $(a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca)$ thì tam giác đó là tam giác đều.

B. Lời giải bài minh họa.

Bài 1: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} \quad (x \neq \pm 1)$

- Rút gọn biểu thức A
- Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -1\frac{2}{3}$
- Tìm giá trị của x để $A < 0$.

Lời giải

- Với $x \neq \pm 1$ thì:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2) \cdot (1-x) \end{aligned}$$

b) Tại $x = -1\frac{2}{3} = \frac{-5}{3}$ thì

$$A = \left[1 + \left(-\frac{5}{3} \right)^2 \right] - \left[1 - \left(-\frac{5}{3} \right) \right] = \left(1 + \frac{25}{9} \right) \cdot \left(1 + \frac{5}{3} \right) = 10\frac{2}{27}$$

c) Với $x \neq \pm 1$ thì $A < 0$ khi và chỉ khi $(1+x^2)(1-x) < 0$ (1)

Vì $1+x^2 > 0$ với mọi x nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Bài 2: Cho $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

Chứng minh rằng $a = b = c$

Lời giải

Biến đổi đẳng thức để được

$$a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + a^2 + 2ac = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4ac - 4bc$$

Biến đổi để có: $(a^2 + b^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (a^2 + c^2 - 2ac) = 0$

Biến đổi để có: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0(*)$

Vì $(a-b)^2 \geq 0; (b-c)^2 \geq 0; (a-c)^2 \geq 0$ với mọi a, b, c

Nên $(*)$ xảy ra khi và chỉ khi $(a-b)^2 = 0; (b-c)^2 = 0; (a-c)^2 = 0$

Từ đó suy ra $a = b = c$

Bài 3: Cho $a + b + c = 0$, chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Lời giải

Ta có: $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c$

Mặt khác

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$\Rightarrow (-c)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(-c)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{ (đpcm)}$$

Bài 4: Cho biểu thức: $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+4}{3-x}$

1) Rút gọn A

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

- 2) Tính giá trị của A biết $2x - x^2 = 1$
- 3) Có giá trị nào của x để $A = 1$ không ?
- 4) Tìm x nguyên để A nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

1) Rút gọn được $A = \frac{x+4}{x-3}$

2) ĐKXĐ: $x \neq 2$ và $x \neq 3$

$$2x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay $x = 1$ vào, tính được $A = \frac{-5}{2}$

3) $A = 1 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-3} = 1 \Leftrightarrow x+4 = x-3 \Leftrightarrow 0x = -7$ (vô nghiệm)

Vậy không có giá trị nào của x để $A = 1$

4) $A = \frac{x+4}{x-3} = 1 + \frac{7}{x-3}$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $x-3 \in U(7) = \{-7; -1; 1; 7\} \Rightarrow x \in \{-4; 2; 4; 10\}$

Thử lại và kết hợp với ĐKXĐ ta được $x \in \{-4; 4; 10\}$

Bài 5: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

g) Rút gọn biểu thức A

h) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

i) Tìm x để $|A| = A$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} \\ &= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x} \end{aligned}$$

b) A nguyên, mà x nguyên nên $2 \mid (1-2x)$

Từ đó tìm được $x = 1$ và $x = 0$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x = 0$

$$|A| = A \Leftrightarrow A > 0$$

c) Ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện : $-1 \neq x < \frac{1}{2}$

Bài 6: Cho biểu thức $Q = 1 + \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$

d) Rút gọn Q

e) Tính giá trị của Q biết $\left| x - \frac{3}{4} \right| = \frac{5}{4}$

f) Tìm giá trị nguyên của x để Q có giá trị nguyên

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq 0; -1; 2$

$$\begin{aligned} Q &= 1 + \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x} \\ &= 1 + \frac{x+1+x+1-2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)} \\ &= 1 + \frac{-2x^2+4x}{(x-1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)} \\ &= 1 + \frac{-2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1} \end{aligned}$$

b) $\left| x - \frac{3}{4} \right| = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & (ktm) \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Với $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow Q = -3$

c) $Q \in \mathbb{Z}$ với $x \in \{-3; -2; 1\}$

Bài 7: Cho biểu thức $M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$

d) Rút gọn M

e) Tìm a để $M > 0$

f) Tìm giá trị của a để biểu thức M đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Điều kiện: $a \neq 0; a \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2} \\ &= \left[\frac{(a-1)^2}{a^2+a+1} - \frac{1-2a^2+4a}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a-1} \right] \cdot \frac{4a^2}{a(a^2+4)} \\ &= \frac{(a-1)^3 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4} \\ &= \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4} \\ &= \frac{a^3 - 1}{a^3 - 1} \cdot \frac{4a}{a^2+4} = \frac{4a}{a^2+4} \end{aligned}$$

b) $M > 0 \Leftrightarrow 4a > 0 \Leftrightarrow a > 0$

Kết hợp với điều kiện suy ra $M > 0$ khi $a > 0$ và $a \neq 1$

$$\text{c) Ta có: } M = \frac{4a}{a^2+4} = \frac{(a^2+4) - (a^2-4a+4)}{a^2+4} = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$$\text{Vì } \frac{(a-2)^2}{a^2+4} \geq 0 \text{ với mọi } a \text{ nên } 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4} \leq 1 \text{ với mọi } a$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \frac{(a-2)^2}{a^2+4} = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Vậy $\text{Max}_M = 1$ khi $a = 2$.

Bài 8: Cho $x + y + z = 1$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Tính $A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}$

Lời giải

$$\text{Từ } x + y + z = 1 \Leftrightarrow (x + y + z)^3 = 1$$

$$\text{Mà } x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 - z^3 - (x^3 + y^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z-z) \left[(x+y+z)^2 + (x+y+z)z + z^2 \right] - (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz + xz + yz + z^2 + z^2 - x^2 + xy - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(3z^2 + 3xy + 3yz + 3xz) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)3(y+z)(x+z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ y=-z \\ x=-z \end{cases}$$

* Nếu $x = -y \Rightarrow z = 1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$

* Nếu $y = -z \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$

* Nếu $x = -z \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$

Bài 10: Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính $S = a^2 + b^{2012} + c^{2013}$

Lời giải

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1 \Rightarrow a, b, c \in [-1; 1]$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - (a^2 + b^2 + c^2) = a^2(a-1) + b^2(b-1) + c^2(c-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \leq 1 \Rightarrow a, b, c \text{ nhận hai giá trị là } 0 \text{ hoặc } 1$$

$$\Rightarrow b^{2012} = b^2; c^{2013} = c^2; \Rightarrow S = a^2 + b^{2012} + c^{2013} = 1$$

Bài 11: Tìm số tự nhiên n để: $B = \frac{n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 6n - 2}{n^2 + 2}$ có giá trị là một số nguyên

Lời giải

$$B = n^2 + 3n - \frac{2}{n^2 + 2}$$

$$B \text{ có giá trị nguyên} \Leftrightarrow 2 : n^2 + 2$$

$$n^2 + 2 \text{ là ước tự nhiên của } 2 \Rightarrow \begin{cases} n^2 + 2 = 1 \\ n^2 + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 = -1 (ktm) \\ n = 0 (tm) \end{cases}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vậy với $n = 0$ thì B có giá trị nguyên.

Bài 12: Chứng minh rằng:

c) $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} = 1$ biết $abc = 1$

d) Với $a+b+c=0$ thì $a^4+b^4+c^4=2(ab+bc+ca)^2$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} &= \frac{ac}{abc+ac+c} + \frac{abc}{abc^2+abc+ac} + \frac{c}{ac+c+1} \\ &= \frac{ac}{1+ac+c} + \frac{abc}{c+1+ac} + \frac{c}{ac+c+1} = \frac{abc+ac+1}{abc+ac+1} = 1 \end{aligned}$$

b)

$$a+b+c=0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc) \quad (1)$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+8abc(a+b+c)$$

(Vì $a+b+c=0$)

$$\Rightarrow 2(ab+ac+bc)=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow a^4+b^4+c^4=2(ab+ac+bc)^2$$

Bài 13: Cho $x+y=1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3} = 0$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} &= \frac{x^4-x-y^4+y}{(y^3-1)(x^3-1)} \\ &= \frac{(x^4-y^4)-(x-y)}{xy(y^2+y+1)(x^2+x+1)} \quad (\text{do } x+y=1 \Rightarrow y-1=-x \text{ \& } x-1=-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)}{xy(x^2y^2+y^2x+y^2+yx^2+xy+y+x^2+x+1)} \\
&= \frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy[x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+2]} \\
&= \frac{(x-y)(x^2-x+y^2-y)}{xy[x^2y^2+(x+y)^2+2]} = \frac{(x-y)[x(x-1)+y(y-1)]}{xy(x^2y^2+3)} \\
&= \frac{(x-y)[x(-y)+y(-x)]}{xy(x^2y^2+3)} = \frac{(x-y)(-2xy)}{xy(x^2y^2+3)} \\
&= \frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3} \text{ Suy ra điều phải chứng minh}
\end{aligned}$$

Bài 14: Cho phân thức $\frac{5x+5}{2x^2+2x}$

- c) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định
d) Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức bằng 1

Lời giải

$$\begin{aligned}
a) 2x^2+2x &= 2x(x+1) \neq 0 \\
\Leftrightarrow 2x &\neq 0 \quad \& \quad x+1 \neq 0 \\
\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{5x+5}{2x^2+2x} &= \frac{5(x+1)}{2x(x+1)} = \frac{5}{2x} \\
\frac{5}{2x} &= 1 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} (tm)
\end{aligned}$$

Bài 15: Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1} \right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$$

- e) Rút gọn P

- f) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$
- g) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.
- h) Tìm x để $P > 0$

Lời giải

$$4x^2 - 12x + 5 = (2x - 1)(2x - 5)$$

$$13x - 2x^2 - 20 = (x - 4)(5 - 2x)$$

$$21 + 2x - 8x^2 = (3 + 2x)(7 - 4x)$$

$$4x^2 + 4x - 3 = (2x - 1)(2x + 3)$$

$$\text{Điều kiện } x \neq \left\{ \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{-3}{2}; \frac{7}{4}; 4 \right\}$$

a) Rút gọn $P = \frac{2x - 3}{2x - 5}$

b) $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

+) $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{1}{2}$

+) $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{2}{3}$

c) Ta có: $1 \in \mathbb{Z}$

$$\text{Vậy } P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{x-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-5 \in U(2) = \{-1; -2; 1; 2\}$$

$$x-5 = -2 \Rightarrow x = 3 \quad (tm)$$

$$x-5 = -1 \Leftrightarrow x = 4 \quad (ktm)$$

$$x-5 = 1 \Rightarrow x = 6 \quad (tm)$$

$$x-5 = 2 \Rightarrow x = 7 \quad (tm)$$

d) $P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5}$

Ta có: $1 > 0$

Để $P > 0$ thì $\frac{2}{x-5} > 0 \Rightarrow x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

Với $x > 5$ thì $P > 0$

Bài 16: a) Rút gọn biểu thức : $\frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 4x^2 - 18x + 9}$

b) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ ($x, y, z \neq 0$). Tính $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Lời giải

a) Ta có:

$$*) x^2 + x - 6 = x^2 + 3x - 2x - 6 = x(x + 3) - 2(x + 3) = (x - 2)(x + 3)$$

$$*) x^3 - 4x^2 - 18x + 9 = x^3 + 3x^2 - 7x^2 - 21x + 3x + 9$$

$$= x^2(x + 3) - 7x(x + 3) + 3(x + 3)$$

$$= (x + 3)(x^2 - 7x + 3)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 4x^2 - 18x + 9} = \frac{(x + 3)(x - 2)}{(x + 3)(x^2 - 7x + 3)} = \frac{x - 2}{x^2 - 7x + 3} \quad (x \neq -1; x^2 - 7x + 3 \neq 0)$$

b) Vì

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^3} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{z^3} = -\left(\frac{1}{x^3} + 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y} + 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = -3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = 3 \cdot \frac{1}{xyz}$$

$$\text{Do đó: } xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = 3 \Leftrightarrow \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = 3 \Leftrightarrow \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = 3$$

Bài 17: Thực hiện phép tính: $A = \frac{1}{x-2} + \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 7x + 10} - \frac{2x-4}{x-5}$

Lời giải

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$$

$$A = \frac{1}{x-2} + \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 7x + 10} - \frac{2x-4}{x-5} = \frac{1}{x-2} + \frac{x^2 - x - 2}{(x-5)(x-2)} - \frac{2x-4}{x-5}$$

$$= \frac{x-5 + x^2 - x - 2 - (2x-4)(x-2)}{(x-5)(x-2)} = \frac{-x^2 + 8x - 15}{(x-5)(x-2)} = \frac{-(x-5)(x-3)}{(x-5)(x-2)} = \frac{-x+3}{x-2}$$

Bài 18: Cho x, y, z đôi một khác nhau và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{xz}{y^2 + 2xz} + \frac{xy}{z^2 + 2xy}$

Lời giải

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{xy + yz + xz}{xyz} = 0 \Leftrightarrow xy + yz + xz = 0 \Rightarrow yz = -xy - xz$$

$$x^2 + 2yz = x^2 + yz - xy - xz = x(x - y) - z(x - y) = (x - y)(x - z)$$

$$\text{Tương tự: } y^2 + 2xz = (y - x)(y - z); z^2 + 2xy = (z - x)(z - y)$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{yz}{(x - y)(x - z)} + \frac{xz}{(y - x)(y - z)} + \frac{xy}{(z - x)(z - y)}$$

Tính đúng $A = 1$

Bài 19: Cho ba số a, b, c khác nhau đôi một và khác 0, đồng thời thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}. \text{ Tính giá trị của biểu thức: } A = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$$

Lời giải

Nếu $a + b + c = 0$ thì $a + b = -c, b + c = -a, c + a = -b$

$$\text{Do đó, } \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = -1 \Rightarrow A = \frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} = -1$$

$$\text{Nếu } a + b + c \neq 0 \text{ thì } \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b+b+c+c+a}{c+a+b} = 2$$

Do đó, $a + b = 2c, b + c = 2a, c + a = 2b \Rightarrow a = b = c$, trái giả thiết

Vậy $A = -1$

Bài 20: Cho $x(m+n) = y(n+p) = z(p+m)$ trong đó x, y, z là các số khác nhau và khác 0,

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{m-n}{x(y-z)} = \frac{n-p}{y(z-x)} = \frac{p-m}{z(x-y)}$$

Lời giải

Vì $xyz \neq 0$ nên: $x(m+n) = y(n+p) = z(p+m)$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Rightarrow \frac{x(m+n)}{xyz} = \frac{y(n+p)}{xyz} = \frac{z(p+m)}{xyz}$$

$$\text{hay: } \frac{m+n}{yz} = \frac{n+p}{xz} = \frac{p+m}{xy}$$

$$= \frac{(p+m)-(n+p)}{xy-yz} = \frac{(m+n)-(p+m)}{yz-xy} = \frac{(n+p)-(m+n)}{xz-yz}$$

$$= \frac{m-n}{x(y-z)} = \frac{n-p}{y(z-x)} = \frac{p-m}{z(x-y)}$$

Bài 21: Cho biểu thức $A = \frac{3x^3 - 14x^2 + 3x + 36}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$

- Tìm giá trị của x để biểu thức A xác định
- Tìm giá trị của x để biểu thức A có giá trị bằng 0
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị nguyên.

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq \frac{1}{3}, x \neq 3$

b) $\frac{3x^3 - 14x^2 + 3x + 36}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9} = \frac{(x-3)^2(3x+4)}{(3x-1)(x-3)} = \frac{3x+4}{3x-1}$

$$A = 0 \Leftrightarrow 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} (tm)$$

Vậy $x = -\frac{4}{3}$ thì $A = 0$

c) $A = \frac{3x+4}{3x-1} = \frac{3x-1+5}{3x-1} = 1 + \frac{5}{3x-1}$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{5}{3x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x-1 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

$3x-1$	-5	-1	1	5
x	$-4/3(ktm)$	$0(tm)$	$2/3(ktm)$	$2(tm)$

Vậy $x \in \{0; 2\}$ thì $A \in \mathbb{Z}$

Bài 22:

a) Chứng minh: $(x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) = x^4 - y^4$

b) Tìm a, b, c biết: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ và $a^8 + b^8 + c^8 = 3$

Lời giải

a) Ta có:

$$(x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + x^3y - x^2y^2 + xy^3 - y^4 = x^4 - y^4$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

b) Biến đổi $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ về $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

Lập luận suy ra $a = b = c$

Thay $a = b = c$ vào $a^8 + b^8 + c^8 = 3$ ta có: $3a^8 = 3 \Leftrightarrow a^8 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = b = c = 1 \\ a = b = c = -1 \end{cases}$$

Bài 23: Cho biểu thức:

$$P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} \text{ với } x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của biểu thức P , biết x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$$

Lời giải

a) Với $x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2 y - (x^2 - y^2)(x + y) - xy^2}{xy(x + y)} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{2}{x} - \frac{xy(x - y) - (x - y)(x + y)^2}{xy(x + y)} \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{2}{x} + \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{xy(x + y)} \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{2}{x} + \frac{x - y}{xy} = \frac{x + y}{xy} \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0$$

$$\text{Lập luận } \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} (tm)$$

$$\text{Nên thay } x = 1; y = -3 \text{ vào biểu thức } P = \frac{x + y}{xy} = \frac{1 + (-3)}{1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}$$

Bài 24: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Lời giải

Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a + b + c$, rút gọn suy ra đpcm

Bài 25: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A , biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Rút gọn kết quả : $A = \frac{-1}{x-2}$

b) $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ A = \frac{4}{5} \end{cases}$

c) $A < 0 \Leftrightarrow x > 2$

d) $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \dots \Rightarrow x \in \{1; 3\}$

Bài 26: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$. Tính : $a^{2013} + b^{2014}$

Lời giải

$$(a^{2001} + b^{2001})(a + b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a + 1) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vì $a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b = 1(tm) \\ b = 0(ktm) \end{cases}$

Vì $b = 1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a = 1(tm) \\ a = 0(ktm) \end{cases}$

Vậy $a = 1; b = 1 \Rightarrow a^{2013} + b^{2014} = 2$

Bài 27: Cho biểu thức $A = \frac{x^2}{x-3} \left(\frac{x^2+9}{x} - 6 \right) + 5$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị của x để A đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó

Lời giải

a) ĐKXD $x \neq 0; x \neq 3$

$$A = \frac{x^2}{x-3} \cdot \frac{x^2-6x+9}{x} + 5 = \frac{x^2}{x-3} \cdot \frac{(x-3)^2}{x} + 5 = x(x-3) + 5$$

b) $A = x(x-3) + 5 = x^2 - 3x + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$

Vậy $\min A = \frac{11}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Bài 28: Cho 3 số a, b, c khác 0, thỏa mãn $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1$.

Tính giá trị của biểu thức $M = (a^{2015} + b^{2015})(b^{2017} + c^{2017})(c^{2019} + a^{2019})$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) &= 1 \Leftrightarrow (a+b+c) \cdot \frac{ab+bc+ac}{abc} = 1 \\
 &\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ac) - abc = 0 \\
 &\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nếu $a+b=0 \Rightarrow a=-b \Rightarrow (a^{2015}+b^{2015})=0 \Rightarrow M=0$

Nếu $b+c=0 \Rightarrow b=-c \Rightarrow (b^{2017}+c^{2017})=0 \Rightarrow M=0$

Nếu $a+c=0 \Rightarrow a=-c \Rightarrow a^{2019}+c^{2019}=0 \Rightarrow M=0$

Bài 29: Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng:

$$\text{Nếu } a+b+c=0 \text{ thì } \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9$$

Lời giải

$$\text{Đặt } \frac{a-b}{c} = x; \frac{b-c}{a} = y; \frac{c-a}{b} = z \Rightarrow \frac{c}{a-b} = \frac{1}{x}; \frac{a}{b-c} = \frac{1}{y}; \frac{b}{c-a} = \frac{1}{z} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 9$$

$$\text{Ta có: } (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z}\right) \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta lại có: } \frac{y+z}{x} &= \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \cdot \frac{c}{a-b} = \frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab} \cdot \frac{c}{a-b} \\
 &= \frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)} = \frac{c(c-a-b)}{ab} = \frac{c[2c-(a+b+c)]}{ab} = \frac{2c^2}{ab}
 \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{x+z}{y} = \frac{2a^2}{bc}; \frac{x+y}{z} = \frac{2b^2}{ac}$$

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{2c^2}{ab} + \frac{2a^2}{bc} + \frac{2b^2}{ac} = 3 + \frac{2}{abc}(a^3+b^3+c^3)$$

$$\text{Vì } a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$\text{Do đó: } (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{2}{abc} \cdot 3abc = 3 + 6 = 9$$

Bài 30: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{x^3-1} + \frac{1}{x-1}\right) : \left(1 - \frac{x-8}{x^2+x+1}\right) \quad (x \neq 1)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P khi x là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

a) Với $x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x-4}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) : \frac{x^2+x+1-x+8}{x^2+x+1} \\ &= \left(\frac{x-4+x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) : \frac{x^2+9}{x^2+x+1} = \frac{x^2+2x-3}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2+9} \\ &= \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{x+3}{x^2+9} \end{aligned}$$

Vậy $x \neq 1$ thì $P = \frac{x+3}{x^2+9}$

b) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2(tm) \\ x = 1(ktm) \end{cases}$

thay $x = 2$ vào P ta có: $P = \frac{2+3}{2^2+9} = \frac{5}{13}$

Kết luận với $x = 2$ thì $P = \frac{5}{13}$

Bài 31: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2013}{x}$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức xác định

b) Rút gọn biểu thức A

c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

b) $A = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x+2013}{x}$
 $= \frac{(x+1+x-1)(x+1-x+1) + x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x+2013}{x} = \frac{x+2013}{x}$

c) Ta có A nguyên $\Leftrightarrow (x+2013):x \Leftrightarrow x \in U(2013)$

Vậy x là ước của 2013, $x \neq \pm 1$

Bài 32: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

c) Tìm x để $|A| + A = 0$

Lời giải

a) $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

$$\text{ĐKXĐ: } x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$$

$$A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1} = \left(\frac{x+1+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$$

$$= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

$$\text{b) Để } A \text{ nguyên thì } \frac{2}{1-2x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1-2x \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$$

$$*) 1-2x = -2 \Rightarrow x = \frac{3}{2} (k\text{tm})$$

$$*) 1-2x = -1 \Rightarrow x = 1 (k\text{tm})$$

$$*) 1-2x = 1 \Leftrightarrow x = 0 (tm)$$

$$*) 1-2x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} (k\text{tm})$$

Vậy $x = 0$ thì A nhận giá trị nguyên

$$\text{c) } |A| + A = 0 \Leftrightarrow |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0 \Leftrightarrow 1-2x < 0 \Leftrightarrow -2x < -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Đối chiếu với ĐKXĐ ta có $x > \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm

Bài 33: Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 210$

Tính giá trị của biểu thức $B = |a-b| + |b-c| + |c-a|$

Lời giải

Đặt $a-b=x; b-c=y; c-a=z \Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow z=-(x+y)$, Ta có:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 210 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - (x+y)^3 = 210 \Leftrightarrow -3xy(x+y) = 210 \Leftrightarrow xyz = 210$$

$$\text{Ta có: } x^3 + y^3 + z^3 = 210 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - (x+y)^3 = 210 \Leftrightarrow -3xy(x+y) = 210$$

Do x, y, z là số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz = 70 = (-2) \cdot (-5) \cdot 7$ nên $\{x; y; z\} \in \{-2; -5; 7\}$

$$\Rightarrow A = |a-b| + |b-c| + |c-a| = 14$$

Bài 34:

$$\text{a) Cho } x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz. \text{ Hãy rút gọn phân thức: } P = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\text{b) Tìm tích: } M = \frac{1^4+4}{3^4+4} \cdot \frac{5^4+4}{7^4+4} \cdot \frac{9^4+4}{11^4+4} \cdots \frac{17^4+4}{19^4+4}$$

$$\text{c) Cho } x = by + cz; y = ax + cz; z = ax + by \text{ và } x + y + z \neq 0; xyz \neq 0.$$

$$\text{CMR: } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$$

$$\text{d) Cho } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0, \text{ tính giá trị của biểu thức } P = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$$

Lời giải

- a) Từ $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ chỉ ra được $x + y + z = 0$ hoặc $x = y = z$

$$TH1: x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z; x + z = -y; y + z = -x \Rightarrow P = -1$$

$$TH2: x = y = z \Rightarrow P = \frac{1}{8}$$

- b) Nhận xét được: $n^4 + 4 = [(n-1)^2 + 1][(n+1)^2 + 1]$. Do đó:

$$M = \frac{1 \cdot (2^2 + 1)}{(2^2 + 1) \cdot (4^2 + 1)} \cdot \frac{(4^2 + 1) \cdot (6^2 + 1)}{(6^2 + 1) \cdot (8^2 + 1)} \cdots \frac{(16^2 + 1) \cdot (18^2 + 1)}{(18^2 + 1) \cdot (20^2 + 1)} = \frac{1}{20^2 + 1} = \frac{1}{401}$$

- c) Từ giả thiết $\Rightarrow 2cz + z = x + y \Rightarrow 2cz = x + y - z$

$$\Rightarrow c = \frac{x + y - z}{2z} \Rightarrow c + 1 = \frac{x + y + z}{2z} \Rightarrow \frac{1}{c + 1} = \frac{2z}{x + y + z}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{1+a} = \frac{2x}{x+y+z}; \frac{1}{1+b} = \frac{2y}{x+y+z}. \text{ Khi đó: } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$$

- d) Từ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$

Khi đó:

$$P = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = xyz \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3$$

Bài 35: Cho biểu thức: $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm x để $P < 1$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Lời giải

- a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

$$\text{Rút gọn } P \text{ ta có: } P = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P < 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{x-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

Vậy với $x < 1$ và $x \neq 0; x \neq -1$ thì $P < 1$

$$\text{c) Ta có: } P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2$$

Khi $x > 1; x-1 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và

chỉ khi $x = 2$. Vậy GTNN của P bằng 4 $\Leftrightarrow x = 2$

Bài 36:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

a) Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

b) Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$$

Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2-x) + x^2(2-x)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2-x)} \right) \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \\ &= \frac{x(x-2)^2 + 4x^2}{2(x-2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x+1)(x+2)}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x+1}{x^2} \\ &= \frac{x(x^2 + 4)(x+1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x+1}{2x} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{x+1}{2x}$ với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

b) Ta có: $a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 - b(a-c)(a+c-b)^2 = 0$ (1)

Đặt $\begin{cases} a+b-c = x \\ b+c-a = y \\ a+c-b = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x+z}{2} \\ b = \frac{x+y}{2} \\ c = \frac{y+z}{2} \end{cases}$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2} \right) \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2} \right) \cdot x^2 - \frac{1}{4} (x+y)(x-y)z^2 \\ &= \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x-z}{2} \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - z^2)y^2 + \frac{1}{4} (z^2 - y^2)x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 = 0 = VP \quad (dfcm)$$

Bài 37:

a) Chứng minh rằng: Nếu $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ thì $x = y = z$

b) Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$

Chứng minh rằng $a = b = c$

Lời giải

a) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \quad (1)$$

Ta có: $(x - y)^2 \geq 0, (y - z)^2 \geq 0, (z - x)^2 \geq 0$

$$\text{Do đó (1)} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z$$

b) Ta có: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \Leftrightarrow a^4c^2 + b^4a^2 + c^4b^2 = abc(a^2c + c^2a + b^2c)$

Đặt $x = a^2c, y = b^2a, z = c^2b$. Ta được: $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$

Áp dụng kết quả câu a ta được:

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z$$

$$\Rightarrow a^2c = b^2a = c^2b \Rightarrow ac = b^2; bc = a^2; ab = c^2$$

$$\Rightarrow a = b = c (dfcm)$$

Bài 38: Rút gọn biểu thức $B = \frac{x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz}{(x + y)^2 + (y - z)^2 + (x + z)^2}$

Lời giải

Ta có:

$$x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz = (x - y)^3 + 3xy(x - y) - z^3 - 3xyz$$

$$= (x - y - z)^3 + 3(x - y)z(x - y - z) + 3xy(x - y - z)$$

$$= (x - y - z) \left[(x - y - z)^2 + 3xz - 3yz + 3xy \right]$$

$$\begin{aligned}
&= (x - y - z)(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz + 3xz - 3yz + 3xy) \\
&= (x - y - z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz + xz) \\
&*) (x + y)^2 + (y - z)^2 + (x + z)^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + x^2 + 2xz + z^2 \\
&= 2(x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz + xz) \\
\text{Vậy } B &= \frac{(x - y - z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz + xz)}{2(x^2 + y^2 + z^2 + xy - yz + xz)} = \frac{x - y - z}{2}
\end{aligned}$$

Bài 39: Cho biểu thức $A = \left(\frac{3}{x^2 - 1} + \frac{x + 1}{2x - 2} - \frac{x + 3}{2x + 2} \right) : \frac{5}{4x^2 - 4}$

- a) Hãy tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức A được xác định
b) Chứng minh rằng khi giá trị của biểu thức xác định thì nó không phụ thuộc vào giá trị của biến x

Lời giải

- a) Giá trị của biểu thức A được xác định với điều kiện: $x \neq \pm 1$
b) Với $x \neq \pm 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \left[\frac{3}{(x-1)(x+1)} + \frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{x+3}{2(x+1)} \right] \cdot \frac{4x^2 - 4}{5} \\
&= \frac{6 + (x+1)^2 - (x+3)(x-1)}{2(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4(x-1)(x+1)}{5} \\
&= \frac{(6 + x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x + 3) \cdot 2}{5} = 4
\end{aligned}$$

Vậy khi giá trị biểu thức được xác định thì nó không phụ thuộc vào giá trị của biến

Bài 40:

- a) Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn: $ab + bc + ca = 1$

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$

b) Cho $\begin{cases} x + y = a + b \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có: $x^n + y^n = a^n + b^n$

Lời giải

- a) Ta có:

$$1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = a(a+b) + c(a+b) = (a+b)(a+c)$$

Tương tự:

$$1 + b^2 = (b+a)(b+c) \text{ và } 1 + c^2 = (c+a)(c+b)$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)(a+c)(b+a)(b+c)(c+a)(c+b)} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) Từ } x^2 + y^2 &= a^2 + b^2 \Rightarrow (x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-a)(x+a) = (y-b)(y+b) = 0 \end{aligned}$$

Bởi vì : $x + y = a + b \Leftrightarrow x - a = b - y$, thế vào ta có:

$$\begin{aligned} (b-y)(x+a) + (y-b)(y+b) &= 0 \\ \Rightarrow (b-y)[(x+a) - (y+b)] &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b-y=0 \\ x+a=y+b \end{cases} \end{aligned}$$

$$*) \text{ Nếu } b-y=0 \Rightarrow y=b \Rightarrow x=a^n + y^n = a^n + b^n$$

$$*) \text{ Nếu } x+a=y+b \Rightarrow \begin{cases} x-y=b-a \\ x+y=a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=b \\ y=a \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } x^n + y^n = b^n + a^n = a^n + b^n$$

Vậy trong mọi trường hợp, ta có: $x^n + y^n = a^n + b^n$

Bài 41:

$$\text{a) Tìm } a, b, c \text{ biết } 5a - 3b - 4c = 46 \text{ và } \frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6}$$

$$\text{b) Tìm 2 số hữu tỉ } a \text{ và } b \text{ biết: } a+b=ab=a:b (b \neq 0)$$

$$\text{c) Cho } a+b+c=1 \text{ và } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0. \text{ Tính } a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{d) Cho } a+b+c=2014 \text{ và } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{1}{2014}$$

$$\text{Tính } S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{5a-5}{10} = \frac{3b+9}{12} = \frac{4c-20}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{(5a-3b-4c) - 5 - 9 + 20}{10-12-24} = \frac{46+6}{-26} = -2 \text{ (Vì } 5a-3b-4c=46)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-1=-4 \\ b+3=-8 \\ c-5=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-11 \\ c=-7 \end{cases}$$

$$\text{b) Ta có: } a+b=ab \Leftrightarrow a=ab-b=b(a-1)$$

$$\text{Do đó: } a:b=b(a-1):b=a-1$$

$$\text{Nên } a+b=a-1 \Leftrightarrow b=-1 \text{ và } a=-1(a-1) \Leftrightarrow a=-a+1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } a=\frac{1}{2}; b=-1$$

c) Phân tích 2 giả thiết để suy ra đpcm

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Phân tích $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, phần nào có $a + b + c$ thì thay bằng 1

d) Ta có: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{1}{2011}$

$$a + b + c = 2014 \Rightarrow a = 2014 - (b + c);$$

$$b = 2014 - (a + c); c = 2014 - (a + b)$$

Do đó:

$$S = \frac{2014 - (b + c)}{b + c} + \frac{2014 - (a + c)}{a + c} + \frac{2014 - (a + b)}{a + b}$$

$$= \frac{2014}{b + c} - 1 + \frac{2014}{a + c} - 1 + \frac{2014}{a + b} - 1$$

$$= 2014 \cdot \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{a + c} + \frac{1}{a + b} \right) - 3$$

$$= 2014 \cdot \frac{1}{2014} - 3 = 1 - 3 = -2$$

Vậy $S = -2$

Bài 42:

a) Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào biến:

$$(6x + 7)(2x - 3) - (4x + 1)\left(3x - \frac{7}{4}\right)$$

b) Tính giá trị biểu thức $P = \frac{x - y}{x + y}$. Biết $x^2 - 2y^2 = xy$ ($x + y \neq 0; y \neq 0$)

Lời giải

a) $(6x + 7)(2x - 3) - (4x + 1)\left(3x - \frac{7}{4}\right) = 12x^2 - 18x + 14x - 21 - 12x^2 + 7x - 3x + \frac{7}{4} = \frac{-77}{4}$

b) $x^2 - 2y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) = 0$

Vì $x + y \neq 0$ nên $x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y$. Khi đó $A = \frac{2y - y}{2y + y} = \frac{1}{3}$

Bài 43: Cho biểu thức: $A = \frac{4xy}{y^2 - x^2} : \left(\frac{1}{y^2 - x^2} + \frac{1}{y^2 + 2xy + x^2} \right)$

a) Tìm điều kiện của x, y để giá trị của A được xác định

b) Rút gọn A

c) Nếu x, y là các số thực làm cho A xác định và thỏa mãn: $3x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1$, hãy tìm tất cả các giá trị nguyên dương của A.

Lời giải

a) $x \neq \pm y; y \neq 0$

b) $A = 2x(x + y)$

c) Cần chỉ ra giá trị lớn nhất của A, từ đó tìm được được tất cả các giá trị nguyên dương của A

Từ (gt): $3x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + x^2 - 2xy + y^2 + 2(x - y) = 1$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Rightarrow 2x(x+y) + (x-y)^2 + 2(x-y) + 1 = 2 \Rightarrow A + (x-y+1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow A = 2 - (x-y+1)^2 \leq 2 \text{ (do } (x-y+1) \geq 0 \forall x, y) \Rightarrow A \leq 2$$

$$+) A = 2 \text{ khi } \begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x(x+y)=2 \\ x \neq \pm y; y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$+) A = 1 \text{ khi } \begin{cases} (x-y+1)^2 = 1 \\ 2x(x+y) = 1 \\ x \neq \pm y; y \neq 0 \end{cases} \text{ . Từ đó , chỉ cần chỉ ra được một cặp giá trị của } x \text{ và } y, \text{ chẳng hạn}$$

$$: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}+3}{2} \end{cases}$$

Vậy A chỉ có thể có 2 giá trị nguyên dương là: $A=1; A=2$

Bài 44: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

Lời giải

a) ĐK: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(4 + x^2)(2 - x)} \right) \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \frac{x(x-2)^2 + 4x^2}{2(x-2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x+1}{x^2} \\ &= \frac{x(x^2 + 4)(x+1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x+1}{2x}. \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{x+1}{2x}$ với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

b) $\frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1 : 2x \Rightarrow 2x+2 : 2x \Rightarrow 2 : 2x \Rightarrow 1 : x \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ (TMDKXD)}$

Bài 45: Cho biểu thức : $P = \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

- a) Rút gọn P
 b) Tìm các giá trị của x để $P = 6$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) P &= \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1} \\ &= \frac{x^4 \cdot (2x - 1) - (2x - 1)}{(2x - 1)(2x + 1)} + \frac{2(4x^2 - 2x + 1)}{(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)} \\ &= \frac{(x^4 - 1)(2x - 1)}{(2x - 1)(2x + 1)} + \frac{2}{2x + 1} = \frac{x^4 - 1}{2x + 1} + \frac{2}{2x + 1} = \frac{x^4 + 1}{2x + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{x^4 + 1}{2x + 1}$$

$$b) \text{ĐK: } x \neq \pm \frac{1}{2}$$

$$P = 6 \Leftrightarrow \frac{x^4 + 1}{2x + 1} = 6 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 12x + 6$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = (2x + 3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 = 2x + 3 \quad (1) \quad \text{hoac} \quad x^2 + 2 = -2x - 3 \quad (2)$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{2} \\ x - 1 = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{tmdk})$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = -4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = -4 \quad (\text{VN})$$

$$\text{Vậy } S = \{1 \pm \sqrt{2}\}$$

Bài 46: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1 - x^3}{1 - x} - x \right) : \frac{1 - x^2}{1 - x - x^2 + x^3} \quad (x \neq -1; 1)$

- a) Rút gọn biểu thức A
 b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -1\frac{2}{3}$
 c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Lời giải

- a) Với $x \neq \pm 1$ thì

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\
 &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\
 &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2)(1-x)
 \end{aligned}$$

b) Tại $x = -1\frac{2}{3} \Rightarrow A = 10\frac{2}{27}$

c) Với $x \neq \pm 1$ thì $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Bài 47: Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq 0$

$$\begin{aligned}
 A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x} \\
 &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1-3x^2-3x}{3x} \right) \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1-2x-3x^2}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} \\
 &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2-2+6x}{3x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1}
 \end{aligned}$$

b) $A = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$

Để A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{x-1}$ có giá trị nguyên $\Rightarrow x \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

$\Rightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3\}$ vì $x \neq -1; x \neq 0 \Rightarrow \{x\} = \{2; 3\}$

Bài 48: Cho biểu thức: $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+4}{3-x}$

1) Rút gọn A

2) Tính giá trị của A biết $2x - x^2 = 1$

3) Có giá trị nào của x để $A = 1$ không?

4) Tìm x nguyên để A nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

5) Rút gọn được $A = \frac{x+4}{x-3}$

6) ĐKXĐ: $x \neq 2$ và $x \neq 3$

$$2x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay $x = 1$ vào, tính được $A = \frac{-5}{2}$

7) $A = 1 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-3} = 1 \Leftrightarrow x+4 = x-3 \Leftrightarrow 0x = -7$ (vô nghiệm)

Vậy không có giá trị nào của x để $A = 1$

8) $A = \frac{x+4}{x-3} = 1 + \frac{7}{x-3}$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $x-3 \in U(7) = \{-7; -1; 1; 7\} \Rightarrow x \in \{-4; 2; 4; 10\}$

Thử lại và kết hợp với ĐKXĐ ta được $x \in \{-4; 4; 10\}$

Bài 49: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A , biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Lời giải

a) Rút gọn được kết quả : $A = \frac{-1}{x-2}$

b) $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ A = \frac{2}{5} \end{cases}$

c) $A < 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$$A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-2 \in U(1) = \{\pm 1\} \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}$$

Bài 50: Cho biểu thức $M = \left[\frac{x^2}{x^3-4x} + \frac{6}{6-3x} + \frac{1}{x+2} \right] : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn M

b) Tính giá trị của M khi $|x| = \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Rút gọn M

$$M = \left[\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right] : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right) = \left[\frac{x^2}{x(x - 2)(x + 2)} - \frac{6}{3(x - 2)} + \frac{1}{x + 2} \right] : \frac{6}{x + 2}$$

$$M = \frac{-6}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x + 2}{6} = \frac{1}{2 - x}$$

$$\text{b) } |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{2} \Rightarrow M = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow M = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

Bài 51: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm các giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức được kết quả: $A = \frac{-1}{x - 2}$

$$\text{b) } |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ A = \frac{4}{5} \end{cases}$$

c) $A < 0 \Leftrightarrow x > 2$

$$d) A \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dots \Rightarrow x \in \{1; 3\}$$

Bài 52: Cho $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

- a) Rút gọn P
b) Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a)

$$a^3 - 4a^2 - a + 4 = (a-1)(a+1)(a-4)$$

$$a^3 - 7a^2 + 14a - 8 = (a-2)(a-1)(a-4)$$

Nêu ĐKXD: $a \neq 1; a \neq 2; a \neq 4$

Rút gọn $P = \frac{a+1}{a-2}$

b)

$$P = \frac{a-2+3}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2}; \text{ta thấy } P \text{ nguyên khi } a-2 \text{ là ước của } 3, \text{ mà } U(3) = \{-1; 1; -3; 3\}, \text{ từ}$$

đó tìm được $a \in \{-1; 3; 5\}$

Bài 53: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}$

- a) Tìm ĐKXD rồi rút gọn biểu thức A
b) Tìm giá trị của x để $A > 0$
c) Tính giá trị của A trong trường hợp $|x-7| = 4$

Lời giải

ĐKXD: $x \neq \{0; \pm 2; 3\}$

$$\begin{aligned} a) A &= \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} = \frac{(2+x)^2 + 4x^2 - (2-x)^2}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x^2(2-x)}{x(x-3)} \\ &= \frac{4x^2 + 8x}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x(2-x)}{x-3} = \frac{4x(x+2)x(2-x)}{(2-x)(2+x)(x-3)} = \frac{4x^2}{x-3} \end{aligned}$$

$$b) A > 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} > 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \text{ (tmdk)}$$

Vậy $x > 3$ thì $A > 0$

$$c) |x-7| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-7=4 \\ x-7=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11(tm) \\ x=3(ktm) \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{121}{2} \text{ khi } x=11$$

Bài 54: Cho biểu thức : $P = \left(\frac{x}{x^2 - 25} + \frac{5 - x}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x - 5}{x^2 + 5x} - \frac{2x}{5 - x}$

- a) Rút gọn biểu thức P
 b) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để P có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

- a) Tìm được ĐKXĐ của P là : $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x}{(x+5)(x-5)} - \frac{x-5}{x(x+5)} \right) : \frac{2x-5}{x(x+5)} - \frac{2x}{5-x} \\ &= \frac{x^2 - (x-5)^2}{x(x+5)(x-5)} : \frac{2x-5}{x(x+5)} - \frac{2x}{5-x} \\ &= \frac{(x-x+5)(x+x-5)}{x(x-5)(x+5)} \cdot \frac{x(x+5)}{2x-5} - \frac{2x}{5-x} \\ &= \frac{5}{x-5} + \frac{2x}{x-5} = \frac{5+2x}{x-5} \end{aligned}$$

b)

$$P \in \mathbb{Z} \begin{cases} x \neq 0; x \neq \pm 5; x \in \mathbb{Z} (*) \\ \frac{5+2x}{x-5} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ta có: $\frac{5+2x}{x-5} = 2 + \frac{15}{x-5}$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-5 \in U(15) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15\}$

Mà x lớn nhất nên $x-5$ lớn nhất. Do đó $x-5 = 15 \Leftrightarrow x = 20$ (thỏa mãn $(*)$)

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của $x = 20$ để P có giá trị là một số nguyên.

Bài 55. Cho biểu thức : $P = \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{x^2 - 4y^2}{x + 2y} \right) : \left(\frac{2}{y^2x} - \frac{3}{x^2y} \right)$

- d) Rút gọn biểu thức P
 e) Tính giá trị biểu thức P khi x, y thỏa mãn ; $|x| + |y| = 6; x^2 + y^2 = 26$
 f) Nếu x, y là các số thực dương làm cho P xác định và thỏa mãn: $x + y = 2$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P

Lời giải

1a)

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{x^2 - (2y)^2}{x + 2y} \right) : \left(\frac{2x - 3y}{x^2 y^2} \right) \\
 &= \left[\frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} + \frac{(x - 2y)(x + 2y)}{x + 2y} \right] : \frac{2x - 3y}{x^2 y^2} \\
 &= (x - y + x - 2y) \cdot \frac{x^2 y^2}{2x - 3y} \\
 &= (2x - 3y) \cdot \frac{x^2 y^2}{2x - 3y} = x^2 y^2
 \end{aligned}$$

1b)

Điều kiện : $x \neq 0; y \neq 0; x \neq \frac{3}{2}y; x \neq -2y$

Ta có:

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2 \Leftrightarrow 6^2 = 26 + 2|x||y| \Leftrightarrow |x||y| = 5$$

$$\text{Vậy } P = 5^2 = 25$$

1c)

Với x, y dương và thỏa mãn điều kiện $x \neq 0; y \neq 0; x \neq \frac{3}{2}; x \neq -2y$ ta có:

$$xy \leq \left(\frac{x + y}{2} \right)^2 = 1 \text{ (vì } x + y = 2\text{)}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy GTLN của P bằng 1 $\Leftrightarrow x = y = 1$

Bài 56. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1 - x^3}{1 - x} - x \right) : \frac{1 - x^2}{1 - x - x^2 + x^3} \quad (x \neq \pm 1)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Lời giải

a) Với $x \neq -1; 1$ thì

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\
 &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\
 &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2) \cdot (1-x)
 \end{aligned}$$

b) Với $x \neq \pm 1$ thì $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0 \quad (1)$

Vì $1+x^2 > 0$ với mọi x nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Bài 57. Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\
 &= \left(\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)} - \frac{2x^2}{4(2-x)+x^2(2-x)} \right) \cdot \frac{x^2-x-2}{x^2} \\
 &= \left(\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)} - \frac{2x^2}{(x^2+4)(2-x)} \right) \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \\
 &= \frac{x \cdot (x-2)^2 + 4x^2}{2(x-2)(x^2+4)} \cdot \frac{(x+1) \cdot (x+2)}{x^2} = \frac{x^3-4x^2+4x+4x^2}{2(x^2+4)} \cdot \frac{x+1}{x^2} \\
 &= \frac{x(x^2+4)(x+1)}{2x^2(x^2+4)} = \frac{x+1}{2x}
 \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{x+1}{2x}$ với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Bài 58. Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$$

Lời giải

Ta có: $a(b-c)(b+c-a^2)+c(a-b)(a+b-c^2)-b(a-c)(a+c-b^2)=0$ (1)

$$\text{Đặt } \begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ a+c-b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{x+z}{2} \\ b=\frac{x+y}{2} \\ c=\frac{y+z}{2} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2} \right) \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2} \right) x^2 - \frac{1}{4} (x+y)(x-y) z^2 \\ &= \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x-z}{2} \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2) z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - z^2) y^2 + \frac{1}{4} (z^2 - y^2) x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2) z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - y^2) z^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2) z^2 = 0 = VP \quad (dfcm) \end{aligned}$$

Bài 59

Biết $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$. Tính giá trị biểu thức: $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Lời giải

$$4a^2 + b^2 = 5ab$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(4a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ 4a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 4a=b \end{cases}$$

Do $2a > b > 0$ nên $4a = b$ loại

$$\text{Với } a=b \text{ thì } C = \frac{ab}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}$$

Bài 60. Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{6x+3}{x^3+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \right) : (x+2)$

a) Tìm điều kiện xác định của Q , rút gọn Q

b) Tìm x khi $Q = \frac{1}{3}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức Q .

Lời giải

a) ĐK: $x \neq -1; x \neq -2$

$$Q = \frac{x^2 - x + 1 + 6x + 3 - 2x - 2}{x^3 + 1} \cdot \frac{1}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

$$b) \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 3 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện suy ra $x = 2$ thì $Q = \frac{1}{3}$

$$c) Q = \frac{1}{x^2 - x + 1}; \forall 1 > 0; x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

$$Q \text{ đạt GTLN} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \text{ đạt GTLN} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} (tm). \text{ Lúc đó } Q = \frac{4}{3}$$

Vậy GTLN của Q là $Q = \frac{4}{3}$ khi $x = \frac{1}{2}$

Bài 61. Cho $abc \neq \pm 1$ và $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a}$. Chứng minh rằng $a = b = c$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a} \Rightarrow a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$$

Do đó:

$$a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b - c}{bc}; b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{c - a}{ac}; c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab}$$

$$\text{Suy ra: } (a - b)(b - c)(c - a) = \frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{a^2 b^2 c^2}$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(b - c)(c - a)(a^2 b^2 c^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (a - b)(b - c)(c - a) = 0 \text{ (do } abc \neq \pm 1)$$

Suy ra $a = b = c$

Bài 62. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1}{a^2 + a} + \frac{1}{a^2 + 3a + 2} + \frac{1}{a^2 + 5a + 6} + \frac{1}{a^2 + 7a + 12} + \frac{1}{a^2 + 9a + 20}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

Điều kiện: $a \neq 0; a \neq -1; a \neq -2; a \neq -3; a \neq -4; a \neq -5$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{a^2 + a} + \frac{1}{a^2 + 3a + 2} + \frac{1}{a^2 + 5a + 6} + \frac{1}{a^2 + 7a + 12} + \frac{1}{a^2 + 9a + 20} \\
 &= \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} + \frac{1}{(a+4)(a+5)} \\
 &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+2} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+4} + \frac{1}{a+4} - \frac{1}{a+5} \\
 &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+5} = \frac{a+4}{a(a+5)}
 \end{aligned}$$

Bài 63. Cho x, y là hai số thay đổi thỏa mãn điều kiện $x > 0, y < 0$ và $x + y = 1$.

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{y-x}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2} \right]$.

b) Chứng minh rằng: $A < -4$.

Lời giải

a) Với $x + y = 1$, biến đổi và thu gọn A .

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{y-x}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2} \right] \\
 &= \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2(x+y)^2 - 2x^2y - x^2(x^2-y^2)}{(x-y)^2(x+y)^2} \\
 &= \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2 \cdot 1 - 2x^2y - x^2(x-y)}{(x-y)^2 \cdot 1} \\
 &= \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2 - x^2(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2 - x^2}{(x-y)^2} = \frac{(y-x)(x-y)^2}{xy(y^2 - x^2)} = \frac{(x-y)^2}{xy}
 \end{aligned}$$

b) $A + 4 = \frac{(x-y)^2}{xy} + 4 = \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{1}{xy} < 0$ (vì $x > 0; y < 0$ và $x + y = 1$)

Suy ra $A < -4$.

Bài 64. Cho ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0,$$

Tính giá trị của biểu thức $T = (x-4)^{2014} + (y-4)^{2014} + (z-4)^{2014}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 &= 0 \\
 \Leftrightarrow [4x^2 - 4x(y+z) + (y+z)^2] + (y^2 + z^2 - 6y - 10z + 34) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (2x - y - z)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

...

$$\Leftrightarrow y = 3; z = 5; x = 4$$

$$\text{Khi đó } T = (4 - 4)^{2014} + (3 - 4)^{2014} + (5 - 4)^{2014} = 2.$$

Bài 65. Cho x, y là hai số thay đổi thỏa mãn điều kiện $x > 0, y < 0$ và $x + y = 1$.

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{y-x}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2} \right]$.

b) Chứng minh rằng: $A < -4$.

Lời giải

a) Với $x + y = 1$, biến đổi và thu gọn A .

$$\begin{aligned} A &= \frac{y-x}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2-x^2} \right] \\ &= \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2(x+y)^2 - 2x^2y - x^2(x^2-y^2)}{(x-y)^2(x+y)^2} \\ &= \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2 \cdot 1 - 2x^2y - x^2(x-y)}{(x-y)^2 \cdot 1} \\ &= \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2 - x^2(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{y-x}{xy} : \frac{y^2 - x^2}{(x-y)^2} = \frac{(y-x)(x-y)^2}{xy(y^2 - x^2)} = \frac{(x-y)^2}{xy} \end{aligned}$$

b) $A + 4 = \frac{(x-y)^2}{xy} + 4 = \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{1}{xy} < 0$ (vì $x > 0; y < 0$ và $x + y = 1$)

Suy ra $A < -4$.

Bài 66: Cho ba số x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0,$$

Tính giá trị của biểu thức $T = (x - 4)^{2014} + (y - 4)^{2014} + (z - 4)^{2014}$.

Lời giải

$$4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z + 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow [4x^2 - 4x(y+z) + (y+z)^2] + (y^2 + z^2 - 6y - 10z + 34) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y - z)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 0$$

...

$$\Leftrightarrow y = 3; z = 5; x = 4$$

$$\text{Khi đó } T = (4 - 4)^{2014} + (3 - 4)^{2014} + (5 - 4)^{2014} = 2.$$

Bài 67 Cho $Q = \frac{a^4 + a^3 - a^2 - 2a - 2}{a^4 + 2a^3 - a^2 - 4a - 2}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

- a) Rút gọn M
b) Xác định a để Q_{\min}

Lời giải

$$a) \quad Q = \frac{a^4 + a^3 - a^2 - 2a - 2}{a^4 + 2a^3 - a^2 - 4a - 2} = \frac{a^4 + a^3 + a^2 - 2a^2 - 2a - 2}{a^4 + 2a^3 + a^2 - 2a^2 - 4a - 2} = \frac{(a^2 - 2)(a^2 - a - 1)}{(a^2 - 2)(a + 1)^2}$$

$$DKXD: a \neq \pm\sqrt{2}, a \neq -1$$

$$\text{Khi đó: } Q = \frac{a^2 + a + 1}{(a + 1)^2}$$

b) Ta có:

$$Q = \frac{a^2 + a + 1}{(a + 1)^2} = \frac{a^2 + 2a + 1 - (a + 1) + 1}{a^2 + 2a + 1} = 1 - \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{(a + 1)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{a + 1} + \frac{1}{(a + 1)^2} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{2} \right)^2 \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a + 1} - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$$

$$\text{Vậy GTNN của } Q = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = 1$$

Bài 68.

Cho $x = \frac{a}{b + c}$, $y = \frac{b}{a + c}$, $z = \frac{c}{a + b}$. Tính $A = yz + zx + xy + 2xyz$

Lời giải

Ta có:

$$= \frac{ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)}{(a + b)(b + c)(c + a)} = \frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2}{(a + b)(b + c)(c + a)}$$

$$\text{Nên } A = \frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} = \dots = 1$$

Bài 69. Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x^4 + x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{x + 1}{x - 1} \right) \cdot \frac{x(x + 1) - (1 + x)}{x^3 - 1}$.

- a) Rút gọn P.
b) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên? Cho biểu thức:

Lời giải

$$P = \left(\frac{x^4 + x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} \right) \cdot \frac{x(x+1) - (1+x)}{x^3 - 1}$$

* ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$

$$a) P = \left(\frac{(x^4 + x^2 - 4x + 1) - (x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1)}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{(x^4 - x) + (x^2 + x + 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{x(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

$$b) P = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{x(x-1) + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1}$$

$$\text{Để } P \in \mathbb{Z} \text{ thì } \frac{1}{x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-1 \in U(1) = \{1; -1\}$$

+) Với $x-1 = 1$ thì $x = 2$ (TMĐKXĐ)

+) Với $x-1 = -1$ thì $x = 0$ (TMĐKXĐ)

Vậy P nguyên khi $x \in \{2; 0\}$.

Bài 70.

Cho ba số x, y, z đôi một khác nhau, thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ và $xyz \neq 0$.

$$\text{Tính giá trị của biểu thức: } B = \frac{16(x+y)}{z} + \frac{3(y+z)}{x} - \frac{2038(z+x)}{y}.$$

Lời giải

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \quad (x \neq y \neq z; xyz \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 - 3z(x+y)(x+y+z) - 3xy(x+y+z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z \\ y+z=-x \\ z+x=-y \\ x=y=z \text{ (loại, vì } x \neq y \neq z) \end{cases}$$

Vậy $B = \frac{16(x+y)}{z} + \frac{3(y+z)}{x} - \frac{2038(z+x)}{y} = \frac{16(-z)}{z} + \frac{3(-x)}{x} - \frac{2038(-y)}{y} = (-16) + (-3) + 2038 = 2019$.

Bài 71. Cho biểu thức: $M = \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{2x^2 + x - 1} + \frac{x}{2x - 1}$

- Tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa
- Rút gọn biểu thức M
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức M có giá trị nguyên.

Lời giải

a)

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

$$2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + x - 1 = (x + 1)(2x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1; x \neq \frac{1}{2}$$

b)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} - \frac{x(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} \right) \cdot \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)(2x - 1)} + \frac{x}{2x - 1} \\ &= \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} - \frac{x(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \right) \frac{x - 1}{2x - 1} + \frac{x}{2x - 1} \\ &= \left(\frac{2x^3 + x^2 - x - x^3 - x^2 - x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \right) \cdot \frac{x - 1}{2x - 1} + \frac{x}{2x - 1} \\ &= \left(\frac{x^3 - 2x}{x^2 + x + 1} \right) \cdot \frac{1}{2x - 1} + \frac{x}{2x - 1} = \frac{x^3 - 2x + x(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)(2x - 1)} \\ &= \frac{2x^3 + x^2 - x}{(x^2 + x + 1)(2x - 1)} = \frac{(2x - 1)(x^2 + x)}{(x^2 + x + 1)(2x - 1)} = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

c)

$$M = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} = \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x^2 + x + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

M có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x^2 + x + 1 \in \mathbb{U}(1)$

$$x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(tm) \\ x = -1(ktm) \end{cases}$$

$$x^2 + x + 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0(VN)$$

Vậy $x = 0$

Bài 72. Cho $\frac{1}{x^2} + x^2 = 14 (x \neq 0)$. Hãy tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x^3} + x^3$

Lời giải

$$\frac{1}{x^2} + x^2 = \left(\frac{1}{x} + x\right)^2 - 2$$

$$\left(\frac{1}{x} + x\right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{1}{x} + x = \pm 4$$

$$\frac{1}{x^3} + x^3 = \left(\frac{1}{x} + x\right)\left(\frac{1}{x^2} + x^2 - 1\right)$$

$$\text{Với } x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + x = -4; \text{ thì } \frac{1}{x^3} + x^3 = -4 \cdot (14 - 1) = -52$$

$$\text{Với } x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + x = 4; \text{ thì } \frac{1}{x^3} + x^3 = 4 \cdot (14 - 1) = 52$$

Bài 73. Tính tổng $S = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$

Lời giải

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} \\ &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{16}{1-x^{16}} \end{aligned}$$

Bài 74. Cho a, b, c là 3 số thỏa mãn $(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc$. Chứng minh rằng:

$$a^{2009} + b^{2009} + c^{2009} = (a+b+c)^{2009}$$

Lời giải

Ta có: $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=(a+b)(b+c)(c+a)$ nên từ đề bài suy ra $(a+b)(b+c)(c+a)=0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b=0$ thì $a=-b$, suy ra $a^{2009}=-b^{2009}$, do đó:

$$a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}=c^{2009}=(a+b+c)^{2009}$$

Bài 75 a) Cho x, y thỏa mãn $y(x+y) \neq 0$ và $x^2-xy=2y^2$. Tính $A = \frac{3x-y}{x+y}$

$$\text{b) Tính } B = \frac{2.1+1}{[1.(1+1)]^2} + \frac{2.2+1}{[2.(2+1)]^2} + \frac{2.3+1}{[3.(3+1)]^2} + \dots + \frac{2.99+1}{[99.(99+1)]^2}$$

Lời giải

$$\text{a) Từ } y(x+y) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$x^2-xy=2y^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x+y)(x-2y)=0$$

Vì $x+y \neq 0$ nên $x-2y=0 \Leftrightarrow x=2y$

$$\text{Ta có: } A = \frac{3.2y-y}{2y+y} = \frac{5y}{3y} = \frac{5}{3}$$

$$\text{b) Với } n \geq 1, \text{ ta có: } \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^2 \cdot n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{99^2} - \frac{1}{100^2} = 1 - \frac{1}{100^2} = \frac{9999}{10000}$$

Bài 76. a) Tính giá trị của biểu thức $A = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$ tại $x = 16$

b) Cho $x+y=a$ và $xy=b$. Tính giá trị của biểu thức sau theo a và b : $B = x^2 + y^2$

Lời giải

a) Thay $x=16$ vào biểu thức ta được:

$$\begin{aligned} A &= 16^4 - 17.16^3 + 17.16^2 - 17.16 + 20 \\ &= 16^4 - (16+1).16^3 + (16+1).16^2 - (16+1).16 + (16+4) \\ &= 16^4 - 16^4 - 16^3 + 16^3 + 16^2 - 16^2 - 16 + 16 + 4 = 4 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A tại $x=16$ là 4.

b)

$$B = x^2 + y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - 2xy = (x + y)^2 - 2xy$$

Thay $x + y = a$ và $xy = b$ vào biểu thức ta được: $B = a^2 - 2b$

Vậy giá trị của biểu thức B tại $x + y = a$ và $xy = b$ là $a^2 - 2b$

Bài 77. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} (x \neq -1; 1)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức tại $x = -1\frac{2}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Lời giải

a) Với $x \neq 1; -1$ thì:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2) \cdot (1-x) \end{aligned}$$

b) Tại $x = -1\frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$ thì A có giá trị là

$$\left[1 + \left(-\frac{5}{3} \right)^2 \right] \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{3} \right) \right) = \left(1 + \frac{25}{9} \right) \cdot \left(1 + \frac{5}{3} \right) = 10\frac{2}{27}$$

c) Với $x \neq -1; 1$ thì $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0$ (1)

Vì $1+x^2 > 0$ nên (1) $\Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Bài 78. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $abc = 2004$

$$\text{Tính: } M = \frac{2004a}{ab+2004a+2004} + \frac{b}{bc+b+2004} + \frac{c}{ac+c+1}.$$

Lời giải

Thay $2004 = abc$ vào M ta có:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{a^2bc}{ab + a^2bc + abc} + \frac{b}{bc + b + abc} + \frac{c}{ac + c + 1} \\
 &= \frac{a^2bc}{ab(1 + ac + c)} + \frac{b}{b(c + 1 + ac)} + \frac{c}{ac + c + 1} \\
 &= \frac{ac}{1 + ac + c} + \frac{1}{c + 1 + ac} + \frac{c}{ac + c + 1} \\
 &= \frac{ac + 1 + c}{1 + ac + c} = 1
 \end{aligned}$$

Bài 79. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x-y}{x+y}$. Biết $x^2 - 2y^2 = xy$ ($x + y \neq 0$; $y \neq 0$)

Lời giải

$$x^2 - 2y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) = 0$$

$$\text{Vì } x + y \neq 0 \text{ nên } x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{2y - y}{2y + y} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3}$$

Bài 80. Cho a và b thỏa mãn : $a + b = 1$. Tính giá trị của biểu thức $B = a^3 + b^3 + 3ab$

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = a^3 + b^3 + 3ab = a^3 + b^3 + 3ab.(a + b) = (a + b)^3 = 1 \text{ (Vì } a + b = 1)$$

Bài 81: a) Tính giá trị của biểu thức sau: $\frac{x^{16} - 1}{(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)}$ với $x = 2011$

b) Cho $(x + 3y)^3 - 6(x + 3y)^2 + 12(x + 3y) = -19$. Tìm giá trị của biểu thức $x + 3y$

Lời giải

$$a) (x + 4) \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1,5 \right) = (3 - x) \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 1,5 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x - 1)(x - 1)(2x + 3) = \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ x = 1 \\ x = -1,5 \end{cases}$$

$$b) x + \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} < 2, DK : x \neq 0$$

$$x > 0; x^2 + 1 < 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 < 0 \text{ (ktm)}$$

$$x < 0; x^2 + 1 > 2x \Leftrightarrow (x - 1)^2 \text{ (dung } \forall x < 0)$$

Vậy $x < 0$

Bài 82: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x}{x+2} - \frac{x^3-8}{x^3+8} \cdot \frac{x^2-2x+4}{x^2-4} \right) : \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

- c) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P
 d) Tìm các giá trị của x để $P > 0$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 2$

$$\frac{x^3 - 8}{x^3 + 8} \cdot \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \cdot \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+2)^2} = \frac{x(x+2) - (x^2 + 2x + 4)}{(x+2)^2} = \frac{-4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{-4}{(x+2)^2} : \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1} = \frac{-4 \cdot (x+2)(x+1)(x+2)}{(x+2)^2 \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{-4 \cdot (x+1)}{x^2 + x + 1}$$

b) $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x

Để $P > 0 \Leftrightarrow -4(x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Vậy để $P > 0$ thì $x < -1; x \neq -2$

Bài 83: Cho biểu thức $A = \left(\frac{2017}{x-1} - \frac{2016}{x+1} - \frac{2014+2016}{x^2-1}\right) : \frac{x^2-4}{x^2-1}$

- a) Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định
 b) Rút gọn biểu thức A
 c) Tìm x để $A \geq 0$ và biểu diễn tập các giá trị tìm được của x trên trục số
 d) Tìm tất cả các số nguyên x để A có giá trị là số nguyên

Lời giải

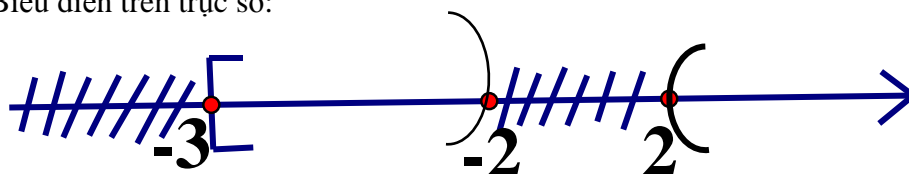
a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1; x \neq \pm 2$

b) Rút gọn được: $A = \frac{x+3}{x^2-4}$

c) Để $A \geq 0$ thì:

$$A = \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -2 \text{ hoặc } x > 2$$

Biểu diễn trên trục số:



d) $x+3 : (x^2-4) \Rightarrow x^2+3x : (x^2-4) \Leftrightarrow (x^2-4) + (3x+4) : (x^2-4)$
 $\Rightarrow (3x+4) : (x^2-4); 3x+9 : (x^2-4) \Rightarrow 5 : (x^2-4)$

$x^2 - 4$	-5	-1	1	5
x^2	-1	3	5	9
x	Loại	Loại	Loại	± 3

Bài 84: Cho phân thức $\frac{5x+5}{2x^2+2x}$

- a) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định
b) Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức bằng 1

Lời giải

$$a) 2x^2 + 2x = 2x(x+1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \neq 0 \text{ và } x+1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ và } x \neq -1$$

b) Rút gọn

$$\frac{5x+5}{2x^2+2x} = \frac{5(x+1)}{2x(x+1)} = \frac{5}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2x} = 1 \Leftrightarrow 5 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ (t/m)}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Bài 85: Cho biểu thức $P = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x-1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

- a) Rút gọn P
b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P có giá trị nguyên
c) Tìm x để $P \leq 1$

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq 0; x \neq \pm 1$

$$\text{Ta có: } P = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{3x} + \frac{2}{x+1} \cdot (x+1) \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{3x} + 2 \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{2x}{x-1}$$

b) Ta có $P = 2 + \frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Từ đó suy ra $x \in \{2; 0; 3; -1\}$, kết hợp với điều kiện được $x \in \{2; 3\}$

$$c) P \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \leq 0$$

$$\text{Mà } x-1 < x+1 \text{ nên } x-1 < 0 \text{ và } x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ và } x \geq -1$$

Kết hợp với ĐKXD được $-1 < x < 1$ và $x \neq 0$

Bài 86: Cho biết $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{2}{3}$. Hãy tìm giá trị của biểu thức $Q = \frac{x^2}{x^4+x^2+1}$

Lời giải

$$a) \text{ Từ } \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow x \neq 0, \text{ do đó } \frac{x^2-x+1}{x} = \frac{3}{2}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1 = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}$$

$$\text{Lại có: } \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1 = \frac{21}{4}$$

$$\text{Suy ra } Q = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{4}{21}$$

Bài 87: Cho biểu thức: $P = \frac{1}{x^2 - x} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20}$

- a) Tìm điều kiện của x để biểu thức P có giá trị.
b) Rút gọn biểu thức P.

Lời giải

a) Tìm điều kiện đúng: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2; x \neq 3; x \neq 4; x \neq 5$

b) Rút gọn đúng:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} \\ &= \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) + \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) + \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}\right) + \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4}\right) \\ &= \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x} = \frac{5}{x(x-5)} \end{aligned}$$

Bài 88: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+1} - 3\right) \cdot \frac{x+1}{2-4x} - \frac{3x-x^2+1}{3x}$

- a. Rút gọn biểu thức A
b. Tìm x để A có giá trị bằng 671
c. Tìm x $\in \mathbb{Z}$ để $\frac{2}{A} \in \mathbb{Z}$

Lời giải

a) ĐKXĐ $x \neq 0, -1, \frac{1}{2}$

$$\text{Ta có } \frac{(x+2)(x+1)+6x-9x(x+1)}{3x(x+1)} \cdot \frac{x+1}{2(1-2x)} - \frac{3x-x^2+1}{3x} = \frac{1+2x}{3x} - \frac{3x-x^2+1}{3x} = \frac{x-1}{3}$$

b) Ta có $A = 671 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} = 671 \Rightarrow x = 2014$ (thỏa mãn)

c) Ta có $\frac{2}{A} = \frac{2}{\frac{x-1}{3}} = \frac{6}{x-1}$ Với $x \in \mathbb{Z}$ để $\frac{2}{A} \in \mathbb{Z}$ thì $x-1$ phải là ước của 6

Hay $x-1 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

Kết hợp với ĐKXĐ ta có $x \in \{-5; 2; 3; 4; 7\}$

Bài 89: Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x^2}{x^3-4x} - \frac{10}{5x+10} + \frac{1}{x-2}\right) : \left(x+2 + \frac{6-x^2}{x-2}\right)$, với $x \neq 0$ và $x \neq \pm 2$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tính giá trị của Q biết $|x| = \frac{1}{2}$.

c) Tìm x để $Q > 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Với } x \neq 0; x \neq \pm 2, \text{ ta có: } Q &= \left(\frac{x^2}{x(x-2)(x+2)} - \frac{10}{5(x+2)} + \frac{1}{x-2} \right) : \left(x+2 + \frac{6-x^2}{x-2} \right) \\ &= \left(\frac{x-2(x-2)+(x+2)}{(x-2)(x+2)} \right) \cdot \left(\frac{2}{x-2} \right) = \frac{6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{3}{x+2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi } x = \frac{1}{2} \text{ thì } Q = \frac{6}{5}$$

$$\text{Khi } x = -\frac{1}{2} \text{ thì } Q = 2$$

$$\text{c) } Q > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

Kết hợp với ĐKXD ta có $x > -2; x \neq 0; x \neq 2$ là giá trị cần tìm.

Bài 90: Cho biểu thức $P(x) = \left(x-3 + \frac{1}{x-1} \right) : \left(x-1 - \frac{1}{x-1} \right)$ với $x \notin \{0; 1; 2\}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm x để $P(x) \geq 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } P(x) &= \left(x-3 + \frac{1}{x-1} \right) : \left(x-1 - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{x^2-4x+4}{x-1} : \frac{x^2-2x}{x-1} \\ &= \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} = \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \frac{x-2}{x} \end{aligned}$$

b) Với điều kiện $x \notin \{0; 1; 2\}$ ta có

$$P(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} \geq 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x} \leq 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Vậy với $x < 0$ thì $P(x) \geq 1$.

Bài 91: Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} + \frac{2x^2}{x^2(x-2)+4(x-2)} \right) \left(\frac{x^2-x-2}{x^2} \right)$, với $x \neq 0$ và $x \neq 2$.

a) Rút gọn biểu thức Q.

b) Tìm giá trị của x để Q có giá trị là $\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\text{Với ĐK: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } Q &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} + \frac{2x^2}{x^2(x-2) + 4(x-2)} \right) \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right) \\
&= \left(\frac{x(x-2)}{2(x^2 + 4)} + \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(x-2)} \right) \left(\frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \right) \\
&= \left(\frac{x(x-2)^2 + 4x^2}{2(x-2)(x^2 + 4)} \right) \left(\frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \right) \\
&= \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x+1}{x^2} = \frac{x(x^2 + 4)(x+1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x+1}{2x}
\end{aligned}$$

$$\text{b) } Q = \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(x+1) = 2x \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

$x = -2$ thỏa ĐKXD nên là giá trị cần tìm.

Bài 22: Cho $x \neq \pm y$ và $\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 2016$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} &= 2016 \\
\Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4(x^4-y^4)+8y^8}{x^8-y^8} &= 2016 \\
\Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4-y^4} &= 2016 \\
\Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2-y^2} &= 2016 \\
\Leftrightarrow \frac{y}{x-y} = 2016 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{2017}{2016}
\end{aligned}$$

Bài 33: Cho $x+y=1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3} = 0$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Biến đổi: } \frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} &= \frac{x^4-x-y^4+y}{(y^3-1)(x^3-1)} = \frac{(x^4-y^4)-(x-y)}{xy(y^2+y+1)(x^2+x+1)} \\
(\text{do } x+y=1 \Rightarrow y-1=-x \text{ và } x-1=-y) \\
&= \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)}{xy(x^2y^2+y^2x+y^2yx^2+xy+y+x^2+x+1)} = \frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy[x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+2]} \\
&= \frac{(x-y)(x^2-x+y^2-y)}{xy[x^2y^2+(x+y)^2+2]} = \frac{(x-y)[x(x-1)+y(y-1)]}{xy(x^2y^2+3)} = \frac{(x-y)[x(-y)+y(-x)]}{xy(x^2y^2+3)} \\
&= \frac{xy(-2xy)}{xy(x^2y^2+3)} = \frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3}
\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 94: Tìm đa thức A, biết rằng $\frac{4x^2 - 16}{x^2 + 2} = \frac{A}{x}$

Lời giải

$$A = \frac{x(4x^2 - 16)}{x^2 + 2x} = \frac{x(2x - 4)(2x + 4)}{x(x + 2)} = \frac{4x(x - 2)(x + 2)}{x(x + 2)} = 4x - 8$$

Bài 95: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0 \Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \frac{cxy + bxz + ayz}{abc} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (dpcm)}$$

Bài 96: a) Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x + y = 4$ và $xy = 1$. Tính giá trị biểu thức

$$A = (x^2 + 1)(y + 2) + (x + 2)(y^2 + 1).$$

b) Cho a, b, c là ba số thực khác 0 thỏa mãn $abc = a + b + c$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Tính giá trị biểu thức

$$B = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + 1)(y + 2) + (x + 2)(y^2 + 1) = x^2y + 2x^2 + y + 2 + xy^2 + x + 2y^2 + 2 \\ &= xy(x + y) + 2(x^2 + y^2) + (x + y) + 4 \\ &= xy(x + y) + 2[(x + y)^2 - 2xy] + (x + y) + 4 \end{aligned}$$

Thay số, ta được $A = 40$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 &\Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = 4 \\ \Rightarrow B = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} &= 4 - 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = 4 - 2 \frac{a + b + c}{abc} = 4 - 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Vậy $B = 2$.

Bài 97: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ (Với x, y, z, a, b, c khác 0).

Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Lời giải

$$\text{Từ: } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0$$

$$\Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\frac{cxy + bxz + ayz}{abc} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Bài 98: Cho $a + b + c \neq 0$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Tính $N = \frac{a^{2016} + b^{2016} + c^{2016}}{(a + b + c)^{2016}}$

Lời giải

$$\text{a) } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc = 0$$

$$\Rightarrow (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) = 0$$

$$\Rightarrow (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2) - 3ab(a + b + c) = 0$$

$$\Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \quad (\text{vì } a + b + c \neq 0)$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$$

$$\Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\text{Vì } (a - b)^2 \geq 0 \quad \forall a, b; \quad (b - c)^2 \geq 0 \quad \forall b, c; \quad (c - a)^2 \geq 0 \quad \forall a, c.$$

$$\text{Nên } (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \quad \forall a, b, c;$$

$$\text{Do đó } (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \quad \forall a, b, c$$

$$\text{Khi } a - b = 0 \text{ và } b - c = 0 \text{ và } c - a = 0$$

$$\Rightarrow a = b = c$$

$$\text{Mà } a + b + c \neq 0 \Rightarrow a = b = c \neq 0 (*)$$

$$\text{Thay } (*) \text{ vào } N \text{ ta có: } N = \frac{a^{2016} + a^{2016} + a^{2016}}{(a + a + a)^{2016}} = \frac{3a^{2016}}{(3a)^{2016}} = \frac{3a^{2016}}{(3a)^{2016}} = \frac{1}{3^{2015}}.$$

Bài 99: Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} + \frac{5-x}{x^2-x-6}\right)\left(x - \frac{6}{x-1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x, để $A < 0$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

c) Tìm các số tự nhiên x , thỏa mãn: $A^2 - |A| = 6$

Lời giải

a. ÑKXĐ: $x \neq 1; x \neq -2; x \neq 3$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} + \frac{5-x}{x^2-x-6} \right) \left(x - \frac{6}{x-1} \right) \\ &= \left[\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} + \frac{5-x}{(x+2)(x-3)} \right] \cdot \frac{x^2-x-6}{x-1} \\ &= \frac{2(x-3) - (x+2) + (5-x)}{(x+2)(x-3)} \cdot \frac{(x+2)(x-3)}{x-1} \\ &= \frac{2x-6-x-2+5-x}{x-1} \\ &= \frac{-3}{x-1} \end{aligned}$$

b. $A < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{x-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 > 0 \text{ (vì } -3 < 0)$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

Đổi chiều với điều kiện ta có $x > 1$ và $x \neq 3$ thì thỏa mãn đầu bài

c. Ta có: $A^2 - |A| = 6 \Leftrightarrow A^2 - |A| - 6 = 0$

Đặt $|A| = m$ (ĐK: $m \geq 0$).

Ta có $m^2 - m - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (m+2)(m-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \text{ (loại)} \\ m = 3 \end{cases}$$

Với $m = 3$ ta có $|A| = 3$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-3}{x-1} \right| = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{|x-1|} = 3$$

$$\Leftrightarrow |x-1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases}$$

Mà x là số tự nhiên và $x \neq 1; x \neq -2; x \neq 3$ nên $x = 2; x = 0$ thỏa mãn.

Vậy $x \in \{2; 0\}$ thì thỏa mãn đầu bài.

Bài 100: Cho các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ và $a + b + c = 3$.

Tính $M = a^{2016} + 2015b^{2015} + 2020c$

Lời giải

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \quad (1)$$

Mà $(a-b)^2 \geq 0$ với mọi a, b .

$$(b-c)^2 \geq 0 \text{ với mọi } b, c.$$

$$(c-a)^2 \geq 0 \text{ với mọi } a, c.$$

$$\text{Nên (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ (b-c)^2 = 0 \\ (c-a)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$$

Lại có $a + b + c = 3 \Rightarrow a = b = c = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M &= a^{2016} + 2015b^{2015} + 2020c \\ &= 1 + 2015.1 + 2020.1 \\ &= 4036 \end{aligned}$$

Bài 101: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$.

Lời giải

$$\text{a) ĐKXĐ: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left(\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right)$$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)}$$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\text{b) } P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2} \text{ với } x \in \text{ĐKXĐ}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (TM)} \\ x = -1 \text{ (L)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2} \text{ thì } P = \frac{-1}{2}$$

$$\text{c) } P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{(x^2-1)+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{Z}$. Để P nguyên thì $\frac{1}{x-1}$ nguyên $\Rightarrow x-1$ là ước của 1. $\Rightarrow x-1 \in \{-1; 1\}$

*) $x-1=1 \Rightarrow x=2$ (TMĐK)

*) $x-1=-1 \Rightarrow x=0$ (Loại do) ĐKXĐ

Vậy $x=2$ thì P nhận giá trị nguyên.

$$d) P = \frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1} = x-1 + \frac{1}{x-1} + 2$$

Vì $x > 1$ nên $x-1 > 0$ và $\frac{1}{x-1} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương $x-1$ và $\frac{1}{x-1}$ ta

$$\text{có } x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} = 2$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } x-1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 1 \text{ (vì } x-1 > 0) \Leftrightarrow x = 2 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi $x = 2$

Bài 102: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Lời giải

Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$

Sau đó rút gọn ta được điều phải chứng minh.

Bài 103: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị của A , biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Lời giải

a) Rút gọn được kết quả: $A = \frac{-1}{x-2}$

$$b) |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ A = \frac{4}{5} \end{cases}$$

c) $A < 0 \Rightarrow x > 2$

d) $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-2 \in U(1) = \{\pm 1; \pm 2\} \Rightarrow x \in \{1; 3\}$.

Bài 104: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$
 Tính $a^{2011} + b^{2011}$

Lời giải

$$a) (a^{2001} + b^{2001}) \cdot (a+b) - (a^{2000} + b^{2000}) \cdot ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Leftrightarrow (a+b) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b = 1(tm) \\ b = 0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Với } b = 1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = 1; b = 1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

Bài 105: Cho biểu thức :

$$P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} \text{ với } x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y.$$

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tính giá trị của biểu thức P biết x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y).$$

Lời giải

Với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2 y - (x^2 - y^2)(x + y) - xy^2}{xy(x + y)} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{2}{x} - \frac{xy(x - y) - (x - y) \cdot (x + y)^2}{xy(x + y)} \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{2}{x} + \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{xy(x + y)} \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{2}{x} + \frac{x - y}{xy} = \frac{x + y}{xy} \end{aligned}$$

Ta có: $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0$$

Lập luận suy ra $x = 1; y = -3$

Ta thấy $x = 1; y = -3$ thỏa mãn điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$

nên thay $x = 1; y = -3$ vào biểu thức $P = \frac{x + y}{xy}$

$$\text{ta có: } P = \frac{1 + (-3)}{1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}$$

Bài 106: $P = \left(\frac{2x - 3}{4x^2 - 12x + 5} + \frac{2x - 8}{13x - 2x^2 - 20} - \frac{3}{2x - 1} \right) : \frac{21 + 2x - 8x^2}{4x^2 + 4x - 3} + 1$

a) Rút gọn P

- b) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$
 c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên
 d) Tìm x để $P > 0$

Giải:

Phân tích:

$$4x^2 - 12x + 5 = (2x - 1)(2x - 5) \quad ; \quad 13x - 2x^2 - 20 = (x - 4)(5 - 2x)$$

$$21 + 2x - 8x^2 = (3 + 2x)(7 - 4x); \quad 4x^2 + 4x - 3 = (2x - 1)(2x + 3)$$

Điều kiện: $x \neq \left\{ \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{-3}{2}; \frac{7}{4}; 4 \right\}$

a) Rút gọn: $P = \frac{2x - 3}{2x - 5}$

b) $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{2}{3} \end{cases}$

c) $P = \frac{2x - 3}{2x - 5} = 1 + \frac{2}{x - 5}$

Vậy $P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{x - 5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 5 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

$$x - 5 = -2 \Rightarrow x = 3(\text{tm})$$

$$x - 5 = -1 \Rightarrow x = 4(\text{tm})$$

$$x - 5 = 1 \Rightarrow x = 6(\text{tm})$$

$$x - 5 = 2 \Rightarrow x = 7(\text{tm})$$

d) $P = \frac{2x - 3}{2x - 5} = 1 + \frac{2}{x - 5}$

Ta có: $1 > 0 \Rightarrow P > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x - 5} > 0 \Rightarrow x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

Với $x > 5$ thì $P > 0$

Bài 107: Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0$$

Giải:

a) Biến đổi:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} &= \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3 - 1)(x^3 - 1)} \\ &= \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)} \quad (x + y = 1 \Rightarrow y - 1 = -x \text{ \& } x - 1 = -y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)}{xy(x^2y^2+y^2x+y^2+yx^2+xy+y+x^2+x+1)} \\
&= \frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy[x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+2]} \\
&= \frac{(x-y)(x^2-x+y^2-y)}{xy[x^2y^2+(x+y)^2+2]} = \frac{(x-y)[x(x-1)+y(y-1)]}{xy(x^2y^2+3)} \\
&= \frac{(x-y)[x(-y)+y(-x)]}{xy(x^2y^2+3)} = \frac{(x-y)(-2xy)}{xy(x^2y^2+3)} \\
&= \frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3} \Rightarrow \text{dpcm}
\end{aligned}$$

Bài 108: Cho biểu thức : $P = \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1}$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để P = 6

Giải:

$$\begin{aligned}
\text{a) } P &= \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1} = \frac{x^4 \cdot (2x - 1) - (2x - 1)}{(2x - 1)(2x + 1)} + \frac{2(4x^2 - 2x + 1)}{(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)} \\
&= \frac{(x^4 - 1)(2x - 1)}{(2x - 1)(2x + 1)} + \frac{2}{2x - 1} = \frac{x^4 - 1}{2x + 1} + \frac{2}{2x - 1} = \frac{x^4 + 1}{2x + 1}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{x^4 + 1}{2x + 1}$$

$$\text{b) ĐK: } x \neq \pm \frac{1}{2}$$

$$P = 6 \Leftrightarrow \frac{x^4 + 1}{2x + 1} = 6 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 12x + 6 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = (2x + 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 2x + 3 & (1) \\ x^2 + 2 = -2x - 3 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{2} \\ x - 1 = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases} (\text{tmdk})$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = -4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = -4 (\text{VN})$$

$$\text{Vậy } S = \{1 \pm \sqrt{2}\}$$

Bài 109: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} (x \neq -1; 1)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -1\frac{2}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Giải:

d) Với $x \neq \pm 1$ thì

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2)(1-x) \end{aligned}$$

e) Tại $x = -1\frac{2}{3} \Rightarrow A = 10\frac{2}{27}$

f) Với $x \neq \pm 1$ thì $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Bài 110: Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Giải:

a) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq 0$

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x} \\ &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1-3x^2-3x}{3x} \right) \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1-2x-3x^2}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} \\ &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2-2+6x}{3x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

$$b) A = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

Để A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{x-1}$ có giá trị nguyên $\Rightarrow x \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

$\Rightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3\}$ vì $x \neq -1; x \neq 0 \Rightarrow \{x\} = \{2; 3\}$

Bài 111: Cho biểu thức: $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+4}{3-x}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

1) Rút gọn A

2) Tính giá trị của A biết $2x - x^2 = 1$

3) Có giá trị nào của x để A = 1 không ?

Tìm x nguyên để A nhận giá trị là số nguyên

Giải:

1) Rút gọn được $A = \frac{x+4}{x-3}$

2) ĐKXĐ: $x \neq 2$ và $x \neq 3$

$$2x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay $x = 1$ vào, tính được $A = \frac{-5}{2}$

3) $A = 1 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-3} = 1 \Leftrightarrow x+4 = x-3 \Leftrightarrow 0x = -7$ (vô nghiệm)

Vậy không có giá trị nào của x để A = 1

4) $A = \frac{x+4}{x-3} = 1 + \frac{7}{x-3}$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $x-3 \in U(7) = \{-7; -1; 1; 7\} \Rightarrow x \in \{-4; 2; 4; 10\}$

Thử lại và kết hợp với ĐKXĐ ta được $x \in \{-4; 4; 10\}$

Bài 112: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A, biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Giải:

d) Rút gọn được kết quả : $A = \frac{-1}{x-2}$

e) $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ A = \frac{2}{5} \end{cases}$

f) $A < 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$$A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-2 \in U(1) = \{\pm 1\} \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}$$

Bài 113: Cho: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và $x+y+z = xyz$ ($x, y, z \neq 0$)

Chứng minh $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 2$

Giải:

a) Bình phương 2 vế ta có:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2z}{xyz} + \frac{2y}{xyz} + \frac{2x}{xyz} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2(x+y+z)}{xyz} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2xyz}{xyz} = 4 \quad (x+y+z=xyz)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 2 \quad (\text{dpcm})$$

Bài 114: Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Giải:

a) Ta có $a+b+c=0$ thì :

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 = -c^3 - 3ab(-c) + c^3 = 3abc$$

(vì $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c$)

$$\text{Theo giả thiết } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$$

$$A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3}$$

$$= xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3$$

Bài 115: Cho biểu thức $M = \left[\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x+2} \right] : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn M

b) Tính giá trị của M khi $|x| = \frac{1}{2}$

Giải:

$$\text{a) Rút gọn M: } M = \left[\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x+2} \right] : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x+2} \right)$$

$$= \left[\frac{x^2}{x(x-2)(x+2)} - \frac{6}{3(x-2)} + \frac{1}{x+2} \right] : \frac{6}{x+2}$$

$$M = \frac{-6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{6} = \frac{1}{2-x}$$

$$b) |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{2} \Rightarrow M = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow M = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

Bài 116: Cho $a > b > 0$ thỏa mãn $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a-b}{a+b}$

Giải:

$$\text{Xét } P^2 = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{3a^2 + 3b^2 - 6ab}{3a^2 + 3b^2 + 6ab} = \frac{4ab}{16ab} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vì } a > b > 0 \Rightarrow P > 0 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

Bài 117: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Giải:

Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$, rút gọn suy ra đpcm

Bài 118: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm các giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Giải:

a) Rút gọn biểu thức được kết quả: $A = \frac{-1}{x-2}$

$$b) \quad |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ A = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$c) \quad A < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$d) \quad A \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dots \Rightarrow x \in \{1; 3\}$$

Bài 119: Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức : $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

Giải:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2}{b^2 + 2ac} = \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} \quad ; \quad \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \\ &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1 \end{aligned}$$

Bài 120: Chứng minh rằng nếu $\frac{x^2 - yz}{x(1-yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1-xz)}$ với $x \neq y; xyz \neq 0; yz \neq 1; xz \neq 1$

Thì $xy + xz + yz = xyz(x + y + z)$

Giải:

$$\text{Từ gt} \Rightarrow (x^2 - yz)y(1 - xz) = x(1 - yz)(y^2 - xz)$$

$$\Leftrightarrow x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z^2 = xy^2 - x^2z - xy^3z + x^2yz^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z^2 - xy^2 + x^2z + xy^3z - x^2yz^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x - y) + xyz(yz + y^2 - xz - x^2) + z(x^2 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x - y) + xyz(x - y)(x + y + z) + z(x - y)(x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)[xy - xyz(x + y + z) + xz + yz] = 0$$

Do $x - y \neq 0$ nên $xy + xz + yz - xyz(x + y + z) = 0$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Hay $xy + xz + yz = xyz(x + y + z)$ (dfcm)

Bài 121: Cho ba số a, b, c thỏa mãn $abc = 2004$. Tính

$$M = \frac{2004a}{ab + 2004a + 2004} + \frac{b}{bc + b + 2004} + \frac{c}{ac + c + 1}$$

Giải:

Thay $2004 = abc$ vào M ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{a^2bc}{ab + a^2bc + abc} + \frac{b}{bc + b + abc} + \frac{c}{ac + c + 1} = \frac{a^2bc}{ab(1 + ac + c)} + \frac{b}{b(c + 1 + ac)} + \frac{c}{ac + c + 1} \\ &= \frac{ac}{1 + ac + c} + \frac{1}{c + 1 + ac} + \frac{c}{ac + c + 1} = \frac{ac + c + 1}{1 + ac + c} = 1 \end{aligned}$$

Bài 122: Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

Giải:

$$A = x^3 + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18$$

Bài 123: Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x} \\ A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1) - 3x(x+1)}{3x} \right] : \frac{x-1}{x} \\ A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2 \cdot (1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} \\ A &= 2 \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

$$\text{b) Với } x \neq 0; x \neq \pm 1, \text{ Ta có: } A = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1} \quad A = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $(x-1)$ phải là ước của 2 $\Rightarrow x-1 \in \{\pm 1; \pm 2\}$

Đối chiếu điều kiện tìm được $x = 2$ hoặc $x = 3$ thỏa mãn

Bài 124: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

c) Tìm x để $|A| = A$

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$A = \left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$$

$$= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

b) nguyên, mà x nguyên nên $2 \nmid (1-2x)$

Từ đó tìm được $x=1$ và $x=0$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x=0$

$$|A| = A \Leftrightarrow A > 0$$

c) Ta có: $\Leftrightarrow \frac{2}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

Kết hợp với điều kiện: $-1 \neq x < \frac{1}{2}$

Bài 125: $P = \left(\frac{2x-3}{4x^2-12x+5} + \frac{2x-8}{13x-2x^2-20} - \frac{3}{2x-1} \right) : \frac{21+2x-8x^2}{4x^2+4x-3} + 1$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P khi $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

d) Tìm x để $P > 0$

Lời giải

ĐKXD: $x \neq \frac{1}{2}; x \neq \frac{5}{2}; x \neq \frac{-3}{2}; x \neq \frac{7}{4}; x \neq 4$

a) Rút gọn $P = \frac{2x-3}{2x-5}$

b) $|x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$+) x = \frac{1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{1}{2} \quad ; +) x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \dots P = \frac{2}{3}$

c) $P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-5 \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\}$

$x-5 = -2 \Rightarrow x = 3(tm)$

$x-5 = -1 \Rightarrow x = 4(ktm)$

$x-5 = 1 \Rightarrow x = 6(tm)$

$x-5 = 2 \Rightarrow x = 7(tm)$

Kết luận: $x \in \{3; 6; 7\}$ thì P nhận giá trị nguyên

$$d) \quad P = \frac{2x-3}{2x-5} = 1 + \frac{2}{x-5}$$

Ta có: $1 > 0$

Để $P > 0$ thì $\frac{2}{x-5} > 0 \Rightarrow x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

Với $x > 5$ thì $P > 0$

Bài 126: Cho $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

c) Rút gọn P

d) Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

c)

$$a^3 - 4a^2 - a + 4 = (a-1)(a+1)(a-4)$$

$$a^3 - 7a^2 + 14a - 8 = (a-2)(a-1)(a-4)$$

Nên ĐKXD: $a \neq 1; a \neq 2; a \neq 4$

$$\text{Rút gọn } P = \frac{a+1}{a-2}$$

d)

$$P = \frac{a-2+3}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2}; \text{ ta thấy } P \text{ nguyên khi } a-2 \text{ là ước của } 3, \text{ mà } U(3) = \{-1; 1; -3; 3\}, \text{ từ đó tìm}$$

được $a \in \{-1; 3; 5\}$

Bài 127: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A, biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Rút gọn được kết quả $A = \frac{-1}{x-2}$

$$b) \quad |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ A = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$c) \quad A < 0 \Leftrightarrow x > 2 \quad A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \dots \Rightarrow x \in \{1; 3\}$$

Bài 128: Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

- a) Rút gọn A
b) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq 0$

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x} \\ &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1-3x^2-3x}{3x} \right) \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1-2x-3x^2}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} \\ &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2-2+6x}{3x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

$$b) A = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

Để A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{2}{x-1}$ có giá trị nguyên $\Rightarrow x \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

$\Rightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3\}$ vì $x \neq -1; x \neq 0 \Rightarrow \{x\} = \{2; 3\}$

Bài 129: Rút gọn biểu thức: $\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1} &= \frac{x^2+x^2a+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-x^2a-a+a^2+a^2x^2+1} \\ &= \frac{x^2+x^2a+a^2x^2+1+a+a^2}{x^2-x^2a+a^2x^2+1-a+a^2} = \frac{x^2(1+a+a^2)+(1+a+a^2)}{x^2(1-a+a^2)+(1-a+a^2)} \\ &= \frac{(x^2+1)(1+a+a^2)}{(x^2+1)(1-a+a^2)} = \frac{1+a+a^2}{1-a+a^2} \end{aligned}$$

Bài 130: Cho biểu thức: $A = \frac{3x^3-14x^2+3x+36}{3x^3-19x^2+33x-9}$

- a) Tìm giá trị của biểu thức A xác định
b) Tìm giá trị của biểu thức A có giá trị bằng 0
c) Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } A = \frac{(x-3)^2 \cdot (3x+4)}{(x-3)^2 \cdot (3x-1)}. \text{ Vậy biểu thức A xác định khi } x \neq 3; x \neq \frac{1}{3}$$

b) Ta có: $A = \frac{3x+4}{3x-1}$, do đó $A = 0 \Leftrightarrow 3x+4=0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$

Vậy với $x = -\frac{4}{3}$ thì biểu thức A có giá trị bằng 0

c) Ta có: $A = \frac{3x+4}{3x-1} = 1 + \frac{5}{3x-1}$

Để A có giá trị nguyên thì $\frac{5}{3x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (3x-1) \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

$$\Rightarrow x \in \left\{ -\frac{4}{3}; 0; \frac{2}{3}; 2 \right\}$$

Vậy với giá trị nguyên của x là 0 và 2 thì A có giá trị nguyên

Bài 131: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính $a^{2011} + b^{2011}$

Lời giải

$$(a^{2001} + b^{2001})(a+b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a+b) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\text{Với } a=1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b=1(tm) \\ b=0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Với } b=1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a=1(tm) \\ a=0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a=1; b=1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

Bài 132: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Lời giải

$$\text{Nhân cả 2 vế của } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1 \text{ với } a+b+c; \text{ rút gọn } \Rightarrow dpcm$$

Bài 133: Cho $a + b + c = 0$, chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Lời giải

Ta có:

$$a + b + c = 0 \text{ suy ra } a + b = -c$$

$$\text{Mặt khác: } (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$\text{Suy ra } (-c)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(-c)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{ (đpcm)}$$

Bài 134: a) Cho $a+b=2$ và $a^2+b^2=20$. Tính giá trị của biểu thức $M=a^3+b^3$

b) Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Tính giá trị của biểu thức $N=a^4+b^4+c^4$

Lời giải

a) Từ $a^2+b^2=20 \Rightarrow (a+b)^2 - 2ab = 20 \Rightarrow ab = -8$

$$M = a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 2^3 - 3(-8).2 = 56$$

b) Từ $a^2+b^2+c^2=14 \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 = 196$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Ta lại có: $a+b+c=0 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 0$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 0$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca = -7$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ca)^2 = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 49$$

Do đó: $N = a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 196 - 2.49 = 98$

Bài 135: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Lời giải

Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$, rút gọn suy ra đpcm

Bài 136: Cho $x+y=1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3} = 0$$

Lời giải

Với $x+y=1$ và $xy \neq 0$ ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} &= \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3-1)(x^3-1)} \\
&= \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1)} \\
&= \frac{(x - y)[(x + y)(x^2 + y^2) - 1]}{xy(x^2 y^2 + xy(x + y) + x^2 + y^2 + xy + 2)} \\
&= \frac{(x - y)(x^2 - x + y^2 - y)}{xy(x^2 y^2 + (x + y)^2 + 2)} \\
&= \frac{(x - y)[x(x - 1) + y(y - 1)]}{xy(x^2 + y^2 + 3)} = \frac{-2(x - y)}{x^2 y^2 + 3}
\end{aligned}$$

Vậy $\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x-y)}{x^2 y^2 + 3} = 0$

Bài 137: Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

Lời giải

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc} = \frac{a^2}{(a - b)(a - c)}$$

Tương tự: $\frac{b^2}{b^2 + 2ac} = \frac{b^2}{(b - a)(b - c)} \quad ; \quad \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{c^2}{(c - a)(c - b)}$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \\
&= \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} - \frac{b^2}{(a - b)(b - c)} + \frac{c^2}{(a - c)(b - c)} \\
&= \frac{(a - b)(a - c)(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} = 1
\end{aligned}$$

Bài 138: Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Lời giải

Vì $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z \Rightarrow (x + y)^3 = -z^3$

Hay $x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -z^3 \Rightarrow 3xyz = x^3 + y^3 + z^3$

Do đó:

$$\begin{aligned}
3xyz(x^2 + y^2 + z^2) &= (x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) \\
&= x^5 + y^5 + z^5 + x^3(y^2 + z^2) + y^3(z^2 + x^2) + z^3(x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

$$\text{Mà } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = z^2 - 2xy \quad (\text{Vì } x + y = -z)$$

$$\text{Tương tự: } y^2 + z^2 = x^2 - 2yz; z^2 + x^2 = y^2 - 2zx$$

$$\text{Vì vậy: } 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) = x^5 + y^5 + z^5 + x^3(x^2 - 2yz) + y^3(y^2 - 2zx) + z^3(z^2 - 2xy)$$

$$= 2(x^5 + y^5 + z^5) - 2xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{Suy ra: } 2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

Bài 139: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$\text{a) Giá trị của } A \text{ được xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 8 \neq 0 \\ 8 - 4x + 2x^2 - x^3 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 \neq -8 \\ 4(2-x) + x^2(2-x) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq -4 \\ (2-x)(4+x^2) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left[\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2-x) + x^2(2-x)} \right] \cdot \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2} \right) \\ &= \frac{(x^2 - 2x)(2-x) - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{x^2 + x - 2x - 2}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - x^3 - 4x + 2x^2 - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{x(x+1) - 2(x+1)}{x^2} \\ &= \frac{-x(x^2 + 4)}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{2x} \end{aligned}$$

b)

$$*\frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1 \vdots 2x \Rightarrow 2x+2 \vdots 2x \text{ mà } 2x \vdots 2x$$

$$\Rightarrow 2 \vdots 2x \Rightarrow 1 \vdots x \Rightarrow \begin{cases} x=1(tm) \\ x=-1(tm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=-1$$

Bài 140: Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Lời giải

Biến đổi được:

$$4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow (4a-b)(a-b) \Leftrightarrow \begin{cases} b=4a \\ b=a \end{cases}$$

$$\text{Mà } 2a > b > 0 \Rightarrow 4a > 2b > b \text{ nên } a=b$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } 4a^2 + b^2 = 5ab \text{ và } 2a > b > 0 \text{ thì } P = \frac{1}{3}$$

Bài 141: Cho x, y là số hữu tỉ khác 1 thỏa mãn $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1$

Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Lời giải

Ta có

$$\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1 \Leftrightarrow (1-2x)(1-y) + (1-2y)(1-x) = (1-x)(1-y)$$

$$\Leftrightarrow 1-y-2x+2xy+1-x-2y+2xy = 1-x-y+xy \Leftrightarrow x+y = \frac{3xy+1}{2}$$

$$\text{Ta có: } M = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy = \left(\frac{3xy+1}{2}\right)^2 - 3xy = \dots = \left(\frac{3xy-1}{2}\right)^2$$

Vì $x, y \in \mathbb{Q}$ nên $\frac{3xy-1}{2}$ là số hữu tỷ, Vậy M là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 142: Cho x, y, z thỏa mãn $x+y+z=7$; $x^2+y^2+z^2=23$; $xyz=3$

Tính giá trị của biểu thức $H = \frac{1}{xy+z-6} + \frac{1}{yz+x-6} + \frac{1}{zx+y-6}$

Lời giải

$$\text{Vì } x+y+z=7 \Rightarrow z=-x-y+7 \Rightarrow xy+z-6=\dots=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } yz+x-6=(y-1)(z-1); zx+y-6=(z-1)(y-1)$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } H &= \frac{1}{(x-1)(y-1)} + \frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(z-1)(x-1)} = \frac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)} \\ &= \frac{(x+y+z)-3}{xyz-(xy+yz+xz)+(x+y+z)-1} = \frac{7-3}{3-(xy+yz+xz)+7-1} = \frac{4}{9-(xy+yz+xz)} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+xz) \Rightarrow 7^2 = 23 + 2(xy+yz+xz)$$

$$\Rightarrow xy+yz+xz=13$$

$$\text{Vậy } H = \frac{4}{9-13} = -1$$

Bài 143: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Lời giải

Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$, rút gọn suy ra đpcm

Bài 144: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính : $a^{2011} + b^{2011}$

Lời giải

$$(a^{2001} + b^{2001})(a+b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a+1) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } a=1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b=1(tm) \\ b=0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vì } b=1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a=1(tm) \\ a=0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a=1; b=1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

Bài 145: Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Lời giải

$$\begin{aligned} a^3 - 3ab^2 = 5 &\Rightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25 \\ b^3 - 3a^2b = 10 &\Rightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100 \\ \Rightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 &= 125 \\ \Rightarrow (a^2 + b^2)^3 = 5^3 &\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2018} = \frac{5}{2018} \end{aligned}$$

Bài 146:

a) Cho $a^2 + a + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^{2013} + \frac{1}{a^{2013}}$

b) Cho hai số x, y thỏa mãn: $x^2 + x^2y^2 - 2y = 0$ và $x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0$

Tính giá trị của biểu thức $Q = x^2 + y^2$

Lời giải

a) Từ $a^2 + a + 1 = 0$ với $a \neq 1$ ta có: $(a-1)(a^2 + a + 1) = 0 \Rightarrow a^3 - 1 = 0 \Rightarrow a^3 = 1$

Ta lại có $a^{2013} = (a^3)^{671}$

$$\text{Do đó: } P = a^{2013} + \frac{1}{a^{2013}} = (a^3)^{671} + \frac{1}{(a^3)^{671}} = 1 + 1 = 2$$

b) Từ $x^2 + x^2y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2y}{y^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ (1)

$$x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 - 2(y-1)^2 \leq -1 \Rightarrow x \leq -1$$
 (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$

$$x^2 = 1 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow y^2 = 1$$

Vậy $Q = x^2 + y^2 = 1 + 1 = 2$

Bài 147: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left[\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right] \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2-1+x+2-x^2}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \end{aligned}$$

b) $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2}$ với $x \in \text{ĐKXD}$

$$\Rightarrow 2x^2 = -x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} (TM) \\ x = -1 (KTM) \end{cases}$$

Vậy $P = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Bài 148: Cho $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0$, tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \\ &= \frac{1}{b^2 + c^2 - (b+c)^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - (a+c)^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - (a+b)^2} \\ &= \frac{1}{-2ab} + \frac{1}{-2ac} + \frac{1}{-2ab} = \frac{a+b+c}{-2abc} = 0 \end{aligned}$$

Bài 149: Cho biểu thức $M = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

e) Rút gọn M

f) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức M bằng 0.

Lời Giải:

Cho biểu thức $M = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

a) Rút gọn M

HD: ĐKXĐ: $x^2 + 2x - 8 \neq 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+4) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ và } x \neq -4.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6 &= x^4(x-2) + 2x^2(x-2) - 3(x-2) \\ &= (x-2)(x^4 + 2x^2 - 3) \\ &= (x-2)\left[(x^2+1)^2 - 4\right] \\ &= (x-2)(x^3+3)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } M = \frac{(x^2+3)(x+1)(x-1)}{x+4}, x \neq 2; x \neq -4.$$

b) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức M bằng 0.

Đề $M = 0$ thì $(x^3+3)(x+1)(x-1) = 0$ và $x \neq 2; x \neq -4$

$$\text{Ta có: } (x^3+3)(x+1)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ (thỏa ĐKXĐ)}$$

$$\text{Vậy, } M = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Bài 150: Cho biểu thức $R = \left[\frac{(x-1)^2}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức R được xác định;

b) Tìm giá trị của x để giá trị của R bằng 0;

c) Tìm giá trị của x để $|R| = 1$.

Lời Giải:

$$\text{Cho biểu thức } R = \left[\frac{(x-1)^2}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$$

a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq -1; x \neq 1$.

b) Rút gọn: $R = \frac{x^2+1}{x+1}, x \neq 0; x \neq -1; x \neq 1$.

$$\text{Để } R = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$\text{c) Ta có: } |R| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} R = 1 \\ R = -1 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } R = 1, \text{ ta có: } \frac{x^2+1}{x+1} = 1, x \neq 0; x \neq -1; x \neq 1$$

$$\text{Giải pt } \frac{x^2+1}{x+1} = 1 \Rightarrow x^2+1 = x+1 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \text{ (không thỏa ĐKXĐ)}$$

$$+ \text{ Với } R = -1, \text{ ta có: } \frac{x^2+1}{x+1} = -1, x \neq 0; x \neq -1; x \neq 1$$

Giải pt $\frac{x^2+1}{x+1} = -1 \Rightarrow x^2+1 = -x-1 \Leftrightarrow x^2+x+2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0$ (vô lý)

Vậy không có giá trị nào của x để $|R|=1$.

Bài 151: Tính giá trị của biểu thức

$P = x^{15} - 2018x^{14} + 2018x^{13} - 2018x^{12} + \dots - 2018x^2 + 2018x - 2018$, với $x = 2017$.

Lời Giải:

Tính giá trị của biểu thức $P = x^{15} - 2018x^{14} + 2018x^{13} - 2018x^{12} + \dots - 2018x^2 + 2018x - 2018$, với $x = 2017$.

Thay $2018 = x+1$ vào P ta được:

$$\begin{aligned} P &= x^{15} - (x+1)x^{14} + (x+1)x^{13} - (x+1)x^{12} + \dots - (x+1)x^2 + (x+1)x - (x+1) \\ &= x^{15} - x^{15} - x^{14} + x^{14} + x^{13} - \dots + x^2 + x - x - 1 = -1 \end{aligned}$$

Vậy, $P = -1$ khi $x = 2017$.

Bài 152: Cho biểu $P = \frac{x^2+x}{x^2-2x+1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

a) Tìm ĐKXĐ và rút gọn P .

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Lời Giải:

a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left[\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right] \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2-1+x+2-x^2}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \end{aligned}$$

Vậy, $P = \frac{x^2}{x-1}$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$.

$$\begin{aligned} \text{b) Để } P &= \frac{-1}{2} \text{ với } x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1 \text{ suy ra } \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2} \text{ với } x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1 \\ \Rightarrow 2x^2 &= -x+1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$ nên chọn $x = \frac{1}{2}$

$$\text{Vậy, } P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) Ta có: } P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1} = (x-1) + \frac{1}{x-1} + 2$$

Với $x > 1$ nên $x-1 > 0$ và $\frac{1}{x-1} > 0$. Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương $(x-1)$ và $\frac{1}{x-1}$ ta có :

$$P \geq 2\sqrt{(x-1)\frac{1}{x-1}} + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$\text{Dấu «} \Rightarrow \Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{x-1} \text{ với } x > 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa ĐKXD)}$$

$$\text{Vậy, } GTNN(P) = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Bài 153: Cho $a+b+c=2p$. Chứng minh : $2bc+b^2+c^2-a^2=4p(p-a)$

Lời Giải:

$$\text{Ta có : } 2p = a+b+c$$

$$\text{Do đó, } 4p(p-a) = 2p(2p-2a)$$

$$= (a+b+c)(a+b+c-2a) = \dots = 2bc+b^2+c^2-a^2$$

KL : ...

Bài 154: a) Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ và $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$

b) Áp dụng: Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \geq 16$

Lời Giải:

a) Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ và $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$

HD: Dùng biến đổi tương đương.

b) **Áp dụng:** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \geq 16$

$$\text{Theo câu a, ta có: } \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \geq \frac{4}{ac+bc} = 4 \cdot \frac{1}{c(a+b)} \geq 4 \cdot \frac{4}{c+a+b} = \frac{16}{1} = 16$$

$$\text{Dấu “} = \text{”} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c=1 \\ ac=bc \\ c=b+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b=1-c \\ a=b \\ c=1-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{1}{4} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 155: Cho biểu thức $M = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + x^2$

Tính M theo a, b, c biết rằng $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

Lời Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= (x^2 - ax - bx + ab) + (x^2 - bx - cx + bc) + (x^2 - ax - cx + ca) \\ &= 4x^2 - 2x(a+b+c) + ab+bc+ca \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Từ } x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \Rightarrow 2x = a+b+c \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $M = ab+bc+ca$

Bài 156: Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn đẳng thức: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{b+c-a}{a}$.

$$\text{Tính giá trị của biểu thức: } P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời Giải:

Từ giả thiết, suy ra $\frac{a+b-c}{c} + 2 = \frac{a+c-b}{b} + 2 = \frac{b+c-a}{a} + 2$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b}$$

Xét hai trường hợp :

+ Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow P = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{b+c}{b} \cdot \frac{c+a}{c} = \frac{(-c)(-a)(-b)}{a.b.c} = -1$

+ Nếu $a+b+c \neq 0 \Rightarrow a=b=c \neq 0 \Rightarrow P = 2.2.2 = 8$

KL :.....

Bài 157: a) Biết $a \neq \frac{-7}{3}, b \neq \frac{7}{2}$ và $2a-b=7$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{5a-b}{3a+7} - \frac{3b-2a}{2b-7}$

b) Biết $b \neq \pm 3a$ và $6a^2 - 15ab + 5b^2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$

Lời Giải:

a) Biết $a \neq \frac{-7}{3}, b \neq \frac{7}{2}$ và $2a-b=7$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{5a-b}{3a+7} - \frac{3b-2a}{2b-7}$

Ta có: $P = \frac{5a-b}{3a+7} - \frac{3b-2a}{2b-7} = \frac{(2a-b)+3a}{3a+7} - \frac{2b-(2a-b)}{2b-7} = \frac{7+3a}{3a+7} - \frac{2b-7}{2b-7} = 1-1=0$

Vậy, $P=0$ khi $a \neq \frac{-7}{3}, b \neq \frac{7}{2}$ và $2a-b=7$.

b) Biết $b \neq \pm 3a$ và $6a^2 - 15ab + 5b^2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$

Ta có: $Q = \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b} = \frac{(2a-b)(3a+b) + (5b-a)(3a-b)}{(3a-b)(3a+b)} = \frac{3a^2 - 6b^2 + 15ab}{(3a-b)(3a+b)}$

$$= \frac{9a^2 - b^2 - (6a^2 + 5b^2 - 15ab)}{(3a-b)(3a+b)} = \frac{9a^2 - b^2}{9a^2 - b^2} = 1$$

Vậy, $Q=1$ khi $b \neq \pm 3a$ và $6a^2 - 15ab + 5b^2 = 0$

Bài 158: Tính giá trị của biểu thức

$P = x^{15} - 2018x^{14} + 2018x^{13} - 2018x^{12} + \dots - 2018x^2 + 2018x - 2018$, với $x = 2017$.

Lời Giải:

Tính giá trị của biểu thức $P = x^{15} - 2018x^{14} + 2018x^{13} - 2018x^{12} + \dots - 2018x^2 + 2018x - 2018$, với $x = 2017$.

Thay $2018 = x+1$ vào P ta được:

$P = x^{15} - (x+1)x^{14} + (x+1)x^{13} - (x+1)x^{12} + \dots - (x+1)x^2 + (x+1)x - (x+1)$

$$= x^{15} - x^{15} - x^{14} + x^{14} + x^{13} - \dots + x^2 + x - x - 1 = -1$$

Vậy, $P = -1$ khi $x = 2017$.

Bài 159: Cho x, y là hai số khác nhau, biết $x^2 - y = y^2 - x$.

Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y$

Lời Giải:

Cho x, y là hai số khác nhau, biết $x^2 - y = y^2 - x$.

Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y$

Ta có: $x^2 - y = y^2 - x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0$

Vì $x \neq y$ nên $x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow x + y = -1$

Khi đó, $A = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y = (x + y)^2 - 3(x + y) = (-1)^2 - 3(-1) = 4$

Vậy, $A = 4$ khi $x^2 - y = y^2 - x$ và $x \neq y$.

Bài 160: Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + a^2c + b^2c - abc = 0$

Lời Giải:

Ta có: $a^3 + b^3 + a^2c + b^2c - abc = (a^3 + b^3) + (a^2c + b^2c - abc)$
 $= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + c(a^2 - ab + b^2) = (a^2 - ab + b^2)(a + b + c) = 0$ (Vì $a + b + c = 0$)

Bài 161: Cho $x^2 + y^2 + z^2 = 10$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = (xy + yz + zx)^2 + (x^2 - yz)^2 + (y^2 - xz)^2 + (z^2 - xy)^2$$

Lời Giải:

Ta có: $P = (xy + yz + zx)^2 + (x^2 - yz)^2 + (y^2 - xz)^2 + (z^2 - xy)^2$
 $= x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + 2xy^2z + 2x^2yz + 2xyz^2 + x^4 + y^2z^2 - 2x^2yz + y^4 + x^2z^2 - 2xy^2z + z^4 + x^2y^2 - 2xyz^2$
 $= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + (2y^2z^2 + 2x^2z^2) + z^4 = (x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)z^2 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 10^2 = 100$
 (Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 10$). Vậy, $P = 100$ khi $x^2 + y^2 + z^2 = 10$.

Bài 162: Chứng minh rằng nếu ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 2018$ và

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2018}$ thì một trong ba số a, b, c phải có một số bằng 2018.

Lời Giải:

Từ $a + b + c = 2018$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2018}$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$
 $\Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a + b + c}\right) = 0 \Rightarrow \frac{a + b}{ab} + \frac{a + b}{c(a + b + c)} = 0$
 $\Rightarrow (a + b)[c(a + b + c) + ab] = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ c + a = 0 \end{cases}$ mà $a + b + c = 2018$

Do đó, trong ba số a, b, c phải có một số bằng 2018.

Bài 163: Rút gọn các phân thức:

$$\text{a) } A = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2};$$

$$\text{b) } B = \frac{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}{(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3}$$

Lời Giải:

* **Nhớ :** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \dots = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$

Do đó, nếu $a+b+c=0$ hoặc $a=b=c$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

$$\text{a) } A = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2} = \frac{\frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right]}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

$$\text{b) } B = \frac{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}$$

Ta có : $(x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) + (z^2 - x^2) = 0$

Do đó, $(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 = 3(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)(1)$

Ta lại có: $(x-y) + (y-z) + (z-x) = 0$

Do đó, $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $B = \frac{3(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)}{3(x-y)(y-z)(z-x)} = (x+y)(y+z)(z+x)$

Bài 164: a) Rút gọn phân thức: $A = \frac{x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1}{x^{45} + x^{40} + x^{35} + \dots + x^5 + 1}$

b) Rút gọn phân thức: $B = \frac{x^{24} + x^{20} + x^{16} + \dots + x^4 + 1}{x^{26} + x^{24} + x^{22} + \dots + x^2 + 1}$

Lời Giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1}{x^{45} + x^{40} + x^{35} + \dots + x^5 + 1} = \frac{x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1}{x^5(x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1) + (x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1)} \\ &= \frac{x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1}{(x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1)(x^5 + 1)} = \frac{1}{x^5 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{x^{24} + x^{20} + x^{16} + \dots + x^4 + 1}{x^{26} + x^{24} + x^{22} + \dots + x^2 + 1} = \frac{x^{24} + x^{20} + x^{16} + \dots + x^4 + 1}{x^{24}(x^2 + 1) + x^{20}(x^2 + 1) + \dots + x^4(x^2 + 1) + (x^2 + 1)} \\ &= \frac{x^{24} + x^{20} + x^{16} + \dots + x^4 + 1}{(x^2 + 1)(x^{24} + x^{20} + x^{16} + \dots + x^4 + 1)} = \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Bài 165: Cho các số a, b, c khác 0, thỏa mãn $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1$.

Tính giá trị của biểu thức $(a^{23} + b^{23})(a^5 + b^5)(a^{2019} + b^{2019})$

Lời Giải:

$$\begin{aligned} \text{Từ } (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) &= 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \\ &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $P = (a^{23} + b^{23})(a^5 + b^5)(a^{2019} + b^{2019})$

+ Nếu $a + b = 0$ thì $a = -b \Leftrightarrow a^{23} = -b^{23} \Leftrightarrow a^{23} + b^{23} = 0$. Vậy, $P = 0$.

+ Nếu $b + c = 0$ thì $b = -c \Leftrightarrow b^5 = -c^5 \Leftrightarrow b^5 + c^5 = 0$. Vậy, $P = 0$.

+ Nếu $c + a = 0$ thì $c = -a \Leftrightarrow c^{2019} = -a^{2019} \Leftrightarrow c^{2019} + a^{2019} = 0$. Vậy, $P = 0$.

Kết luận: Với điều kiện đã cho $P = 0$.

Bài 166: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $(x+y)(y+z)(z+x) = 8xyz$.

Chứng minh rằng: $x = y = z$

Lời Giải:

Ta có: $(x+y)(y+z)(z+x) = 8xyz \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x(x-y)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 = 0$

Vì $x, y, z > 0$ nên $(y-z)^2 = (z-x)^2 = (x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = y = z > 0$

KL:...

Bài 167: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Lời Giải:

Nhân cả hai vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c \neq 0$, ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + a(b+c)}{b+c} + \frac{b^2 + b(c+a)}{c+a} + \frac{c^2 + c(a+b)}{a+b} = a+b+c \\ \Rightarrow & \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c = a+b+c \\ \Rightarrow & \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0 \end{aligned}$$

KL:...

Bài 168: Chứng minh rằng nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ và $a+b+c = abc$ thì $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

Lời Giải:

Bình phương hai vế $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$, ta được $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \cdot \frac{a+b+c}{abc} = 4$

Suy ra $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \cdot 1 = 4$ (Vì $a+b+c = abc$) hay $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

KL: ...

Bài 169: Cho x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=0$ và $xy+yz+zx=0$.

Hãy tính giá trị của biểu thức: $S = (x-1)^{2017} + y^{2018} + (z+1)^{2019}$

Lời Giải:

Ta có: $x+y+z=0 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \text{ (Vì } xy + yz + zx = 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0$$

$$\text{Suy ra } S = (0-1)^{2017} + 0^{2018} + (0+1)^{2019} = 0$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vậy, $S = 0$ khi $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$.

Bài 170: Rút gọn biểu thức:

$$a) M = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}{x^2+5x+5}$$

$$b) N = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

Lời Giải:

Rút gọn biểu thức:

$$a) M = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}{x^2+5x+5} = \frac{(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1}{x^2+5x+5}$$

$$= \frac{(x^2+5x+4)^2 + 2(x^2+5x+4)+1}{x^2+5x+5} = \frac{(x^2+5x+5)^2}{x^2+5x+5} = x^2+5x+5$$

$$b) N = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

$$= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

$$= \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

$$= \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

$$= \frac{16}{1-x^{16}} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

$$= \frac{32}{1-x^{32}}$$

Bài 171: Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^4 + b^4 + c^4$

Lời Giải:

Ta có : $1^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$

$$\Leftrightarrow 1 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 1 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad (1)$$

Ta lại có : $a + b + c = 0 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 0$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0 \Rightarrow ab + bc + ca = \frac{-(a^2 + b^2 + c^2)}{2}$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = -\frac{1}{2} \Rightarrow (ab + bc + ca)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$$

Do đó, $M = a^4 + b^4 + c^4 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Bài 172: Cho phân thức $A = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 3x - 2}$

- a) Rút gọn A.
b) Tính x để $A < 1$

Lời Giải:

- a) Rút gọn A.

Ta có $x^3 - 3x - 2 = \dots = (x+1)^2(x-2)$

ĐKXD: $x^3 - 3x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ và $x \neq 2$

Ta lại có: $x^4 - 2x^2 + 1 = \dots = (x-1)^2(x+1)^2$

Suy ra $A = \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{(x-1)^2}{x-2}$

Vậy, $A = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ với $x \neq -1$ và $x \neq 2$

- b) Tính x để $A < 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A < 1 &\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x-2} - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1 - x + 2}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 3}{x-2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{x-2} < 0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \quad \left(\forall \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \right) \\ &\Leftrightarrow x < 2 \end{aligned}$$

Kết hợp với ĐKXD, ta được $A < 1 \Leftrightarrow x < 2$ và $x \neq -1$.

Bài 173: a) Cho $\frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$, hãy tính $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

b) Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, hãy tính $B = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$

Lời Giải:

a) Cho $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$, hãy tính $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

Ta có: $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$ suy ra $5(x^2 + y^2) = 8xy$ với $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

Ta có: $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{5(x^2 - 2xy + y^2)}{5(x^2 + 2xy + y^2)} = \frac{5(x^2 + y^2) - 10xy}{5(x^2 + y^2) + 10xy} = \frac{8xy - 10xy}{8xy + 10xy} = \frac{-2xy}{18xy} = \frac{-1}{9}$ (vì $xy \neq 0$)

Vậy, $A = \frac{-1}{9}$ với $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$.

b) Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, hãy tính $B = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$

Đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \Rightarrow x = ka, y = kb, z = kc$ với $a, b, c \neq 0$

Khi đó, $B = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} = \frac{k^2 a^2 + k^2 b^2 + k^2 c^2}{(a^2 k + b^2 k + c^2 k)^2} = \frac{k^2(a^2 + b^2 + c^2)}{k^2(a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$

Vậy, $B = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$ khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ với $a, b, c \neq 0$.

c) Cho $a > b > 0$ thỏa mãn: $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính $C = \frac{a-b}{a+b}$

Vì $a > b > 0$ nên $C = \frac{a-b}{a+b} > 0$

$$\text{Xét } C^2 = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{3(a^2 - 2ab + b^2)}{3(a^2 + 2ab + b^2)} = \frac{3(a^2 + b^2) - 6ab}{3(a^2 + b^2) + 6ab} = \frac{10ab - 6ab}{10ab + 6ab} = \frac{4ab}{16ab} = \frac{1}{4}$$

Suy ra $C = \frac{1}{2}$ vì $C > 0$

Vậy, $C = \frac{1}{2}$ với $a > b > 0$ thỏa mãn: $3a^2 + 3b^2 = 10ab$

Bài 174: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right)$

- Rút gọn P ;
- Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào?
- Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Lời Giải:

a) Rút gọn P

ĐKXĐ: $x \neq \pm 3$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \left[\frac{x(x+3)}{(x+3)(x^2+9)} + \frac{3}{x^2+9} \right] : \left[\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{(x-3)(x^2+9)} \right] \\ &= \frac{x+3}{x^2+9} : \frac{x^2+9-6x}{(x-3)(x^2+9)} = \frac{x+3}{x^2+9} \cdot \frac{(x-3)(x^2+9)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3} \end{aligned}$$

Vậy, $P = \frac{x+3}{x-3}, x \neq \pm 3$.

b) Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào?

Ta có: $P = \frac{x+3}{x-3}, x \neq \pm 3$

$$\Rightarrow P(x-3) = x+3 \Rightarrow x(P-1) = 3(1+P) \Rightarrow x = \frac{3(P+1)}{P-1}$$

$$\text{Với } x > 0 \Leftrightarrow \frac{3(P+1)}{P-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{P+1}{P-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P > 1 \\ P < -1 \end{cases}$$

Vậy, với $x > 0$ thì P không nhận các giá trị từ (-1) đến 1 , tức là $P \notin [-1; 1]$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{x+3}{x-3}, x \neq \pm 3 \\ &= \frac{x-3+6}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Suy ra $x-3 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$.

Lập bảng:

$x-3$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
x	-3	0	1	2	4	5	6	9

Vậy, $x \in \{0; 1; 2; 4; 5; 6; 9\}$.

Bài 175: Cho biểu thức: $Q = 1 + \frac{x+3}{x^2+5x+6} : \left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \frac{3x}{3x^2-12} - \frac{1}{x+2} \right)$

- Rút gọn Q ;
- Tìm các giá trị của x để $Q=0, Q=1$;
- Tìm các giá trị của x để $Q>0$.

Lời Giải:

Cho biểu thức: $Q = 1 + \frac{x+3}{x^2+5x+6} : \left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \frac{3x}{3x^2-12} - \frac{1}{x+2} \right)$

a) Rút gọn Q :

Ta có: $Q = 1 + \frac{x+3}{(x+2)(x+3)} : \left(\frac{8x^2}{4x^2(x-2)} - \frac{3x}{3(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} \right)$

ĐKXĐ: $x \neq 0, x \neq \pm 2, x \neq -3$.

Suy ra $Q = 1 + \frac{1}{(x+2)} : \left(\frac{2}{(x-2)} - \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} \right) = \dots = \frac{x+4}{6}$

Vậy, $Q = \frac{x+4}{6}$ với $x \neq 0, x \neq \pm 2, x \neq -3$.

b) Tìm các giá trị của x để $Q=0, Q=1$

Ta có $Q=0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6} = 0 \Leftrightarrow x = -4$ (thỏa ĐKXĐ)

Ta có: $Q=1 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6} = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (không thỏa ĐKXĐ)

Vậy, tại $x = -4$ thì $Q=0$ và không tồn tại x để $Q=1$.

c) Tìm các giá trị của x để $Q>0$.

Ta có: $Q>0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6} > 0 \Leftrightarrow x > -4$

Kết hợp với ĐKXĐ, ta có: $Q>0 \Leftrightarrow x > -4$ và $x \neq 0, x \neq \pm 2, x \neq -3$.

Bài 176: Cho phân thức: $A = \frac{a^2+4a+4}{a^3+2a^2-4a-8}$

- Rút gọn A ;
- Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên

Lời Giải:

a) Rút gọn A :

Ta có: $A = \frac{a^2+4a+4}{a^3+2a^2-4a-8} = \frac{(a+2)^2}{a^2(a+2)-4(a+2)} = \frac{(a+2)^2}{(a+2)^2(a-2)}$

ĐKXĐ: $a \neq \pm 2$.

Khi đó, $A = \frac{1}{a-2}$ với $a \neq \pm 2$.

b) Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Để $A = \frac{1}{a-2}$ có giá trị nguyên với $a \in \mathbb{Z}$ và $a \neq \pm 2$ thì $a-2 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=1 \end{cases}$ (thỏa ĐKXĐ)

Vậy, $a=3$ hoặc $a=1$ thì A nhận giá trị nguyên.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 177: Cho $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = a$. Tính $M = \left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) : \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$ theo a .

Lời Giải:

Cho $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = a$. Tính $M = \left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) : \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$ theo a .

Ta có: $a = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^4 = \frac{a+1}{1-a} (a \neq 1)$

Thay $x^4 = \frac{a+1}{1-a} (a \neq 1)$ vào M , rút gọn ta được $M = \frac{2a}{a^2 + 1}, a \neq 1$.

Bài 178: Cho a, b, c là ba số dương khác 0 thỏa mãn: $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$ (Với giả thiết các tỉ số

đều có nghĩa). Tính: $M = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$.

Lời Giải:

Ta có: $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{b+c}{bc} = \frac{c+a}{ca}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow a = b = c \neq 0$

Khi đó, $M = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} = \frac{3a^2}{3a^2} = 1$

Vậy, $M = 1 \Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$ với a, b, c là ba số dương khác 0.

Bài 180: Cho $a+b=1$ và $ab \neq 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$

Lời Giải:

Với $a+b=1$ và $ab \neq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} &= \frac{a(a^3-1)+b(b^3-1)}{(a^3-1)(b^3-1)} = \frac{(a^4+b^4)-(a+b)}{a^3b^3-(a^3+b^3)+1} = \frac{(a^2+b^2)^2-2a^2b^2-1}{a^3b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)+1} \\ &= \frac{[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2-1}{a^3b^3+3ab} \quad (\text{Vì } a+b=1 \text{ và } ab \neq 0) \\ &= \frac{1-4ab+4a^2b^2-2a^2b^2-1}{ab(a^2b^2+3)} \quad (\text{Vì } a+b=1 \text{ và } ab \neq 0) \\ &= \frac{2ab(ab-2)}{ab(a^2b^2+3)} = \frac{2(ab-2)}{(a^2b^2+3)} \quad (\text{Vì } ab \neq 0) \end{aligned}$$

Vậy, $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$ với $a+b=1$ và $ab \neq 0$.

Bài 181: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $abc = 2019$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2019a}{ab+2019a+2019} + \frac{b}{bc+b+2019} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$$

Lời Giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2019a}{ab+2019a+2019} + \frac{b}{bc+b+2019} + \frac{c}{ca+c+1} \\
 &= \frac{abca}{ab+abca+abc} + \frac{b}{bc+b+2019} + \frac{c}{ca+c+1} \\
 &= \frac{a(bca)}{a(b+abc+bc)} + \frac{b}{bc+b+2019} + \frac{bc}{bca+bc+b} \\
 &= \frac{bca}{b+abc+bc} + \frac{b}{bc+b+2019} + \frac{bc}{bca+bc+b} \\
 &= \frac{2019}{b+2019+bc} + \frac{b}{bc+b+2019} + \frac{bc}{2019+bc+b} = \frac{2019+b+bc}{b+2019+bc} = 1.
 \end{aligned}$$

Vậy, $\frac{2019a}{ab+2019a+2019} + \frac{b}{bc+b+2019} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$ với $abc = 2019$.

Bài 182: Cho $3y-x=6$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6}$

Lời Giải:

Cho $3y-x=6$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6}$

Ta có: $3y-x=6 \Rightarrow x=3y-6, 3y=x+6$

$$\text{Do đó, } M = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6} = \frac{3y-6}{y-2} + \frac{2x-(x+6)}{x-6} = 3+1=4$$

Vậy, $M = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6}$ khi $3y-x=6$.

Bài 183: Cho biểu thức $P = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}, n \in N^*$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P tại $n=99$.

Lời Giải:

a) Rút gọn P :

$$\text{Ta có: } \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \text{ với } k \in N^*.$$

$$\text{Do đó, } P = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}, n \in N^*$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

Vậy, $P = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}, n \in N^*.$

b) Tính giá trị của P tại $n = 99$.

Tại $n = 99$ ta có $P = \frac{99 \cdot (99+2)}{(99+1)^2} = \frac{9999}{10000}$

Vậy, $P = \frac{9999}{10000}$ tại $n = 99$.

Bài 184:

a) Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

b) Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Lời Giải:

a) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

Tương tự: $\frac{b^2}{b^2 + 2ac} = \frac{b^2}{(b-a)(b-c)}; \quad \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \\ &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)} \\ &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1 \end{aligned}$$

b) Vì $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z \Rightarrow (x+y)^3 = -z^3$

Hay $x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = -z^3 \Rightarrow 3xyz = x^3 + y^3 + z^3$

Do đó: $3xyz(x^2 + y^2 + z^2) = (x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2)$
 $= x^5 + y^5 + z^5 + x^3(y^2 + z^2) + y^3(z^2 + x^2) + z^3(x^2 + y^2)$

$$\text{Mà } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = z^2 - 2xy \quad (\text{Vì } x + y = -z)$$

$$\text{Tương tự: } y^2 + z^2 = x^2 - 2yz; z^2 + x^2 = y^2 - 2zx$$

$$\begin{aligned} \text{Vì vậy: } 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) &= x^5 + y^5 + z^5 + x^3(x^2 - 2yz) + y^3(y^2 - 2zx) + z^3(z^2 - 2xy) \\ &= 2(x^5 + y^5 + z^5) - 2xyz(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } 2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{Bài 185: Rút gọn biểu thức sau: } A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) = \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2 - x) + x^2(2 - x)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)} \right) \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} = \frac{x(x - 2)^2 + 4x^2}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \\ &= \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x + 1}{x^2} = \frac{x(x^2 + 4)(x + 1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x + 1}{2x} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{x+1}{2x} \text{ với } x \neq 0; x \neq 2$$

$$\text{Bài 186: Cho biểu thức } P = \left(\frac{x-4}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right) : \left(1 - \frac{x-8}{x^2+x+1} \right) \quad (x \neq 1)$$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P khi x là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$

Lời giải

a) Với $x \neq 1$ ta có :

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x-4}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) : \frac{x^2+x+1-x+8}{x^2+x+1} \\ &= \left(\frac{x-4+x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) : \frac{x^2+9}{x^2+x+1} = \frac{x^2+2x-3}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2+9} \\ &= \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{x+3}{x^2+9} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x \neq 1 \text{ thì } P = \frac{x+3}{x^2+9}$$

b) Ta có : $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (tm)} \\ x = 1 \text{ (loại)} \end{cases}$

thay $x = 2$ vào P ta có: $P = \frac{5}{13}$

Kết luận với $x = 2$ thì $P = \frac{5}{13}$

Bài 187: Cho biểu thức $R = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4026}{x}$

Tìm x để biểu thức xác định, khi đó hãy rút gọn biểu thức

Lời giải

Ta có: $R = \left[\frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{4}{x(x^2-4)} \right] \cdot \frac{x}{4026}$

ĐK : $x \neq 0; x \neq \pm 2$

Khi đó: $R = \frac{1}{4026} \left(\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \frac{1}{4026} \cdot \frac{(x-1)(x+2) + (x+1)(x-2) - 4}{x^2-4} = \frac{1}{4026} \cdot \frac{2(x^2-4)}{(x^2-4)} = \frac{1}{2013}$

Vậy R xác định khi $x \neq 0; x \neq \pm 2$ và $R = \frac{1}{2013}$

Bài 188: Cho $x^2 + x = 1$. Tính giá trị biểu thức $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Lời giải

Ta có: $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
 $= x^2 \cdot (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^4 + 2x^3 + x^2) + x^2 + x + x + 1 = x^2(x^2 + x)^2 + (x^2 + x)^2 + x + 2 = x^2 + x + 3 = 4$

Vậy $Q = 4$

Bài 189: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3+x-x^2-1} \right) : \left(1 - \frac{2x}{x^2+1} \right)$

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A
- Tìm x để A nhận giá trị là số âm
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $(x+2) \cdot A$ nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

a) ĐKXĐ : $x \neq 1$. Rút gọn được: $A = \frac{1}{x-1}$

b) $A < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Đối chiếu với ĐKXD, ta được $x < 1$

c) Ta có: $(x+2).A = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$

Lập luận để suy ra : $x \in \{0; -2; 2; 4\}$

Bài 190: Cho biểu thức $A = \frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị của x để A nhận giá trị nguyên?
- Tìm giá trị lớn nhất của A

Lời giải

a) Ta có:

$$A = \frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1)+(x+1)} = \frac{3(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{x^2+1}$$

b) Muốn A nhận giá trị nguyên thì $x^2+1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

Từ đó tìm được tập hợp các giá trị của x để A nhận giá trị nguyên là $\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

c) Ta có : $A = \frac{3}{x^2+1}$ nhận giá trị lớn nhất khi x^2+1 có giá trị nhỏ nhất

Mà $x^2+1 \geq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Vậy $\text{Max } A = 3 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 191: Cho các số nguyên a,b,c thỏa mãn $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 2010$

Tính giá trị của biểu thức $A = |a-b| + |b-c| + |c-a|$

Lời giải

Đặt $a-b = x; b-c = y; c-a = z \Rightarrow x+y+z = 0 \Rightarrow z = -(x+y)$

Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 = 210 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - (x+y)^3 = 210 \Leftrightarrow -3xy(x+y) = 210 \Leftrightarrow xyz = 70$

Do x,y,z là số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz = 70 = (-2).(-5).7$ nên $x, y, z \in \{-2; -5; 7\}$

Suy ra $A = |a-b| + |b-c| + |c-a| = 14$

Bài 192: Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x :

$$(x-1)^4 - x^2(x^2+6) + 4x(x^2+1)$$

Lời giải

Ta có: $(x-1)^4 - x^2(x^2+6) + 4x(x^2+1) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 - x^4 - 6x^2 + 4x^3 + 4x = 1$

Vậy với mọi giá trị của x biểu thức đã cho không phụ thuộc vào biến x.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 193: Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng:

$$\text{Nếu } a + b + c = 0 \text{ thì } \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) = 9$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 - b(a-c)(a+c-b)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a+b-c = x \\ b+c-a = y \\ a+c-b = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x+z}{2} \\ b = \frac{x+y}{2} \\ c = \frac{y+z}{2} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2} \right) \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2} \right) x^2 - \frac{1}{4} (x+y)(x-y)z^2 \\ &= \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x-z}{2} \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot (x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - z^2)y^2 + \frac{1}{4} (z^2 - y^2)x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 = \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 = 0 = VP \end{aligned}$$

\Rightarrow đpcm

Bài 194: Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng:

$$\text{Nếu } a + b + c = 0 \text{ thì } \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) = 9$$

Lời giải

$$\text{Đặt: } \frac{a-b}{c} = x; \frac{b-c}{a} = y; \frac{c-a}{b} = z \Rightarrow \frac{c}{a-b} = \frac{1}{x}; \frac{a}{b-c} = \frac{1}{y}; \frac{b}{c-a} = \frac{1}{z} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 9$$

$$\text{Ta có: } (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 3 + \left(\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \right) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có: } \frac{y+z}{x} &= \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \cdot \frac{c}{a-b} = \frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab} \cdot \frac{c}{a-b} \\ &= \frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)} = \frac{c(c-a-b)}{ab} = \frac{c[2c - (a+b+c)]}{ab} = \frac{2c^2}{ab} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{x+z}{y} = \frac{2a^2}{bc}; \frac{x+y}{z} = \frac{2b^2}{ac}$$

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 3 + \frac{2c^2}{ab} + \frac{2a^2}{bc} + \frac{2b^2}{ac} = 3 + \frac{2}{abc} (a^3 + b^3 + c^3)$$

Vì $a + b + c = 0$ nên suy ra $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Do đó: $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 3 + \frac{2}{abc} \cdot 3abc = 3 + 6 = 9$

Bài 195: Tìm 3 số dương a, b, c thỏa mãn :

$$\frac{a^2 + 7}{4} = \frac{b^2 + 6}{5} = \frac{c^2 + 3}{6} \text{ và } a^2 + 2c^2 = 3b^2 + 19$$

Lời giải

Từ giả thiết : $a^2 + 2c^2 = 3b^2 + 19$ suy ra $a^2 + 2c^2 - 3b^2 = 19$

Ta có:

$$\frac{a^2 + 7}{4} = \frac{b^2 + 6}{5} = \frac{c^2 + 3}{6} = \frac{3b^2 + 18}{15} = \frac{2c^2 + 6}{12} = \frac{a^2 + 7 + 2c^2 + 6 - 3b^2 - 18}{4 + 12 - 15} = 14$$

Suy ra :

$$a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$$

$$b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$$

$$c^2 = 81 \Rightarrow c = 9$$

Vậy $a = 7$; $b = 8$; $c = 9$

Bài 196: Chứng minh rằng $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$ biết $x + y + z = 0$

Lời giải

Ta có: $x + y + z = 0$ suy ra $x = -(y + z)$

$$\text{Do đó: } x^2 = [-(y + z)]^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y^2 + z^2 + 2yz \Leftrightarrow x^2 - y^2 - z^2 = 2yz$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 - z^2) = 4y^2z^2 \Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x^4 + y^4 + z^4) = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x^4 + y^4 + z^4) = (x^4 + y^4 + z^4)^2$$

Bài 197: Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Lời giải

$$a^3 - 3ab^2 = 5 \Rightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25$$

$$b^3 - 3a^2b = 10 \Rightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100$$

$$\Rightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 125$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)^3 = 5^3 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2018} = \frac{5}{2018}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 198: Biết $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$. Tính giá trị biểu thức $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Lời giải

$$4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow (a-b)(4a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ 4a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=4b \end{cases}$$

Do $2a > b > 0$ nên $4a = b$ loại

$$\text{Với } a=b \text{ thì } C = \frac{ab}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}$$

Bài 199: Cho $10a^2 = 10b^2 - c^2$. Chứng minh rằng: $(7a - 3b - 2c)(7a - 3b + 2c) = (3a - 7b)^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} VT &= (7a - 3b)^2 - 4c^2 = 49a^2 - 42ab + 9b^2 - 4c^2 \\ \text{mà } 10a^2 &= 10b^2 + c^2 \text{ nên } c^2 = 10a^2 - 10b^2 \\ \text{nên } VT &= 49a^2 - 42ab + 9b^2 - 4(10a^2 - 10b^2) \\ &= 49a^2 - 42ab + 9b^2 - 40a^2 + 40b^2 = 9a^2 - 42ab + 49b^2 = (3a - 7b)^2 = VP \end{aligned}$$

Bài 200: Chứng minh rằng: Với mọi $x \in \mathbb{Q}$ thì giá trị của đa thức :

$$M = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 16 \text{ là bình phương của một số hữu tỉ}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 16$$

$$\text{Đặt } a = x^2 + 10x + 16$$

$$\text{Suy ra } M = a(a+8) + 16 = a^2 + 8a + 16 = (a+4)^2$$

$$\text{Vậy } M = (x^2 + 10x + 20)^2 \text{ (dpcm)}$$

Bài 201: Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $ab + bc + ca \leq 0$

Lời giải

Có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab; a^2 + c^2 \geq 2ac; b^2 + c^2 \geq 2bc$$

$$\text{Cộng được: } 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \quad (1)$$

$$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0 \Leftrightarrow -a^2 - b^2 - c^2 = 2ab + 2ac + 2bc \quad (2)$$

$$\text{Cộng (1) với (2) được } 3ab + 3ac + 3bc \leq 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 0$$

Bài 202: Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a(b-c)(b+c-a^2) + c(a-b)(a+b-c^2) - b(a-c)(a+c-b^2) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ a+c-b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{x+z}{2} \\ b=\frac{x+y}{2} \\ c=\frac{y+z}{2} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2} \right) \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2} \right) x^2 - \frac{1}{4} (x+y)(x-y) z^2 \\ &= \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x-z}{2} \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2) z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - z^2) y^2 + \frac{1}{4} (z^2 - y^2) x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2) z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - y^2) z^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2) z^2 = 0 = VP \quad (dfcm) \end{aligned}$$

Bài 203: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính $a^{2011} + b^{2011}$

Lời giải

$$(a^{2001} + b^{2001})(a+b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a+b) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\text{Với } a=1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b=1(tm) \\ b=0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Với } b=1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a=1(tm) \\ a=0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a=1; b=1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

Bài 204: Tìm a, b biết $\frac{1+2a}{15} = \frac{3b}{23+7a} = \frac{7-3a}{20}$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{1+2a}{15} = \frac{7-3a}{20} \Rightarrow 20(1+2a) = 15(7-3a) \Rightarrow a=1$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Thay $a = 1$ vào tỉ lệ thức $\frac{1+2a}{15} = \frac{3b}{23+7a}$ ta được: $\frac{1+2.1}{15} = \frac{3b}{23+7.1} \Rightarrow b = 2$

Vậy $a = 1, b = 2$

Bài 205: Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 - b(a-c)(a+c-b)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a+b-c = x \\ b+c-a = y \\ a+c-b = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x+z}{2} \\ b = \frac{x+y}{2} \\ c = \frac{y+z}{2} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2} \right) \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2} \right) \cdot x^2 - \frac{1}{4} (x+y)(x-y)z^2 \\ &= \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x-z}{2} \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - z^2)y^2 + \frac{1}{4} (z^2 - y^2)x^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 - \frac{1}{4} (x^2 - y^2)z^2 = 0 = VP \quad (dfcm) \end{aligned}$$

Bài 206:

a) Cho $x^2 - 4x + 1 = 0$. Tính $E = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}$

b) Cho $\frac{x}{x^2 - x + 1} = a$. Tính $F = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ theo a

Lời giải

Cho $x^2 - 4x + 1 = 0$. Tính $E = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}$

***Cách 1:** Ta có $x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 3x \Rightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x} = 3, x \neq 0$

$$E = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x} = 3 \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x} = 3 \cdot \left(\frac{x^2 - x + 1}{x} + \frac{2x}{x} \right) = 3 \cdot (3 + 5) = 15.$$

Vậy, $E = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = 15$ khi $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

***Cách 2:** $E = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{x^2} = \frac{(4x)^2 - x^2}{x^2} = \frac{15x^2}{x^2} = 15, x \neq 0$

b) Cho $\frac{x}{x^2 - x + 1} = a$. Tính $F = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ theo a

+ Xét $x = 0$ thì $a = 0 \Rightarrow F = 0$

+ Xét $x \neq 0$ thì $a \neq 0$

Ta có $F = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 - x + 1} \cdot \frac{x}{x^2 + x + 1} = a \cdot \frac{x}{x^2 + x + 1} \quad (1)$

Mặt khác, $\frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x} + \frac{2x}{x} = \frac{1}{a} + 2 = \frac{1 + 2a}{a} \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \frac{a}{1 + 2a} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $F = a \cdot \frac{a}{1 + 2a} = \frac{a^2}{1 + 2a}$

Vậy, $F = \frac{a^2}{1 + 2a}$ khi $\frac{x}{x^2 - x + 1} = a$.

Bài 207: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{(1^4 + 4)(5^4 + 4)(9^4 + 4) \dots (21^4 + 4)}{(3^4 + 4)(7^4 + 4)(11^4 + 4) \dots (23^4 + 4)}$

Lời giải

Rút gọn biểu thức: $P = \frac{(1^4 + 4)(5^4 + 4)(9^4 + 4) \dots (21^4 + 4)}{(3^4 + 4)(7^4 + 4)(11^4 + 4) \dots (23^4 + 4)}$

Xét $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = [(n-1)^2 + 1][(n+1)^2 + 1]$

Do đó, $P = \frac{(1^4 + 4)(5^4 + 4)(9^4 + 4) \dots (21^4 + 4)}{(3^4 + 4)(7^4 + 4)(11^4 + 4) \dots (23^4 + 4)}$
 $= \frac{(0^2 + 1)(2^2 + 1)(4^2 + 1)(6^2 + 1) \dots (20^2 + 1)(22^2 + 1)}{(2^2 + 1)(4^2 + 1)(6^2 + 1)(8^2 + 1) \dots (22^2 + 1)(24^2 + 1)} = \frac{1}{24^2 + 1} = \frac{1}{577}$

Bài 208: Cho biểu thức $M = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

b) Rút gọn biểu thức M . b) Tính giá trị của M , biết $|x| = \frac{1}{2}$.

c) Tìm giá trị của x để $M < 0$. d) Tìm các giá trị nguyên của x để M có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Rút gọn $M = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

ĐKXĐ: $x \neq \pm 2$

Ta có: $M = \frac{x-2(x+2)+(x-2)}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{6}{x+2} = \frac{-6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{6} = \frac{1}{2-x}$

Vậy, $M = \frac{1}{2-x}, x \neq \pm 2$

b) Tính giá trị của M , biết $|x| = \frac{1}{2}$.

Ta có: $|x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

+ Với $x = \frac{1}{2}$ (thỏa ĐKXĐ) thì $M = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

+ Với $x = -\frac{1}{2}$ (thỏa ĐKXĐ) thì $M = \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$

+ Vậy, khi $|x| = \frac{1}{2}$ thì $M = \frac{2}{3}$ hoặc $M = \frac{2}{5}$

c) Tìm giá trị của x để $M < 0$.

Ta có: $M < 0 \Rightarrow \frac{1}{2-x} < 0 \Rightarrow 2-x < 0 \Leftrightarrow x > 2$ (thỏa ĐKXĐ)

Vậy, $M < 0 \Leftrightarrow x > 2$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để M có giá trị nguyên.

Để $M = \frac{1}{2-x}$ có giá trị nguyên khi x nguyên và $x \neq \pm 2$ thì $2-x \in U(1) = \{-1; 1\}$

Giải ra $x = 1$ hoặc $x = 3$ (thỏa ĐKXĐ)

Suy ra $x \in \{1; 3\}$ thì M có giá trị nguyên.

Bài 209: Cho biểu thức: $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2}$ với

$x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$

3) Rút gọn biểu thức P .

4) Tính giá trị của biểu thức P , biết x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$$

Lời giải

1) Với $x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2 y - (x^2 - y^2)(x+y) - xy^2}{xy(x+y)} \right) \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{2}{x} - \frac{xy(x-y) - (x-y)(x+y)^2}{xy(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{x-y}{xy} = \frac{x+y}{xy}$$

$$2) \text{ Ta có: } x^2 + y^2 + 10 = 2(x-3y)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$$

$$\text{Lập luận} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} (\text{tm})$$

$$\text{Nên thay } x=1; y=-3 \text{ vào biểu thức } P = \frac{x+y}{xy} = \frac{1+(-3)}{1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}$$

Bài 210:

$$\text{Cho biểu thức: } A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên
- Tìm x để $|A| = A$

Lời giải

$$a) \text{ ĐKXĐ: } x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$$

$$A = \left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$$

$$= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

$$b) \text{ A nguyên, mà x nguyên nên } 2:(1-2x), \text{ từ đó tìm được } \begin{cases} x=1(\text{ktm}) \\ x=0(\text{tm}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x=0$$

$$c) \text{ Ta có:}$$

$$|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện: } -1 \neq x < \frac{1}{2}$$

$$\text{Bài 211: Cho biểu thức: } P = \frac{x^2+x}{x^2-2x+1} : \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$$

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm x để $P < 1$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

Rút gọn P ta có: $P = \frac{x^2}{x-1}$

$$\begin{aligned} \text{b) } P < 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{x-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

Vậy với $x < 1$ và $x \neq 0; x \neq -1$ thì $P < 1$

$$\text{a) Ta có: } P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2$$

Khi $x > 1; x-1 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$. Vậy GTNN của P bằng 4 $\Leftrightarrow x = 2$

Bài 212: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{4x}{2+x} + \frac{8x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x-1}{x^2-2x} - \frac{2}{x} \right)$

- Tìm điều kiện xác định, rồi rút gọn biểu thức A
- Tìm x để $A = -1$
- Tìm các giá trị của x để $A < 0$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq \pm 2$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{4x}{2+x} + \frac{8x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x-1}{x^2-2x} - \frac{2}{x} \right) = \frac{4x(2-x) + 8x^2}{(2+x)(2-x)} : \frac{x-1-2(x-2)}{x(x-2)} \\ &= \frac{8x-4x^2+8x^2}{(2+x)(2-x)} : \frac{x-1-2x+4}{x(x-2)} = \frac{8x+4x^2}{(2+x)(2-x)} : \frac{3-x}{x(x-2)} \\ &= \frac{4x(2+x)}{(2+x)(2-x)} \cdot \frac{x(x-2)}{3-x} = \frac{4x^2}{x-3} \end{aligned}$$

$$\text{b) } A = -1 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} = -1 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{c) } A < 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} < 0 \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$$

Vậy $x < 3; x \neq 0; x \neq \pm 2$ thì $A < 0$

Bài 213: Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x-y}{x+y}$. Biết $x^2 - 2y^2 = xy$ ($x+y \neq 0; y \neq 0$)

Lời giải

$$x^2 - 2y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-2y) = 0$$

$$\text{Vì } x+y \neq 0 \text{ nên } x-2y=0 \Leftrightarrow x=2y$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{2y-y}{2y+y} = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3}$$

Bài 214: Rút gọn

$$\text{a) } A = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

$$\text{b) } B = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

Lời giải

$$\text{a) Rút gọn } A = 1$$

$$\text{b) Rút gọn } B = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Bài 215: Cho 3 số x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 2009$. Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào các biến x, y, z :

$$\frac{2009x}{xy + 2009x + 2009} + \frac{y}{yz + y + 2009} + \frac{z}{xz + z + 1}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \frac{2009x}{2009 + 2009x + xy} + \frac{y}{xyz + y + yz} + \frac{z}{1 + z + zx} \\ &= \frac{xy \cdot xz}{xy(xz + z + 1)} + \frac{1}{1 + z + zx} + \frac{z}{1 + z + zx} = \frac{1 + z + xz}{1 + z + zx} = 1 \end{aligned}$$

Bài 216: Cho biểu thức: $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

$$\text{a) Rút gọn biểu thức } A$$

$$\text{b) Tìm giá trị nguyên của } x \text{ để } A \text{ nhận giá trị nguyên}$$

Lời giải

$$\text{c) } A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$$

$$A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1) - 3x(x+1)}{3x} \right] : \frac{x-1}{x}$$

$$A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2(1-3x)}{3x} \right] : \frac{x}{x-1}$$

$$A = 2 \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

d) Với $x \neq 0; x \neq \pm 1$, Ta có: $A = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $(x-1)$ phải là ước của 2 $\Rightarrow x-1 \in \{\pm 1; \pm 2\}$

Đối chiếu điều kiện tìm được $x = 2$ hoặc $x = 3$ thỏa mãn

Bài 217: Cho biểu thức : $P = \left(\frac{x}{x^2-25} + \frac{5-x}{x^2+5x} \right) : \frac{2x-5}{x^2+5x} - \frac{2x}{5-x}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để P có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

c) Tìm được ĐKXĐ của P là : $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x}{(x+5)(x-5)} - \frac{x-5}{x(x+5)} \right) : \frac{2x-5}{x(x+5)} - \frac{2x}{5-x} \\ &= \frac{x^2 - (x-5)^2}{x(x+5)(x-5)} : \frac{2x-5}{x(x+5)} - \frac{2x}{5-x} \\ &= \frac{(x-x+5)(x+x-5)}{x(x-5)(x+5)} \cdot \frac{x(x+5)}{2x-5} - \frac{2x}{5-x} \\ &= \frac{5}{x-5} + \frac{2x}{x-5} = \frac{5+2x}{x-5} \end{aligned}$$

d)

$$P \in \mathbb{Z} \begin{cases} x \neq 0; x \neq \pm 5; x \in \mathbb{Z} (*) \\ \frac{5+2x}{x-5} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ta có: $\frac{5+2x}{x-5} = 2 + \frac{15}{x-5}$. Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-5 \in U(15) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15\}$

Mà x lớn nhất nên $x-5$ lớn nhất. Do đó $x-5 = 15 \Leftrightarrow x = 20$ (thỏa mãn $(*)$)

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của $x = 20$ để P có giá trị là một số nguyên

Bài 218: a) Tính giá trị của biểu thức sau: $\frac{x^{16}-1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}$ với $x = 2011$

b) Cho $(x+3y)^3 - 6(x+3y)^2 + 12(x+3y) = -19$

Tìm giá trị của biểu thức $x+3y$

Lời giải

a)

$$x^{16} - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$$

$$\Rightarrow \frac{x^{16} - 1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)} = x-1$$

Kết quả 2010

$$(x+3y)^3 - 6(x+3y)^2 + 12(x+3y) - 8 = -27$$

$$b) \Leftrightarrow (x+3y-2)^3 = (-3)^3$$

$$\Rightarrow x+3y-2 = -3 \Rightarrow x+3y = -1$$

Bài 219: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x}{x+2} - \frac{x^3-8}{x^3+8} \cdot \frac{x^2-2x+4}{x^2-4} \right) : \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của x để $P > 0$

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq \pm 2$

$$\frac{x^3-8}{x^3+8} \cdot \frac{x^2-2x+4}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} \cdot \frac{x^2-2x+4}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x^2+2x+4}{(x+2)^2} = \frac{x(x+2) - (x^2+2x+4)}{(x+2)^2} = \frac{-4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{-4}{(x+2)^2} : \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1} = \frac{-4 \cdot (x+2)(x+1)(x+2)}{(x+2)^2 \cdot (x^2+x+1)} = \frac{-4 \cdot (x+1)}{x^2+x+1}$$

$$b) x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x$$

$$\text{Để } P > 0 \Leftrightarrow -4(x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Vậy để $P > 0$ thì $x < -1; x \neq -2$

Bài 220: Cho $x(m+n) = y(n+p) = z(p+m)$ trong đó x, y, z là các số khác nhau và khác 0,

Chứng minh rằng: $\frac{m-n}{x(y-z)} = \frac{n-p}{y(z-x)} = \frac{p-m}{z(x-y)}$

Lời giải

Vì $xyz \neq 0$ nên: $x(m+n) = y(n+p) = z(p+m)$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Rightarrow \frac{x(m+n)}{xyz} = \frac{y(n+p)}{xyz} = \frac{z(p+m)}{xyz}$$

$$\text{hay: } \frac{m+n}{yz} = \frac{n+p}{xz} = \frac{p+m}{xy}$$

$$= \frac{(p+m)-(n+p)}{xy-yz} = \frac{(m+n)-(p+m)}{yz-xy} = \frac{(n+p)-(m+n)}{xz-yz}$$

$$= \frac{m-n}{x(y-z)} = \frac{n-p}{y(z-x)} = \frac{p-m}{z(x-y)}$$

Bài 221: Tính tổng: $S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{2007.2009}$

a) Rút gọn $A = 1$

b) Rút gọn $B = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

Bài 222:

a) Hãy viết biểu thức sau : $\frac{2a+1}{a^2(a+1)}$ thành hiệu hai bình phương

b) Cho $M = \frac{2.1+1}{(1^2+1)^2} + \frac{2.2+1}{(2^2+2)^2} + \frac{2.3+1}{(3^2+3)^2} + \dots + \frac{2.2012+1}{(2012^2+2012)^2}$

Chứng minh rằng $M < 1$

Lời giải

a) $\frac{2a+1}{a^2(a+1)^2} = \frac{a^2+2a+1-a^2}{a^2(a+1)^2} = \frac{(a+1)^2-a^2}{a^2(a+1)^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a+1}\right)^2$

b) $\frac{2a+1}{(a^2+a)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2}$

$$M = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2012^2} - \frac{1}{2013^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2013^2} < 1 \Rightarrow M < 1$$

Bài 223: Cho biểu thức:

$$M = \left(\frac{x^2}{x^3-4x} + \frac{6}{6-3x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$$

a) Rút gọn M

b) Tính giá trị của biểu thức M khi $x = -1$

c) Với giá trị nào của x thì $M = -2$

d) Tìm giá trị nguyên của x để M có giá trị nguyên.

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

a) Điều kiện $x \neq 0, x \neq \pm 2$

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right) \\ &= \left[\frac{x}{(x - 2)(x + 2)} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right] : \frac{x^2 - 4 + 10 - x^2}{x + 2} \\ &= \frac{x - 2(2 + x) + x - 2}{(x - 2)(x + 2)} : \frac{6}{x + 2} = \frac{-6}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x + 2}{6} = \frac{-1}{x - 2} = \frac{1}{2 - x} \end{aligned}$$

b) $x = -1 \Rightarrow M = \frac{1}{2 - x} = \frac{1}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$

c) $M = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2 - x} = 2 \Leftrightarrow 2(2 - x) = 1 \Leftrightarrow 2 - x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (TMDK)

d) Để M nhận giá trị nguyên thì $\frac{1}{2 - x}$ nhận giá trị nguyên

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2 - x \in U(1) = \{-1; 1\} \\ &\begin{cases} 2 - x = -1 \Rightarrow x = 3 \text{ (tm)} \\ 2 - x = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ (tm)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy với $x \in \{1; 3\}$ thì M nhận giá trị nguyên.

Bài 224: Rút gọn biểu thức sau: $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2 - x) + x^2(2 - x)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)} \right) \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \\ &= \frac{x \cdot (x - 2)^2 + 4x^2}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x + 1) \cdot (x + 2)}{x^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x + 1}{x^2} \\ &= \frac{x(x^2 + 4)(x + 1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x + 1}{2x} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{x+1}{2x}$ với $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Bài 225: Chứng minh rằng:

$$a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$$

Lời giải

Ta có: $a(b-c)(b+c-a^2) + c(a-b)(a+b-c^2) - b(a-c)(a+c-b^2) = 0$ (1)

$$\text{Đặt } \begin{cases} a+b-c=x \\ b+c-a=y \\ a+c-b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{x+z}{2} \\ b=\frac{x+y}{2} \\ c=\frac{y+z}{2} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{x+z}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2} - \frac{y+z}{2} \right) \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \left(\frac{x+z}{2} - \frac{x+y}{2} \right) \cdot x^2 - \frac{1}{4}(x+y)(x-y)z^2 \\ &= \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x-z}{2} \cdot y^2 + \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z-y}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - z^2)y^2 + \frac{1}{4}(z^2 - y^2)x^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)z^2 = 0 = VP \quad (\text{dfcm}) \end{aligned}$$

Bài 226: Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng:

Nếu $a+b+c=0$ thì $\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right) = 9$

Lời giải

$$\text{Đặt } \frac{a-b}{c} = x; \frac{b-c}{a} = y; \frac{c-a}{b} = z \Rightarrow \frac{c}{a-b} = \frac{1}{x}; \frac{a}{b-c} = \frac{1}{y}; \frac{b}{c-a} = \frac{1}{z} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 9$$

$$\text{Ta có: } (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 3 + \left(\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \right) \quad (2)$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{y+z}{x} = \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \cdot \frac{c}{a-b} = \frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab} \cdot \frac{c}{a-b}$$

$$= \frac{c(a-b)(c-a-b)}{ab(a-b)} = \frac{c(c-a-b)}{ab} = \frac{c[2c-(a+b+c)]}{ab} = \frac{2c^2}{ab}$$

Tương tự ta có: $\frac{x+z}{y} = \frac{2a^2}{bc}; \frac{x+y}{z} = \frac{2b^2}{ac}$

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{2c^2}{ab} + \frac{2a^2}{bc} + \frac{2b^2}{ac} = 3 + \frac{2}{abc}(a^3 + b^3 + c^3)$$

Vì $a+b+c=0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Do đó: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{2}{abc} \cdot 3abc = 3 + 6 = 9$

Bài 227: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{x^3-1} + \frac{1}{x-1}\right) : \left(1 - \frac{x-8}{x^2+x+1}\right) \quad (x \neq 1)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P khi x là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$

Lời giải

a) Với $x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x-4}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) : \frac{x^2+x+1-x+8}{x^2+x+1} \\ &= \left(\frac{x-4+x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) : \frac{x^2+9}{x^2+x+1} = \frac{x^2+2x-3}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2+9} \\ &= \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x^2+9)} = \frac{x+3}{x^2+9} \end{aligned}$$

Vậy $x \neq 1$ thì $P = \frac{x+3}{x^2+9}$

b) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2(\text{tm}) \\ x = 1(\text{ktm}) \end{cases}$. Thay $x = 2$ vào P ta có: $P = \frac{2+3}{2^2+9} = \frac{5}{13}$

Kết luận với $x = 2$ thì $P = \frac{5}{13}$

Bài 228: Tìm 3 số dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{a^2+7}{4} = \frac{b^2+6}{5} = \frac{c^2+3}{6}$ và $a^2 + 2c^2 = 3c^2 + 19$

Lời giải

Từ giả thiết $a^2 + 2c^2 = 3b^2 + 19 \Rightarrow a^2 + 2c^2 - 3b^2 = 19$

$$\text{Ta có: } \frac{a^2 + 7}{4} = \frac{b^2 + 6}{5} = \frac{c^2 + 3}{6} = \frac{3b^2 + 18}{15} = \frac{2c^2 + 6}{12} = \frac{a^2 + 7 + 2c^2 + 6 - 3b^2 - 18}{4 + 12 - 15} = \frac{14}{1} = 14$$

$$a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$$

$$\text{Suy ra : } b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$$

$$c^2 = 81 \Rightarrow c = 9$$

Bài 229: Một giải bóng chuyền có 9 đội bóng tham gia thi đấu vòng tròn 1 lượt (hai đội bất kỳ chỉ thi đấu với nhau 1 trận). Biết đội thứ nhất thắng a_1 trận và thua b_1 trận, đội thứ 2 thắng a_2 trận và thua b_2 trận, ..., đội thứ 9 thắng a_9 trận và thua b_9 trận.

Chứng minh rằng $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_9^2$

Lời giải

Mỗi đội bóng thi đấu với 8 đội bóng khác và hai đội bất kỳ chỉ gặp nhau 1 trận nên mỗi đội sẽ thi đấu 8 trận $\Rightarrow a_i + b_i = 8$ (với $i = 1, 2, 3, \dots, 8$)

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 &= (8 - a_1)^2 + (8 - a_2)^2 + (8 - a_3)^2 + \dots + (8 - a_9)^2 \\ \Leftrightarrow 16(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9) &= 576(1) \end{aligned}$$

Mặt khác, tổng số trận thắng của các đội bằng tổng số trận đấu nên :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

Bài 230: Cho $x^2 + x = 1$. Tính giá trị biểu thức $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} Q &= x^2 \cdot (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^4 + 2x^3 + x^2) + x^2 + x + x + 1 \\ &= x^2(x^2 + x)^2 + (x^2 + x)^2 + x + 2 \\ &= x^2 + x + 3 = 4 \end{aligned}$$

Vậy $Q = 4$

Bài 231: Cho biểu thức $R = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4026}{x}$. Tìm x để biểu thức xác định, khi đó hãy rút gọn biểu thức

Lời giải

Ta có: $R = \left[\frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{4}{x(x^2-4)} \right] \cdot \frac{x}{4026}$

ĐK: $x(x^2-4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$

Khi đó: $R = \frac{1}{4026} \cdot \left(\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$

$$= \frac{1}{4026} \cdot \frac{(x-1)(x+2) + (x+1)(x-2) - 4}{x^2-4}$$

$$= \frac{1}{4026} \cdot \frac{2(x^2-4)}{x^2-4} = \frac{1}{2013}$$

Vậy R xác định khi $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$ và $R = \frac{1}{2013}$

Bài 232: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3+x-x^2-1} \right) : \left(1 - \frac{2x}{x^2+1} \right)$

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A
- Tìm x để A nhận giá trị là số âm
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $(x+2) \cdot A$ nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

1a) ĐKXD: $x \neq 1$; Rút gọn được: $A = \frac{1}{x-1}$

1b) $A < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Đối chiếu với ĐKXD, ta được $x < 1$

1c) Ta có: $(x+2)A = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$

Lập luận để suy ra: $x \in \{0; -2; 2; 4\}$

Bài 233: Chứng tỏ rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x

$$(x-1)^4 - x^2(x^2+6) + 4x(x^2+1)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & (x-1)^4 - x^2(x^2+6) + 4x(x^2+1) \\ &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 - x^4 - 6x^2 + 4x^3 + 4x \\ &= 1 \end{aligned}$$

Vậy với mọi giá trị của x biểu thức đã cho không phụ thuộc vào biến x

Bài 234: Chứng minh rằng $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$

Lời giải

Ta có: $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -(y + z)$

$$\Rightarrow x^2 = [-(y + z)]^2$$

$$x^2 = y^2 + z^2 + 2yz \Leftrightarrow x^2 - y^2 - z^2 = 2yz$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 - z^2)^2 = (2yz)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2 = 4y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 + x^4 + y^4 + z^4 = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x^4 + y^4 + z^4) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

Bài 235: Cho biểu thức $A = \frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị của x để A nhận giá trị nguyên?
- Tìm giá trị lớn nhất của A

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1)+(x+1)} = \frac{3(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{x^2+1}$$

b) Muốn A nhận giá trị nguyên thì $x^2 + 1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

- Nếu $x^2 + 1 = -3 \Rightarrow x \in \emptyset$
- Nếu $x^2 + 1 = -1 \Rightarrow x \in \emptyset$
- Nếu $x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A = 3$
- Nếu $x^2 + 1 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow A = 1$

Vậy tập hợp các giá trị của x để A nhận giá trị nguyên là $\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

c) $A = \frac{3}{x^2+1}$ nhận giá trị lớn nhất khi $x^2 + 1$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $x^2 + 1 \geq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Vậy $\text{Max}_A = 3 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 236: Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$. Tính giá trị của biểu

thức $A = |a-b| + |b-c| + |c-a|$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

$$\text{Đặt } a-b=x; b-c=y; c-a=z \Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow z=-(x+y)$$

$$\text{Ta có: } x^3+y^3+z^3=210 \Leftrightarrow x^3+y^3-(x+y)^3=210 \Leftrightarrow -3xy(x+y)=210 \Leftrightarrow xyz=70$$

Do x, y, z là số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz=70=(-2).(-5).7$ nên

$$x, y, z \in \{-2; -5; 7\} \Rightarrow A=|a-b|+|b-c|+|c-a|=14$$

Bài 237: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Giá trị của A được xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+8 \neq 0 \\ 8-4x+2x^2-x^3 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 \neq -8 \\ 4(2-x)+x^2(2-x) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq -4 \\ (2-x)(4+x^2) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left[\frac{x^2-2x}{2(x^2+4)} - \frac{2x^2}{4(2-x)+x^2(2-x)} \right] \cdot \left(\frac{x^2-x+2}{x^2} \right) \\ &= \frac{(x^2-2x)(2-x)-4x^2}{2(x^2+4)(2-x)} \cdot \frac{x^2+x-2x-2}{x^2} \\ &= \frac{2x^2-x^3-4x+2x^2-4x^2}{2(x^2+4)(2-x)} \cdot \frac{x(x+1)-2(x+1)}{x^2} \\ &= \frac{-x(x^2+4)}{2(x^2+4)(2-x)} \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{2x} \end{aligned}$$

b)

$$* \frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1:2x \Rightarrow 2x+2:2x \text{ mà } 2x:2x$$

$$\Rightarrow 2:2x \Rightarrow 1:x \Rightarrow \begin{cases} x=1(\text{tm}) \\ x=-1(\text{tm}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=-1$$

Bài 238: Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Lời giải

Biến đổi được:

$$4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow (4a - b)(a - b) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ b = a \end{cases}$$

Mà $2a > b > 0 \Rightarrow 4a > 2b > b$ nên $a = b$

$$\text{Ta có: } P = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } 4a^2 + b^2 = 5ab \text{ và } 2a > b > 0 \text{ thì } P = \frac{1}{3}$$

Bài 239: Cho x, y là số hữu tỉ khác 1 thỏa mãn $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1$

Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Lời giải

Ta có

$$\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1 \Leftrightarrow (1-2x)(1-y) + (1-2y)(1-x) = (1-x)(1-y)$$

$$\Leftrightarrow 1-y-2x+2xy+1-x-2y+2xy = 1-x-y+xy \Leftrightarrow x+y = \frac{3xy+1}{2}$$

$$\text{Ta có: } M = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy = \left(\frac{3xy+1}{2}\right)^2 - 3xy = \dots = \left(\frac{3xy-1}{2}\right)^2$$

Vì $x, y \in \mathbb{Q}$ nên $\frac{3xy-1}{2}$ là số hữu tỉ, Vậy M là bình phương của một số hữu tỉ.

Bài 240: Cho x, y, z thỏa mãn $x+y+z=7$; $x^2+y^2+z^2=23$; $xyz=3$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } H = \frac{1}{xy+z-6} + \frac{1}{yz+x-6} + \frac{1}{zx+y-6}$$

Lời giải

$$\text{Vì } x+y+z=7 \Rightarrow z=-x-y+7 \Rightarrow xy+z-6=\dots=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } yz+x-6=(y-1)(z-1); zx+y-6=(z-1)(y-1)$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } H &= \frac{1}{(x-1)(y-1)} + \frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(z-1)(x-1)} = \frac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)} \\ &= \frac{(x+y+z)-3}{xyz-(xy+yz+xz)+(x+y+z)-1} = \frac{7-3}{3-(xy+yz+xz)+7-1} = \frac{4}{9-(xy+yz+xz)}\end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+xz) \Rightarrow 7^2 = 23 + 2(xy+yz+xz)$$

$$\Rightarrow xy+yz+xz=13$$

$$\text{Vậy } H = \frac{4}{9-13} = -1$$

Bài 241: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

$$\text{Tính: } a^{2011} + b^{2011}$$

Lời giải

$$(a^{2001} + b^{2001})(a+b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a+1) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } a=1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b=1(\text{tm}) \\ b=0(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$\text{Vì } b=1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a=1(\text{tm}) \\ a=0(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a=1; b=1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

Bài 242: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Lời giải

$$\text{Nhân cả 2 vế của } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1 \text{ với } a+b+c, \text{ rút gọn suy ra đpcm}$$

Bài 243: Rút gọn biểu thức:

$$\frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
& \frac{(x^2+a)(1+a)+a^2x^2+1}{(x^2-a)(1-a)+a^2x^2+1} = \frac{x^2+x^2a+a+a^2+a^2x^2+1}{x^2-x^2a-a+a^2+a^2x^2+1} \\
& = \frac{x^2+x^2a+a^2x^2+1+a+a^2}{x^2-x^2a+a^2x^2+1-a+a^2} = \frac{x^2(1+a+a^2)+(1+a+a^2)}{x^2(1-a+a^2)+(1-a+a^2)} \\
& = \frac{(x^2+1)(1+a+a^2)}{(x^2+1)(1-a+a^2)} = \frac{1+a+a^2}{1-a+a^2}
\end{aligned}$$

Bài 244: Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
a^3 - 3ab^2 = 5 & \Rightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25 \\
b^3 - 3a^2b = 10 & \Rightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100 \\
\Rightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 & = 125 \\
\Rightarrow (a^2 + b^2)^3 = 5^3 & \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2018} = \frac{5}{2018}
\end{aligned}$$

Bài 245:

- a) Cho $a^2 + a + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^{2013} + \frac{1}{a^{2013}}$
- b) Cho hai số x, y thỏa mãn: $x^2 + x^2y^2 - 2y = 0$ và $x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0$
 Tính giá trị của biểu thức $Q = x^2 + y^2$

Lời giải

- a) Từ $a^2 + a + 1 = 0$ với $a \neq 1$ ta có: $(a-1)(a^2+a+1) = 0 \Rightarrow a^3 - 1 = 0 \Rightarrow a^3 = 1$

$$\text{Ta lại có } a^{2013} = (a^3)^{671}$$

$$\text{Do đó: } P = a^{2013} + \frac{1}{a^{2013}} = (a^3)^{671} + \frac{1}{(a^3)^{671}} = 1 + 1 = 2$$

- b) Từ $x^2 + x^2y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2y}{y^2+1} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ (1)

$$x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 - 2(y-1)^2 \leq -1 \Rightarrow x \leq -1$$
 (2)

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow y^2 = 1$$

$$\text{Vậy } Q = x^2 + y^2 = 1 + 1 = 2$$

Bài 246: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x} \right)$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P
 b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$
 c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Lời giải

- a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left[\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right] \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \end{aligned}$$

- b) $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2}$ với $x \in \text{ĐKXĐ}$

$$\Rightarrow 2x^2 = -x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (TM)} \\ x = -1 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

- c)

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1) + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} \\ P &= x + 1 + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2 \end{aligned}$$

Vì $x > 1$ nên $x-1 > 0$. Áp dụng BĐT Cosi ta có: $x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1)\frac{1}{x-1}} = 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (TM)}$

Vậy GTNN của P là $4 \Leftrightarrow x = 2$

Bài 247: Cho $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0$, tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \\ &= \frac{1}{b^2 + c^2 - (b+c)^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - (a+c)^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - (a+b)^2} \\ &= \frac{1}{-2ab} + \frac{1}{-2ac} + \frac{1}{-2ab} = \frac{a+b+c}{-2abc} = 0 \end{aligned}$$

Bài 248: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} = \frac{a(a^2 - 1) - 4(a^2 - 1)}{(a^3 - 8) - 7a(a - 2)} = \frac{(a^2 - 1)(a - 4)}{(a - 2)(a^2 - 5a + 4)} \\ &= \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)(a - 1)(a - 4)} = \frac{a + 1}{a - 2} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{a+1}{a-2}$ với $a \neq \{1; 2; 4\}$

Bài 249: Cho biểu thức $M = \frac{x^4 + 2}{x^6 + 1} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^4 + 4x^2 + 3}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị lớn nhất của M

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} \\ &= \frac{x^4 + 2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^4 + 2 + (x^2 - 1)(x^2 + 1) - (x^4 - x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^4 + 2 + x^4 - 1 - x^4 + x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} \\ &= \frac{x^4 + x^2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2 \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x

b) Ta có : $M = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ với mọi x

Nếu $x = 0$ ta có $M = 0$

Nếu $x \neq 0$, chia cả tử và mẫu của M cho x^2 ta có: $M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}$

Ta có: $x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + 1 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1 \geq 1$

Nên ta có: $M = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \leq 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$.

Vậy M lớn nhất là $M = 1$ khi $x = 1$

Bài 250: Cho x, y là số hữu tỉ khác 1 thỏa mãn $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1$. Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Lời giải

Ta có

$$\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1 \Leftrightarrow (1-2x)(1-y) + (1-2y)(1-x) = (1-x)(1-y)$$

$$\Leftrightarrow 1-y-2x+2xy+1-x-2y+2xy = 1-x-y+xy \Leftrightarrow x+y = \frac{3xy+1}{2}$$

$$\text{Ta có : } M = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy = \left(\frac{3xy+1}{2}\right)^2 - 3xy = \dots = \left(\frac{3xy-1}{2}\right)^2$$

Vì $x, y \in \mathbb{Q}$ nên $\frac{3xy-1}{2}$ là số hữu tỷ, Vậy M là bình phương của một số hữu tỷ.

Bài 251: Cho x, y, z thỏa mãn $x+y+z=7$; $x^2+y^2+z^2=23$; $xyz=3$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } H = \frac{1}{xy+z-6} + \frac{1}{yz+x-6} + \frac{1}{zx+y-6}$$

Lời giải

$$\text{Vì } x+y+z=7 \Rightarrow z=-x-y+7 \Rightarrow xy+z-6 = \dots = xy-x-y+1 = (x-1)(y-1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } yz+x-6 = (y-1)(z-1); zx+y-6 = (z-1)(y-1)$$

$$\text{Vậy } H = \frac{1}{(x-1)(y-1)} + \frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(z-1)(x-1)} = \frac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}$$

$$= \frac{(x+y+z)-3}{xyz-(xy+yz+xz)+(x+y+z)-1} = \frac{7-3}{3-(xy+yz+xz)+7-1} = \frac{4}{9-(xy+yz+xz)} \text{ Ta có:}$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+xz) \Rightarrow 7^2 = 23 + 2(xy+yz+xz)$$

$$\Rightarrow xy + yz + xz = 13$$

$$\text{Vậy } H = \frac{4}{9-13} = -1$$

Bài 252: Cho $x^2 + x = 1$. Tính giá trị biểu thức $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } Q = x^2 \cdot (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^4 + 2x^3 + x^2) + x^2 + x + x + 1$$

$$= x^2(x^2 + x)^2 + (x^2 + x)^2 + x + 2$$

$$= x^2 + x + 3 = 4$$

$$\text{Vậy } Q = 4$$

Bài 253: Cho biểu thức $R = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4026}{x}$. Tìm x để biểu thức xác định, khi

đó hãy rút gọn biểu thức

Lời giải

$$\text{Ta có: } R = \left[\frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{4}{x(x^2-4)} \right] \cdot \frac{x}{4026}$$

$$\text{ĐK: } x(x^2-4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } R = \frac{1}{4026} \cdot \left(\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$$

$$= \frac{1}{4026} \cdot \frac{(x-1)(x+2) + (x+1)(x-2) - 4}{x^2-4} = \frac{1}{4026} \cdot \frac{2(x^2-4)}{x^2-4} = \frac{1}{2013}$$

$$\text{Vậy } R \text{ xác định khi } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \text{ và } R = \frac{1}{2013}$$

Bài 254: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$ BTHT

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

c) Tìm giá trị của x, để $A < 0$.

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq \pm 1$

Với $x \neq \pm 1$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2)-x(1-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\ &= \frac{(1-x)(1+x^2)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x)^2} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} \\ &= (1+x^2)(1-x) \end{aligned}$$

b) Ta có: $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ hoặc $x - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x = 1$ (không TMDK)

hoặc $x = \frac{1}{3}$ (TMDK)

Với $x = \frac{1}{3}$, ta có:

$$A = \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{27}$$

Vậy khi $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ thì $A = \frac{20}{27}$

c) Ta có: $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0$ (1)

Mà $1+x^2 > 0$ với mọi $x \neq \pm 1$

Nên (1) $\Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Vậy với $x > 1$ thì $A < 0$

Bài 255: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x^2+3x}{x^3+3x^2+9x+27} + \frac{3}{x^2+9}\right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3-3x^2+9x-27}\right)$ BTHT

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

b) Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào ?

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq \pm 3, P = \frac{x+3}{x-3}$

b) Ta có: $P = \frac{x+3}{x-3} \Rightarrow x = \frac{3(P+1)}{P-1}$

Để $x > 0$ thì $\frac{3(P+1)}{P-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{P+1}{P-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P > 1 \\ P < -1 \end{cases}$

Vậy $x > 0$ thì P không nhận những giá trị từ -1 đến $1, P \notin [-1; 1]$

c) Ta có $P = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$

P có giá trị nguyên $\Leftrightarrow x-3 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

Từ đó tính được $x \in \{0; 1; 2; 4; 5; 6; 9\}$ (Chú ý loại $x = -3$)

Bài 256: Cho biểu thức $M = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ BTHT

Chứng minh rằng:

a) Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì $M > 1$

b) Nếu $M = 1$ thì hai trong ba phân thức đã cho của biểu thức M bằng 1, phân thức còn lại bằng -1

Lời giải

a) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên $a, b, c > 0$ và

$$a+b-c > 0; a+c-b > 0; c+b-a > 0$$

Đặt $A = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}; B = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; C = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

Ta cần chứng minh: $M = A+B+C > 1$ hay $(A-1)+(B-1)+(C+1) > 0$

Ta có:

$$A-1 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - 1 = \frac{a^2+b^2-c^2-2ab}{2ab} = \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab}$$

$$B-1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - 1 = \frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{2bc} = \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc}$$

$$C-1 = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} - 1 = \frac{c^2+a^2-b^2+2ca}{2ca} = \frac{(c+a-b)(c+a+b)}{2ca}$$

Suy ra $(A-1)+(B-1)+(C+1)$

$$= \frac{(a-b-c)(a-b+c)}{2ab} + \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{2bc} + \frac{(c+a-b)(c+a+b)}{2ca}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{aligned}
&= \frac{c(a-b-c)(a-b+c) + a(b-c-a)(b-c+a) + b(c+a-b)(c+a+b)}{2abc} \\
&= \frac{(a-b+c)[c(a-b-c) - a(b-c+a) + b(c+a+b)]}{2abc} \\
&= \frac{(a-b+c)(ca - cb - c^2 - ab + ac - a^2 + bc + ba + b^2)}{2abc} \\
&= \frac{(a-b+c)(bc - ba + b^2 - c^2 + ca - cb + ac - a^2 + ab)}{2abc} \\
&= \frac{(a-b+c)(b-c+a)(c-a+b)}{2abc} > 0 \text{ (đúng)}
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $M - 1 > 0$ đúng vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác hay $M > 1$

Bài 257: Cho biểu thức $P = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$ BTHH

a) Rút gọn P

b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P có giá trị nguyên

c) Tìm x để $P \leq 1$

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq 0; x \neq \pm 1$

Ta có:

$$P = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{3x} + \frac{2}{x+1} \cdot (x+1) \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{3x} + 2 \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{2x}{x-1}$$

b) Ta có: $P = 2 + \frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Từ đó suy ra $x \in \{2; 0; 3; -1\}$

Kết hợp với ĐKXD được $x \in \{2; 3\}$

c) $P \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \leq 0$

Mà $x-1 < x+1$ nên $x-1 < 0$ và $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x < 1$ và $x \geq -1$

Kết hợp với ĐKXD được $-1 < x < 1$ và $x \neq 0$

Bài 258: Cho biết $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{2}{3}$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $Q = \frac{x^2}{x^4+x^2+1}$

Lời giải

a) Từ $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow x \neq 0$, do đó : $\frac{x^2-x+1}{x} = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1 = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}$$

Lại có: $\frac{x^4+x^2+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 1 = \frac{21}{4}$

Suy ra $Q = \frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \frac{4}{21}$

Bài 259: Cho x, y, a, b là những số thực thỏa mãn:

$$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{x^2+y^2}{a+b} \text{ và } x^2+y^2=1. \text{ Chứng minh: } \frac{x^{2006}}{a^{1003}} + \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{2}{(a+b)^{1003}} \text{ BTHT}$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra: $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{(x^2+y^2)^2}{a+b} \Leftrightarrow (bx^4+ay^4)(a+b) = ab(x^2+y^2)^2$

$$\Leftrightarrow b^2x^4 + a^2y^4 - 2abx^2y^2 = 0 \Leftrightarrow (bx^2 - ay^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow bx^2 - ay^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2+y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{2006}}{a^{1003}} = \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{1}{(a+b)^{1003}} \Leftrightarrow \frac{x^{2006}}{a^{1003}} + \frac{y^{2006}}{b^{1003}} = \frac{2}{(a+b)^{1003}} \quad (dpcm)$$

Bài 260: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^3-1}{x^2-x} + \frac{x^2-4}{x^2-2x} - \frac{2-x}{x} \right) : \frac{x+1}{x}$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2; x \neq -1$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính A biết x thỏa mãn $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$.

Lời giải

a) $A = \left(\frac{x^2+x+1}{x} + \frac{x+2}{x} - \frac{2-x}{x} \right) \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{x^2+3x+1}{x+1}$

b) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0(km) \\ x=1(km) \\ x=3(tm) \end{cases}$$

Thay $x=3$ vào biểu thức có $A = \frac{3^2+3.3+1}{3+1} = \frac{19}{4}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vậy $A = \frac{19}{4}$

Bài 261: Cho a, b, c là các số hữu tỷ khác 0 thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$M = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \text{ là bình phương của một số hữu tỷ}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 - 2 \cdot \frac{a+b+c}{abc} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2$$

Vậy M là bình phương của một số hữu tỷ

Bài 262: Rút gọn biểu thức sau và tìm giá trị nguyên của x để biểu thức có giá trị nguyên:

$$M = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

Lời giải

$$M = \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4 \cdot (2 - x) + x^2 \cdot (2 - x)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2}$$

$$M = \left[\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} + \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(x - 2)} \right] \cdot \frac{(x^2 - 2) \cdot (x + 1)}{x^2}$$

$$M = \frac{x^2 \cdot (x - 2)^2 + 4x^2}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x - 2)(x + 1)}{x^2} = \frac{x(x^2 - 4x + 4 + 4x)}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x - 2)(x + 1)}{x^2}$$

$$M = \frac{x(x^2 + 4)}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x - 2)(x + 1)}{x^2} = \frac{x + 1}{2x}$$

$$\text{Để } M \text{ xác định thì } \begin{cases} 2x^2 + 8 \neq 0 \\ (x^2 + 4)(x - 2) \neq 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Khi đó M nguyên thì $2M$ nguyên hay $\frac{x+1}{x}$ nguyên. Mà $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in U(1) = \{\pm 1\}$

Với $x = -1$ thỏa mãn (*) và $M = 0 \in \mathbb{Z}$

Với $x = 1$ thỏa mãn (*) và $M = 1 \in \mathbb{Z}$

Vậy $x = 1; x = -1$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Bài 263: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{2017}{x-1} - \frac{2016}{x+1} - \frac{2014+2016}{x^2-1} \right) : \frac{x^2-4}{x^2-1}$ BTHT

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

b) Rút gọn biểu thức A

c) Tìm x để $A \geq 0$ và biểu diễn tập các giá trị tìm được của x trên trục số

d) Tìm tất cả các số nguyên x để A có giá trị là số nguyên.

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq \pm 2$

b) Rút gọn được: $A = \frac{x+3}{x^2-4}$

c) Để $A \geq 0$ thì

$$A = \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x < -2 \text{ hoặc } x > 2$$

Học sinh tự biểu diễn trên trục số

$$x+3:(x^2-4) \Rightarrow (x^2+3x):(x^2-4) \Leftrightarrow (x^2-4)+(3x+4):(x^2-4)$$

$$\Rightarrow (3x+4):(x^2-4); (3x+9):(x^2-4) \Rightarrow 5:(x^2-4)$$

x^2-4	-5	-1	1	5
x^2	-1	3	5	9
x	Loại	Loại	Loại	± 3

Thử lại, chỉ có $x = -3$ là thỏa mãn. Vậy $x = -3$

Bài 264: Cho $x \neq \pm y$ và $\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 2016$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$?

Lời giải

$$\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 2016$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4(x^4-y^4)+8y^8}{x^8-y^8} = 2016$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4-y^4} = 2016$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x-y} = 2016$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2-y^2} = 2016$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{2017}{2016}$$

Bài 265: Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Tính: $P = \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} &= \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3 - 1)(x^3 - 1)} \\ &= \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) - (x - y)}{xy(x^2 y^2 + y^2 x + y^2 + yx^2 + xy + y + x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{(x - y)(x^2 + y^2 - 1)}{xy[x^2 y^2 + xy(x + y) + x^2 + y^2 + xy + 2]} = \frac{(x - y)(x^2 - x + y^2 - y)}{xy[x^2 y^2 + (x + y)^2 + 2]} \\ &= \frac{(x - y)[x(x - 1) + y(y - 1)]}{xy(x^2 y^2 + 3)} = \frac{(x - y)[x(-y) + y(-x)]}{xy(x^2 y^2 + 3)} \quad (\text{do } x + y = 1 \Rightarrow y - 1 = -x \text{ và } x - 1 = -y) \\ &= \frac{(x - y)(-2xy)}{xy(x^2 y^2 + 3)} = \frac{-2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} \\ P &= \frac{-2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0 \end{aligned}$$

Bài 266: Cho $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$a) \quad a^3 - 4a^2 - a + 4 = (a - 1)(a + 1)(a - 4) = a^3 - 7a^2 + 14a - 8 = (a - 2)(a - 1)(a - 4)$$

Nêu ĐKXD: $a \neq 1; a \neq 2; a \neq 4$

$$\text{Rút gọn } P = \frac{a + 1}{a - 2}$$

$$b) \quad P = \frac{a - 2 + 3}{a - 2} = 1 + \frac{3}{a - 2};$$

ta thấy P nguyên khi $a - 2$ là ước của 3,

mà $U(3) = \{-1; 1; -3; 3\}$, từ đó tìm được $a \in \{-1; 3; 5\}$

Bài 267:

a) Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$, (với $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$) Tính giá trị của biểu thức $\frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{aligned}
 \text{a) } (a+b+c)^3 &= (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \\
 &= (a+b)^3 + 3(a+b)c(a+b+c) + c^3 = (a+b)^3 + c^3 \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) \\
 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(-c) \quad (\text{Vì } a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c) \\
 &= a^3 + b^3 + c^3 = 3abc
 \end{aligned}$$

$$\text{b) Với } a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$$

$$\text{Áp dụng kết quả câu a ta có: } \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} &= \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = xyz \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) \\
 &= xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3
 \end{aligned}$$

$$\text{Bài 268: Cho biểu thức : } A = \left(\frac{4x}{2+x} + \frac{8x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x-1}{x^2-2x} - \frac{2}{x} \right)$$

a) Tìm điều kiện xác định, rồi rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để $A = -1$

c) Tìm các giá trị của x để $A < 0$

Lời giải

ĐKXD: $x \neq 0; x \neq \pm 2$

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{4x}{2+x} + \frac{8x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x-1}{x^2-2x} - \frac{2}{x} \right) = \frac{4x(2-x) + 8x^2}{(2+x)(2-x)} : \frac{x-1-2(x-2)}{x(x-2)} \\
 &= \frac{8x-4x^2+8x^2}{(2+x)(2-x)} : \frac{x-1-2x+4}{x(x-2)} = \frac{8x+4x^2}{(2+x)(2-x)} : \frac{3-x}{x(x-2)} \\
 &= \frac{4x(2+x)}{(2+x)(2-x)} \cdot \frac{x(x-2)}{3-x} = \frac{4x^2}{x-3}
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } A = -1 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} = -1 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{c) } A < 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} < 0 \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$$

Vậy $x < 3; x \neq 0; x \neq \pm 2$ thì $A < 0$

$$\text{Bài 269: Cho biểu thức } M = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{8-4x+2x^2-x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

a) Rút gọn M

b) Tìm x nguyên để M có giá trị là số nguyên dương

c) Tìm x để $M \geq -3$

Lời giải

$$a) 2x^2 + 8 = 2(x^2 + 4) \neq 0; 8 - 4x + 2x^2 - x^3 = (2 - x)(x^2 + 4) \neq 0 \text{ và } x \neq 0$$

$$M \text{ xác định} \Leftrightarrow x \neq 2; x \neq 0$$

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(2 - x)(x^2 + 4)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \frac{(x^2 - 2x)(2 - x) - 4x^2}{2(2 - x)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \\ &= \frac{-x(x^2 + 4)}{2(2 - x)(x^2 + 4)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} = \frac{x + 1}{2x} \end{aligned}$$

$$b) \text{ Với } x \neq 2; x \neq 0, M \text{ có giá trị nguyên dương} \Leftrightarrow M = \frac{x + 1}{2x} \text{ có giá trị nguyên dương}$$

$$\Rightarrow 2M = \frac{2x + 2}{2x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ nguyên dương}$$

$$x \in \mathbb{Z}; 2M \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \text{ là ước của } 1 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Thử lại: Với } x = 1 \text{ ta có: } M = \frac{x + 1}{2x} \text{ có giá trị bằng } 1 \text{ (Thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } x = -1 \text{ ta có: } M = \frac{x + 1}{2x} \text{ có giá trị bằng } 0 \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy $x = 1$

$$c) M \geq -3 \Leftrightarrow x \neq 2; x \neq 0; \frac{x + 1}{2x} \geq -3$$

$$\frac{x + 1}{2x} \geq -3 \Leftrightarrow \frac{x + 1}{2x} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{7x + 1}{2x} \geq 0$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 7x + 1 \geq 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 7x + 1 \leq 0 \\ 2x < 0 \end{cases}. \text{ Giải được } x > 0 \text{ hoặc } x \leq \frac{-1}{7}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta có: } M \geq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \text{ hoặc } x \leq \frac{-1}{7}$$

$$\text{Bài 270: Cho biểu thức: } C = \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{2}{x + 1} - \frac{5 - x}{1 - x^2} \right) : \frac{1 - 2x}{x^2 - 1}$$

a) Rút gọn biểu thức C

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

b) Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức B là số nguyên.

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1} \\ &= \frac{1+x+2(1-x)-5+x}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{1-2x} \\ &= \frac{-2}{2x-1} \end{aligned}$$

b) B có giá trị nguyên khi x là số nguyên thì $\frac{-2}{2x-1}$ có giá trị nguyên

$$\Leftrightarrow 2x-1 \text{ là Ư}(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \\ 2x-1=2 \\ 2x-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(ktm) \\ x=0(tm) \\ x=\frac{3}{2}(tm) \\ x=\frac{-1}{2}(tm) \end{cases}$$

$$\text{Đổi chiều ĐK thì có } \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ thỏa mãn}$$

Bài 271: Cho biểu thức : $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x} \\ A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{(x+1) - 3x(x+1)}{3x} \right] : \frac{x-1}{x} \\ A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2(1-3x)}{3x} \right] \cdot \frac{x}{x-1} \\ A &= 2 \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

b) Với $x \neq 0; x \neq \pm 1$. Ta có: $A = \frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $(x-1)$ phải là ước của 2 $\Rightarrow x-1 \in \{\pm 1; \pm 2\}$

Xét từng trường hợp tìm x , đối chiếu điều kiện $\Rightarrow x \in \{2; 3\}$

Bài 272: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Giá trị của A được xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 8 \neq 0 \\ 8 - 4x + 2x^2 - x^3 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 \neq -8 \\ 4(2-x) + x^2(2-x) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq -4 \\ (2-x)(4+x^2) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left[\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2-x) + x^2(2-x)} \right] \cdot \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2} \right) \\ &= \frac{(x^2 - 2x)(2-x) - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{x^2 + x - 2x - 2}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - x^3 - 4x + 2x^2 - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{x(x+1) - 2(x+1)}{x^2} \\ &= \frac{-x(x^2 + 4)}{2(x^2 + 4)(2-x)} \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{2x} \end{aligned}$$

a)

$$* \frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1 : 2x \Rightarrow 2x+2 : 2x \text{ mà } 2x : 2x$$

$$\Rightarrow 2 : 2x \Rightarrow 1 : x \Rightarrow \begin{cases} x = 1(tm) \\ x = -1(tm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{x+1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -1$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 273: Cho x, y là hai số dương và $x^{2010} + y^{2010} = x^{2011} + y^{2011} = x^{2012} + y^{2012}$. Tính giá trị của biểu thức $S = x^{2020} + y^{2020}$

Lời giải

$$\text{Có } x^{2012} + y^{2012} = (x^{2011} + y^{2011})(x + y) - (x^{2010} + y^{2010}).xy$$

$$\text{Do } x, y \text{ là hai số dương và } x^{2010} + y^{2010} = x^{2011} + y^{2011} = x^{2012} + y^{2012}$$

$$\text{Nên } x^{2010} + y^{2010} = x^{2011} + y^{2011} = x^{2012} + y^{2012} = m > 0$$

$$m = m(x + y) - mxy \Leftrightarrow 1 = x + y - xy \Leftrightarrow (x - 1)(1 - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow y^{2010} = y^{2011} \Leftrightarrow y = 0 (\text{loại}) \text{ hoặc } y = 1$$

$$\text{Với } y = 1 \Rightarrow x^{2010} = x^{2011} \Leftrightarrow x = 0 (\text{ktm}) \text{ hoặc } x = 1$$

Bài 274: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0 \Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \frac{cxy + bxz + ayz}{abc} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{dpcm}) \end{aligned}$$

Bài 275: Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính $P = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Lời giải

Biến đổi được:

$$4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow (4a - b)(a - b) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ b = a \end{cases}$$

$$\text{Mà } 2a > b > 0 \Rightarrow 4a > 2b > b \text{ nên } a = b$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta có: $P = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}$

Vậy $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$ thì $P = \frac{1}{3}$

Bài 276: Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

Lời giải

$$A = x^3 + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3.x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3.x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3.3 = 18$$

Bài 277: Cho $a + b + c = 2p$. Chứng minh: $2bc + b^2 + c^2 - a^2 = 4p(p - a)$

Lời giải

Ta có: $2p = a + b + c$

Do đó, $4p(p - a) = 2p(2p - 2a)$

$$= (a + b + c)(a + b + c - 2a) = \dots = 2bc + b^2 + c^2 - a^2$$

KL : ...

Bài 278: Cho biểu thức $M = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

a) Rút gọn M

b) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức M bằng 0.

Lời giải

c) Rút gọn M

HD: ĐKXD: $x^2 + 2x - 8 \neq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 4) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ và } x \neq -4.$$

Ta có: $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x + 6 = x^4(x - 2) + 2x^2(x - 2) - 3(x - 2)$

$$= (x - 2)(x^4 + 2x^2 - 3)$$

$$= (x - 2)\left[(x^2 + 1)^2 - 4\right]$$

$$= (x - 2)(x^3 + 3)(x + 1)(x - 1)$$

Suy ra $M = \frac{(x^2 + 3)(x + 1)(x - 1)}{x + 4}, x \neq 2; x \neq -4.$

d) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức M bằng 0.

Đề $M = 0$ thì $(x^3 + 3)(x+1)(x-1) = 0$ và $x \neq 2$; $x \neq -4$

Ta có: $(x^3 + 3)(x+1)(x-1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ (thỏa ĐKXĐ)}$$

$$\text{Vậy, } M = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Bài 279: Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức sau có giá trị là số nguyên.

$$A = \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 5}{2x + 1}$$

Lời giải

$$\text{ĐKXĐ: } 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 5}{2x + 1} = \frac{x^2(2x + 1) + (2x + 1) + 4}{2x + 1} = x^2 + 1 + \frac{4}{2x + 1}$$

Để A có giá trị nguyên khi x nguyên thì $2x + 1 \in U(4) = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$

Lập bảng:

$2x + 1$	-4	-2	-1	1	2	4
$2x$	-5	-3	-2	0	1	3
x	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Vậy, $x \in \{-1; 0\}$.

Bài 280: Cho biểu thức $M = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + x^2$

Tính M theo a, b, c biết rằng $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = (x^2 - ax - bx + ab) + (x^2 - bx - cx + bc) + (x^2 - ax - cx + ca)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$= 4x^2 - 2x(a+b+c) + ab + bc + ca \quad (1)$$

$$\text{Từ } x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \Rightarrow 2x = a + b + c \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $M = ab + bc + ca$

Bài 281: Cho biểu thức $R = \left[\frac{(x-1)^2}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$

- Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức R được xác định;
- Tìm giá trị của x để giá trị của R bằng 0;
- Tìm giá trị của x để $|R| = 1$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq -1; x \neq 1$.

b) Rút gọn: $R = \frac{x^2+1}{x+1}, x \neq 0; x \neq -1; x \neq 1$.

$$\text{Để } R = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$\text{c) Ta có: } |R| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} R = 1 \\ R = -1 \end{cases}$$

+ Với $R = 1$, ta có: $\frac{x^2+1}{x+1} = 1, x \neq 0; x \neq -1; x \neq 1$

$$\text{Giải pt } \frac{x^2+1}{x+1} = 1 \Rightarrow x^2+1 = x+1 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (không thỏa ĐKXĐ)}$$

+ Với $R = -1$, ta có: $\frac{x^2+1}{x+1} = -1, x \neq 0; x \neq -1; x \neq 1$

$$\text{Giải pt } \frac{x^2+1}{x+1} = -1 \Rightarrow x^2+1 = -x-1 \Leftrightarrow x^2+x+2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy không có giá trị nào của x để $|R| = 1$.

Bài 282: Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn đẳng thức: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{b+c-a}{a}$.

$$\text{Tính giá trị của biểu thức: } P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$$

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết, suy ra } \frac{a+b-c}{c} + 2 = \frac{a+c-b}{b} + 2 = \frac{b+c-a}{a} + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b}$$

Xét hai trường hợp :

$$+ \text{ Nếu } a+b+c=0 \Rightarrow P = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{b+c}{b} \cdot \frac{c+a}{c} = \frac{(-c)(-a)(-b)}{a.b.c} = -1$$

$$+ \text{ Nếu } a+b+c \neq 0 \Rightarrow a=b=c \neq 0 \Rightarrow P = 2.2.2 = 8$$

KL :.....

Bài 283: Cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2018}$ là 2018 số thực thỏa mãn $a_k = \frac{2k+1}{(k^2+k)^2}$, với $k=1, 2, 3, \dots, 2018$.

$$\text{Tính } S_{2018} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2017} + a_{2018}$$

Lời giải

$$\text{Ta có : } a_k = \frac{2k+1}{(k^2+k)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\text{Do đó, } S_{2018} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2017} + a_{2018}$$

$$= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2018^2} - \frac{1}{2019^2} \right) = \frac{2019^2 - 1}{2019^2}$$

Bài 284: a) Biết $a \neq \frac{-7}{3}, b \neq \frac{7}{2}$ và $2a-b=7$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{5a-b}{3a+7} - \frac{3b-2a}{2b-7}$

b) Biết $b \neq \pm 3a$ và $6a^2 - 15ab + 5b^2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$

Lời giải

a) Biết $a \neq \frac{-7}{3}, b \neq \frac{7}{2}$ và $2a-b=7$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{5a-b}{3a+7} - \frac{3b-2a}{2b-7}$

$$\text{Ta có: } P = \frac{5a-b}{3a+7} - \frac{3b-2a}{2b-7} = \frac{(2a-b)+3a}{3a+7} - \frac{2b-(2a-b)}{2b-7} = \frac{7+3a}{3a+7} - \frac{2b-7}{2b-7} = 1-1=0$$

Vậy, $P=0$ khi $a \neq \frac{-7}{3}, b \neq \frac{7}{2}$ và $2a-b=7$.

b) Biết $b \neq \pm 3a$ và $6a^2 - 15ab + 5b^2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } Q &= \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b} = \frac{(2a-b)(3a+b) + (5b-a)(3a-b)}{(3a-b)(3a+b)} = \frac{3a^2 - 6b^2 + 15ab}{(3a-b)(3a+b)} \\ &= \frac{9a^2 - b^2 - (6a^2 + 5b^2 - 15ab)}{(3a-b)(3a+b)} = \frac{9a^2 - b^2}{9a^2 - b^2} = 1 \end{aligned}$$

Vậy, $Q = 1$ khi $b \neq \pm 3a$ và $6a^2 - 15ab + 5b^2 = 0$

Bài 285: Rút gọn:

$$\text{a) } M = 90.10^k - 10^{k+2} + 10^{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}; \quad \text{b) } N = (20^2 + 18^2 + \dots + 2^2) - (19^2 + 17^2 + \dots + 1^2).$$

Lời giải

$$\text{a) } M = 90.10^k - 10^{k+2} + 10^{k+1}, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$= 90.10^k - 100.10^k + 10.10^k = 0$$

$$\text{b) } N = (20^2 + 18^2 + \dots + 2^2) - (19^2 + 17^2 + \dots + 1^2)$$

$$= (20^2 - 19^2) + (18^2 - 17^2) + \dots + (2^2 - 1^2)$$

$$= (20+19)(20-19) + (18+17)(18-17) + \dots + (2+1)(2-1)$$

$$= 20+19+18+17+\dots+2+1 = 210$$

Bài 286: Tính giá trị của biểu thức

$$P = x^{15} - 2018x^{14} + 2018x^{13} - 2018x^{12} + \dots - 2018x^2 + 2018x - 2018, \text{ với } x = 2017.$$

Lời giải

Thay $2018 = x + 1$ vào P ta được:

$$P = x^{15} - (x+1)x^{14} + (x+1)x^{13} - (x+1)x^{12} + \dots - (x+1)x^2 + (x+1)x - (x+1)$$

$$= x^{15} - x^{15} - x^{14} + x^{14} + x^{13} - \dots + x^2 + x - x - 1 = -1$$

Vậy, $P = -1$ khi $x = 2017$.

Bài 287: a) So sánh hai số $A = 3^{32} - 1$ và $B = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$

$$\text{b) } C = \frac{2019-2018}{2019+2018} \text{ và } D = \frac{2019^2-2018^2}{2019^2+2018^2}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.(3-1) = (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = (3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = (3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = (3^8-1)(3^8+1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = (3^{16}-1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = 3^{32} - 1 = A$$

Vậy, $A = 2.B$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 288: Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng: $a^3+b^3+a^2c+b^2c-abc=0$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } a^3+b^3+a^2c+b^2c-abc &= (a^3+b^3)+(a^2c+b^2c-abc) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2)+c(a^2-ab+b^2) = (a^2-ab+b^2)(a+b+c) = 0 \quad (\text{Vì } a+b+c=0)\end{aligned}$$

Bài 289: Cho $x^2+y^2+z^2=10$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = (xy+yz+zx)^2 + (x^2-yz)^2 + (y^2-xz)^2 + (z^2-xy)^2.$$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } P &= (xy+yz+zx)^2 + (x^2-yz)^2 + (y^2-xz)^2 + (z^2-xy)^2 \\ &= x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + 2xy^2z + 2x^2yz + 2xyz^2 + x^4 + y^2z^2 - 2x^2yz + y^4 + x^2z^2 - 2xy^2z + z^4 + x^2y^2 - 2xyz^2 \\ &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + (2y^2z^2 + 2x^2z^2) + z^4 = (x^2+y^2)^2 + 2(x^2+y^2)z^2 + z^4 = (x^2+y^2+z^2)^2 = 10^2 = 100 \\ &\quad (\text{Vì } x^2+y^2+z^2=10).\end{aligned}$$

Vậy, $P=100$ khi $x^2+y^2+z^2=10$.

Bài 290: Chứng minh rằng nếu ba số a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=2018$ và

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2018} \text{ thì một trong ba số } a, b, c \text{ phải có một số bằng } 2018.$$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Từ } a+b+c=2018 \text{ và } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2018} \text{ suy ra } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{a+b+c} \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c}\right) &= 0 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0 \\ \Rightarrow (a+b)[c(a+b+c)+ab] &= 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} &\quad \text{mà } a+b+c=2018\end{aligned}$$

Do đó, trong ba số a, b, c phải có một số bằng 2018.

Bài 291: Cho biểu $P = \frac{x^2+x}{x^2-2x+1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x}\right)$

a) Tìm ĐKXĐ và rút gọn P .

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left[\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right] \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2-1+x+2-x^2}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \end{aligned}$$

Vậy, $P = \frac{x^2}{x-1}$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$.

b) Để $P = \frac{-1}{2}$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$ suy ra $\frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2}$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

$$\Rightarrow 2x^2 = -x+1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

Vì $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$ nên chọn $x = \frac{1}{2}$

Vậy, $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$$\text{c) Ta có: } P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1} = (x-1) + \frac{1}{x-1} + 2$$

Với $x > 1$ nên $x-1 > 0$ và $\frac{1}{x-1} > 0$. Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương $(x-1)$ và $\frac{1}{x-1}$ ta có :

$$P \geq 2\sqrt{(x-1)\frac{1}{x-1}} + 2 = 2 + 2 = 4$$

Dấu « = » $\Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{x-1}$ với $x > 1 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa ĐKXĐ)

Vậy, $GTNN(P) = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Bài 292: Rút gọn các phân thức:

$$\text{a) } A = \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2};$$

$$\text{b) } B = \frac{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}$$

Lời giải

$$\text{* Nhớ: } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \dots = \frac{1}{2}(a+b+c) \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right]$$

Do đó, nếu $a+b+c=0$ hoặc $a=b=c$ thì $a^3+b^3+c^3=3abc$.

$$\text{a) } A = \frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} = \frac{\frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

$$\text{b) } B = \frac{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}$$

$$\text{Ta có: } (x^2-y^2)+(y^2-z^2)+(z^2-x^2)=0$$

$$\text{Do đó, } (x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3=3(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)(1)$$

$$\text{Ta lại có: } (x-y)+(y-z)+(z-x)=0$$

$$\text{Do đó, } (x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)(2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } B = \frac{3(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{3(x-y)(y-z)(z-x)} = (x+y)(y+z)(z+x)$$

Bài 293: Chứng tỏ rằng đa thức: $A=(x^2+1)^4+9(x^2+1)^3+21(x^2+1)^2-x^2-31$ luôn không âm với mọi giá trị của biến x .

Lời giải

$$\text{Đặt } x^2+1=y, \text{ ta có: } A=y^4+9y^3+21y^2-y-30=\dots=(y-1)(y+2)(y+3)(y+5)$$

$$\text{Khi đó, } A=x^2(x^2+3)(x^2+4)(x^2+6)\geq 0 \text{ với mọi giá trị của } x \text{ (Đpcm)}$$

$$\text{Bài 294: a) Rút gọn phân thức: } A = \frac{x^{40}+x^{30}+x^{20}+x^{10}+1}{x^{45}+x^{40}+x^{35}+\dots+x^5+1}$$

$$\text{b) Rút gọn phân thức: } B = \frac{x^{24}+x^{20}+x^{16}+\dots+x^4+1}{x^{26}+x^{24}+x^{22}+\dots+x^2+1}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{x^{40}+x^{30}+x^{20}+x^{10}+1}{x^{45}+x^{40}+x^{35}+\dots+x^5+1} = \frac{x^{40}+x^{30}+x^{20}+x^{10}+1}{x^5(x^{40}+x^{30}+x^{20}+x^{10}+1)+(x^{40}+x^{30}+x^{20}+x^{10}+1)} \\ &= \frac{x^{40}+x^{30}+x^{20}+x^{10}+1}{(x^{40}+x^{30}+x^{20}+x^{10}+1)(x^5+1)} = \frac{1}{x^5+1} \end{aligned}$$

$$\text{b) } B = \frac{x^{24}+x^{20}+x^{16}+\dots+x^4+1}{x^{26}+x^{24}+x^{22}+\dots+x^2+1} = \frac{x^{24}+x^{20}+x^{16}+\dots+x^4+1}{x^{24}(x^2+1)+x^{20}(x^2+1)+\dots+x^4(x^2+1)+(x^2+1)}$$

$$= \frac{x^{24} + x^{20} + x^{16} + \dots + x^4 + 1}{(x^2 + 1)(x^{24} + x^{20} + x^{16} + \dots + x^4 + 1)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Bài 295: Cho các số a, b, c khác 0, thỏa mãn $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1$.

Tính giá trị của biểu thức $(a^{23} + b^{23})(a^5 + b^5)(a^{2019} + b^{2019})$

Lời giải

$$\text{Từ } (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } P = (a^{23} + b^{23})(a^5 + b^5)(a^{2019} + b^{2019})$$

+ Nếu $a+b=0$ thì $a=-b \Leftrightarrow a^{23} = -b^{23} \Leftrightarrow a^{23} + b^{23} = 0$. Vậy, $P=0$.

+ Nếu $b+c=0$ thì $b=-c \Leftrightarrow b^5 = -c^5 \Leftrightarrow b^5 + c^5 = 0$. Vậy, $P=0$.

+ Nếu $c+a=0$ thì $c=-a \Leftrightarrow c^{2019} = -a^{2019} \Leftrightarrow c^{2019} + a^{2019} = 0$. Vậy, $P=0$.

Kết luận: Với điều kiện đã cho $P=0$.

Bài 296: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $(x+y)(y+z)(z+x) = 8xyz$.

Chứng minh rằng: $x=y=z$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x+y)(y+z)(z+x) = 8xyz \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x(x-y)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 = 0$$

$$\text{Vì } x, y, z > 0 \text{ nên } (y-z)^2 = (z-x)^2 = (x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x=y=z > 0$$

KL:...

Bài 297: Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } A = \frac{1+2.3^6}{2^3.3^6 - 2^3.5^3} - \frac{1+3^6}{8(9^3-125)} - \frac{5^3}{18^3-10^3}.$$

$$\text{b) } B = \frac{x^3y + xy^3 + xy}{x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 + x + y}$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{1+2.3^6}{2^3.3^6 - 2^3.5^3} - \frac{1+3^6}{8(9^3-125)} - \frac{5^3}{18^3-10^3} = \frac{1+2.3^6}{2^3(3^6-5^3)} - \frac{1+3^6}{2^3(3^6-5^3)} - \frac{5^3}{2^3(3^6-5^3)}$$

$$= \frac{1+2 \cdot 3^6 - 1 - 3^6 - 5^3}{2^3(3^6 - 5^3)} = \frac{3^6 - 5^3}{2^3(3^6 - 5^3)} = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{x^3y + xy^3 + xy}{x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 + x + y} \\ &= \dots = \frac{xy(x^2 + y^2 + 1)}{(x+y)(x^2 + y^2 + 1)} = \frac{xy}{x+y} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy, } B = \frac{xy}{x+y}, x \neq -y$$

Bài 298: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Lời giải

Nhân cả hai vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c \neq 0$, ta được:

$$\begin{aligned} &\frac{a^2 + a(b+c)}{b+c} + \frac{b^2 + b(c+a)}{c+a} + \frac{c^2 + c(a+b)}{a+b} = a+b+c \\ \Rightarrow &\frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c = a+b+c \\ \Rightarrow &\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0 \end{aligned}$$

KL:...

Bài 299: Chứng minh rằng nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ và $a+b+c = abc$ thì $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

Lời giải

Bình phương hai vế $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$, ta được $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \cdot \frac{a+b+c}{abc} = 4$

Suy ra $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \cdot 1 = 4$ (Vì $a+b+c = abc$) hay $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

KL: ...

Bài 300: a) Xác định $n \in \mathbb{N}$ để $A = \frac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên

$$\text{b) Tính tổng } S(n) = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+2)}$$

Lời giải

a) Xác định $n \in \mathbb{N}$ để $A = \frac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên

Đề $A = \frac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên

$$\Rightarrow (5n-11):(4n-13) \Rightarrow 4(5n-11):(4n-13)$$

$$\Rightarrow [5(4n-13)+21):(4n-13) \Rightarrow 21:(4n-13)$$

$$\Rightarrow (4n-13) \in U(21) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21\}$$

Lập bảng :

$4n-13$	-21	-7	-3	-1	1	3	7	21
$4n$	-8	6	10	12	14	16	20	34
n	-2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	5	$\frac{17}{2}$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên chọn $n \in \{3; 4; 5\}$

Thử lại:

+ Với $n=3$, ta có: $A = \frac{5.3-11}{4.3-13} = -4 \notin \mathbb{N}$ (Loại)

+ Với $n=4$, ta có: $A = \frac{5.4-11}{4.4-13} = 3 \in \mathbb{N}$ (Nhận)

+ Với $n=5$, ta có: $A = \frac{5.5-11}{4.5-13} = 2 \in \mathbb{N}$ (Nhận)

KL: $n \in \{4; 5\}$

b) Tính tổng $S(n) = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \dots + \frac{1}{(3n-1).(3n+2)}$

Ta có: $S(n) = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \dots + \frac{1}{(3n-1).(3n+2)} = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \dots + \frac{3}{(3n-1).(3n+2)} \right]$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{n}{2(3n+2)}$$

Bài 301: Cho x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=0$ và $xy+yz+zx=0$.

Hãy tính giá trị của biểu thức: $S = (x-1)^{2017} + y^{2018} + (z+1)^{2019}$

Lời giải

Ta có: $x+y+z=0 \Leftrightarrow (x+y+z)^2=0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0 \text{ (Vì } xy + yz + zx = 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0$$

$$\text{Suy ra } S = (0-1)^{2017} + 0^{2018} + (0+1)^{2019} = 0$$

Vậy, $S = 0$ khi $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$.

Bài 302: Cho $P = \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} - \frac{x^2 y^2}{(1+x)(1-y)}$

a) Tìm ĐKXĐ của P , rút gọn P

b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình $P = 2$

Lời giải

a) Tìm ĐKXĐ của P , rút gọn P

$$+ \text{ĐKXĐ: } x + y \neq 0, 1 - y \neq 0, 1 + x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -y, y \neq 1, x \neq -1$$

$$+ \text{Rút gọn: } P = \frac{x^2(1+x) - y^2(1-y) - (x+y)x^2 y^2}{(x+y)(1-y)(1+x)} = x + xy - y$$

$$\text{Vậy, } P = x + xy - y \text{ với } x \neq -y, y \neq 1, x \neq -1.$$

b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn phương trình $P = 2$

$$\text{Ta có: } P = 2 \Leftrightarrow x + xy - y = 2 \Leftrightarrow x(1+y) - (1+y) = 1$$

$$\Leftrightarrow (1+y)(x-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+y=1 \\ x-1=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1+y=-1 \\ x-1=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \text{ (thỏa ĐKXĐ)}$$

$$\text{Vậy, } P = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

Bài 303: Rút gọn biểu thức:

a) $M = \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}{x^2+5x+5}$

b) $N = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}{x^2+5x+5} = \frac{(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1}{x^2+5x+5} \\ &= \frac{(x^2+5x+4)^2 + 2(x^2+5x+4) + 1}{x^2+5x+5} = \frac{(x^2+5x+5)^2}{x^2+5x+5} = x^2+5x+5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } N &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} \\
 &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} \\
 &= \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{16}{1-x^{16}} + \frac{16}{1+x^{16}} \\
 &= \frac{32}{1-x^{32}}
 \end{aligned}$$

Bài 304: Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^4 + b^4 + c^4$

Lời giải

Ta có : $1^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$

$$\Leftrightarrow 1 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 1 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad (1)$$

Ta lại có : $a + b + c = 0 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 0$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0 \Rightarrow ab + bc + ca = \frac{-(a^2 + b^2 + c^2)}{2}$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = -\frac{1}{2} \Rightarrow (ab + bc + ca)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$$

Do đó, $M = a^4 + b^4 + c^4 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Bài 305: Cho phân thức $A = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 3x - 2}$

a) Rút gọn A.

b) Tính x để $A < 1$

Lời giải

c) Rút gọn A.

Ta có $x^3 - 3x - 2 = \dots = (x+1)^2(x-2)$

ĐKXD: $x^3 - 3x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ và $x \neq 2$

Ta lại có: $x^4 - 2x^2 + 1 = \dots = (x-1)^2(x+1)^2$

Suy ra $A = \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{(x-1)^2}{x-2}$

Vậy, $A = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ với $x \neq -1$ và $x \neq 2$

d) Tính x để $A < 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A < 1 &\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x-2} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x-2} - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1 - x + 2}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 3}{x-2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{x-2} < 0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \left(\forall \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \right) \\ &\Leftrightarrow x < 2 \end{aligned}$$

Kết hợp với ĐKXD, ta được $A < 1 \Leftrightarrow x < 2$ và $x \neq -1$.

Bài 306: a) Cho $\frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$, hãy tính $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

b) Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, hãy tính $B = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$

c) Cho $a > b > 0$ thỏa mãn: $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính $C = \frac{a-b}{a+b}$

Lời giải

a) Cho $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$, hãy tính $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

Ta có: $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$ suy ra $5(x^2 + y^2) = 8xy$ với $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

Ta có: $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{5(x^2 - 2xy + y^2)}{5(x^2 + 2xy + y^2)} = \frac{5(x^2 + y^2) - 10xy}{5(x^2 + y^2) + 10xy} = \frac{8xy - 10xy}{8xy + 10xy} = \frac{-2xy}{18xy} = \frac{-1}{9}$ (vì $xy \neq 0$)

Vậy, $A = \frac{-1}{9}$ với $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$.

b) Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, hãy tính $B = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$

Đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \Rightarrow x = ka, y = kb, z = kc$ với $a, b, c \neq 0$

Khi đó, $B = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} = \frac{k^2 a^2 + k^2 b^2 + k^2 c^2}{(a^2 k + b^2 k + c^2 k)^2} = \frac{k^2(a^2 + b^2 + c^2)}{k^2(a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$

Vậy, $B = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$ khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ với $a, b, c \neq 0$.

c) Cho $a > b > 0$ thỏa mãn: $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính $C = \frac{a-b}{a+b}$

Vì $a > b > 0$ nên $C = \frac{a-b}{a+b} > 0$

$$\text{Xét } C^2 = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{3(a^2 - 2ab + b^2)}{3(a^2 + 2ab + b^2)} = \frac{3(a^2 + b^2) - 6ab}{3(a^2 + b^2) + 6ab} = \frac{10ab - 6ab}{10ab + 6ab} = \frac{4ab}{16ab} = \frac{1}{4}$$

Suy ra $C = \frac{1}{2}$ vì $C > 0$

Vậy, $C = \frac{1}{2}$ với $a > b > 0$ thỏa mãn: $3a^2 + 3b^2 = 10ab$

Bài 307: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right)$

e) Rút gọn P ;

f) Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào?

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Lời giải

a) Rút gọn P

ĐKXĐ: $x \neq \pm 3$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \left[\frac{x(x+3)}{(x+3)(x^2+9)} + \frac{3}{x^2+9} \right] : \left[\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{(x-3)(x^2+9)} \right] \\ &= \frac{x+3}{x^2+9} : \frac{x^2+9-6x}{(x-3)(x^2+9)} = \frac{x+3}{x^2+9} \cdot \frac{(x-3)(x^2+9)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3} \end{aligned}$$

Vậy, $P = \frac{x+3}{x-3}, x \neq \pm 3$.

b) Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào?

Ta có: $P = \frac{x+3}{x-3}, x \neq \pm 3$

$$\Rightarrow P(x-3) = x+3 \Rightarrow x(P-1) = 3(1+P) \Rightarrow x = \frac{3(P+1)}{P-1}$$

$$\text{Với } x > 0 \Leftrightarrow \frac{3(P+1)}{P-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{P+1}{P-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P > 1 \\ P < -1 \end{cases}$$

Vậy, với $x > 0$ thì P không nhận các giá trị từ (-1) đến 1 , tức là $P \notin [-1; 1]$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Ta có: $P = \frac{x+3}{x-3}, x \neq \pm 3$

$$= \frac{x-3+6}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3} \in \mathbb{Z}$$

Suy ra $x-3 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$.

Lập bảng :

$x-3$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
x	-3	0	1	2	4	5	6	9

Vậy, $x \in \{0; 1; 2; 4; 5; 6; 9\}$.

Bài 308: Cho $\frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-2} = \frac{32x-19}{x^2-x-2}$. Tính $M.N$?

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq -1, x \neq 2$.

Ta có: $\frac{M(x-2)+N(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{32x-19}{(x+1)(x-2)}$

$$\Rightarrow M(x-2)+N(x+1)=32x-19 \Leftrightarrow (M+N)x+(N-2M)=32x-19$$

$$\Rightarrow M+N=32, -2M+N=-19 \Leftrightarrow M=17, N=15 \Rightarrow M.N=255$$

Vậy, $M.N=255$ với $x \neq -1, x \neq 2$.

Bài 309: Cho biểu thức: $Q = 1 + \frac{x+3}{x^2+5x+6} : \left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \frac{3x}{3x^2-12} - \frac{1}{x+2} \right)$

a) Rút gọn Q ;

b) Tìm các giá trị của x để $Q=0, Q=1$;

c) Tìm các giá trị của x để $Q>0$.

Lời giải

d) Rút gọn Q :

Ta có: $Q = 1 + \frac{x+3}{(x+2)(x+3)} : \left(\frac{8x^2}{4x^2(x-2)} - \frac{3x}{3(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} \right)$

ĐKXĐ: $x \neq 0, x \neq \pm 2, x \neq -3$.

$$\text{Suy ra } Q = 1 + \frac{1}{(x+2)} : \left(\frac{2}{(x-2)} - \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} \right) = \dots = \frac{x+4}{6}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vậy, $Q = \frac{x+4}{6}$ với $x \neq 0, x \neq \pm 2, x \neq -3$.

e) Tìm các giá trị của x để $Q=0, Q=1$

Ta có $Q=0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6}=0 \Leftrightarrow x=-4$ (thỏa ĐKXD)

Ta có: $Q=1 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6}=1 \Leftrightarrow x=2$ (không thỏa ĐKXD)

Vậy, tại $x=-4$ thì $Q=0$ và không tồn tại x để $Q=1$.

f) Tìm các giá trị của x để $Q>0$.

Ta có: $Q>0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{6}>0 \Leftrightarrow x>-4$

Kết hợp với ĐKXD, ta có: $Q>0 \Leftrightarrow x>-4$ và $x \neq 0, x \neq \pm 2, x \neq -3$.

Bài 310: Cho phân thức: $A = \frac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 2a^2 - 4a - 8}$

a) Rút gọn A ;

b) Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Lời giải

c) Rút gọn A :

Ta có: $A = \frac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 2a^2 - 4a - 8} = \frac{(a+2)^2}{a^2(a+2) - 4(a+2)} = \frac{(a+2)^2}{(a+2)^2(a-2)}$

ĐKXD: $a \neq \pm 2$.

Khi đó, $A = \frac{1}{a-2}$ với $a \neq \pm 2$.

d) Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để A có giá trị nguyên.

Để $A = \frac{1}{a-2}$ có giá trị nguyên với $a \in \mathbb{Z}$ và $a \neq \pm 2$ thì $a-2 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=1 \end{cases}$ (thỏa ĐKXD)

Vậy, $a=3$ hoặc $a=1$ thì A nhận giá trị nguyên.

Bài 311: Cho $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = a$. Tính $M = \left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) : \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$ theo a .

Lời giải

Ta có: $a = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^4 = \frac{a+1}{1-a} (a \neq 1)$

Thay $x^4 = \frac{a+1}{1-a} (a \neq 1)$ vào M , rút gọn ta được $M = \frac{2a}{a^2 + 1}, a \neq 1$.

Bài 312: a) Cho a, b, c là ba số dương khác 0 thỏa mãn: $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$ (Với giả thiết các tỉ số đều có nghĩa). Tính: $M = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$.

b) Tìm số tự nhiên n khác 0, biết: $\left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{2017}{6045}$.

c) Tính: $M = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right)$

Lời giải

a) Cho a, b, c là ba số dương khác 0 thỏa mãn: $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$ (Với giả thiết các tỉ số đều có nghĩa). Tính: $M = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$.

Ta có: $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{b+c}{bc} = \frac{c+a}{ca}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow a = b = c \neq 0$$

Khi đó, $M = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} = \frac{3a^2}{3a^2} = 1$

Vậy, $M = 1 \Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$ với a, b, c là ba số dương khác 0.

b) Tìm số tự nhiên n khác 0, biết: $\left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{2017}{6045}$.

Ta có: $\left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{4}{2.3} \cdot \frac{10}{3.4} \cdot \frac{18}{4.5} \dots \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)}$
 $= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \dots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1.2.3.4 \dots (n-1)}{2.3.4 \dots n} \cdot \frac{4.5.6 \dots (n+2)}{3.4.5 \dots (n+1)} = \frac{n+2}{3n}$

Khi đó, ta có: $\frac{n+2}{3n} = \frac{2017}{6045} \Leftrightarrow n = 2015$

Vậy, $n = 2015$.

c) Ta có: $M = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right)$
 $= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{1.3}\right)\left(\frac{9}{2.4}\right)\left(\frac{16}{3.5}\right) \dots \left(\frac{2017.2019+1}{2017.2019}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2.2}{1.3}\right)\left(\frac{3.3}{2.4}\right)\left(\frac{4.4}{3.5}\right) \dots \left(\frac{2018.2018}{2017.2019}\right)$

$$= \frac{2.3 \dots 2018}{2.3.4 \dots 2017} \cdot \frac{2.3 \dots 2018}{2.3.4 \dots 2019} = 2018 \cdot \frac{1}{2019} = \frac{2018}{2019}$$

Vậy, $M = \frac{2018}{2019}$.

Bài 313: Cho $a+b=1$ và $ab \neq 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$

Lời giải

Với $a+b=1$ và $ab \neq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} &= \frac{a(a^3-1)+b(b^3-1)}{(a^3-1)(b^3-1)} = \frac{(a^4+b^4)-(a+b)}{a^3b^3-(a^3+b^3)+1} = \frac{(a^2+b^2)^2-2a^2b^2-1}{a^3b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)+1} \\ &= \frac{[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2-1}{a^3b^3+3ab} \quad (\text{Vì } a+b=1 \text{ và } ab \neq 0) \\ &= \frac{1-4ab+4a^2b^2-2a^2b^2-1}{ab(a^2b^2+3)} \quad (\text{Vì } a+b=1 \text{ và } ab \neq 0) \\ &= \frac{2ab(ab-2)}{ab(a^2b^2+3)} = \frac{2(ab-2)}{(a^2b^2+3)} \quad (\text{Vì } ab \neq 0) \end{aligned}$$

Vậy, $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$ với $a+b=1$ và $ab \neq 0$.

Bài 314: Cho biểu thức $E = \frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{8} + \frac{a}{12}$ với a là một số tự nhiên chẵn. Hãy chứng tỏ E có giá trị nguyên.

Lời giải

Vì a là một số tự nhiên chẵn nên $a = 2k, k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Do đó } E = \frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{8} + \frac{a}{12} = \frac{8k^3}{24} + \frac{4k^2}{8} + \frac{2k}{12} = \dots = \frac{2k^3+3k^2+k}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\text{Ta có: } k(k+1):2 \Rightarrow k(k+1)(2k+1):2$$

Ta cần c/m: $k(k+1)(2k+1):3$. Thật vậy:

$$+ \text{ Nếu } k = 3n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow k:3 \text{ thì } k(k+1)(2k+1):3$$

$$+ \text{ Nếu } k = 3n+1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2k+1 = 2(3n+1)+1 = 6n+3:3 \text{ thì } k(k+1)(2k+1):3$$

$$+ \text{ Nếu } k = 3n+2, n \in \mathbb{N} \Rightarrow k+1 = 3n+3:3 \text{ thì } k(k+1)(2k+1):3$$

Mà $(2, 3) = 1 \Rightarrow k(k+1)(2k+1) : 6$

Vậy, $E = \frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{8} + \frac{a}{12}$ có giá trị nguyên với a là một số tự nhiên chẵn.

Bài 315: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $abc = 2019$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2019a}{ab + 2019a + 2019} + \frac{b}{bc + b + 2019} + \frac{c}{ca + c + 1} = 1$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{2019a}{ab + 2019a + 2019} + \frac{b}{bc + b + 2019} + \frac{c}{ca + c + 1} \\ &= \frac{abca}{ab + abca + abc} + \frac{b}{bc + b + 2019} + \frac{c}{ca + c + 1} \\ &= \frac{a(bca)}{a(b + abc + bc)} + \frac{b}{bc + b + 2019} + \frac{bc}{bca + bc + b} \\ &= \frac{bca}{b + abc + bc} + \frac{b}{bc + b + 2019} + \frac{bc}{bca + bc + b} \\ &= \frac{2019}{b + 2019 + bc} + \frac{b}{bc + b + 2019} + \frac{bc}{2019 + bc + b} = \frac{2019 + b + bc}{b + 2019 + bc} = 1. \end{aligned}$$

Vậy, $\frac{2019a}{ab + 2019a + 2019} + \frac{b}{bc + b + 2019} + \frac{c}{ca + c + 1} = 1$ với $abc = 2019$.

Bài 316: Cho $3y - x = 6$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6}$

Lời giải

Ta có: $3y - x = 6 \Rightarrow x = 3y - 6, 3y = x + 6$

$$\text{Do đó, } M = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6} = \frac{3y-6}{y-2} + \frac{2x-(x+6)}{x-6} = 3 + 1 = 4$$

Vậy, $M = 4$ khi $3y - x = 6$.

Bài 317: Cho biểu thức $P = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}, n \in \mathbb{N}^*$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P tại $n = 99$.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

c) Rút gọn P :

$$\text{Ta có: } \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \text{ với } k \in N^*.$$

$$\text{Do đó, } P = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}, n \in N^*$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

$$\text{Vậy, } P = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}, n \in N^*.$$

d) Tính giá trị của P tại $n=99$.

$$\text{Tại } n=99 \text{ ta có } P = \frac{99.(99+2)}{(99+1)^2} = \frac{9999}{10000}$$

$$\text{Vậy, } P = \frac{9999}{10000} \text{ tại } n=99.$$

Bài 318: Cho đa thức $E = x^4 + 2017x^2 + 2016x + 2017$.

Tính giá trị của E với x là nghiệm của phương trình: $|x^2 - x + 1| = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } |x^2 - x + 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 1 \\ x^2 - x + 1 = -1 \end{cases}$$

$$*) \ x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$*) \ x^2 - x + 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy với $x=0 \Rightarrow E=2017$; $x=1 \Rightarrow E=6051$.

Bài 319: So sánh A và B , biết: $A = (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2017}$; $B = (2017^{2017} + 2016^{2017})^{2016}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2017} = (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2016} \cdot (2017^{2016} + 2016^{2016}) \\
&> (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2016} \cdot 2017^{2016} \\
&= \left[(2017^{2016} + 2016^{2016}) \cdot 2017 \right]^{2016} \\
&> (2017^{2017} + 2016^{2016} \cdot 2016)^{2016} \\
&= (2017^{2017} + 2016^{2017})^{2016} = B
\end{aligned}$$

Bài 320: Hãy viết biểu thức sau : $\frac{2a+1}{a^2(a+1)}$ thành hiệu hai bình phương

Lời giải

$$\frac{2a+1}{a^2(a+1)^2} = \frac{a^2 + 2a + 1 - a^2}{a^2(a+1)^2} = \frac{(a+1)^2 - a^2}{a^2(a+1)^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a+1}\right)^2$$

Bài 321: Cho biểu thức : $P = \left(\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x^2-x}\right) : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1}\right)$

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm giá trị của x để $P > -1$
- Giải phương trình $|P| = 2$

Lời giải

- a) ĐKXD: $x \neq 0; x \neq \pm 1$

$$P = \frac{x^2+1}{x(x-1)} : \frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+1}{x(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \frac{x^2+1}{x}$$

$$b) P > -1 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} > -1 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1+x}{x} > 0$$

$$\text{Vì } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x$$

$$\text{Đề } \frac{x^2+1+x}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0. \text{ Vậy } P > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$c) \quad |P| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 \\ P = -2 \end{cases}$$

$$P = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 1(ktm)$$

$$P = -2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = -2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 + 2x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -1(ktm)$$

Vậy phương trình vô nghiệm

Bài 322: Cho $x^2 + y^2 = 2$ và $M = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2x^2y^2$

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức M không phụ thuộc vào giá trị của biến số x, y

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + 2x^2y^2 \\ &= x^4 - 2x^2 + 1 + y^4 - 2y^2 + 1 + 2x^2y^2 \\ &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 2 \\ &= 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức M không phụ thuộc vào giá trị của biến số x, y

Bài 323: Cho $A = \left[\frac{x-1}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-3x+x^2}{x^3-1} - \frac{1}{1-x} \right] : \frac{x^2+2x+1}{x-1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị thực của x để A và $\frac{2}{A}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

a) Điều kiện xác định $x \neq \pm 1$

$$\begin{aligned} \left[\frac{x-1}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-3x+x^2}{x^3-1} - \frac{1}{1-x} \right] &= \left[\frac{x-1}{x^2+x+1} - \frac{1-3x+x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{1}{1-x} \right] \\ &= \frac{(x-1)(x-1) - (1-3x+x^2) + (x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{x-1}{3x+(x-1)^2} - \frac{1-3x+x^2}{x^3-1} - \frac{1}{1-x} \right] : \frac{x^2+2x+1}{x-1}$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x^2+x+1}$$

b) $A = \frac{1}{x^2+x+1}$ nguyên thì $\frac{2}{A}$ nguyên nghĩa là $A \in U(2)$

$$x^2+x+1 \geq \frac{3}{4}; 0 < A \leq \frac{4}{3} \Rightarrow A=1$$

$$\text{Suy ra } A=1 \Leftrightarrow x^2+x+1=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0(tm) \\ x=-1(ktm) \end{cases}$$

Vậy $x=0$

Bài 324: Chứng minh rằng: nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thỏa mãn $(a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca)$ thì tam giác đó là tam giác đều.

Lời giải

$$\text{Xét hiệu } (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \dots = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$\text{Suy ra } (a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0 \Leftrightarrow a=b=c$$

Vậy, $(a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca)$ thì tam giác đó là tam giác đều.

ĐS8-Chuyên đề 11: ĐA THỨC VÀ TÍNH CHIA HẾT CỦA ĐA THỨC**Qua Các Đề Thi HSG Môn Toán Lớp 8****Dạng 1: Tìm Dư Trong Phép Chia.****A. Bài toán**

Bài 1: Tìm số dư trong phép chia của biểu thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2008$ cho đa thức $x^2+10x+21$

Bài 2: Tìm số dư trong phép chia của biểu thức:

$$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2012 \text{ cho đa thức } x^2+10x+21$$

Bài 3: Tìm số dư trong phép chia của đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2010$ cho đa thức $x^2+10x+21$

Bài 4: Tìm số dư trong phép chia của biểu thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2015$ cho đa thức $x^2+10x+21$.

Bài 5: Tìm số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$

Bài 6: a) Tìm số dư trong phép chia của đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2017$ cho đa thức $x^2+10x+21$

b) Cho $A = n^6 + 10n^4 + n^3 + 98n - 6n^5 - 26$ và $B = 1 + n^3 - n$. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{Z}$ thì thương của phép chia A cho B là bội số của 6

Bài 7:

a) Tìm số dư trong phép chia đa thức $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+9$ cho $x^2+8x+12$.

b) Tìm mọi số nguyên x sao cho $x^3 - 2x^2 + 7x - 7$ chia hết cho $x^2 + 3$

Bài 8: Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x+1$ dư 4, khi chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$.

Bài 9: Tìm dư khi chia $x^{2015} + x^{1945} + x^{1930} - x^2 - x + 1$ cho $x^2 - 1$

Bài 10: Tìm đa thức dư khi chia đa thức $x^{100} - 2x^{51} + 1$ cho $x^2 - 1$

B. Lời giải

Bài 1: Tìm số dư trong phép chia của biểu thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2008$ cho đa thức $x^2+10x+21$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2008 \\ &= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2008 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$ ($t \neq -3; t \neq -7$), Biểu thức $P(x)$ được viết lại

$$P(x) = (t-5)(t+3) + 2008 = t^2 - 2t + 1993$$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 1993$ cho t ta có số dư là 1993

Bài 2: Tìm số dư trong phép chia của biểu thức:

$$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2012 \text{ cho đa thức } x^2 + 10x + 21$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } P(x) &= (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2012 \\ &= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2012 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } x^2 + 10x + 21 = t$$

$$\text{Ta có: } P(x) = (t-5)(t+3) + 2012 = t^2 - 2t + 1997$$

Vậy số dư của phép chia là 1997

Bài 3: Tìm số dư trong phép chia của đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2010$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P(x) &= (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2010 \\ &= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2010 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$, biểu thức $P(x)$ được viết lại:

$$P(x) = (t-5)(t+3) + 2010 = t^2 - 2t + 1995$$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 1995$ cho t ta có số dư là 1995

Bài 4: Tìm số dư trong phép chia của biểu thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2015$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$.

Lời giải

$$P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2015 = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2015$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$ ($t \neq -3; t \neq -7$), biểu thức $P(x)$ được viết lại

$$P(x) = (t-5)(t+3) = t^2 - 2t + 2000$$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 2000$ cho t ta có số dư là 2000.

Bài 5: Tìm số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$

Lời giải

Ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033 = \dots = (x^2+12x+27)(x^2+12x+35)+2033$

Đặt $x^2+12x+30=t$, ta có: $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033 = (t-3)(t+5)+2033$
 $= t^2+2t-15+2033 = t(t+2)+2018$

Vậy ta có $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033 = (x^2+12x+30)(x^2+12x+32)+2018$

Vậy số dư trong phép chia $(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)+2033$ cho $x^2+12x+30$ là 2018.

Bài 6: a) Tìm số dư trong phép chia của đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2017$ cho đa thức $x^2+10x+21$

b) Cho $A = n^6 + 10n^4 + n^3 + 98n - 6n^5 - 26$ và $B = 1 + n^3 - n$. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{Z}$ thì thương của phép chia A cho B là bội số của 6

Lời giải

a) Ta có:

$$P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2017 = (x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+2017$$

Đặt $t = x^2+10x+21$ ($t \neq -3; t \neq -7$), biểu thức $P(x)$ được viết lại:

$$P(x) = (t-5)(t+3) = 2017 = t^2 - 2t + 2002$$

Do đó khi chia $t^2 - 2t + 2000$ cho t ta có số dư là 2002

b) Thực hiện phép chia, ta được:

Thương của A chia cho B là $n^3 - 6n^2 + 11n - 6$

Ta có:

$$\begin{aligned} n^3 - 6n^2 + 11n - 6 &= n^3 - n + 12n - 6n^2 - 6 \\ &= (n-1)n(n+1) + 6(2n - n^2 - 1) \end{aligned}$$

Vì $(n-1)n(n+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6

Và $6(2n - n^2 - 1)$ chia hết cho 6

\Rightarrow Thương của phép chia A cho B là bội số của 6

Bài 7:

a) Tìm số dư trong phép chia đa thức $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+9$ cho $x^2+8x+12$.

b) Tìm mọi số nguyên x sao cho x^3-2x^2+7x-7 chia hết cho x^2+3

Lời giải

a) Đặt $f(x) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+9$

Ta có: $A = (x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+9$

$$\begin{aligned} &= (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+9 \\ &= (x^2+8x+7)[(x^2+8x+12)+3]+9 \\ &= (x^2+8x+7)(x^2+8x+12)+3(x^2+8x+7)+9 \\ &= (x^2+8x+7)(x^2+8x+12)+3(x^2+8x+12)+9-15 \\ &= (x^2+8x+12)(x^2+8x+10)-6 \end{aligned}$$

Vậy số dư trong phép chia $f(x)$ cho $x^2+8x+12$ là -6

b) Thực hiện phép chia đa thức $B = x^3-2x^2+7x-7$ cho $C = x^2+3$, ta được: Đa thức thương: $x-2$; đa thức dư: $4x-1$

Suy ra: $x^3-2x^2+7x-7 = (x^2+3)(x-2)+4x-1$

Do đó $B:(x^2+3) \Leftrightarrow (4x-1):(x^2+3)$ (1)

Vì $4x \neq 1$ vs $4x \neq -1$ nên:

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow (4x-1)(4x+1):(x^2+3) \\ &\Rightarrow (16x^2-1):(x^2+3) \Rightarrow 16(x^2+3)+49:(x^2+3) \\ &\Rightarrow 49:(x^2+3) \end{aligned}$$

Vì $x^2+3 \geq 3$ nên xảy ra một trong hai trường hợp sau:

• $x^2+3 = 49$, không có giá trị nào thỏa mãn

$$\bullet x^2+3 = 7 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(tm) \\ x = -2(tm) \end{cases}$$

Vậy $x = \pm 2$

Bài 8: Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x+1$ dư 4, khi chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$.

Lời giải

Theo định lí Bơ-zu ta có: $f(x)$ chia $x+1$ dư 4 $\Rightarrow f(-1) = 4$.

Do bậc của đa thức chia $(x+1)(x^2+1)$ là 3 nên đa thức dư có dạng ax^2+bx+c .

Gọi thương là $q(x)$. Theo định nghĩa phép chia còn dư, ta có :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x^2+1).q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x+1)(x^2+1).q(x) + ax^2 + a - a + bx + c \\ &= (x+1)(x^2+1).q(x) + a(x^2+1) + bx + c - a \\ &= [(x+1).q(x) + a].(x^2+1) + bx + c - a \end{aligned}$$

Mà $f(x)$ chia cho x^2+1 dư $2x+3$. $\Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ c-a=3 \end{cases} \quad (1)$

Mặt khác $f(-1)=4 \Rightarrow a-b+c=4 \quad (2)$. Do đó ta có :

$$\begin{cases} b=2 \\ c-a=3 \\ a-b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c-a=3 \\ a+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=\frac{9}{2} \\ a=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức dư cần tìm có dạng: $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$

Bài 9: Tìm dư khi chia $x^{2015} + x^{1945} + x^{1930} - x^2 - x + 1$ cho $x^2 - 1$

Lời giải

Đặt $f(x) = x^{2015} + x^{1945} + x^{1930} - x^2 - x + 1$

Gọi thương khi chia $f(x)$ cho $x^2 - 1$ là $Q(x)$, dư là $ax + b$

Ta có: $f(x) = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$

Đẳng thức trên đúng với mọi x nên

- Với $x=1$ ta được $f(1) = a + b \Leftrightarrow a + b = 2 \quad (1)$

- Với $x=-1$ ta được: $f(-1) = -a + b \Leftrightarrow -a + b = 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a=1, b=1$, Dư phải tìm là $x+1$

Bài 10: Tìm đa thức dư khi chia đa thức $x^{100} - 2x^{51} + 1$ cho $x^2 - 1$

Lời giải

Gọi đa thức dư trong phép chia là $ax + b$.

Khi đó ta có: $x^{100} - 2x^{51} + 1 = (x^2 - 1).H(x) + ax + b \quad (1)$

Thay $x=1$ vào (1) ta có: $0 = a + b \quad (2)$

Thay $x = -1$ vào (1) ta có: $4 = a - b$ (3)

Từ đó suy ra $a = 2; b = -2$. Vậy số dư là $2x - 2$

Dạng 2: Tìm Đa Thức $f(x)$.

A. Bài toán

Bài 1: Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 24,

$f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

Bài 2: Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 22, $f(x)$

chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

Bài 3: Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 26,

$f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

Bài 4: Tìm đa thức $f(x)$, biết $f(x)$ chia cho $x + 3$ dư 5, $f(x)$ chia cho $x + 5$ dư 7, $f(x)$ chia cho $(x + 3)(x + 5)$ được thương là $2x$ và còn dư.

B. Lời giải

Bài 1: Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 24,

$f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

Lời giải

Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư $ax + b$

Khi đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$$

Do đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + \frac{7}{2}x + 17$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$

Bài 2: Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 22,

$f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

Lời giải

Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$

Khi đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 22 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 22 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 16 \end{cases}$$

Do đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + 3x + 16$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + 23x + 16$

Bài 3: Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng : $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 26, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

Lời giải

Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$. Khi đó

$$f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 26 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 26 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 18 \end{cases}$$

Do đó $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + 4x + 18$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm là $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + 4x + 18$

Bài 4: Tìm đa thức $f(x)$, biết $f(x)$ chia cho $x + 3$ dư 5, $f(x)$ chia cho $x + 5$ dư 7, $f(x)$ chia cho $(x + 3)(x + 5)$ được thương là $2x$ và còn dư.

Lời giải

$$f(x) = (x + 3)A(x) + 5$$

$$f(x) = (x + 5)B(x) + 7$$

$$f(x) = (x + 3)(x + 5) \cdot 2x + mx + n$$

Từ đó suy ra :

$$f(-3) = 5 \Rightarrow -3m + n = 5$$

$$f(-5) = 7 \Rightarrow -5m + n = 7$$

Tìm ra $m = -1; n = 2$

Thay vào ta có đa thức $f(x) = 2x^3 + 16x^2 + 29x + 2$

Dạng 3: Tính Giá Trị Biểu Thức .**A. Bài toán**

Bài 1: Tính giá trị $A = x^{15} - 8x^{14} + 8x^{13} - 8x^{12} + \dots - 8x^2 + 8x + 1$ với $x = 7$

Bài 2: Cho đa thức $F(x) = x^3 + ax + b$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Biết đa thức $F(x)$ chia cho $x - 2$ thì dư 12, $F(x)$ chia cho $x + 1$ thì dư -6 . Tính giá trị của biểu thức: $B = (6a + 3b - 11)(26 - 5a + 5b)$.

Bài 3: Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính $S = a^2 + b^{2012} + c^{2013}$.

Bài 4: Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x - 2; x + 1$. Tính $2a - 3b$

Bài 5: Đa thức $P(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1. Biết $P(1) = 0; P(3) = 0; P(5) = 0$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $Q = P(-2) + 7P(6)$

Bài 6: Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x - 2; x + 1$. Tính $2a - 3b$

Bài 7: Cho hai đa thức $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + 1, Q(x) = 2x^2 + x - 1$. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các nghiệm của $P(x)$. Tính giá trị của $Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5)$

Bài 8: Đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất là 1 và thỏa mãn $f(1) = 5; f(2) = 11; f(3) = 21$

Tính $f(-1) + f(5)$

Bài 9: Cho đa thức $P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + m$

a) Tìm m để $P(x)$ chia hết cho $2x + 3$

b) Với m vừa tìm được ở câu a, hãy tìm số dư khi chia $P(x)$ cho $3x - 2$ và phân tích ra các thừa số bậc nhất

1.2) Cho đa thức $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Biết $P(1) = 1; P(2) = 4; P(3) = 16; P(5) = 25$. Tính $P(6); P(7)$?

Bài 10: Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ với $a, b, c \neq 0$

Tính giá trị biểu thức $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$

Bài 11: Cho $\frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-2} = \frac{32x-19}{x^2-x-2}$. Tính $M.N$?

B. Lời giải

Bài 1: Tính giá trị $A = x^{15} - 8x^{14} + 8x^{13} - 8x^{12} + \dots - 8x^2 + 8x + 1$ với $x = 7$

Lời giải

Thay 8 bằng $x + 1$ ta có

$$A = x^{15} - (x+1).x^{14} + (x+1)x^{13} - (x+1)x^{12} + \dots - (x+1)x^2 + (x+1)x + 1$$

$$= x^{15} - x^{15} - x^{14} + x^{14} + x^{13} - x^{13} - x^{12} + \dots - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1 = x + 1 = 7 + 1 = 8$$

Bài 2: Cho đa thức $F(x) = x^3 + ax + b$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Biết đa thức $F(x)$ chia cho $x - 2$ thì dư 12, $F(x)$ chia cho $x + 1$ thì dư -6 . Tính giá trị của biểu thức: $B = (6a + 3b - 11)(26 - 5a + 5b)$.

Lời giải

Gọi thương của phép chia $F(x)$ cho $x - 2$ và $x + 1$ lần lượt là $P(x)$ và $Q(x)$. Suy ra

$$x^3 + ax + b = (x - 2)P(x) + 12 \quad (1)$$

$$x^3 + ax + b = (x + 1)Q(x) - 6 \quad (2)$$

Thay $x = 2$ vào (1) ta có $8 + 2a + b = 12 \Leftrightarrow 2a + b = 4 \Leftrightarrow 6a + 3b = 12$

Thay $x = -1$ vào (2) ta có $-1 - a + b = -6 \Leftrightarrow -a + b = -5 \Leftrightarrow -5a + 5b = 25$

$$\Rightarrow B = (6a + 3b - 11)(26 - 5a + 5b) = 1.1 = 1.$$

Bài 3:

Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính $S = a^2 + b^{2012} + c^{2013}$.

Lời giải

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1 \Rightarrow a, b, c \in [-1; 1]$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - (a^2 + b^2 + c^2) = a^2(a - 1) + b^2(b - 1) + c^2(c - 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \leq 1 \Rightarrow a, b, c \text{ nhận hai giá trị là } 0 \text{ hoặc } 1$$

$$\Rightarrow b^{2012} = b^2; c^{2013} = c^2 \Rightarrow S = a^2 + b^{2012} + c^{2013} = 1$$

Bài 4: Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x - 2; x + 1$. Tính $2a - 3b$

Lời giải

Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x - 2; x + 1$ nên:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 32 + 2a + b = 0 \quad (1)$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -4 - a + b = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được $a = -12; b = -8$

$$\text{Vậy } 2a - 3b = 0$$

Bài 5: Đa thức $P(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1. Biết $P(1) = 0; P(3) = 0; P(5) = 0$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $Q = P(-2) + 7P(6)$

Lời giải

Ta có: $P(x) : (x - 1), (x - 3), (x - 5)$

Nên $P(x)$ có dạng $P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x + a)$

$$\text{Khi đó: } P(-2) + 7.P(6) = (-3).(-5).(-7).(-2 + a) + 7.5.3.1.(6 + a)$$

$$\begin{aligned}
 &= -105.(-2+a) + 105.(6+a) \\
 &= 105.(2-a+6+a) = 840
 \end{aligned}$$

Bài 6: Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x-2; x+1$. Tính $2a-3b$

Lời giải

Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x-2; x+1$ nên:

$$\begin{aligned}
 f(2) &= 0 \Rightarrow 32 + 2a + b = 0 \quad (1) \\
 f(-1) &= 0 \Rightarrow -4 - a + b = 0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta tìm được $a = -12; b = -8$

$$\text{Vậy } 2a - 3b = 0$$

Bài 7: Cho hai đa thức $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + 1, Q(x) = 2x^2 + x - 1$. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các nghiệm của $P(x)$. Tính giá trị của $Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5)$

Lời giải

$$\text{Ta có: } P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

$$Q(x) = 2\left(\frac{1}{2} - x\right)(-1 - x)$$

Do đó

$$\begin{aligned}
 &Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5) \\
 &= 2^5 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - x_1\right)\left(\frac{1}{2} - x_2\right)\left(\frac{1}{2} - x_3\right)\left(\frac{1}{2} - x_4\right)\left(\frac{1}{2} - x_5\right) \right] \\
 &\quad \times [(-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3)(-1 - x_4)(-1 - x_5)] \\
 &= 32.P\left(\frac{1}{2}\right).P(-1) = 32.\left(\frac{1}{32} - \frac{5}{8} + 2 + 1\right)(-1 + 5 - 4 + 1) = 77
 \end{aligned}$$

Bài 8: Đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất là 1 và thỏa mãn $f(1) = 5; f(2) = 11; f(3) = 21$

Lời giải

$$\text{Tính Nhận xét: } g(x) = 2x^2 + 3 \text{ thỏa mãn } g(1) = 5; g(2) = 11; g(3) = 21$$

$$Q(x) = f(x) - g(x) \text{ là đa thức bậc 4 có 3 nghiệm } x = 1; x = 2; x = 3$$

$$\text{Vậy } Q(x) = (x-1)(x-1)(x-3)(x-a) \text{ ta có:}$$

$$f(-1) = Q(-1) + 2.(-1)^2 + 3 = 29 + 24a$$

$$f(5) = Q(5) + 2.5^2 + 3 = 173 - 24a$$

$$\Rightarrow f(-1) + f(5) = 202$$

Bài 9: Cho đa thức $P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + m$

a) Tìm m để $P(x)$ chia hết cho $2x + 3$

b) Với m vừa tìm được ở câu a, hãy tìm số dư khi chia $P(x)$ cho $3x - 2$ và phân tích ra các thừa số bậc nhất

1.2) Cho đa thức $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Biết $P(1) = 1; P(2) = 4; P(3) = 16; P(5) = 25$. Tính $P(6); P(7)$?

Lời giải

$$P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 6x^3 + 9x^2 - 16x^2 - 24x + 8x + 12 + m - 12$$

$$= 3x^2(2x + 3) - 8x(2x + 3) + 4(2x + 3) + m - 12$$

$$= (2x + 3)(3x^2 - 8x + 4) + m - 12$$

$$\text{Để } P(x) : (2x + 3) \text{ thì } m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 12$$

b) Với $m = 12; P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 = 6x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 2x - 18x + 12$

$$= 2x^2(3x - 2) - x(3x - 2) - 6(3x - 2) = (3x - 2)(2x^2 - x - 6)$$

Phân tích $P(x)$ ra tích các thừa số bậc nhất:

$$P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 = (2x + 3)(3x - 2)(x - 2)$$

1.2) Vì $P(1) = 1; P(2) = 4; P(3) = 9; P(4) = 16; P(5) = 25$

$$\text{Mà } P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + x^2$$

$$\Rightarrow P(6) = 5.4.3.2.1 + 6^2 = 156$$

$$\Rightarrow P(7) = 6.5.4.3.2 + 7^2 = 769$$

Bài 10: Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ với $a, b, c \neq 0$

$$\text{Tính giá trị biểu thức } P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$$

Lời giải

Biến đổi giả thiết về dạng:

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{cases}$$

Với $a+b+c=0$ tính được: $P=\left(\frac{-c}{b}\right)\left(\frac{-a}{c}\right)\left(\frac{-b}{a}\right)=-1$

Với $a=b=c$ tính được: $P=2.2.2=8$

Bài 11: Cho $\frac{M}{x+1}+\frac{N}{x-2}=\frac{32x-19}{x^2-x-2}$. Tính $M.N$?

Lời giải

ĐKXD: $x \neq -1, x \neq 2$.

Ta có: $\frac{M(x-2)+N(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{32x-19}{(x+1)(x-2)}$

$$\Rightarrow M(x-2)+N(x+1)=32x-19 \Leftrightarrow (M+N)x+(N-2M)=32x-19$$

$$\Rightarrow M+N=32, -2M+N=-19 \Leftrightarrow M=17, N=15 \Rightarrow M.N=255$$

Vậy, $M.N=255$ với $x \neq -1, x \neq 2$.

Dạng 4: Chứng Minh

A. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng: $f(x)=(x^2+x+1)^{2018}+(x^2-x+1)^{2018}-2$ chia hết cho

$$g(x)=x^2-x$$

Bài 2: Chứng minh:

a) $F=(x^2+x-1)^{2018}+(x^2-x+1)^{2018}-2$ chia hết cho $(x-1)$.

b) $G=x^{8n}+x^{4n}+1$ chia hết cho $x^{2n}+x^n+1$, với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 3: Chứng minh rằng:

a) Đa thức $M=x^{95}+x^{94}+x^{93}+\dots+x^2+x+1$ chia hết cho đa thức $N=x^{31}+x^{30}+x^{29}+\dots+x^2+x+1$

b) Đa thức $P(x)=1985.\frac{x^3}{3}+1979.\frac{x^2}{2}+5.\frac{x}{6}$ có giá trị nguyên với mọi x là số nguyên.

Bài 4: Chứng minh n^3+17n chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì a^3+5a chia hết cho 6

Bài 6: Chứng minh rằng: $Q=n^3+(n+1)^3+(n+2)^3:9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Bài 7: Cho $f(x)=ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thỏa mãn $13a+b+2c=0$

Chúng ta chứng tỏ rằng $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$

Bài 8: Chứng minh rằng: $(x^m + x^n + 1)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $(mn - 2) \vdots 3$

Áp dụng phân tích đa thức thành nhân tử: $x^7 + x^2 + 1$

Bài 9: Chứng minh rằng không có giá trị tự nhiên n nào để giá trị của biểu thức $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ chia hết cho giá trị của biểu thức $n^2 - n$

Bài 10: Chứng tỏ rằng đa thức: $A = (x^2 + 1)^4 + 9(x^2 + 1)^3 + 21(x^2 + 1)^2 - x^2 - 31$ luôn không âm với mọi giá trị của biến x .

B.Lời giải

Bài 1: Chứng minh rằng: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$

Lời giải

Đa thức $g(x) = x^2 - x = x(x - 1)$ có hai nghiệm là $x = 0$; $x = 1$.

Ta có $f(0) = (-1)^{2018} + 1^{2018} - 2 = 0$ là nghiệm của $f(x)$.

Suy ra $f(x)$ chứa thừa số x

Ta có: $f(1) = (1^2 + 1 - 1)^{2018} + (1^2 - 1 + 1)^{2018} - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của $f(x)$

$f(x)$ chứa thừa số $x - 1$ mà các thừa số x và $x - 1$ không có nhân tử chung do đó $f(x)$ chia hết cho $x(x - 1)$.

Vậy $f(x) = (x^2 + x + 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$

Bài 2: Chứng minh:

a) $F = (x^2 + x - 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2$ chia hết cho $(x - 1)$.

b) $G = x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$, với $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

a) $F = (x^2 + x - 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2$ chia hết cho $(x - 1)$.

Ta có: $F = (x^2 + x - 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2 = (x - 1) \cdot Q(x) + r$

Xét tại $x = 1$ thì $r = (1^2 + 1 - 1)^{2018} + (1^2 - 1 + 1)^{2018} - 2 = 0$

Vậy, $F = (x^2 + x - 1)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2018} - 2$ chia hết cho $(x - 1)$.

b) $G = x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$, với $n \in \mathbb{N}$.

Ta có: $G = x^{8n} + x^{4n} + 1 = x^{8n} + 2x^{4n} + 1 - x^{4n} = (x^{4n} + 1)^2 - (x^{2n})^2 = (x^{4n} + x^{2n} + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1) \quad (1)$

Mặt khác, $x^{4n} + x^{2n} + 1 = x^{4n} + 2x^{2n} + 1 - x^{2n} = (x^{2n} + 1)^2 - (x^n)^2 = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1)(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $G = x^{8n} + x^{4n} + 1 = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1)$

Vậy, $G = x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$, với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 3: Chứng minh rằng:

a) Đa thức $M = x^{95} + x^{94} + x^{93} + \dots + x^2 + x + 1$ chia hết cho đa thức $N = x^{31} + x^{30} + x^{29} + \dots + x^2 + x + 1$

b) Đa thức $P(x) = 1985 \cdot \frac{x^3}{3} + 1979 \cdot \frac{x^2}{2} + 5 \cdot \frac{x}{6}$ có giá trị nguyên với mọi x là số nguyên.

Lời giải

a) Ta có: $M = x^{95} + x^{94} + x^{93} + \dots + x^2 + x + 1$

$$\begin{aligned} &= x^{64} (x^{31} + x^{30} + \dots + x^2 + x + 1) + x^{32} (x^{31} + x^{30} + \dots + x^2 + x + 1) + (x^{31} + x^{30} + \dots + x^2 + x + 1) \\ &= (x^{31} + x^{30} + \dots + x^2 + x + 1) (x^{64} + x^{32} + 1) : (x^{31} + x^{30} + \dots + x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Vậy, $M : N$ (đpcm)

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } P(x) &= 1985 \cdot \frac{x^3}{3} + 1979 \cdot \frac{x^2}{2} + 5 \cdot \frac{x}{6} \\ &= (661x^3 + 989x^2 + x) + \frac{(x-1) \cdot x \cdot (x+1) + 3x \cdot x \cdot (x+1)}{6} \end{aligned}$$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $(661x^3 + 989x^2 + x) \in \mathbb{Z}$, còn $(x-1)x(x+1) + 3x^2(x+1)$ là số nguyên chia hết cho 6.

Từ đó suy ra $P(x)$ có giá trị nguyên với mọi x là số nguyên.

Bài 4: Chứng minh $n^3 + 17n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Lời giải

$$n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n$$

Vì $n(n-1)(n+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3, $(2, 3) = 1$ nên chia hết cho 6

$18n : 6$, suy ra điều phải chứng minh

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a^3 + 5a$ chia hết cho 6

Lời giải

$$a^3 + 5a = a^3 - a + 6a = a(a^2 - 1) + 6a = a(a-1)(a+1) + 6a$$

Vì $a(a-1)(a+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3 mà $(2,3)=1$ nên $a(a-1)(a+1)$ chia hết cho 6
 $6a$ chia hết cho 6

Nên $a^3 + 5a$ chia hết cho 6

Bài 6: Chứng minh rằng: $Q = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải

$$\begin{aligned} Q &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \\ &= n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) \\ &= 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } C &= n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + 3n + 3 \\ &= n^2(n+1) + 2n(n+1) + 3(n+1) \\ &= n(n+1)(n+2) + 3(n+1) \end{aligned}$$

Ta thấy $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3 (vì tích 3 số tự nhiên liên tiếp)

Và $3(n+1) : 3 \Rightarrow C$ chia hết cho 3

Nên $Q = 3C$ chia hết cho 9

Bài 7: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thỏa mãn $13a + b + 2c = 0$

Chứng tỏ rằng $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$

Lời giải

$$f(-2) = 4a - 2b + c; f(3) = 9a + 3b + c$$

Có $f(-2) + f(3) = 13a + b + 2c = 0$ nên:

$$\text{Hoặc: } f(-2) = 0 \text{ và } f(3) = 0 \Rightarrow f(-2) \cdot f(3) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Hoặc: } f(-2) \text{ và } f(3) \text{ là hai số đối nhau} \Rightarrow f(-2) \cdot f(3) < 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) được $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$

Bài 8: Chứng minh rằng: $(x^m + x^n + 1)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $(mn - 2) : 3$

Áp dụng phân tích đa thức thành nhân tử: $x^7 + x^2 + 1$

Lời giải

$$\text{Đặt } m = 3k + r \text{ với } 0 \leq r \leq 2; n = 3t + s \text{ với } 0 \leq s \leq 2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^m + x^n + 1 &= x^{3k+r} + x^{3t+s} + 1 = x^{3k} x^r - x^r + x^{3t} x^s - x^s + x^r + x^s + 1 \\ &= x^r (x^{3k} - 1) + x^s (x^{3t} - 1) + x^r + x^s + 1 \end{aligned}$$

Ta thấy: $(x^{3k} - 1) : (x^2 + x + 1)$ và $(x^{3t} - 1) : (x^2 + x + 1)$

Vậy $(x^m + x^n + 1) : (x^2 + x + 1)$

$$\Leftrightarrow (x^r + x^s + 1) : (x^2 + x + 1) \text{ với } 0 \leq r, s \leq 2$$

$$\Leftrightarrow r = 2 \text{ và } s = 1 \Rightarrow m = 3k + 2 \text{ và } n = 3t + 1$$

$$r = 1 \text{ và } s = 2 \Rightarrow m = 3k + 1 \text{ và } n = 3t + 2$$

$$\Leftrightarrow mn - 2 = (3k + 2)(3t + 1) - 2 = 9kt + 3k + 6t = 3(3kt + k + 2t)$$

$$mn - 2 = (3k + 1)(3t + 2) - 2 = 9kt + 6k + 3t = 3(3kt + 2k + t)$$

$$\Rightarrow (mn - 2) : 3, \text{ Điều phải chứng minh.}$$

$$\text{Áp dụng: } m = 7, n = 2 \Rightarrow mn - 2 = 12 : 3$$

$$\Rightarrow (x^7 + x^2 + 1) : (x^2 + x + 1)$$

$$\Rightarrow (x^7 + x^2 + 1) : (x^2 + x + 1) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$$

Bài 9: Chứng minh rằng không có giá trị tự nhiên n nào để giá trị của biểu thức $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ chia hết cho giá trị của biểu thức $n^2 - n$

Lời giải

Chia $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ cho $n^2 - n$ dư 3

Vì $n^2 - n = n(n - 1)$ là số chẵn nên $n(n - 1) \notin U(3)$.

Bài 10: Chứng tỏ rằng đa thức: $A = (x^2 + 1)^4 + 9(x^2 + 1)^3 + 21(x^2 + 1)^2 - x^2 - 31$ luôn không âm với mọi giá trị của biến x .

Lời giải

Đặt $x^2 + 1 = y$, ta có: $A = y^4 + 9y^3 + 21y^2 - y - 30 = \dots = (y - 1)(y + 2)(y + 3)(y + 5)$

Khi đó, $A = x^2(x^2 + 3)(x^2 + 4)(x^2 + 6) \geq 0$ với mọi giá trị của x (Đpcm)

Dạng 5: Xác định số

A. Bài toán

Bài 1: a) Xác định số hữu tỉ k để đa thức $A = x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$ chia hết cho đa thức $x + y + z$

b) Tìm đa thức bậc ba $P(x)$, biết rằng khi chia $P(x)$ cho $(x - 1)$, cho $(x - 2)$, cho $(x - 3)$ đều dư 6 và $P(-1) = -18$

Bài 2: Tìm tất cả các số tự nhiên k để đa thức $f(k) = k^3 + 2k^2 + 15$ chia hết cho $g(k) = k + 3$

Bài 3: Xác định các số hữu tỉ a và b sao cho:

a) $x^4 + 4$ chia hết cho $x^2 + ax + b$;

b) $ax^4 + bx^3 + 1$ chia hết cho $(x-1)^2$.

Bài 4: Xác định các hệ số hữu tỉ a và b sao cho $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x + 1$

Bài 5: Tìm các số nguyên a và b để đa thức $A(x) = x^4 - 3x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức

$$B(x) = x^2 - 3x + 4$$

Bài 6: Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$.

Bài 7: Tìm giá trị nguyên của x để đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ chia hết cho $g(x) = x^2 + x + 1$

Bài 8: Cho đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$. Với giá trị nguyên nào của x thì giá trị của đa thức $f(x)$ chia hết cho giá trị của đa thức $x^2 + 2$

Bài 9: Tìm giá trị của a để $(21x^2 - 9x^3 + x + x^4 + a) : (x^2 - x - 2)$

Bài 10: Tìm a nguyên để $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ chia hết cho $a^2 + 3$

Bài 11: Tìm giá trị nguyên của x để $A : B$ biết $A = 10x^2 - 7x - 5$ và $B = 2x - 3$.

Bài 12:

a) Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

b) Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

Bài 13: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho: $4n^3 + n + 3$ chia hết cho $2n^2 + n + 1$

Bài 14: Cho đa thức $h(x)$ bậc 4, hệ số của bậc cao nhất là 1, biết $h(1) = 2; h(2) = 5$;

$$h(4) = 17; h(-3) = 10. \text{ Tìm đa thức } h(x)$$

Bài 15: Cho đa thức $A = ax^2 + bx + c$. Xác định hệ số b biết rằng khi chia A cho $x-1$, chia A cho $x+1$ đều có cùng một số dư

Bài 16: Với giá trị nào của a và b thì đa thức $(x-a)(x-10)+1$ phân tích thành tích của một đa thức bậc nhất có hệ số nguyên

Bài 17: Tìm đa thức A , biết rằng $\frac{4x^2 - 16}{x^2 + 2x} = \frac{A}{x}$

Bài 18: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 + 2$ là ước số của $n^6 + 206$.

Bài 19:

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$

b) Dựa vào kết quả trên hãy chứng minh :

$$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n \text{ chia hết cho } 210 \text{ với mọi số tự nhiên } n$$

Bài 20: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

c) Tìm x để $|A| = A$

Bài 21: Đa thức $P(x) = 1985 \cdot \frac{x^3}{3} + 1979 \cdot \frac{x^2}{2} + 5 \cdot \frac{x}{6}$ có giá trị nguyên với mọi x là số nguyên.

Bài 22: Cho biểu thức $E = \frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{8} + \frac{a}{12}$ với a là một số tự nhiên chẵn. Hãy chứng tỏ E có giá trị nguyên.

B.Lời giải

Bài 1:a) Xác định số hữu tỉ k để đa thức $A = x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$ chia hết cho đa thức $x + y + z$

b) Tìm đa thức bậc ba $P(x)$, biết rằng khi chia $P(x)$ cho $(x-1)$, cho $(x-2)$, cho $(x-3)$ đều dư 6 và $P(-1) = -18$

Lời giải

a) Gọi thương của phép chia $A = x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$ cho đa thức $x + y + z$ là Q , ta có :

$$x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = (x + y + z)Q.$$

Đẳng thức trên đúng với mọi x, y, z nên với $x = 1, y = 1, z = -2$ ta có:

$$1^3 + 1^3 + (-2)^3 + k(-2) = (1 + 1 - 2)Q \Rightarrow -6 - 2k = 0 \Rightarrow k = -3$$

Vậy, $A = x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$ chia hết cho đa thức $x + y + z$ thì $k = -3$.

b) Từ đề bài suy ra $P(x) - 6$ chia hết cho $(x-1)$, cho $(x-2)$, cho $(x-3)$

Do đó, $P(x) - 6$ chia hết cho $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Đặt $P(x) - 6 = m \cdot (x-1)(x-2)(x-3)$ với $m \in Q$. (vì $P(x)$ có bậc là ba)

Suy ra $P(x) = 6 + m(x-1)(x-2)(x-3)$ với $m \in \mathbb{Q}$.

Theo giả thiết $P(-1) = -18$, do đó $-18 = 6 + (-2)(-3)(-4)m \Rightarrow m = 1$

Vậy, $P(x) = 6 + (x-1)(x-2)(x-3)$

Bài 2: Tìm tất cả các số tự nhiên k để đa thức $f(k) = k^3 + 2k^2 + 15$ chia hết cho $g(k) = k + 3$

Lời giải

ĐKXD: $k \neq -3$

Áp dụng định lý Bézout:

Số dư của $f(x)$ chia cho $g(x)$ là $f(-3) = -27 + 18 + 15 = 6$

Để $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ thì $6 \vdots k + 3$, suy ra $k \in \{0; 3\}$

Bài 3: Xác định các số hữu tỉ a và b sao cho:

a) $x^4 + 4$ chia hết cho $x^2 + ax + b$;

b) $ax^4 + bx^3 + 1$ chia hết cho $(x-1)^2$.

Lời giải

a) $x^4 + 4$ chia hết cho $x^2 + ax + b$;

Ta có: $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

Do đó, để $x^4 + 4$ chia hết cho $x^2 + ax + b$ thì $a = \pm 2, b = 2$.

b) $ax^4 + bx^3 + 1$ chia hết cho $(x-1)^2$.

Ta có $ax^4 + bx^3 + 1$ chia hết cho $(x-1)^2$ được thương có dạng $(ax^2 + cx + 1)$

Ta viết: $ax^4 + bx^3 + 1 = (x^2 - 2x + 1)(ax^2 + cx + 1)$ với mọi x

$$\begin{aligned} \text{Tính } (x^2 - 2x + 1)(ax^2 + cx + 1) &= ax^4 + cx^3 + x^2 - 2ax^3 - 2cx^2 - 2x + ax^2 + cx + 1 \\ &= ax^4 + (c - 2a)x^3 + (1 - 2c + a)x^2 + (-2 + c)x + 1 \end{aligned}$$

Khi đó, $ax^4 + bx^3 + 1 = ax^4 + (c - 2a)x^3 + (1 - 2c + a)x^2 + (-2 + c)x + 1$ với mọi x

$$\text{Đồng nhất thức hai vế, ta được } \begin{cases} b = c - 2a \\ 1 - 2c + a = 0 \\ -2 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy, $a = 3, b = -4$.

Bài 4: Xác định các hệ số hữu tỉ a và b sao cho $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x + 1$.

Lời giải

Phép chia hết của $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ cho $g(x) = x^2 - x + 1$ có đa thức thương dạng

$$h(x) = x^2 + cx + b.$$

Ta viết $x^4 + ax^2 + b = (x^2 - x + 1)(x^2 + cx + b)$ với mọi x

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (x^2 - x + 1)(x^2 + cx + b) &= x^4 + c^3x + bx^2 - x^3 - cx^2 - bx + x^2 + cx + b \\ &= x^4 + (c-1)x^3 + (b-c+1)x^2 + (-b+c)x + b \end{aligned}$$

Suy ra $x^4 + ax^2 + b = x^4 + (c-1)x^3 + (b-c+1)x^2 + (-b+c)x + b$ với mọi x

Đồng nhất thức hai vế, ta được: $c-1=0$, $b-c+1=a$, $-b+c=0$

Suy ra $a=b=c=1$

Vậy, $a=b=1$

Bài 5: Tìm các số nguyên a và b để đa thức $A(x) = x^4 - 3x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức

$$B(x) = x^2 - 3x + 4$$

Lời giải

Ta có:

$$A(x) = B(x) \cdot (x^2 - 1) + (a-3)x + b + 4$$

$$\text{Để } A(x) : B(x) \text{ thì } \begin{cases} a-3=0 \\ b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$$

Bài 6: Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x) \cdot q(x)$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2) \cdot (x-1)q(x)$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6 \quad (1)$$

$$\text{Với } x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có: $a=-4$ và $b=-2$

Bài 7: Tìm giá trị nguyên của x để đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ chia hết cho

$$g(x) = x^2 + x + 1$$

Lời giải

Thực hiện phép chia $x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ cho $x^2 + x + 1$

Ta được thương là $x - 4$, dư là 3

Để $f(x) : g(x)$ thì $3 : x^2 + x + 1$ mà $x^2 + x + 1 > 0$ nên

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 1 \\ x^2 + x + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1; x = 0 \\ x = 1; x = -2 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{0; -1; 1; -2\}$ thì $f(x) : g(x)$

Bài 8: Cho đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$. Với giá trị nguyên nào của x thì giá trị của đa thức $f(x)$ chia hết cho giá trị của đa thức $x^2 + 2$

Lời giải

Chia $f(x)$ cho $x^2 + 2$ được thương là $x - 3$ dư $x + 2$

Để $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$ thì $x + 2$ chia hết cho $x^2 + 2$

$\Rightarrow (x + 2)(x - 2)$ chia hết cho $x^2 + 2$

$\Rightarrow x^2 - 4$ chia hết cho $x^2 + 2$

$\Rightarrow x^2 + 2 - 6$ chia hết cho $x^2 + 2$

$\Rightarrow 6$ chia hết cho $x^2 + 2$ mà $x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow x^2 + 2 \in \{3; 6\} \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2\}$

Thử lại ta thấy $x = 1; x = -2$ thỏa mãn

Vậy với $x = 1; x = -2$ thì $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$

Bài 9: Tìm giá trị của a để $(21x^2 - 9x^3 + x + x^4 + a) : (x^2 - x - 2)$

Lời giải

Thương: $x^2 - 8x + 15$ và dư: $a + 30$

Phép chia hết nên $a + 30 = 0 \Rightarrow a = -30$

Bài 10: Tìm a nguyên để $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ chia hết cho $a^2 + 3$

Lời giải

Thực hiện phép chia $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ cho $a^2 + 3$ được kết quả:

$$a^3 - 2a^2 + 7a - 7 = (a^2 + 3)(a - 2) + (4a - 1)$$

Để phép chia hết thì $4a - 1$ phải chia hết cho $a^2 + 3$

$$\begin{aligned}
& (4a-1):(a^2+3) \\
& \Rightarrow (4a-1)(4a+1):(a^2+3) (a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4a+1 \in \mathbb{Z}) \\
& \Rightarrow (16a^2-1):(a^2+3) \\
& \Rightarrow 49:(a^2+3)
\end{aligned}$$

Tìm a , thử lại và kết luận $a \in \{-2; 2\}$

Bài 11: Tìm giá trị nguyên của x để $A:B$ biết $A = 10x^2 - 7x - 5$ và $B = 2x - 3$.

Lời giải

$$\text{Xét } \frac{A}{B} = \frac{10x^2 - 7x - 5}{2x - 3} = 5x + 4 + \frac{7}{2x - 3}$$

$$\text{với } x \in \mathbb{Z} \text{ thì } A:B \text{ khi } \frac{7}{2x-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7:(2x-3)$$

$$\text{Mà } U(7) = \{-1; 1; -7; 7\} \Rightarrow x \in \{5; -2; 2; 1\} \text{ thì } A:B$$

Bài 12:

a) Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

b) Tìm số nguyên a sao cho $a^4 + 4$ là số nguyên tố

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$\text{Vì } f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4 \text{ chia hết cho đa thức } g(x) = x^2 + x - 2$$

$$\text{Nên tồn tại một đa thức } q(x) \text{ sao cho } f(x) = g(x).q(x)$$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2).(x-1).q(x)$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow a+b+6=0 \Rightarrow b=-a-6 \quad (1)$$

$$\text{Với } x=-2 \Rightarrow 2a-b+6=0 \quad (2)$$

$$\text{Thay (1) vào (2), ta có: } a=2; b=4$$

$$\text{b) Ta có: } a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2).(a^2 + 2a + 2)$$

$$\text{Vì } a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 - 2a + 2 \in \mathbb{Z}; a^2 + 2a + 2 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Có: } a^2 + 2a + 2 = (a+1)^2 + 1 \geq 1 \forall a \text{ và } a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 \geq 1 (\forall a)$$

Vậy $a^4 + 4$ là số nguyên tố thì $\begin{cases} a^2 + 2a + 2 = 1 \\ a^2 - 2a + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1(tm) \\ a = -1(tm) \end{cases}$

Bài 13: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho: $4n^3 + n + 3$ chia hết cho $2n^2 + n + 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{4n^3 + n + 3}{2n^2 + n + 1} = 2n - 1 + \frac{4}{2n^2 + n + 1}$$

Vì n là số nguyên nên $2n - 1$ là số nguyên. Do đó để $4n^3 + n + 3$ chia hết cho $2n^2 + n + 1$ thì $2n^2 + n + 1$ phải là ước số của 4

$$\text{Mặt khác: } 2n^2 + n + 1 = 2 \left[n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \right] = 2 \left[\left(n + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{16} \right] > 0$$

Do đó: $2n^2 + n + 1 = 1$ hoặc $2n^2 + n + 1 = 2$ hoặc $2n^2 + n + 1 = 4$

$$\text{Giải từng trường hợp suy ra: } \begin{cases} n = 0 \\ n = -1 \\ n = 1 \end{cases}$$

Bài 14: Cho đa thức $h(x)$ bậc 4, hệ số của bậc cao nhất là 1, biết $h(1) = 2; h(2) = 5;$

$h(4) = 17; h(-3) = 10$. Tìm đa thức $h(x)$

Lời giải

Xét $g(x) = x^2 + 1$ có $g(1) = 2; g(2) = 5; g(4) = 17; g(-3) = 10$

Ta có $f(x) = h(x) - g(x)$ thì $f(x)$ bậc 4 hệ số của x^4 là 1 và

$$f(1) = f(2) = f(4) = f(-3) \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-2)(x-4)(x+3)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - x - 12) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24$$

$$\Rightarrow h(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 34x - 23$$

Vậy $h(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 34x - 23$

Bài 15: Cho đa thức $A = ax^2 + bx + c$. Xác định hệ số b biết rằng khi chia A cho $x - 1$, chia A cho $x + 1$ đều có cùng một số dư

Lời giải

Giả sử

$$A = ax^2 + bx + c = (x-1)P + R \quad (1)$$

$$A = ax^2 + bx + c = (x+1)Q + R \quad (2)$$

Cho $x = 1$ thì từ (1) ta có: $a + b + c = R$

Cho $x = -1$ thì từ (2) ta có: $a - b + c = R$

Do đó: $a + b + c = a - b + c \Leftrightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

Bài 16: Với giá trị nào của a và b thì đa thức $(x-a)(x-10)+1$ phân tích thành tích của một đa thức bậc nhất có hệ số nguyên

Lời giải

Giả sử:

$$(x-a)(x-10)+1 = (x-m)(x-n) \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (a+10)x + 10a + 1 = x^2 - (m+n)x + mn$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n = a+10 \\ mn = 10a+1 \end{cases}$$

Khử a ta có:

$$mn = 10(m+n-10)+1$$

$$\Leftrightarrow mn - 10m - 10n + 100 = 1$$

$$\Leftrightarrow m(n-10) - 10(n-10) = 1$$

Vì m, n nguyên ta có: $\begin{cases} m-10=1 \\ n-10=1 \end{cases} \& \begin{cases} m-10=-1 \\ n-10=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ a=8 \end{cases}$

Bài 17: Tìm đa thức A , biết rằng $\frac{4x^2-16}{x^2+2x} = \frac{A}{x}$

Lời giải

$$A = \frac{x(4x^2-16)}{x^2+2x} = \frac{x(2x-4)(2x+4)}{x(x+2)} = \frac{4x(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = 4(x-2) = 4x-8$$

Bài 18: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 + 2$ là ước số của $n^6 + 206$.

Lời giải

$$n^2 + 2 \text{ là ước số của } n^6 + 206 \Leftrightarrow \frac{n^6 + 206}{n^2 + 2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{n^6 + 8 + 198}{n^2 + 2} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n^4 + 2n^2 + 4 + \frac{198}{n^2 + 2} \in \mathbb{Z}$$

Điều này xảy ra khi $n^2 + 2$ là ước nguyên dương của $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$ gồm:

Liên hệ tài liệu word môn toán zalo: 039.373.2038

2;3;6;9;11;18;22;33;66;99;198

Từ đó ta tìm được $n \in \{1;2;3;4;8;14\}$

Bài 19:

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$

b) Dựa vào kết quả trên hãy chứng minh :

$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n$ chia hết cho 210 với mọi số tự nhiên n

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } x^3(x^2 - 7)^2 - 36x &= x \left[(x^3 - 7x)^2 - 36 \right] \\ &= x(x^3 - 7x - 6)(x^3 - 7x + 6) = x(x^3 - x - 6x - 6)(x^3 - x - 6x + 6) \\ &\dots\dots \\ &= x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

b) Theo phần a ta có: $A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$

Đây là tích của 7 số nguyên liên tiếp nên có một bội của 2, 1 bội của 3, 1 bội của 5, 1 bội của 7. Mà $(2, 3, 5, 7) = 1$ nên $A : (2.3.5.7) \Rightarrow A : 210$

Bài 20: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

c) Tìm x để $|A| = A$

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} \\ &= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x} \end{aligned}$$

b) A nguyên, mà x nguyên nên $2 : (1-2x)$, từ đó tìm được $\begin{cases} x = 1(ktm) \\ x = 0(tm) \end{cases}$

Vậy $x = 0$

c) Ta có:

$$|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện : $-1 \neq x < \frac{1}{2}$

Bài 21: Đa thức $P(x) = 1985 \cdot \frac{x^3}{3} + 1979 \cdot \frac{x^2}{2} + 5 \cdot \frac{x}{6}$ có giá trị nguyên với mọi x là số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P(x) &= 1985 \cdot \frac{x^3}{3} + 1979 \cdot \frac{x^2}{2} + 5 \cdot \frac{x}{6} \\ &= (661x^3 + 989x^2 + x) + \frac{(x-1) \cdot x \cdot (x+1) + 3x \cdot x \cdot (x+1)}{6} \end{aligned}$$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $(661x^3 + 989x^2 + x) \in \mathbb{Z}$, còn $(x-1)x(x+1) + 3x^2(x+1)$ là số nguyên chia hết cho 6.

Từ đó suy ra $P(x)$ có giá trị nguyên với mọi x là số nguyên.

Bài 22: Cho biểu thức $E = \frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{8} + \frac{a}{12}$ với a là một số tự nhiên chẵn. Hãy chứng tỏ E có giá trị nguyên.

Lời giải

Vì a là một số tự nhiên chẵn nên $a = 2k, k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Do đó } E = \frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{8} + \frac{a}{12} = \frac{8k^3}{24} + \frac{4k^2}{8} + \frac{2k}{12} = \dots = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\text{Ta có: } k(k+1):2 \Rightarrow k(k+1)(2k+1):2$$

Ta cần c/m: $k(k+1)(2k+1):3$. Thật vậy:

$$+ \text{ Nếu } k = 3n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow k:3 \text{ thì } k(k+1)(2k+1):3$$

$$+ \text{ Nếu } k = 3n+1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2k+1 = 2(3n+1)+1 = 6n+3:3 \text{ thì } k(k+1)(2k+1):3$$

$$+ \text{ Nếu } k = 3n+2, n \in \mathbb{N} \Rightarrow k+1 = 3n+3:3 \text{ thì } k(k+1)(2k+1):3$$

$$\text{Mà } (2,3)=1 \Rightarrow k(k+1)(2k+1):6$$



Vậy, $E = \frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{8} + \frac{a}{12}$ có giá trị nguyên với a là một số tự nhiên chẵn.

HH8-Chuyên đề 12: HÌNH HỌC TỔNG HỢP**Qua Các Đề Thi HSG Môn Toán Lớp 8****A. Bài toán**

Bài 1: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . M là giao điểm của CE và DF .

- Chứng minh: Tứ giác $EFGH$ là hình vuông
- Chứng minh $DF \perp CE$ và ΔMAD cân
- Tính diện tích ΔMDC theo a .

Bài 2: Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N

- Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật
- Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH . Chứng minh rằng $AC = 2EF$

- Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$$

Bài 3: Cho tam giác ABC nhọn. Dựng ra phía ngoài hai tam giác đều ABE, ACF , lại dựng hình bình hành $AEPF$. Chứng minh rằng PBC là tam giác đều

Bài 4: Cho tam giác ABC có $BC = 15cm, AC = 20cm, AB = 25cm$.

- Tính độ dài đường cao CH của tam giác ABC
- Gọi CD là đường phân giác của ΔACH . Chứng minh ΔBCD cân
- Chứng minh: $BC^2 + CD^2 + BD^2 = 3CH^2 + 2BH^2 + DH^2$

Bài 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các điểm M, N thứ tự là trung điểm của BC và AC . Các đường trung trực của BC và AC cắt nhau tại O . Qua A kẻ đường thẳng song song với OM , qua B kẻ đường thẳng song song với ON , chúng cắt nhau tại H .

- Nối MN , ΔAHB đồng dạng với tam giác nào?
- Gọi G là trọng tâm ΔABC , chứng minh ΔAHG đồng dạng với ΔMOG ?
- Chứng minh ba điểm H, O, G thẳng hàng?

Bài 6: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và BC .

- Tính diện tích tứ giác $AMND$.
- Phân giác góc CDM cắt BC tại E . Chứng minh $DM = AM + CE$

Bài 7: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, BD, CE là hai đường cao của tam giác cắt nhau tại điểm H . Chứng minh rằng:

- $HD.HB = HE.HC$

b) $\Delta HDE \sim \Delta HCB$

c) $BH.BD + CH.CE = BC^2$

Bài 8: Cho tam giác ABC . Từ điểm M thuộc cạnh AC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và BC cắt BC tại E và AB tại F . Hãy xác định vị trí của M trên AC sao cho hình bình hành $BEMF$ có diện tích lớn nhất

Bài 9: Cho tam giác ABC . Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc tia đối của các tia BA, CA sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD . Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A , đường thẳng này cắt AC ở K . Chứng minh rằng $AB = CK$

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên cạnh AC lấy điểm M bất kỳ, sao cho M khác A và C . Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AE = CM$

- Gọi O là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh ΔOEM vuông cân
- Đường thẳng qua A và song song với ME , cắt tia BM tại N . Chứng minh : $CN \perp AC$
- Gọi H là giao điểm của OM và AN . Chứng minh rằng tích $AH.AN$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên cạnh AC .

Bài 11: Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

- Tính tổng $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}$
- Chứng minh : $BH.BE + CH.CF = BC^2$
- Chứng minh: H cách đều ba cạnh tam giác DEF
- Trên các đoạn HB, HC lấy các điểm M, N tùy ý sao cho $HM = CN$. Chứng minh đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 12: Cho O là trung điểm của đoạn AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D .

- Chứng minh $AB^2 = 4.AC.BD$
- Kẻ OM vuông góc CD tại M . Chứng minh $AC = CM$
- Từ M kẻ MH vuông góc AB tại I . Chứng minh BC đi qua trung điểm MH .

Bài 13: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

- Chứng minh rằng: $BD.DC = DH.DA$
- Chứng minh rằng: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.
- Chứng minh rằng: H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

d) Gọi M, N, P, Q, I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB ,

EF, FD, DE . Chứng minh rằng ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm

Bài 14: Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = b; BC = a$. Đường phân giác BD của tam giác ABC có độ dài bằng cạnh bên của tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a+b)^2}.$$

Bài 15: Cho hình thang $ABCD$ (đáy lớn CD). Gọi O là giao điểm của AC và BD ; các đường kẻ từ A và B lần lượt song song với BC và AD cắt các đường chéo BD và AC tương ứng ở F và E . Chứng minh:

$$EF // AB$$

a) $AB^2 = EF \cdot CD$

b) Gọi S_1, S_2, S_3 và S_4 theo thứ tự là diện tích của tam giác OAB, OCD, OAD và OBC .

$$\text{Chứng minh } S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$$

Bài 16: Cho tam giác ABC (cân tại A) vẽ đường cao AH , đường cao BK

a) Tìm các cặp tam giác vuông đồng dạng? Giải thích tại sao?

b) Cho $AH = 10cm, BK = 12cm$. Hãy tính độ dài các cạnh của tam giác ABC

c) Gọi I là giao điểm của AH và BK , hãy tìm điều kiện của tam giác ABC để tam giác BCI là tam giác đều?

Bài 17: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và điểm N trên cạnh AB . Cho biết tia CN cắt tia DA tại E , tia Cx vuông góc với tia CE cắt tia AB tại F . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF .

a) Chứng minh $CE = CF$;

b) Chứng minh B, D, M thẳng hàng;

c) Chứng minh $\triangle EAC$ đồng dạng với $\triangle MBC$;

d) Xác định vị trí điểm N trên cạnh AB sao cho tứ giác $ACFE$ có diện tích gấp 3 lần diện tích hình vuông $ABCD$.

Bài 18: Hình vuông $ABCD$ có E và F thuộc tia đối CB và DC sao cho $DF = BE$. Từ E kẻ đường song song với AF và từ F kẻ đường song song với AE . Hai đường này giao tại I . Tứ giác $AFIE$ là hình gì?

Bài 19:

19.1: Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là một điểm trên cạnh BC . Qua A kẻ tia Ax vuông góc với AE , Ax cắt CD tại F . Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD ở K . Đường thẳng kẻ qua E , song song với AB cắt AI ở G . Chứng minh:

- a) Tứ giác EGFK là hình thoi.
 b) $AF^2 = FK.FC$
 c) Chu vi tam giác EKC không đổi khi E thay đổi trên BC.

19.2: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$ và đường phân giác của góc A là $AD = d$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{d}$.

Bài 20: Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác AHB và AHC. MN cắt AB, AH, AC lần lượt tại I, E, K

- a) Chứng minh : BM vuông góc với AN
 b) Chứng minh : $ME.NK = MI.NE$
 c) Biết diện tích của tam giác ABC là S. Tính diện tích lớn nhất của tam giác AIK theo S.

Bài 21: Cho tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính số đo \widehat{BDC} ?

Bài 22: Cho tam giác ABC cân tại A, có $BC = a$ không đổi. Gọi I là trung điểm của BC. Lấy $P \in AB$ và $Q \in AC$ sao cho $\widehat{PIQ} = \widehat{ABC}$. Vẽ $IK \perp AC$ ($K \in AC$)

- a) Chứng minh rằng tích $BP.CQ$ không đổi.
 b) Chứng minh rằng PI là tia phân giác của góc \widehat{BPQ} , QI là tia phân giác của \widehat{PQC}
 c) Gọi chu vi tam giác APQ là b , chứng minh rằng $b = 2.AK$. Tính b theo a khi

$$\widehat{BAC} = 60^\circ$$

Bài 23:

- a) Cho tam giác ABC, gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AC. Gọi O, G, H lần lượt là giao điểm ba đường trung trực, ba đường cao, ba đường trung tuyến của tam giác ABC. Tính tỉ số $GH : GO$
 b) Cho hình thang ABCD có hai đáy $AB = 2a, CD = a$. Hãy dựng điểm M trên đường thẳng CD sao cho đường thẳng AM cắt hình thang làm hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 24: Cho hình thoi ABCD có góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hai đường chéo cắt nhau tại O, E thuộc tia BC sao cho BE bằng ba phần tư BC, AE cắt CD tại F. Trên đoạn thẳng AB và CD lần lượt lấy hai điểm G và H sao cho CG song song với FH

- a) Chứng minh rằng : $BG.DH = \frac{3}{4}BC^2$
 b) Tính số đo góc GOH

Bài 25: Cho tam giác ABC , ba điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho

$$\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} \text{ \& } \frac{BM}{BC} < \frac{1}{2}. \text{ Chứng minh rằng hai tam giác } ABC \text{ và } MNP \text{ có cùng}$$

Bài 26: Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ và $CB = CD$. Chứng minh AC là tia phân giác của góc A .

Bài 27: Một tam giác có đường cao và đường trung tuyến chia góc ở đỉnh thành ba phần bằng nhau. Tính các góc của tam giác đó.

Bài 28: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $4cm$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC .

Gọi P là giao điểm của AN với DM

- Chứng minh : tam giác APM là tam giác vuông.
- Tính diện tích của tam giác APM
- Chứng minh tam giác CPD là tam giác cân.

Bài 29: Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM . Qua điểm D thuộc cạnh BC , vẽ đường thẳng song song với AM cắt đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F .

- Chứng minh $DE + DF = 2AM$
- Đường thẳng qua A song song với BC cắt EF tại N . Chứng minh N là trung điểm của EF

Ký hiệu S_X là diện tích của hình X . Chứng minh $S_{FDC}^2 \geq 16S_{AMC} \cdot S_{FNA}$

Bài 30: Cho hình bình hành $ABCD$ và đường thẳng xy không có điểm chung với hình bình hành. Gọi AA', BB', CC', DD' là các đường vuông góc kẻ từ A, B, C, D đến đường thẳng xy . Tìm hệ thức liên hệ độ dài giữa AA', BB', CC' và DD' .

Bài 31: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và một đường thẳng d không cắt cạnh nào của tam giác. Từ các đỉnh A, B, C và trọng tâm G ta kẻ các đoạn AA', BB', CC' và GG' vuông góc với đường thẳng d . Chứng minh hệ thức: $AA' + BB' + CC' = 3GG'$.

Bài 32: Cho tam giác ABC có ba đường cao AA', BB', CC' . Gọi H là trực tâm của tam giác đó.

- Chứng minh: $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = 1$;
- Chứng minh: $\frac{AA'}{HA'} + \frac{BB'}{HB'} + \frac{CC'}{HC'} \geq 9$;

Bài 33: Cho tam giác ABC ($AC > AB$). Lấy các điểm D, E tùy ý theo thứ tự nằm trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng DE, BC . Cmr: Tỉ số $KE : KD$ không phụ thuộc vào cách chọn điểm D và E .

Bài 34: Cho hình vuông $ABCD$. M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD . Kẻ

$$ME \perp AB, MF \perp AD.$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

- a) Chứng minh $DE = CF$; $DE \perp CF$
 b) Chứng minh rằng ba đường thẳng DE , BF , CM đồng quy.
 c) Xác định vị trí của điểm M trên BD để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất?

Bài 35: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BH \perp AC$. Gọi M là trung điểm của AH , K là trung điểm của CD , N là trung điểm của BH .

- a) Chứng minh tứ giác $MNCK$ là hình bình hành;
 b) Tính góc BMK .

Bài 36: Cho tam giác ABC . Gọi D là trung điểm của cạnh BC . Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm E và F . Chứng minh rằng $S_{DEF} \leq \frac{1}{2} S_{ABC}$. Với vị trí nào của hai điểm E và F thì S_{DEF} đạt giá trị lớn nhất?

Bài 37: Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ là AB , đáy lớn là CD . Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường chéo BD ở E , qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường chéo AC ở F .

- a) Chứng minh rằng tứ giác $DEFC$ là hình thang cân;
 b) Tính độ dài EF nếu biết $AB = 5\text{cm}$, $CD = 10\text{cm}$.

Bài 38: Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Đường phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D , đường phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở E .

- a) Chứng minh $DE \parallel BC$.
 b) Gọi I là giao điểm của DE với AM . Chứng minh $ID = IE$.

Bài 39: Cho tam giác vuông cân ABC , $\hat{A} = 90^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm M , kẻ $BD \perp CM$, BD cắt CA ở E . Chứng minh rằng:

- a) $EB \cdot ED = EA \cdot EC$;
 b) $BD \cdot BE + CA \cdot CE = BC^2$
 c) $\widehat{ADE} = 45^\circ$

Bài 40: Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là một điểm trên cạnh BC . Qua E kẻ tia Ax vuông góc với AE , Ax cắt CD tại F . Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD ở K . Đường thẳng kẻ qua E , song song với AB cắt AI ở G . Chứng minh rằng:

- a) $AE = AF$ và tứ giác $EGKF$ là hình thoi;
 b) $\triangle AKF \sim \triangle CAF$, $AF^2 = FK \cdot FC$;
 c) Khi E thay đổi trên BC , chứng minh: $EK = BE + DK$ và chu vi tam giác EKC không đổi.

Bài 41: Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau ở E . Các tia phân giác của các góc ACE và DBE cắt nhau ở K . Chứng minh rằng: $\widehat{BKC} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BDC}}{2}$

Bài 42: Cho hình thang ABCD có $AB \parallel CD$, $AB < CD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, K là giao điểm của AD và BC. Đường thẳng KO cắt AB, CD theo thứ tự ở M, N. Cmr:

a) $\frac{MA}{ND} = \frac{MB}{NC}$;

b) $\frac{MA}{NC} = \frac{MB}{ND}$

c) $MA = MB, NC = ND$

Bài 43: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). $AB = 28$, $CD = 70$, $AD = 35$, vẽ một đường thẳng song song với hai cạnh đáy, cắt AD, BC theo thứ tự ở E và F. Tính độ dài EF, biết rằng $DE = 10$.

Bài 44: Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi I là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Đường thẳng qua I và song song với AC cắt AB ở K. Đường thẳng qua I và song song với AB cắt AM, AC theo thứ tự ở D, E. Chứng minh rằng $DE = BK$.

Bài 45: Tứ giác ABCD có E, F theo thứ tự là trung điểm của CD, CB. Gọi O là giao điểm của AE và DF; $OA = 4OE$; $OD = \frac{2}{3}OF$. Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành.

Bài 46: Đường thẳng đi qua trung điểm các cạnh đối AB, CD của tứ giác ABCD cắt các đường thẳng AD, BC theo thứ tự ở I, K. Cmr: $\frac{IA}{ID} = \frac{KB}{KC}$.

Bài 47: Qua M thuộc cạnh BC của tam giác ABC vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh kia. Chúng cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự ở H, K. Cmr:

a) Tổng $\frac{AH}{AB} + \frac{AK}{AC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên cạnh BC.

b) Xét trường hợp tương tự khi M chạy trên đường thẳng BC nhưng không thuộc đoạn thẳng BC.

Bài 48: Cho tam giác ABC đều cạnh a, M là một điểm bất kỳ ở trong tam giác ABC.

Chứng minh rằng: $MA + MB + MC > \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 49: Cho hình vuông ABCD. Trên các tia đối CB và DC, lấy các điểm M, N sao cho $DN = BM$. Các đường thẳng song song kẻ từ M với AN và từ N với AM cắt nhau tại F. Cmr:

a) Tứ giác ANFM là hình vuông;

b) Điểm F nằm trên tia phân giác của \widehat{MCN} và $\widehat{ACF} = 90^\circ$;

c) Ba điểm B, O, D thẳng hàng và tứ giác BOFC là hình thang (O là trung điểm của AF)

Bài 50: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BD = 2DC$. Cmr: BM vuông góc với AD.

Bài 51: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Trên tia HC lấy $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh rằng: $AE = AB$;

b) Gọi M là trung điểm của BE. Tính \widehat{AHM} .

Bài 52: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC.

- a) Chứng minh: $BD.CE.BC = AH^3$;
 b) Giả sử diện tích tam giác ABC gấp đôi diện tích tứ giác ADHE, chứng tỏ tam giác ABC vuông cân.

Bài 53: Cho tam giác ABC nhọn, có trực tâm H, trên cạnh BH lấy điểm M và trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng: $AM = AN$.

Bài 54: Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD và ACF lần lượt vuông cân tại B và C. Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của AC và BF.

Cmr: a) $AH = AK$; b) $AH^2 = BH.CK$

Bài 55: Cho tam giác ABC, một đường thẳng cắt các cạnh BC, AC theo thứ tự ở D và E. và cắt cạnh BA ở F. Vẽ hình bình hành BDEH. Đường thẳng qua F và song song với BC cắt AH ở I.

Cmr: $FI = DC$

Bài 56: Cho tam giác ABC, đường phân giác AD và đường trung tuyến AM. Qua điểm I thuộc AD vẽ IH vuông góc với AB, IK vuông góc với AC. Gọi N là giao điểm của HK và AM. Cmr : NI vuông góc với BC.

Bài 57: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, trực tâm H. Một đường thẳng đi qua H cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở P và Q sao cho $HP = HQ$. Gọi M là trung điểm của BC. Cmr: HM vuông góc với PQ.

Bài 58: Hình chữ nhật ABCD có M, N theo thứ tự là trung điểm của AD và BC. Gọi E là một điểm bất kỳ thuộc tia đối của tia DC, K là giao điểm của EM và AC. Cmr: MN là tia phân giác của góc KNE.

Bài 59: Cho hình thang ABCD, đáy lớn AB. Từ đỉnh D kẻ đường thẳng song song với cạnh BC, cắt đường chéo AC tại M và cắt cạnh đáy AB tại K. Từ C kẻ đường thẳng song song với AD, cắt đường chéo BD tại I và cắt cạnh AB tại F. Qua F kẻ đường thẳng song song với AC, cắt cạnh bên BC tại P.

Cmr: a) $MP // AB$. b) Ba điểm M, I, P thẳng hàng. c) $DC^2 = AB.MI$

Bài 60: Một đường thẳng đi qua đỉnh A của hình bình hành ABCD cắt đường chéo BD ở E và cắt các đường thẳng BC, DC theo thứ tự ở K, G. CMR:

a) $AE^2 = EK.EG$;

b) $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$

c) Khi đường thẳng thay đổi nhưng vẫn đi qua A thì tích $BK.DG$ có giá trị không đổi.

Bài 61: Cho tam giác ABC đều, các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AC, AB sao cho $AD = BE$. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc cạnh BC. Vẽ $MH // CD$, $MK // BE$ ($H \in AB$; $K \in AC$).

Cmr: Khi M chuyển động trên cạnh BC thì tổng $MH + MK$ có giá trị không đổi.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 62: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác BD cắt đường cao AH tại I

- Chứng minh: tam giác ADI cân.
- Chứng minh: $AD \cdot BD = BI \cdot DC$
- Từ D kẻ DK vuông góc BC tại K. Tứ giác ADKI là hình gì? Chứng minh điều ấy.

Bài 63: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, các điểm D, E, F theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CA theo cùng một tỉ số. Cmr: $AE = DF$; $AE \perp DF$.

Bài 64: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có diện tích S, $AB = \frac{2}{3}CD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE. Tính diện tích tứ giác EMFN theo S.

Bài 65: Cho hình bình hành ABCD, M là trung điểm của BC. Điểm N trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Gọi giao điểm của AM, AN với BD là P, Q. Cmr: $S_{APQ} = \frac{1}{2}S_{AMN}$

Bài 66: Cho góc xOy và điểm M cố định thuộc miền trong của góc. Một đường thẳng quay quanh M cắt tia Ox, Oy theo thứ tự ở A, B. Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của tam giác MOA, MOB.

Cmr: $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$ không đổi.

Bài 67: Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CA theo tỉ số 1:2. Các điểm I, K theo thứ tự chia trong các cạnh ED, FE theo tỉ số 1:2. Chứng minh: $IK \parallel BC$.

Bài 68: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), M là trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của BM và AC.

- Chứng minh $IK \parallel AB$.
- Đường thẳng IK cắt AD, BC theo thứ tự ở E, F. Cmr: $EI = IK = KF$.

Bài 69: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm K sao cho $AH = HK$. Vẽ $KE \perp BC$ ($E \in AC$).

- Gọi M là trung điểm của BE. Tính \widehat{BHM} .
- Gọi G là giao điểm của AM với BC. Chứng minh: $\frac{GB}{BC} = \frac{AH}{HK + HC}$.

Bài 70: Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 90^\circ$, đường cao AH, đường trung tuyến BM cắt AH tại I. Giả sử $BH = AC$. Chứng minh: CI là tia phân giác của \widehat{ACB} .

Bài 71: a) Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$, $AB = 3cm$, $AC = 6cm$. Tính độ dài đường phân giác AD.

b) Cho tam giác ABC với đường phân giác AD thỏa mãn $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$. Tính \widehat{BAC} .

Bài 72: Cho tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, các đường trung tuyến BD và CE vuông góc với nhau. Tính độ dài BC.

Bài 73: Cho hình vuông ABCD. Trên tia BC lấy điểm M nằm ngoài đoạn BC và trên tia CD lấy điểm N nằm ngoài đoạn CD sao cho $BM = DN$. Đường vuông góc với MA tại M và đường vuông góc với NA tại N cắt nhau ở F. Chứng minh:

- AMFN là hình vuông;
- CF vuông góc với CA.

Bài 74: Cho hình vuông ABCD có giao điểm các đường chéo là O. Kẻ đường thẳng d bất kỳ qua O. Chứng minh rằng: Tổng các bình phương các khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến đường thẳng d là một số không đổi.

Bài 75: Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ một điểm O ở trong tam giác vẽ

$$OD \perp BC (D \in BC), OE \perp CA (E \in CA), OF \perp AB (F \in AB).$$

Tìm vị trí của điểm O để tổng $OD^2 + OE^2 + OF^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 76: Cho hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AB = 7\text{cm}$, $DC = 13\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$. Đường trung trực của BC cắt đường thẳng AD ở N. Gọi M là trung điểm của BC. Tính MN.

Bài 77: Cho tam giác ABC vuông tại A. Dựng AD vuông góc với BC tại D. Đường phân giác BE

cắt AD tại F. Chứng minh: $\frac{FD}{FA} = \frac{EA}{EC}$

Bài 78: Cho tam giác ABC. Kẻ phân giác trong và ngoài của góc B cắt AC ở I và D (lần lượt theo thứ tự A, I, C, D). Từ I và D kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB ở M và N.

- Tính AB và MN, biết $MI = 12\text{cm}$, $BC = 20\text{cm}$.
- Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt BI tại E và cắt BD tại F. Chứng minh:

$$BI \cdot IC = AI \cdot IE \text{ và } CE = CF$$

Bài 79: Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, dựng hai tia Bx, Cy vuông góc với cạnh BC. Trên tia Bx lấy điểm D sao cho $BD = BA$, trên tia Cy lấy điểm E sao cho $CE = CA$. Gọi G là giao điểm của BE và CD, K và L lần lượt là giao điểm của AD, AE với cạnh BC.

- Chứng minh rằng $CA = CK$; $BA = BL$.
- Đường thẳng qua G song song với BC cắt AD, AE theo thứ tự tại I, J. Gọi H là hình chiếu vuông góc của G lên BC. Chứng minh IHJ là tam giác vuông cân.

Bài 80: Cho tam giác ABC, đường phân giác AD chia cạnh đối diện thành các đoạn thẳng BD = 2cm, DC = 4cm. Đường trung trực của AD cắt đường thẳng BC tại K. Tính độ dài KD.

Bài 81: Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến, AD là đường phân giác. Biết $AC = 9\text{cm}$, $AB = 6\text{cm}$, diện tích tam giác ABC là 24cm^2 . Tính diện tích tam giác ADM.

Bài 82: Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM, cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F.

- a) Chứng minh khi điểm D chuyển động trên cạnh BC thì tổng $DE + DF$ có giá trị không đổi.
b) Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt EF ở K. Chứng minh rằng K là trung điểm của EF

Bài 83: Cho các tam giác ABC, I là giao điểm của ba đường phân giác. Đường thẳng vuông góc với CI tại I cắt AC, BC theo thứ tự ở M, N. Cmr:

- a) Tam giác AIM đồng dạng với tam giác ABI.

b) $\frac{AM}{BN} = \left(\frac{AI}{BI} \right)^2$.

Bài 84: Cho tam giác ABC cân tại A có $BC = 2a$, M là trung điểm của BC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$.

- a) Cmr: BD.CE không đổi.
b) Cmr: DM là tia phân giác của góc BDE
c) Tính chu vi tam giác AED nếu ABC là tam giác đều.

Bài 85: Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC, điểm M nằm giữa A và D. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của MB và MC. Gọi E là giao điểm của DI và AB, F là giao điểm của DK và AC. Cmr: $EF \parallel IK$.

Bài 86: Cho hình vuông ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Lấy điểm G, H thứ tự thuộc cạnh BC, CD sao cho $\widehat{GOH} = 45^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB. Cmr:

- a) Tam giác HOD đồng dạng với tam giác OGB;
b) $MG \parallel AH$

Bài 87: Cho tam giác ABC và hình bình hành AEDF có $E \in AB, F \in AC, D \in BC$. Tính diện tích của hình bình hành, biết rằng $S_{EBD} = 3cm^2, S_{FDC} = 12cm^2$.

Bài 88: Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 2. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, DC. Gọi I, H theo thứ tự là giao điểm của AF với BE, BD. Tính S_{EIH}

Bài 89: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD, AB < CD$). Gọi O là giao điểm của AC với BD và I là giao điểm của DA với CB. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh: $\frac{OA + OB}{OC + OD} = \frac{IA + IB}{IC + ID}$.

- b) Chứng minh: Bốn điểm I; O; M; N thẳng hàng.

- c) Giả sử $3AB = CD$ và diện tích hình thang ABCD bằng S. Hãy tính diện tích tứ giác IAOB theo S.

Bài 90: Cho hình vuông ABCD, trên tia đối của tia CD lấy điểm E. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BE tại F, nó cắt DC tại G. Gọi H, I, J, M, K lần lượt là giao điểm của GF với BC, EF với HD, EA với HC, AB với HD, AE với DH.

90.1.a) Chứng minh: $\frac{DG}{AD} = \frac{GF}{EF}$; $CE = \frac{BC \cdot EF}{GF}$. Từ đó suy ra $DG + CE \geq 2CD$ và $EG \geq 3CD$

b) Tìm GTLN của $\frac{S_{ABCD}}{S_{AEG}}$

90.2.a) Chứng minh: $\Delta BHA = \Delta CEB$ và $\Delta DAE = \Delta CDH$

b) Chứng minh: $AE \perp DH$

c) Chứng minh: $AI // DJ // GB$

d) Chứng minh: ΔAFB đồng dạng với ΔABH ; ΔAFD đồng dạng với ΔADH

Từ đó có nhận xét gì về \widehat{AFD} và \widehat{ADH} .

90.3.a) Chứng minh: $KD^2 = KI \cdot KH$

b) Chứng minh: $EJ \cdot EK \cdot HJ = HK \cdot HD \cdot EC$

c) Chứng minh: $HJ \cdot HC \cdot EK = EI \cdot EF \cdot HK$

90.4. Chứng minh: Khi E thay đổi trên tia đối của tia CD thì $\frac{BM}{CJ}$ là không đổi.

90.5. Qua bài này, các em hãy khai thác thêm nhiều tính chất mới thú vị.

Bài 91: Cho ΔABC cân tại A với A là góc nhọn; CD là đường phân giác \widehat{ACB} ($D \in AB$); qua D kẻ đường vuông góc với CD, đường này cắt đường thẳng CB tại E. Chứng minh: $BD = \frac{1}{2}EC$.

Bài 92: Cho tứ giác ABCD. Đường thẳng qua A song song với BC, cắt BD tại P và đường thẳng qua B song song với AD cắt AC tại Q. Chứng minh $PQ // CD$.

Bài 93: Cho hình thang ABCD, đáy AD và BC, có $\hat{A} = 90^\circ$, E là giao điểm của hai đường chéo, F là hình chiếu của E lên AB.

a) Chứng minh $\Delta BFC \sim \Delta AFD$.

b) Gọi K là giao điểm của AC và DF. Chứng minh $KE \cdot FC = CE \cdot FK$.

Bài 94: Cho hình bình hành ABCD có góc ABC nhọn. Vẽ ra phía ngoài hình bình hành các tam giác đều BCE và DCF. Tính số đo \widehat{EAF}

Bài 95: Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' và H là trực tâm

a) Chứng minh $BC' \cdot BA + CB' \cdot CA = BC^2$

b) Chứng minh rằng:
$$\frac{HB.HC}{AB.AC} + \frac{HA.HB}{BC.AC} + \frac{HC.HA}{BC.AB} = 1$$

- c) Gọi D là trung điểm của BC. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với DH cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh H là trung điểm của MN.

Bài 96: Cho hình vuông ABCD và 2018 đường thẳng cùng có tính chất chia hình vuông này thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 505 đường thẳng trong 2018 đường thẳng trên đồng quy.

Bài 97: Cho hình vuông ABCD trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho AE = AF. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N

- 4) Chứng minh rằng tứ giác AEMD là hình chữ nhật
- 5) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH. Chứng minh rằng $AC = 2EF$
- 6) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Bài 98: Cho hình chữ nhật ABCD, $AB = 2AD$. Trên cạnh AD lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $AM = CP$. Kẻ BH vuông góc với AC tại H. Gọi Q là trung điểm của CH đường thẳng kẻ qua P song song với MQ cắt AC tại N.

- a) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.
- b) Khi M là trung điểm của AD. Chứng minh BQ vuông góc với NP.
- c) Đường thẳng AP cắt DC tại điểm F. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{4AF^2}$

Bài 99: Cho đoạn thẳng AB dài a(cm). Lấy điểm C bất kỳ thuộc đoạn thẳng AB (C khác A và B). Vẽ tia Cx vuông góc với AB. Trên tia Cx lấy hai điểm D và E sao cho $CD = CA$ và $CE = CB$.

- a) Chứng minh AE vuông góc với BD
- b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AE và BD. Tìm vị trí của điểm C trên đoạn thẳng AB để đa giác CMEDN có diện tích lớn nhất
- c) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng khoảng cách từ I đến AB không phụ thuộc vào vị trí điểm C

Bài 100: Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$

- a) Tính diện tích hình thang ABCD theo a
- b) Gọi I là trung điểm của BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC. Chứng minh $\widehat{HDI} = 45^\circ$

Bài 101: Cho tam giác ABC có BC = a; CA = b; AB = c. Độ dài các đường phân giác trong của tam giác kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là $l_a; l_b; l_c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Bài 102: Cho tam giác ABC đều cạnh 2a, M là trung điểm của BC. $\widehat{xMy} = 60^\circ$ quay quanh đỉnh M cố định sao cho hai tia Mx; My cắt AB, AC lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng:

- $\triangle BDM \sim \triangle CME$ và tích BD.CE không phụ thuộc vào vị trí của \widehat{xMy}
- DM là phân giác của \widehat{BDE}
- $BD \cdot ME + CE \cdot MD > a \cdot DE$
- Chu vi $\triangle ADE$ không đổi khi \widehat{xMy} quay quanh M

Bài 103: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH. Trên tia HC lấy HD = HA. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E

- Chứng minh $AE = AB$
- Gọi M là trung điểm của BE. Tính góc AHM.

Bài 104: Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AC. Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với tia BM, đường thẳng này cắt tia BM tại D, cắt tia BA tại E.

- Chứng minh: $EA \cdot EB = ED \cdot EC$
- Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh AC thì tổng $BM \cdot BD + CM \cdot CA$ có giá trị không đổi
- Kẻ $DH \perp BC$ ($H \in BC$). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, CH. Chứng minh $CQ \perp PD$.

Bài 105: Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$ và chu vi bằng 18cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC, biết các độ dài đều là số nguyên dương và BC có độ dài là một số chẵn.

Bài 106: Cho tam giác ABC có $AC = 3AB$ và số đo của góc A bằng 60° . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{ADB} = 30^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với AD tại D lấy điểm E sao cho $DE = DC$ (E và A cùng phía với BC). Chứng minh rằng $AE \parallel BC$.

Bài 107: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của AC và các đường thẳng AD, BM và CE đồng qui tại K ($K \in AM; D \in BC; E \in AB$). Hai tam giác AKE và BKE có diện tích là 10 và 20. Tính diện tích tam giác ABC

Bài 108: Cho tam giác ABC. Gọi Q là điểm trên cạnh BC (Q khác B, C). Trên AQ lấy điểm P (P khác A, Q). Hai đường thẳng qua P song song với AC, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N.

- Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AB} + \frac{AN}{AC} + \frac{PQ}{AQ} = 1$.

b) Xác định vị trí điểm Q để $\frac{AM \cdot AN \cdot PQ}{AB \cdot AC \cdot AQ} = \frac{1}{27}$.

Bài 109: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AC và BD . Gọi G là giao điểm của đường thẳng đi qua E vuông góc với AD với đường thẳng đi qua F vuông góc với BC . So sánh GA và GB

Bài 110: a) Cho tam giác ABC cân tại A ($\hat{A} < 90^\circ$), có BH là đường cao, BD là phân giác của góc \widehat{ABH} ($H, D \in AC$). Chứng minh rằng: $\frac{BH}{CD} > 1$.

b) Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác trong của góc A ($D \in BC$). Gọi k_a là khoảng cách từ D đến AB (hoặc AC). Tương tự, gọi BE là phân giác trong của góc B ($E \in AC$) và k_b là khoảng cách từ E đến BA (hoặc BC), gọi CF là phân giác trong của góc C ($F \in AB$) và k_c là khoảng cách từ F đến CA (hoặc CB). Gọi h_a, h_b, h_c tương ứng là 3 chiều cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác đã cho. Tìm giá trị bé nhất của biểu thức $\frac{k_a}{h_a} + \frac{k_b}{h_b} + \frac{k_c}{h_c}$

Bài 111: Cho hình bình hành $ABCD$ có $\hat{A} < 90^\circ$. Dựng các tam giác vuông cân tại A là BAM và DAN (B và N cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AD , D và M cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB). Chứng minh rằng AC vuông góc với MN .

Bài 112: Cho hình bình hành $ABCD$ có $\hat{A} = 120^\circ$. Đường phân giác của góc D đi qua trung điểm I của cạnh AB .

a) Chứng minh: $AB = 2AD$.

b) Kẻ $AH \perp DC$ ($H \in DC$). Chứng minh: $DI = 2AH$.

c) Chứng minh: $AC \perp AD$.

Bài 113: Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , kẻ các đường cao BD và CE . Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với cạnh AC , đường thẳng này cắt đường thẳng AB tại điểm F .

a) Chứng minh: $AB^2 = AE \cdot AF$.

b) Chứng minh: $\frac{CE}{CF} = \frac{BE}{BF}$.

Bài 114: Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$) và $DC = 2AB$, H là hình chiếu của D trên AC và M là trung điểm của đoạn HC . Chứng minh: $BM \perp MD$.

Bài 115: Cho hình bình hành $ABCD$ có góc ABC nhọn. Vẽ ra phía ngoài hình bình hành các tam giác đều BCE và DCF . Tính số đo \widehat{EAF}

Bài 116: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a, biết hai đường chéo cắt nhau tại O. Lấy điểm I thuộc cạnh AB, điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{IOM} = 90^\circ$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông). Gọi N là giao điểm của AM và CD, K là giao điểm của OM và BN.

1) Chứng minh $\triangle BIO = \triangle CMO$ và tính diện tích tứ giác BIOM theo a

2) Chứng minh $\widehat{BKM} = \widehat{BCO}$

Chứng minh $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Bài 117: Cho tam giác ABC ($AB < AC$), trọng tâm G. Qua G vẽ đường thẳng d cắt các cạnh

AB, AC theo thứ tự ở D và E. Tính giá trị biểu thức $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE}$.

Bài 118: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = a = 12\text{cm}$, $BC = b = 9\text{cm}$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BD

a) Chứng minh tam giác AHB đồng dạng với tam giác BCD

b) Tính độ dài đoạn thẳng AH

c) Tính diện tích tam giác AHB

Bài 119: Cho tam giác đều ABC. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh AB và BC sao cho $BM = BN$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BMN$ và I là trung điểm của AN. Tính các góc của tam giác ICG.

Bài 120: Cho hình vuông ABCD, gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB, BC.

a) Chứng minh rằng: $CE \perp DF$

b) Gọi M là giao điểm của CE và DF. Chứng minh rằng: $AM = AD$

Bài 121: Cho tam giác ABC. Vẽ ở ngoài tam giác các hình vuông ABDE, ACFH.

a) Chứng minh rằng $EC = BH$; $EC \perp BH$

b) Gọi M, N thứ tự là tâm của các hình vuông ABDE, ACFH. Gọi I là trung điểm của BC.

Tam giác MNI là tam giác gì? Vì sao?

Bài 122: Chứng minh rằng trong một hình bình hành, khoảng cách từ một điểm trên đường chéo đến hai cạnh kề (hai cạnh kề và đường chéo cùng đi qua một đỉnh của hình bình hành), tỉ lệ nghịch với hai cạnh ấy.

Bài 123: Gọi M là điểm nằm trong $\widehat{xOy} = m^\circ$ ($0 < m < 90$). Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M trên Ox, Oy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của OM, PQ

a) Chứng minh $HK \perp PQ$

b) Tính số đo \widehat{HPQ} theo m

Bài 124: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B. Trên tia đối của tia AC lấy điểm I sao cho $AI = AM$.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

a) Chứng minh rằng: $CM \perp BI$

b) Trên BC lấy điểm P sao cho $BP = 2CP$. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC có chứa điểm A, vẽ tia Px sao cho $\widehat{xPB} = 60^\circ$. Tia Px cắt tia CA tại D. Tính số đo \widehat{CBD}

Bài 125: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Một đường thẳng d qua O song song với 2 đáy cắt hai cạnh bên AD, BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}$.

Bài 126: Cho hình bình hành ABCD. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC sao cho $AN = CM$. Gọi K là giao điểm của AN và CM. Chứng minh rằng KD là tia phân giác của \widehat{AKC}

Bài 127: Cho tam giác đều ABC, gọi M là trung điểm của BC. Một góc $\widehat{xMy} = 60^\circ$ quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh

a) $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$

b) DM, EM lần lượt là tia phân giác của các góc \widehat{BDE} và \widehat{CED}

c) Chu vi tam giác ADE không đổi.

Bài 128: Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm C (C khác A). Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC, đường thẳng này cắt By tại D. Từ O hạ đường vuông góc OM xuống CD (M thuộc CD)

a) Chứng minh $OA^2 = AC \cdot BD$

b) Chứng minh tam giác AMB vuông

c) Gọi N là giao điểm của BC và AD. Chứng minh $MN \parallel AC$

Bài 129: Cho O là trung điểm của đoạn thẳng AB có độ dài bằng 2a. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm D bất kỳ, qua O vẽ hai đường thẳng vuông góc với DO tại O cắt By tại C

a) Chứng minh $BC \cdot AD = a^2$

b) Chứng minh DO và CO lần lượt là tia phân giác của \widehat{ADC} và \widehat{BCD}

c) Vẽ $OH \perp CD$ ($H \in CD$). Gọi I là giao điểm của AC và BD, E là giao điểm của AH và DO, F là giao điểm của BH và CO. Chứng minh ba điểm E, I, F thẳng hàng

d) Xác định vị trí của điểm D trên tia Ax để tích $DO \cdot CO$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

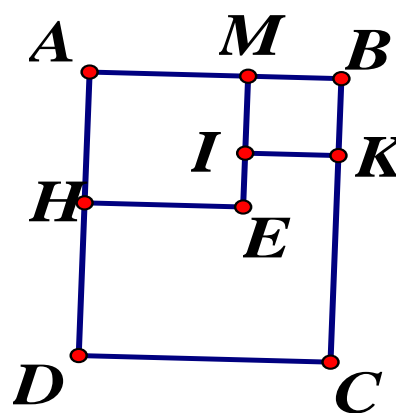
Bài 130: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E .

1. Chứng minh rằng: $\triangle BEC \sim \triangle ADC$. Tính độ dài đoạn BE theo $m = AB$
2. Gọi M là trung điểm của đoạn BE . Chứng minh rằng hai tam giác $\triangle BHM, \triangle BEC$ đồng dạng. Tính số đo của \widehat{AHM}
3. Tia AM cắt BC tại G . Chứng minh: $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

Bài 131: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Vẽ BH vuông góc với AC ($H \in AC$). Gọi M là trung điểm của AH , K là trung điểm của CD . Chứng minh rằng: $BM \perp MK$.

Bài 132:

Một trường học được xây dựng trên khu đất hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 50m$, $BC = 200m$. Ở phía chiều rộng AB tiếp giáp đường chính, người ra sử dụng hai lô đất hình vuông $AMEH, BMIK$ để xây dựng phòng làm việc và nhà để xe. Diện tích còn lại để xây phòng học và các công trình khác (như hình vẽ). Tính diện tích lớn nhất còn lại để xây phòng học và các công trình khác.



Bài 133: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8cm, AD = 6cm$. Gọi H là hình chiếu của A trên BD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DH, BC

- a) Tính diện tích tứ giác $ABCH$
- b) Chứng minh $AM \perp MN$.

Bài 134: Cho hình vuông $ABCD$; Trên tia đối của tia BA lấy E , trên tia đối tia CB lấy F sao cho $AE = CF$

- a) Chứng minh $\triangle EDF$ vuông cân
- b) Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD . Gọi I là trung điểm EF . Chứng minh O, C, I thẳng hàng

Bài 135: Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí điểm D, E sao cho

- a) DE có độ dài nhỏ nhất
- b) Tứ giác $BDEC$ có diện tích nhỏ nhất.

Bài 136: Cho O là trung điểm của đoạn AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là cạnh AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D

- Chứng minh $AB^2 = 4AC \cdot BD$
- Kẻ $OM \perp CD$ tại M . Chứng minh $AC = CM$.
- Từ M kẻ MH vuông góc với AB tại H . Chứng minh BC đi qua trung điểm MH
- Tìm vị trí của C trên tia Ax để diện tích tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất

Bài 137: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $4cm$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi P là giao điểm của AN với DM

- Chứng minh $\triangle APM$ là tam giác vuông
- Tính diện tích của tam giác APM
- Chứng minh tam giác CPD là tam giác cân.

Bài 138: Cho hình thang cân $ABCD$ có $\widehat{ACD} = 60^\circ$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OA, OD, BC . Tam giác EFG là tam giác gì? Vì sao?

Bài 139: Cho hình bình hành $ABCD$ có E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD .

- Chứng minh rằng các đường thẳng AC, BD, EF đồng quy
- Gọi giao điểm của AC với DE và BF theo thứ tự là M và N . Chứng minh rằng $EMFN$ là hình bình hành

Bài 140: Cho đoạn thẳng $AB = a$. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B . Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMNP, BMLK$ có tâm theo thứ tự là C, D . Gọi I là trung điểm của CD .

- Tính khoảng cách từ I đến AB
- Khi điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì điểm I di chuyển trên đường nào?

Bài 141: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$). Gọi N và M theo thứ tự là trung điểm của các đường chéo AC, BD . Chứng minh rằng:

- $MN \parallel AB$
- $MN = \frac{CD - AB}{2}$

Bài 142: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$ và $AB < CD$); Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC, BD . Đường thẳng qua A và song song với BC cắt BD tại E , cắt CD tại A' ; đường thẳng qua B và song song với AD cắt AC tại F , cắt CD tại B' . Gọi diện tích các tam giác OAB, OCD, ACD, ABC lần lượt là S_1, S_2, S_3, S_4 . Chứng minh:

a) $EF // AB$

b) $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{BD}$ và $AB^2 = EF \cdot CD$

c) $\frac{S_1}{S_4} + \frac{S_2}{S_3} = 1$

Bài 143: Cho hình bình hành $ABCD$. Với $AB = a, AD = b$. Từ đỉnh A , kẻ một đường thẳng a bất kỳ cắt đường chéo BD tại E , cắt cạnh BC tại F và cắt tia DC tại G .

a) Chứng minh : $AE^2 = EF \cdot EG$

b) Chứng minh rằng khi đường thẳng a quay quanh A thay đổi thì tích $BF \cdot DG$ không đổi

Bài 144: Cho hình thang $ABCD$ ($AB // CD$) có $AB < CD$. Qua A và B kẻ các đường thẳng song song với BC và AD lần lượt cắt CD ở K và I . Gọi E là giao điểm của AK và BD , F là giao điểm của BI và AC . Chứng minh rằng:

a) $EF // AB$

b) $AB^2 = CD \cdot EF$

Bài 145: Cho tam giác ABC vuông tại A , D là điểm di động trên cạnh BC . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, AC

a) Xác định vị trí của điểm D để tứ giác $AEDF$ là hình vuông

b) Xác định vị trí của điểm D sao cho $3AD + 4EF$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 146: Trong tam giác ABC , các điểm A, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $\widehat{AFE} = \widehat{BFD}; \widehat{BDF} = \widehat{CDE}; \widehat{CED} = \widehat{AEF}$

a) Chứng minh rằng: $\widehat{BDF} = \widehat{BAC}$

b) Cho $AB = 5, BC = 8, CA = 7$. Tính độ dài đoạn BD .

Bài 147: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi

Bài 148: Cho tam giác ABC , đường cao AH , vẽ phân giác Hx của góc \widehat{AHB} và phân giác Hy của \widehat{AHC} . Kẻ AD vuông góc với Hx , AE vuông góc với Hy . Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ là hình vuông.

Bài 149: Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD

a) Tứ giác $BEDF$ là hình gì ? Vì sao ?

b) Chứng minh rằng : $CH.CD = CB.CK$

c) Chứng minh rằng: $AB.AH + AD.AK = AC^2$

Bài 150: Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác BD. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của BD, BC, DC

a) Chứng minh $APQR$ là hình thang cân

b) Biết $AB = 6cm, AC = 8cm$. Tính độ dài của AR

Bài 151: Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng qua B cắt cạnh CD tại M, cắt đường chéo AC tại N và cắt đường thẳng AD tại K. Chứng minh:

$$\frac{1}{BN} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{BK}$$

Bài 152: Cho tam giác ABC phân giác AD. Trên nửa mặt phẳng không chứa A bờ BC, vẽ tia Cx sao cho $\widehat{BCx} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Cx cắt AD tại E; I là trung điểm DE. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ABD \sim \triangle CED$

b) $AE^2 > AB.AC$

c) $4AB.AC = 4AI^2 - DE^2$

d) Trung trực của BC đi qua E

Bài 153: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH. Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa C, vẽ hình vuông AHKE. Gọi P là giao điểm của AC và KE

a) Chứng minh $\triangle ABP$ vuông cân

b) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành APQB, gọi I là giao điểm của BP và AQ. Chứng minh H, I, E thẳng hàng

c) Tứ giác HEKQ là hình gì? Chứng minh

Bài 154: Tính diện tích hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), biết $AB = 42cm, \hat{A} = 45^\circ; \hat{B} = 60^\circ$ và chiều cao của hình thang bằng 18m

Bài 155: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Vẽ hình vuông MNPQ có M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của BN và MQ; CM và NP. Chứng minh rằng

a) DE song song với AC

b) $DE = DF; AE = AF$

Bài 156: Cho tam giác vuông cân $ABC (AB = AC)$. M là trung điểm của AC, trên BM lấy điểm N sao cho $NM = MA; CN$ cắt AB tại E. Chứng minh :

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

- a) Tam giác BNE đồng dạng với tam giác BAN
- b) $\frac{NC}{AN} = \frac{NB}{AB} + 1$

Bài 157: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là một điểm di động trên AC. Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với tia BM cắt tia BM tại H, cắt tia BA tại O. Chứng minh rằng:

- a) $OA.OB = OC.OH$
- b) \widehat{OHA} có số đo không đổi
- c) Tổng $BM.BH + CM.CA$ không đổi

Bài 158: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao BD, CE cắt nhau tại H

- a) Chứng minh $\triangle ABD \sim \triangle ACE$
- b) Chứng minh $BH.HD = CH.HE$
- c) Nối D với E, cho biết $BC = a, AB = AC = b$. Tính độ dài đoạn thẳng DE theo a

Bài 159: Cho hình bình hành $ABCD$ ($AC > BD$). Gọi G, H lần lượt là hình chiếu của C lên AB và AD. Chứng minh

- a) $\triangle ABC \sim \triangle HCG$
- b) $AC^2 = AB.AG + AD.AH$

Bài 160: Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH ở E, cắt DC ở F.

- a) Chứng minh rằng $BM = ND$
- b) Chứng minh rằng N, D, C thẳng hàng
- c) $EMFN$ là hình gì ?
- d) Chứng minh: $DF + BM = FM$ và chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi vị trí trên BC.

Bài 161: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy điểm P, gọi M là điểm đối xứng của C qua P.

- a) Tứ giác $AMDB$ là hình gì ?
- b) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AD. Chứng minh $EF \parallel AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng
- c) Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật $MEAF$ không phụ thuộc vào vị trí điểm P

- d) Giả sử $CP \perp BD$ và $CP = 2,4\text{cm}$, $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$. Tính các cạnh của hình chữ nhật ABCD.

Bài 162: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của CD .

- Tứ giác $ABED$ là hình gì ? Tại sao ?
- Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo a
- Gọi I là trung điểm của BC , H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC . Tính góc

\widehat{HDI}

Bài 163: Cho tam giác ABC . Gọi I là một điểm di chuyển trên cạnh BC . Qua I , kẻ đường thẳng song song với cạnh AC cắt cạnh AB tại M . Qua I , kẻ đường thẳng song song với cạnh AB cắt cạnh AC tại N

- Gọi O là trung điểm của AI . Chứng minh rằng ba điểm M, O, N thẳng hàng
- Kẻ MH, NK, AD vuông góc với BC lần lượt tại H, K, D . Chứng minh rằng $MH + NK = AD$
- Tìm vị trí của điểm I để MN song song với BC .

Bài 164: Cho tam giác ABC , các góc B và C nhọn. Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Chứng minh rằng:

- $AB.AF = AC.AE$
- $\triangle AEF \sim \triangle ABC$
- $BH.BE + CH.CF = BC^2$

Bài 165: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Trên cạnh AB lấy M ($0 < MB < MA$) và trên cạnh BC lấy N sao cho $\widehat{MON} = 90^\circ$. Gọi E là giao điểm của AN với DC , gọi K là giao điểm của ON với BE .

- Chứng minh $\triangle MON$ vuông cân
- Chứng minh MN song song với BE
- Chứng minh CK vuông góc với BE

- d) Qua K vẽ đường song song với OM cắt BC tại H . Chứng minh: $\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = 1$

Bài 166: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD ; I và J thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng DH và BC . Tính số đo của góc \widehat{AIJ}

- Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H , trên đoạn BH lấy điểm M và trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AM = AN$

Bài 167: Cho hình bình hành $ABCD$ ($AC > BD$), hình chiếu vuông góc của C lên AB, AD lần lượt là E và F . Chứng minh:

- $CE.CD = CB.CF$ và $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle FCE$
- $AB.AE + AD.AF = AC^2$

Bài 168: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Một đường thẳng kẻ qua A cắt cạnh BC tại M và cắt đường thẳng CD tại N . Gọi K là giao của OM và DN . Chứng minh CK vuông góc với BN .

Bài 169: Cho tam giác nhọn ABC . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Chứng minh rằng:

a) Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC

b) $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$

c) $AD \cdot HD \leq \frac{BC^2}{4}$

d) Gọi I, K, Q, R lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ E xuống AB, AD, CF, BC . Chứng minh bốn điểm I, K, Q, R cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài 170: Cho tam giác ABC . Trên tia đối của các tia BA, CA lấy theo thứ tự các điểm D, E sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD . Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A , đường thẳng này cắt AC ở K . Chứng minh $AB = CK$

Bài 171: Cho tam giác ABC nhọn, BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H .

a) Chứng minh rằng: $\triangle HED \sim \triangle HBC$

b) Chứng minh rằng: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

c) Gọi M là trung điểm của BC , qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM , cắt AB tại I , cắt AC tại K . Chứng minh tam giác IMK là tam giác cân

Bài 172: Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Các phân giác AD, BE và CF

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$

b) Tính \widehat{FDE}

Bài 173: Cho tam giác vuông cân ABC ($AB = AC$). Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho

$BM = 2MA$, trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ đường thẳng Bx vuông góc với

AB , trên Bx lấy điểm N sao cho $BN = \frac{1}{2}AB$. Đường thẳng MC cắt NA tại E , đường thẳng BE cắt đường thẳng AC tại F .

a) Chứng minh $AF = AM$.

b) Gọi H là trung điểm của FC . Chứng minh $EH = BM$

Bài 174: Chứng minh rằng trong một hình bình hành, khoảng cách từ một điểm trên đường chéo đến hai cạnh kề (hai cạnh kề và đường chéo cùng đi qua một đỉnh của hình bình hành), tỉ lệ nghịch với hai cạnh ấy.

Bài 175: Gọi M là điểm nằm trong $\widehat{xOy} = m^\circ$ ($0 < m < 90$). Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M trên Ox, Oy . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của OM, PQ

a) Chứng minh $HK \perp PQ$

b) Tính số đo \widehat{HPQ} theo m

Bài 176: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$). Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $KH = HA$. Qua K kẻ đường thẳng song song với AH , cắt đường thẳng AC tại P .

- a) Chứng minh : Tam giác AKC đồng dạng với tam giác BPC
 b) Gọi Q là trung điểm của BP . Chứng minh tam giác BHQ đồng dạng với tam giác BPC .

c) Tia AQ cắt BC tại I . Chứng minh $\frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$.

Bài 177: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH . Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa C , vẽ hình vuông $AHKE$. Gọi P là giao điểm của AC và KE

- a) Chứng minh $\triangle ABP$ vuông cân
 b) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành $APQB$, gọi I là giao điểm của BP và AQ . Chứng minh H, I, E thẳng hàng.
 c) Tứ giác $HEKQ$ là hình gì ?

Bài 178: Tính diện tích hình thang $ABCD$ ($AB // CD$), biết $AB = 42cm$, $\hat{A} = 45^\circ$; $\hat{B} = 60^\circ$, chiều cao của hình thang bằng $18cm$

Bài 179: Cho hình vuông $ABCD$, trên tia đối của tia CD lấy điểm M bất kỳ ($CM < CD$), vẽ hình vuông $CMNP$ (P nằm giữa B và C), DP cắt BM tại H , MP cắt BD tại K .

- a) Chứng minh: DH vuông góc với BM .

b) Tính $Q = \frac{PC}{BC} + \frac{PH}{DH} + \frac{KP}{MK}$

c) Chứng minh: $MP \cdot MK + DK \cdot BD = DM^2$

Bài 180: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . M là giao điểm của CE và DF .

- a) Chứng minh CE vuông góc với DF

b) Chứng minh $\frac{CM \cdot CE}{CF} = a$

- c) Tính diện tích $\triangle MDC$ theo a

Bài 181: Cho tam giác ABC có $AB = 2a$; $AC = 3a$; $BC = 4a$. Đường phân giác AD và BE cắt nhau tại I . Gọi M là trung điểm của AC , G là trọng tâm tam giác ABC

- a) Tính độ dài đoạn thẳng BD theo a
 b) Chứng minh $IG // AC$
 c) Tính tỉ số diện tích của tứ giác $EIGM$ và $\triangle ABC$

Bài 182: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2BC$, đường phân giác các góc C và D cắt nhau tại M . Chứng minh A, M, B thẳng hàng

Bài 183: Cho tam giác ABC đều. Một đường thẳng song song với BC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại D và E . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE và BE . Gọi O là trọng tâm của tam giác ADE .

- Chứng minh $\triangle OMN \sim \triangle OEC$
- Chứng minh ON vuông góc với NC .

Bài 184: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8cm, AD = 6cm$. Gọi H là hình chiếu của A trên BD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DH, BC

- Tính diện tích tứ giác $ABCH$
- Chứng minh $AM \perp MN$.

Bài 185: Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E , trên tia đối tia CB lấy F sao cho $AE = CF$

- Chứng minh $\triangle EDF$ vuông cân
- Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi I là trung điểm EF . Chứng minh O, I, C thẳng hàng

Bài 186: Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí điểm D, E sao cho

- DE có độ dài nhỏ nhất
- Tứ giác $BDEC$ có diện tích nhỏ nhất

Bài 187: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB = 15 cm, AC = 20 cm$. Kẻ đường cao AH và trung tuyến AM

- Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle HBA$
- Tính $BC; AH; BH; CH$
- Tính diện tích $\triangle AHM$

Bài 188: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$). Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $KH = HA$. Qua K kẻ đường thẳng song song với AH , cắt đường thẳng AC tại P .

- Chứng minh: Tam giác ABC Đồng dạng với tam giác KPC .
- Gọi Q là trung điểm của BP . Chứng minh: QH là đường trung trực của đoạn thẳng AK .

Bài 189: Cho tam giác ABC có $\hat{A} > \hat{B}$. Trên cạnh BC lấy điểm H sao cho $\hat{HAC} = \hat{ABC}$. Đường phân giác của góc \hat{BAH} cắt BH ở E . Từ trung điểm M của AB kẻ ME cắt đường thẳng AH tại F . Chứng minh rằng: $CF \parallel AE$.

Bài 190: Từ đỉnh A của $\triangle ABC$ ta hạ các đường vuông góc AM, AN với phân giác trong và ngoài tương ứng của góc B. Hạ các đường vuông góc AP, AQ với phân giác trong và ngoài tương ứng của góc C.

- Chứng minh rằng 4 điểm MNPQ thẳng hàng
- Cho $QN = 10$ cm tính chu vi tam giác ABC
- Cho điểm O chuyển động trên BC tìm vị trí của O sao cho tích khoảng cách từ O đến AB và AC đạt giá trị lớn nhất.

Bài 191: Cho hình vuông ABCD cạnh a, lấy điểm M bất kỳ trên cạnh BC (M khác B và C). Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng DM tại H, kéo dài BH cắt đường thẳng DC tại K.

- Chứng minh KM vuông góc với DB.
- Chứng minh rằng: $KC \cdot KD = KH \cdot KB$.
- Ký hiệu S_{ABM}, S_{DCM} lần lượt là diện tích các tam giác ABM và DCM.

a) Chứng minh tổng $(S_{ABM} + S_{DCM})$ không đổi.

b) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để $(S_{ABM}^2 + S_{DCM}^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó theo a.

Bài 192: Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N.

- Chứng minh rằng tứ giác AEMD là hình chữ nhật.
- Chứng minh $\triangle CBH$ đồng dạng với $\triangle EAH$
- Biết diện tích $\triangle CBH$ gấp bốn lần diện tích $\triangle EAH$. Chứng minh rằng: $AC = 2EF$.
- Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$.

Bài 193: Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M và N.

- Chứng minh rằng $OM = ON$.
- Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$.
- Biết $S_{AOB} = 2015^2$ (đơn vị diện tích); $S_{COD} = 2016^2$ (đơn vị diện tích). Tính S_{ABCD} .

Bài 194: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia đối của tia HB lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E.

- Chứng minh $CD \cdot CB = CA \cdot CE$
- Tính số đo góc BEC.
- Gọi M là trung điểm của đoạn BE. Tia AM cắt BC tại G.

Chứng minh:
$$\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$$

Bài 195: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), kẻ đường cao AH và đường trung tuyến AM ($H, M \in BC$). Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC .

1. Chứng minh rằng:

- a) $DE^2 = BH.HC$.
- b) $AH^2 = AD.DB + AE.EC$
- c) DE vuông góc với AM .

2. Giả sử diện tích tam giác ABC bằng 2 lần diện tích tứ giác $ADHE$. Chứng minh tam giác ABC vuông cân.

Bài 196: Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 2AD$. Trên cạnh AD lấy điểm M , trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $AM = CP$. Kẻ BH vuông góc với AC tại H . Gọi Q là trung điểm của CH , đường thẳng kẻ qua P song song với MQ cắt AC tại N .

- d) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành
- e) Khi M là trung điểm của AD . Chứng minh BQ vuông góc với NP
- f) Đường thẳng AP cắt DC tại điểm F . Chứng minh rằng $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{4AF^2}$

Bài 197: Cho tam giác ABC vuông tại A . Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AC . Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với tia BM , đường thẳng này cắt tia BM tại D , cắt tia BA tại E .

- d) Chứng minh : $EA.EB = ED.EC$
- e) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh AC thì tổng $BM.BD + CM.CA$ có giá trị không đổi
- f) Kẻ $DH \perp BC$ ($H \in BC$). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, CH .
Chứng minh $CQ \perp PD$

Bài 198: Cho tam giác ABC vuông ở A có AM là phân giác ($M \in BC$). Đường thẳng qua M và vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại N . Chứng minh rằng $MN = MC$

Bài 199: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 20cm. Trên cạnh CD lấy điểm M . Đường thẳng vuông góc với BM tại M cắt AD tại N .

- a) Cho $MC = 15\text{cm}$. Tính diện tích tam giác BMN
- b) Xác định vị trí của M trên cạnh CD để ND có độ dài lớn nhất.

Bài 200: Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O . M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC ($M \neq B, C$)

. Tia AM cắt đường thẳng CD tại N . Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$.

- a) Chứng minh : $\triangle OEM$ vuông cân
- b) Chứng minh: $ME \parallel BN$
- c) Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Bài 201: Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Các đường cao AE, BF, CG cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC , qua H vẽ đường thẳng a vuông góc với HM , a cắt AB, AC lần lượt tại I và K

- Chứng minh tam giác ABC đồng dạng với tam giác EFC
- Qua C kẻ đường thẳng b song song với đường thẳng IK , b cắt AH, AB theo thứ tự tại N và D . Chứng minh $NC = ND, HI = HK$
- Chứng minh $\frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG} > 6$

Bài 202: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC', H là trực tâm.

- Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$
- Gọi AI là phân giác của tam giác ABC ; IM, IN thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB . Chứng minh rằng: $AN \cdot BI \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$
- Chứng minh rằng: $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$

Bài 203: 1) Cho hình vuông $ABCD$, gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C , dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB , d cắt AH tại E . Đường thẳng AH cắt DC tại F .

- Chứng minh rằng $BM = ND$.
- Tứ giác $EMFN$ là hình gì
- Chứng minh chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi trên BC

2) Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ, \widehat{ABC} = 20^\circ$. Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{ABE} = 10^\circ$ và $\widehat{ACF} = 30^\circ$. Tính \widehat{CFE}

Bài 204: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có AD là tia phân giác của \widehat{BAC} . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC , E là giao điểm của BN và DM , F là giao điểm của CM và DN .

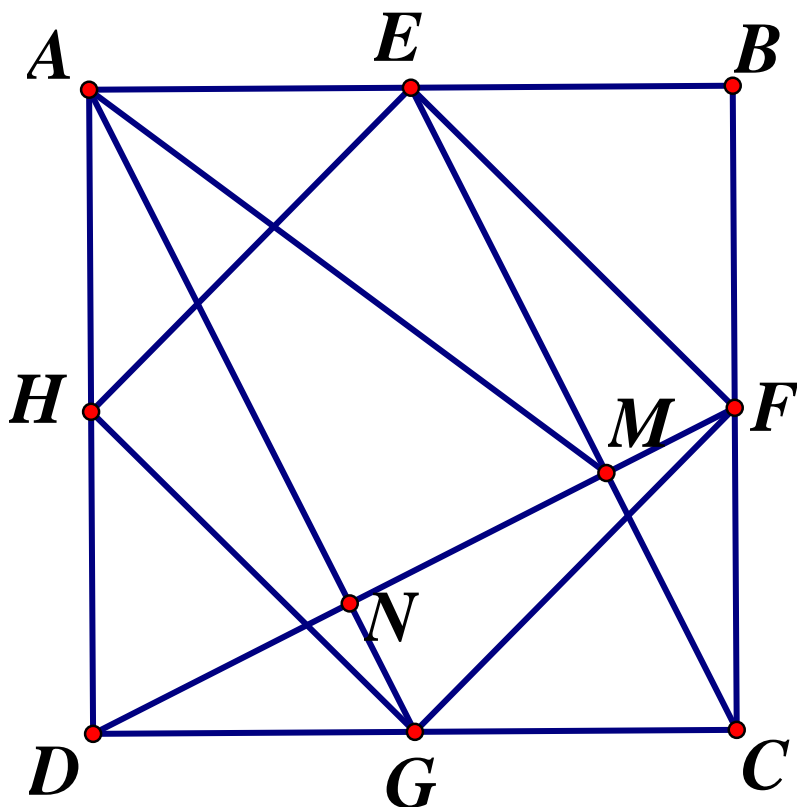
- Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông và $EF \parallel BC$.
- Gọi H là giao điểm của BN và CM . Chứng minh $\triangle ANB$ đồng dạng với $\triangle NFA$ và H là trực tâm $\triangle AEF$
- Gọi giao điểm của AH và DM là K , giao điểm của AH và BC là O , giao điểm của BK và

$$AD \text{ là } I. \text{ Chứng minh: } \frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} > 9$$

B.Lời giải

Bài 1: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . M là giao điểm của CE và DF .

- Chứng minh: Tứ giác $EFGH$ là hình vuông
- Chứng minh $DF \perp CE$ và $\triangle MAD$ cân
- Tính diện tích $\triangle MDC$ theo a .

Lời giải

- Chứng minh $EFGH$ là hình thoi

Chứng minh có 1 góc vuông nên $EFGH$ là hình vuông

b) $\triangle BEC = \triangle CFD \Rightarrow \widehat{ECB} = \widehat{FDC}$ mà $\triangle CDF$ vuông tại C nên:
 $\Rightarrow \widehat{CDF} + \widehat{DFC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DFC} + \widehat{ECB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle CMF$ vuông tại M hay $CE \perp DF$

Gọi N là giao điểm của AG và DF . Chứng minh tương tự: $AG \perp DF$

$\Rightarrow GN \parallel CM$ mà G là trung điểm của DC nên N là trung điểm DM.

Trong $\triangle MAD$ có AN vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến

$\Rightarrow \triangle MAD$ cân tại A

$$c) \triangle CMD \sim \triangle FCD (g.g) \Rightarrow \frac{CD}{FD} = \frac{CM}{FC}$$

$$\text{Do đó: } \frac{S_{CMD}}{S_{FCD}} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \Rightarrow S_{CMD} = \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 \cdot S_{FCD}$$

$$\text{Mà } S_{FCD} = \frac{1}{2} CF \cdot CD = \frac{1}{4} CD^2.$$

$$\text{Vậy } S_{CMD} = \frac{CD^2}{FD^2} \cdot \frac{1}{4} CD^2$$

Trong $\triangle DCF$ theo định lý Pytago ta có:

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 = CD^2 + \left(\frac{1}{2} BC^2\right) = CD^2 + \frac{1}{4} CD^2 = \frac{5}{4} CD^2$$

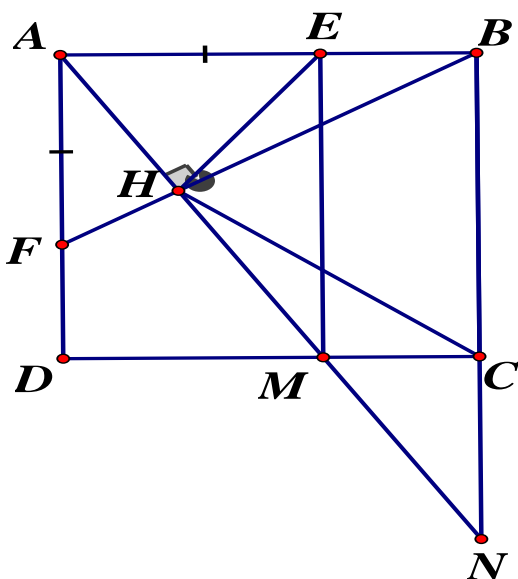
$$\text{Do đó: } S_{MCD} = \frac{CD^2}{\frac{5}{4} CD^2} \cdot \frac{1}{4} CD^2 = \frac{1}{5} a^2$$

Bài 2: Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho

$AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M , N

- 1) Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật
- 2) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH . Chứng minh rằng $AC = 2EF$
- 3) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Lời giải



- 1) Ta có: $\widehat{DAM} = \widehat{ABF}$ (cùng phụ với \widehat{BAH})

$$AB = AD \quad (gt); \widehat{BAF} = \widehat{ADM} = 90^\circ \text{ (ABCD là hình vuông)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BAF \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow DM = AF, \text{ mà } AF = AE(gt) \text{ nên } AE = DM$$

$$\text{Lại có: } AE // DM \text{ (vì } AB // DC)$$

$$\text{Suy ra tứ giác } AEMD \text{ là hình bình hành. Mặt khác } \widehat{DAE} = 90^\circ(gt)$$

Vậy tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật

$$2) \text{ Ta có } \triangle ABH \sim \triangle FAH \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH} \text{ hay } \frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH} \text{ (} AB = BC; AE = AF \text{)}$$

$$\text{Lại có: } \widehat{HAB} = \widehat{HBC} \text{ (cùng phụ với } \widehat{ABH} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle AEH \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\frac{BC}{AE} \right)^2, \text{ mà } \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4(gt) \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE} \right)^2 = 4 \Rightarrow BC^2 = (2AE)^2$$

$$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } AB, F \text{ là trung điểm của } AD$$

$$\text{Do đó: } BD = 2EF \text{ hay } AC = 2EF \text{ (đpcm)}$$

$$3) \text{ Do } AD // CN(gt). \text{ Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$$

$$\text{Lại có: } MC // AB(gt). \text{ Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:}$$

$$\frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN} \text{ hay } \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$$

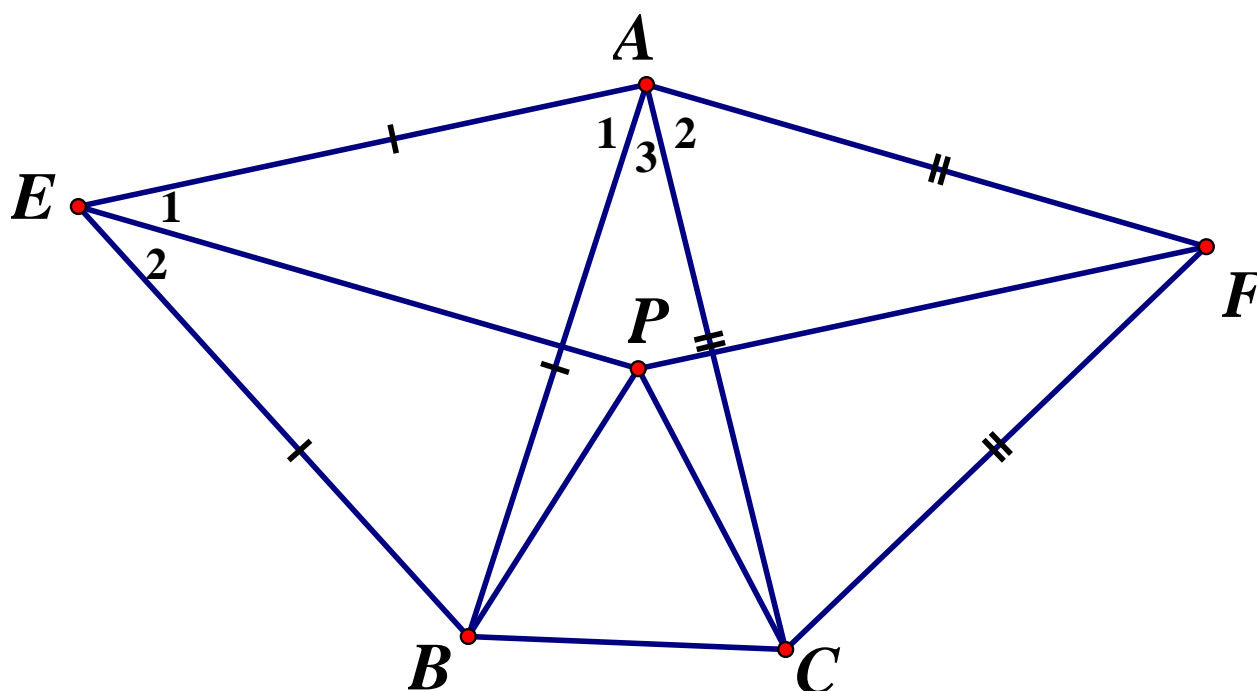
$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM} \right)^2 + \left(\frac{AD}{AN} \right)^2 = \left(\frac{CN}{MN} \right)^2 + \left(\frac{CM}{MN} \right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

(Pytago)

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM} \right)^2 + \left(\frac{AD}{AN} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 3: Cho tam giác ABC nhọn. Dựng ra phía ngoài hai tam giác đều $ABE; ACF$, lại dựng hình bình hành $AEPF$. Chứng minh rằng PBC là tam giác đều

Lời giải



Ta có: $AEPF$ là hình bình hành nên $\widehat{AEP} = \widehat{AFP}$

Xét $\triangle EPB$ và $\triangle FPC$ có:

$$EB = FP (= AE); EP = FC (= AF); \widehat{PEB} = \widehat{PFC} (\text{vì } 60^\circ - \widehat{AEP} = 60^\circ - \widehat{AFP}) \\ \Rightarrow \triangle EPB = \triangle FPC (c.g.c) \Rightarrow PB = PC \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \widehat{EAP} + \widehat{AEP} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A_3} + \widehat{E_1} = 60^\circ \text{ mà } \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{A_3} = \widehat{E_2} \\ \Rightarrow \triangle EPB = \triangle ABC (c.g.c) \Rightarrow PB = BC \quad (2)$$

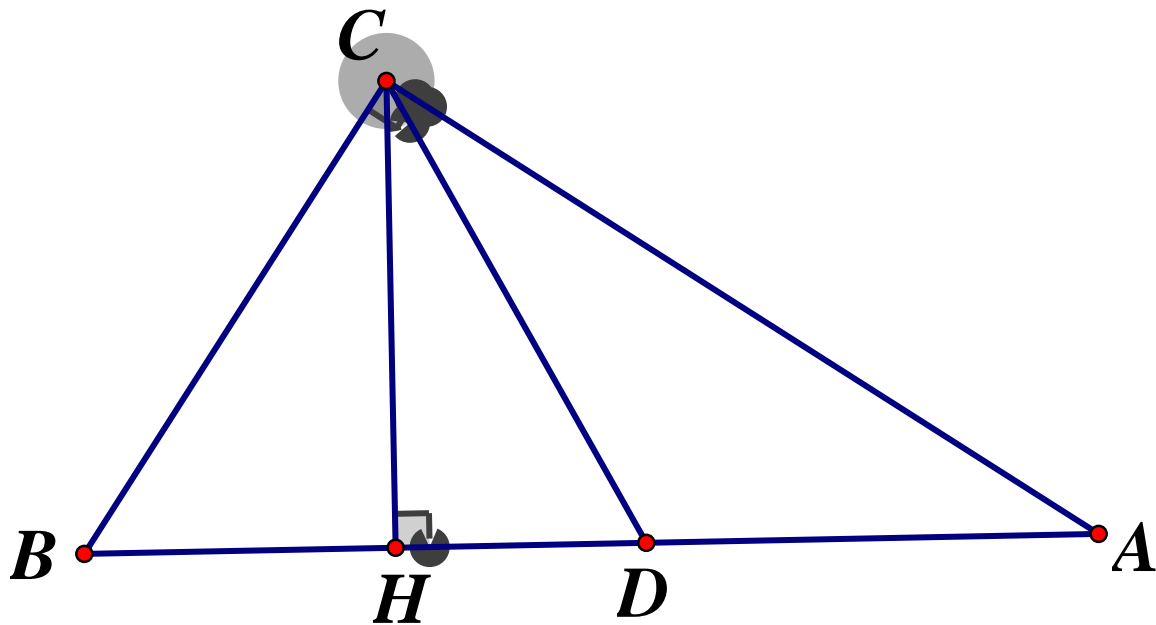
Từ (1) và (2) suy ra $PB = PC = BC$. Vậy $\triangle PBC$ đều

Bài 4: Cho tam giác ABC có $BC = 15\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$, $AB = 25\text{cm}$.

- Tính độ dài đường cao CH của tam giác ABC
- Gọi CD là đường phân giác của $\triangle ACH$. Chứng minh $\triangle BCD$ cân

$$\text{Chứng minh: } BC^2 + CD^2 + BD^2 = 3CH^2 + 2BH^2 + DH^2$$

Lời giải



a) Dùng định lý Pytago đảo chứng minh được: $\triangle ABC$ vuông tại C

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CH \Rightarrow CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12 \text{ cm}$.

b) Dễ dàng tính được: $HA = 16 \text{ cm}, BH = 9 \text{ cm}$

CD là tia phân giác của $\triangle ACH$ nên suy ra $AD = 10 \text{ cm}, HD = 6 \text{ cm}$.

Do đó: $BC = BD (= 15 \text{ cm})$

Vậy $\triangle BDC$ cân tại B

c) Xét các \triangle vuông: CBH, CAH

Ta có:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \text{ (Pytago)}$$

$$CD^2 = DH^2 + CH^2 \text{ (Pytago)}$$

$$BD^2 = BC^2 = BH^2 + CH^2 \text{ (Pytago)}$$

$$\text{Từ đó suy ra } BC^2 + CD^2 + BD^2 = 3CH^2 + 2BH^2 + DH^2$$

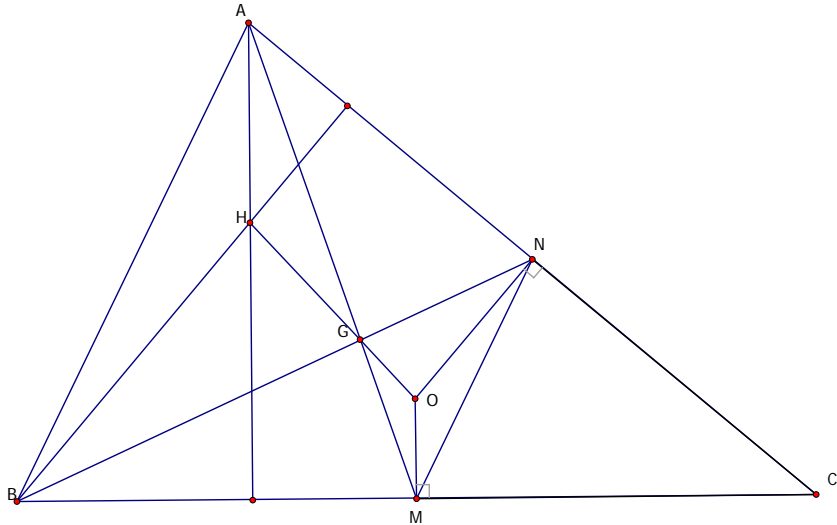
Bài 5: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các điểm M, N thứ tự là trung điểm của BC và AC. Các đường trung trực của BC và AC cắt nhau tại O. Qua A kẻ đường thẳng song song với OM, qua B kẻ đường thẳng song song với ON, chúng cắt nhau tại H.

d) Nối MN, $\triangle AHB$ đồng dạng với tam giác nào?

e) Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, chứng minh $\triangle AHG$ đồng dạng với $\triangle MOG$?

f) Chứng minh ba điểm H, O, G thẳng hàng?

Lời giải

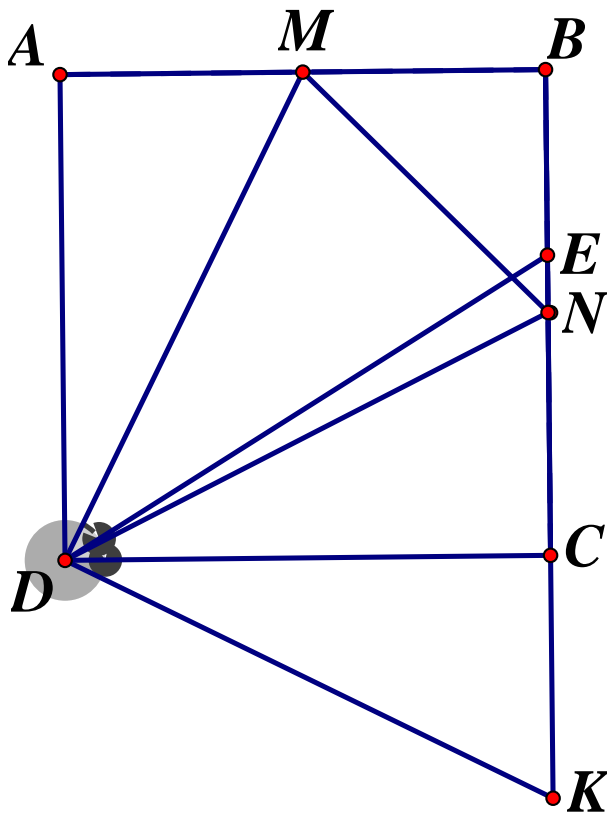
ý a : 2 điểm		
Chứng minh đọc 1 cặp góc bằng nhau	1,0	
Nêu đọc cặp góc bằng nhau còn lại	0,5	
Chỉ ra đọc hai tam giác đồng dạng	0,5	
ý b : 2 điểm		
Từ hai tam giác đồng dạng ở ý a suy ra đúng tỉ số cặp cạnh AH / OM	0,5	
Tính đúng tỉ số cặp cạnh AG / GM	0,5	
Chỉ ra đọc cặp góc bằng nhau	0,5	
Kết luận đúng 2 tam giác đồng dạng	0,5	
ý c : 2 điểm		
- Từ hai tam giác đồng dạng ở câu b suy ra góc AGH = góc MGO (1)	0,5	
- Mặt khác góc MGO + Góc AGO = 180 ⁰ (2)	0,5	
- Từ (1) và (2) suy ra góc AGH + góc AGO = 180 ⁰	0,5	
- Do đó H, G, O thẳng hàng	0,5	

Bài 6: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và BC .

c) Tính diện tích tứ giác $AMND$.

d) Phân giác góc CDM cắt BC tại E . Chứng minh $DM = AM + CE$

Lời giải



$$a) S_{AMND} = S_{ABCD} - S_{BMN} - S_{NCD}$$

Ta có: $\triangle BMN$ vuông tại B có $BM = BN = \frac{a}{2} = CN$

$$\triangle NCD \text{ vuông tại C có } DC = a \Rightarrow S_{AMND} = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

b) Trên tia đối của tia CB lấy điểm K sao cho $CK = AM$.

Dễ dàng chứng minh được $\triangle ADM = \triangle CDK$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = CK; DM = DK$ (1)

$$\text{và } \widehat{ADM} = \widehat{CDK}$$

$$\text{Ta có: } \widehat{ADE} = \widehat{ADM} + \widehat{MDE} = \widehat{EDC} + \widehat{CDK} = \widehat{EDK} \text{ (vì } \widehat{MDE} = \widehat{EDC} \text{)}$$

Mặt khác $\widehat{ADE} = \widehat{DEK}$ (so le trong)

$$\Rightarrow \widehat{EDK} = \widehat{DEK}. \text{ Vậy } \triangle DKE \text{ cân tại K} \Rightarrow DK = KE = CK + CE \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $DM = AM + CE$

Bài 7:

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, BD, CE là hai đường cao của tam giác cắt nhau tại điểm H.

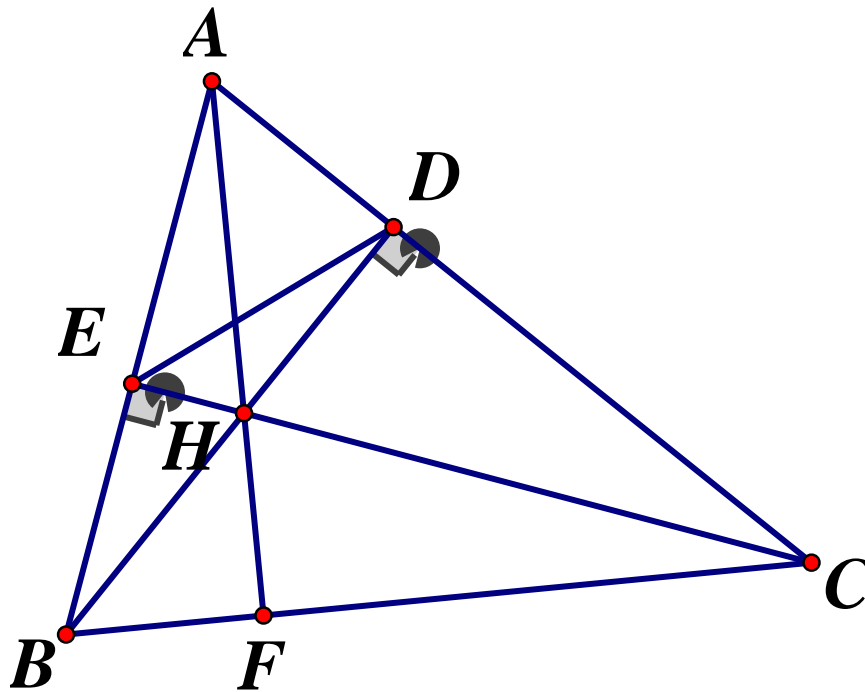
Chứng minh rằng:

$$d) HD.HB = HE.HC$$

$$e) \triangle HDE \sim \triangle HCB$$

$$f) BH.BD + CH.CE = BC^2$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

B.Lời giải**Bài 1: .****Lời giải**

- a) Chứng minh $\triangle BHE \sim \triangle CHD$ vì $\widehat{E} = \widehat{D} = 90^\circ$; $\widehat{EBH} = \widehat{DCH}$ (cùng phụ góc A)

$$\Rightarrow \frac{HE}{HD} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow HD \cdot HB = HE \cdot HC$$

- b) Từ $\frac{HE}{HD} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow \frac{HE}{HB} = \frac{HD}{HC}$ và $\widehat{EHD} = \widehat{CHB}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle HDE \sim \triangle HCB$

- c) Vì H là giao điểm của hai đường cao BD và CE nên H là trực tâm của tam giác $\Rightarrow AH$ là đường cao thứ ba. Gọi F là giao điểm của AH với BC.

Ta có: $AF \perp BC$

$$\triangle BHF \sim \triangle BCD (g.g) \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BF}{BD} \Rightarrow BH \cdot BD = BF \cdot BC (*)$$

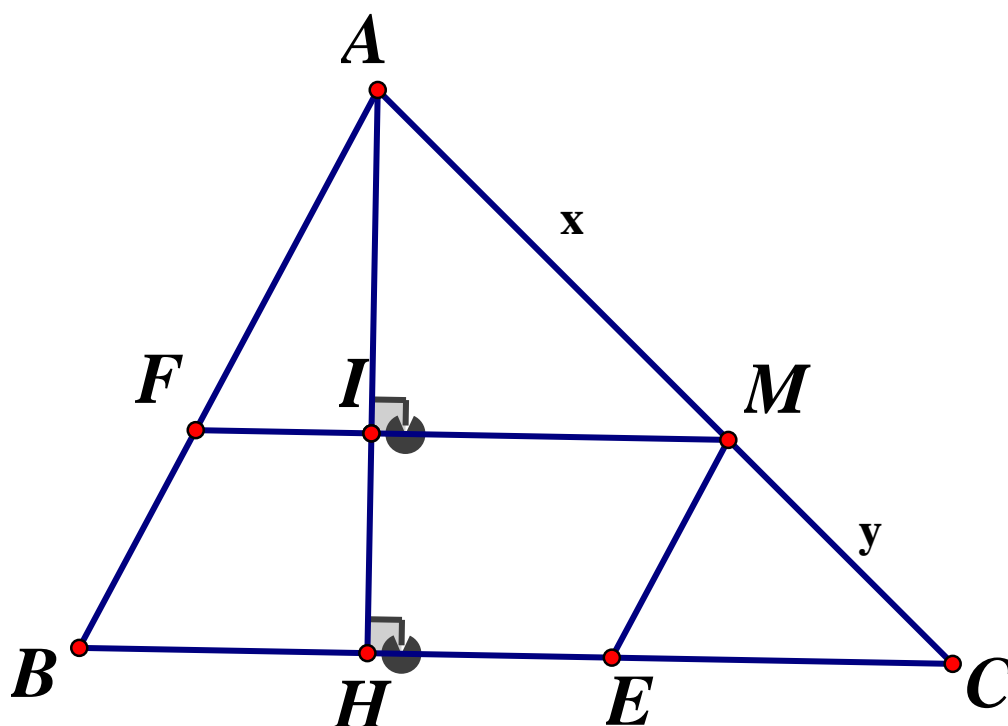
$$\triangle CHF \sim \triangle CBE (g.g) \Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CF}{CE} \Rightarrow CH \cdot CE = CF \cdot BC (**)$$

Cộng theo vế (*), (**): $BH \cdot BD + CH \cdot CE = BC \cdot (BF + CF) = BC^2$

Bài 8:

Cho tam giác ABC. Từ điểm M thuộc cạnh AC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB và BC cắt BC tại E và AB tại F. Hãy xác định vị trí của M trên AC sao cho hình bình hành BEMF có diện tích lớn nhất

Lời giải



Ta có tứ giác $BEMF$ là hình bình hành. Kẻ $AH \perp BC$, AH cắt MF tại I
 $AI \perp MF$. Gọi S' là diện tích hình bình hành $BEMF$ và S là diện tích tam giác ABC

$$S' = IH \cdot MF \text{ và } S = \frac{1}{2} BC \cdot AH$$

$$\text{Ta có: } \frac{S'}{S} = \frac{IH \cdot MF}{\frac{1}{2} BC \cdot AH} = 2 \frac{MF}{BC} \cdot \frac{IH}{AH} \quad (1)$$

Đặt $AM = x, MC = y$

$$\text{Vì } MF \parallel BC \text{ nên ta có: } \frac{MF}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{x}{x+y}; \frac{IH}{AH} = \frac{MC}{AC} = \frac{y}{x+y}$$

$$\text{Thay vào (1) ta có: } \frac{S'}{S} = 2 \cdot \frac{x}{x+y} \cdot \frac{y}{x+y} = \frac{2xy}{(x+y)^2}$$

Vì x, y là hai số không âm nên ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$

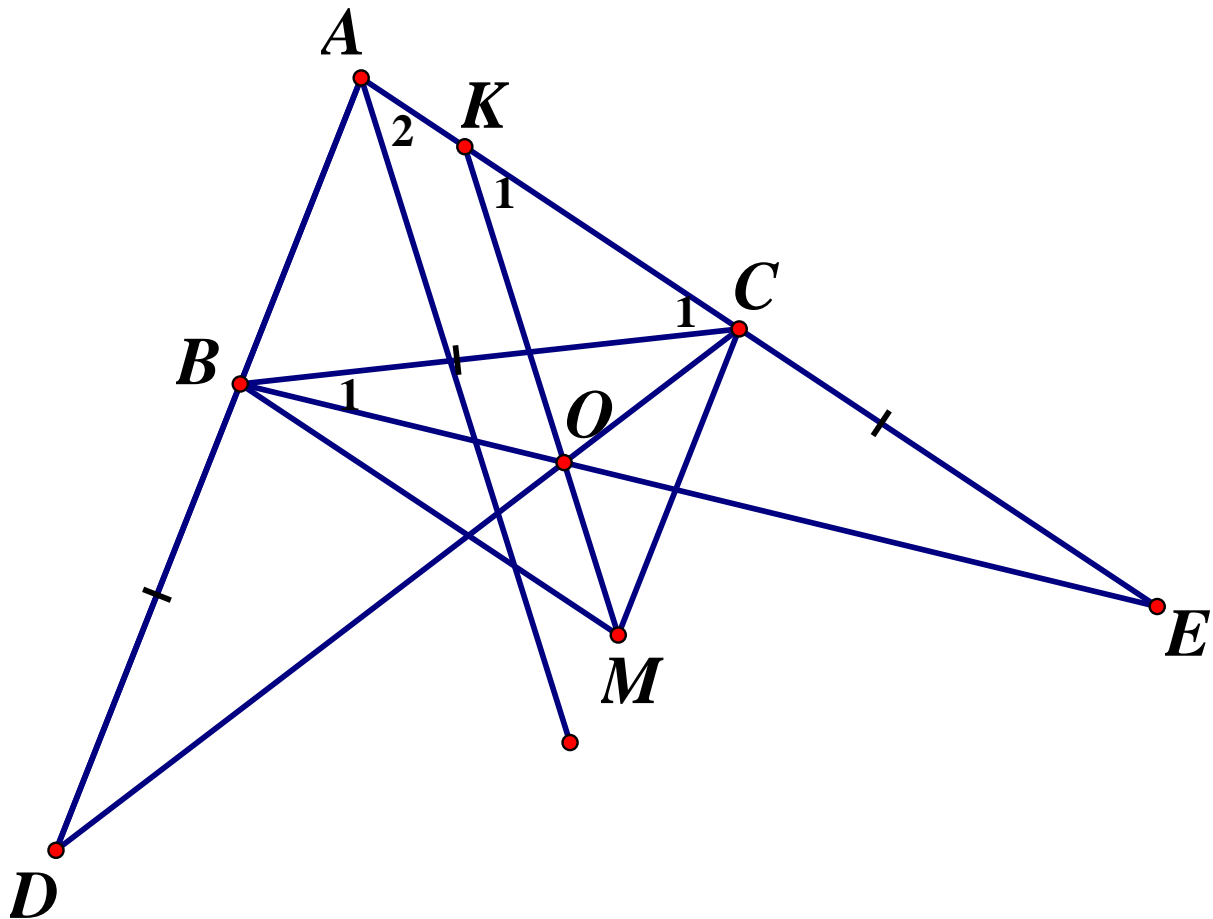
$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{2xy}{(x+y)^2} \leq \frac{2xy}{4xy} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S'}{S} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow S' \leq \frac{1}{2} S$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y$, tức là khi M là trung điểm cạnh AC thì diện tích hình bình hành $BEMF$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{2} S$ không đổi

Bài 9:

Cho tam giác ABC . Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc tia đối của các tia BA, CA sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD . Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A , đường thẳng này cắt AC ở K . Chứng minh rằng $AB = CK$

Lời giải



Vẽ hình bình hành $ABMC$ ta có: $AB = CM$

Để chứng minh $AB = KC$ ta cần chứng minh $KC = CM$.

Thật vậy, xét tam giác BCE có $BC = CE$ (gt) $\Rightarrow \triangle BCE$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{E}$

Vì góc C_1 là góc ngoài của tam giác BCE

$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{B}_1 + \widehat{E} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \frac{1}{2} \widehat{C}_1$ mà $AC \parallel BM$ (ta vẽ) $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{CBM} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \frac{1}{2} \widehat{CBM}$ nên BO là

tia phân giác của \widehat{CBM} . Hoàn toàn tương tự ta có CD là tia phân giác của \widehat{BCM} . Trong tam giác BCM , OB, CO, MO đồng quy tại O

$\Rightarrow MO$ là tia phân giác của \widehat{CMB}

Mà $\widehat{BAC}, \widehat{BMC}$ là hai góc đối của hình bình hành $BMCA \Rightarrow MO \parallel$ với tia phân giác của góc A theo giả thiết tia phân giác của góc A còn song song với OK

$\Rightarrow K, O, M$ thẳng hàng

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta lại có: $\widehat{M_1} = \frac{1}{2}\widehat{BMC}$ (cmt); $\widehat{A} = \widehat{M} \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{A_2}$ mà $\widehat{A_2} = \widehat{K_1}$ (2 góc đồng vị)

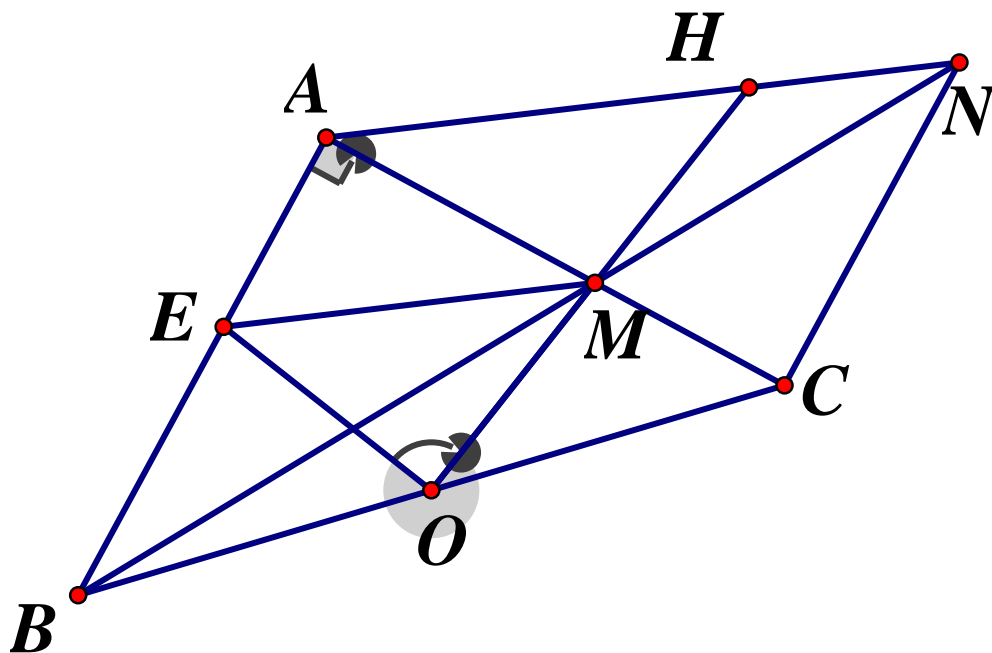
$\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{M_1} \Rightarrow \triangle CKM$ cân tại C $\Rightarrow CK = CM$.

Kết hợp $AB = CM \Rightarrow AB = CK$ (đpcm)

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên cạnh AC lấy điểm M bất kỳ, sao cho M khác A và C. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AE = CM$

- Gọi O là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh $\triangle OEM$ vuông cân
- Đường thẳng qua A và song song với ME , cắt tia BM tại N. Chứng minh: $CN \perp AC$
- Gọi H là giao điểm của OM và AN . Chứng minh rằng tích $AH \cdot AN$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên cạnh AC.

Lời giải



a. Vì tam giác ABC vuông cân tại A và O là trung điểm của cạnh BC nên AO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC. Suy ra $OA = OC = OB$ và $\widehat{OAB} = \widehat{ACO} = 45^\circ$

Xét $\triangle OEA$ và $\triangle OMC$ có: $OA = OC$; $\widehat{OAB} = \widehat{ACO} = 45^\circ$; $AE = CM$ (gt)

$\Rightarrow \triangle OEA = \triangle OMC$ (c.g.c) $\Rightarrow OE = OM$ & $\widehat{EOA} = \widehat{MOC}$ (1)

Vì AO là đường trung tuyến của tam giác cân ABC nên AO cũng là đường cao

$\Rightarrow AO \perp BC \Rightarrow \widehat{AOM} + \widehat{MOC} = \widehat{AOC} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{AOM} + \widehat{AOE} = \widehat{EOM} = 90^\circ$

Vì $OE = OM$ & $\widehat{EOM} = 90^\circ$ nên $\triangle OEM$ vuông cân tại O

b. Vì $ME \parallel AN$ nên theo định lý Ta – let ta có: $\frac{BM}{MN} = \frac{BE}{EA}$ (3)

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$, mà $AE = CM$ nên $BE = AM$

Do đó, ở (3) ta thay BE bởi AM , thay EA bởi MC ta được:

$$\frac{BM}{MN} = \frac{AM}{MC} \quad (4) \Rightarrow AB \parallel CN \text{ (Theo định lý Ta let đảo)}$$

Mà $AB \perp AC \Rightarrow CN \perp AC$

c. Từ $ME \parallel AN \Rightarrow \widehat{OME} = \widehat{OHA}$ (cặp góc đồng vị)

Mà $\widehat{OME} = 45^\circ$ (vì $\triangle OEM$ vuông cân tại O) suy ra $\widehat{OHA} = 45^\circ = \widehat{ACB}$

Hay $\widehat{MHA} = \widehat{ACB}$. Kết hợp với $\widehat{OMC} = \widehat{AHM}$ (đối đỉnh) (1)

$$\Rightarrow \frac{OM}{AM} = \frac{MC}{MH}, \text{ kết hợp } \widehat{OMA} = \widehat{CMH} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle OMA \sim \triangle CMH (c.g.c) \Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{MHC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AHC} = \widehat{MHA} + \widehat{MHC} = 90^\circ$, suy ra $CH \perp AN$

Xét tam giác AHC và tam giác CAN sẽ đồng dạng theo trường hợp góc góc

$$\Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{AC}{AN} \Rightarrow AH \cdot AN = AC \cdot HC \text{ không đổi}$$

Bài 11: Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H

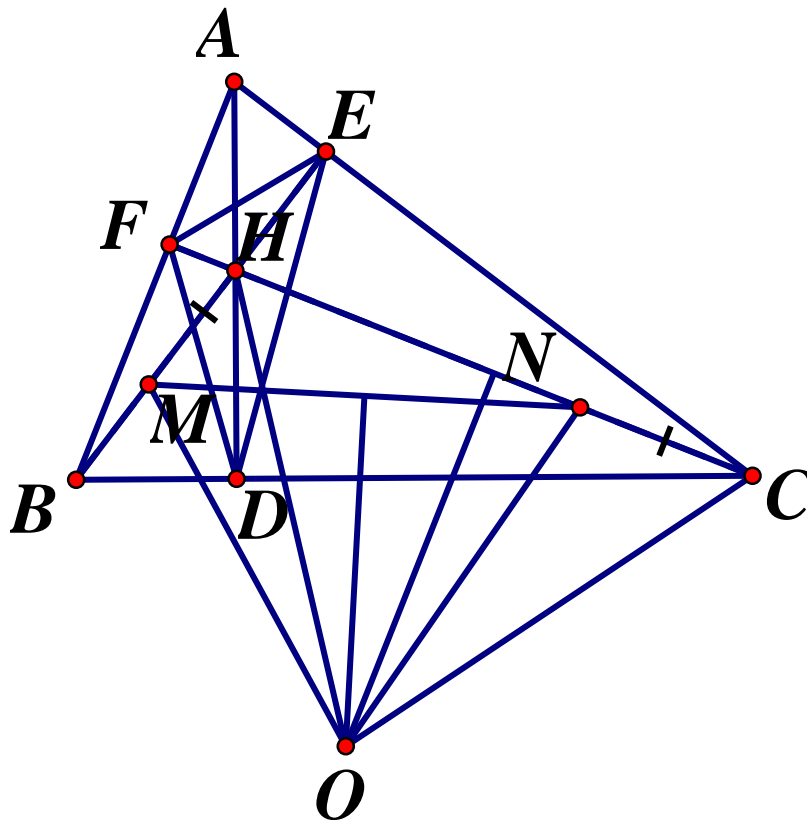
a) Tính tổng $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}$

b) Chứng minh : $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$

c) Chứng minh: H cách đều ba cạnh tam giác DEF

d) Trên các đoạn HB, HC lấy các điểm M, N tùy ý sao cho $HM = CN$. Chứng minh đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định

Lời giải



a) Trước hết chứng minh $\frac{HD}{AD} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$

Tương tự ta có: $\frac{HE}{BE} = \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}}; \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$

Nên $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = 1 \Rightarrow \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$

b) Trước hết chứng minh $\triangle BDH \sim \triangle BEC \Rightarrow BH \cdot BE = BD \cdot BC$

Và $\triangle CDH \sim \triangle CFB \Rightarrow CH \cdot CF = CD \cdot CB$

$\Rightarrow BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC \cdot (BD + CD) = BC^2$ (đpcm)

c) Chứng minh $\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

Và $\triangle CDE \sim \triangle CAB \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CBA} \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{CED}$

Mà $EB \perp AC$ nên EB là phân giác của góc DEF

Tương tự : DA, FC là phân giác của các góc EDF và DFE

Vậy H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

Nên H cách đều ba cạnh của tam giác DEF (đpcm)

d) Gọi O là giao điểm của các đường trung trực của hai đoạn MN và HC , ta có

$$\Delta OMH = \Delta ONC \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{OHM} = \widehat{OCN} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác ta cũng có } \Delta OCH \text{ cân tại } O \text{ nên } \widehat{OHC} = \widehat{OCH} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{OHC} = \widehat{OCN} \Rightarrow HO$ là phân giác của góc BHC

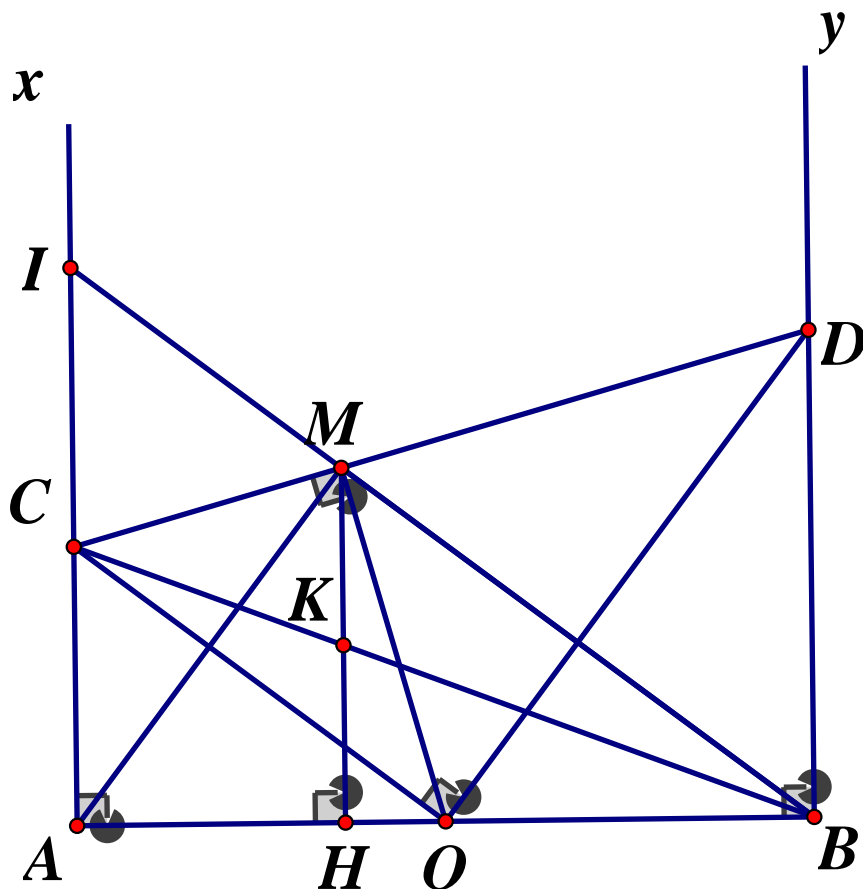
Vậy O là giao điểm của trung trực đoạn HC và phân giác của BHC nên O là điểm cố định

Hay trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định là O .

Bài 12: Cho O là trung điểm của đoạn AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D .

- Chứng minh $AB^2 = 4.AC.BD$
- Kẻ OM vuông góc CD tại M . Chứng minh $AC = CM$
- Từ M kẻ MH vuông góc AB tại H . Chứng minh BC đi qua trung điểm MH .

Lời giải



- Chứng minh $\Delta OAC \sim \Delta DBO$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OA}{DB} = \frac{AC}{OB} \Rightarrow OA.OB = AC.BD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = AC.BD \Rightarrow AB^2 = 4.AC.BD (dfcm)$$

b) Theo câu a ta có $\triangle OAC \sim \triangle DBO (g.g) \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OB}$

Mà $OA = OB \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{OA}$

Chứng minh $\triangle OCD \sim \triangle ACO (c.g.c) \Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ACO}$

Chứng minh $\triangle OAC = \triangle OMC (ch - gn) \Rightarrow AC = MC (dfcm)$

c) Ta có: $\triangle OAC = \triangle OMC \Rightarrow OA = OM; CA = CM \Rightarrow OC$ là trung trực của AM
 $\Rightarrow OC \perp AM$

Mặt khác: $OA = OM = OB \Rightarrow \triangle AMB$ vuông tại M

$\Rightarrow OC // BM$ (Vì cùng vuông góc với AM) hay $OC // BI$

Chứng minh được C là trung điểm của AI

Do $MH // AI$ theo hệ quả Ta let ta có: $\frac{MK}{IC} = \frac{BK}{BC} = \frac{KH}{AC}$

Mà $IC = AC \Rightarrow MK = HK \Rightarrow BC$ đi qua trung điểm của MH (đpcm)

Bài 13: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

e) Chứng minh rằng: $BD.DC = DH.DA$

f) Chứng minh rằng: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.

g) Chứng minh rằng: H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF

h) Gọi M, N, P, Q, I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $BC, CA, AB,$

EF, FD, DE . Chứng minh rằng ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm

Lời giải

a) Chỉ ra được $\triangle BDH \sim \triangle ADC (g.g) \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow BD.DC = DH.DA$

b) Ta có: $\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}HD.BC}{\frac{1}{2}AD.BC} = \frac{HD}{AD}$

$$\text{Tương tự } \frac{HE}{BE} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}; \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Do đó: } \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$$

$$\text{c) Chứng minh được } \triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$$

$$\text{Tương tự: } \widehat{DEC} = \widehat{ABC}. \text{ Do đó: } \widehat{AEF} = \widehat{DEC}$$

$$\text{Mà } \widehat{AEF} + \widehat{HEF} = \widehat{DEC} + \widehat{HED} = 90^\circ \text{ nên } \widehat{HEF} = \widehat{HED}$$

$\Rightarrow EH$ là phân giác ngoài của góc EFD

Do đó H là giao các đường phân giác của tam giác DEF

$$\text{d) Do } \triangle BEC \text{ vuông tại E, M là trung điểm BC nên } EM = \frac{1}{2}BC \text{ (trung tuyến ứng với cạnh}$$

$$\text{huyền), Tương tự: } FM = \frac{1}{2}BC$$

Do đó: $\triangle EMF$ cân tại M, mà Q là trung điểm EF nên $MQ \perp EF$

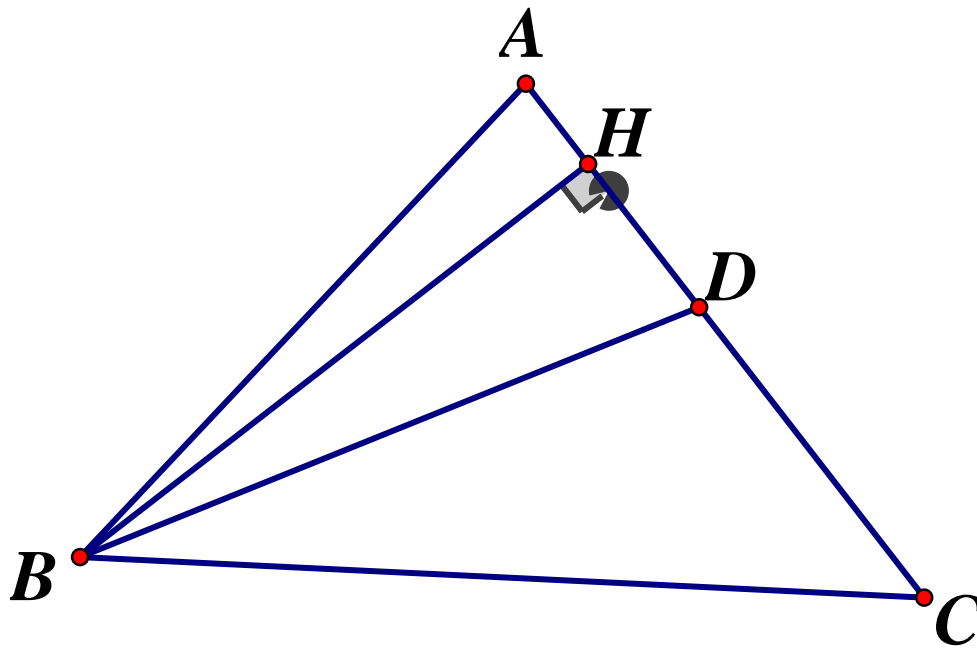
$\Rightarrow MQ$ là đường trung trực của EF hay MQ là đường trung trực của tam giác DEF .

Hoàn toàn tương tự, chứng minh được NI và PK cũng là đường trung trực của tam giác DEF nên ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm.

Bài 14: Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = b; BC = a$. Đường phân giác BD của tam giác ABC có độ dài bằng cạnh bên của tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a+b)^2}.$$

Lời giải



Vẽ BH là đường cao của tam giác ABC

Tam giác BAD cân tại B ($BA = BD$) có BH là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

$$\Rightarrow AH = \frac{AD}{2}$$

Tam giác ABC có BD là đường phân giác, ta có:

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{DA}{b} = \frac{DC}{a} = \frac{DA + DC}{a + b} = \frac{AC}{a + b} = \frac{b}{a + b} \Rightarrow DA = \frac{b^2}{a + b}$$

Tam giác HAB vuông tại H, theo định lý Pytago ta có:

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow BH^2 = b^2 - \frac{AD^2}{4} \quad (1)$$

Tam giác HBC vuông tại H, theo định lý Pytago, ta có:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow BH^2 = BC^2 - (AC - AH)^2 = a^2 - \left(b - \frac{AD}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow BH^2 = a^2 - b^2 + b \cdot AD - \frac{AD^2}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$b^2 - \frac{AD^2}{4} = a^2 - b^2 + b \cdot AD - \frac{AD^2}{4} \Rightarrow b^2 - a^2 = b \cdot AD - b^2$$

$$\Rightarrow (b + a)(b - a) = \frac{-ab^2}{a + b} \Rightarrow \frac{a - b}{ab} = \frac{b}{(a + b)^2} \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{(a + b)^2}$$

Vậy bài toán được chứng minh

Bài 15: Cho hình thang $ABCD$ (đáy lớn CD). Gọi O là giao điểm của AC và BD ; các đường kẻ từ A và B lần lượt song song với BC và AD cắt các đường chéo BD và AC tương ứng ở F và E . Chứng minh:

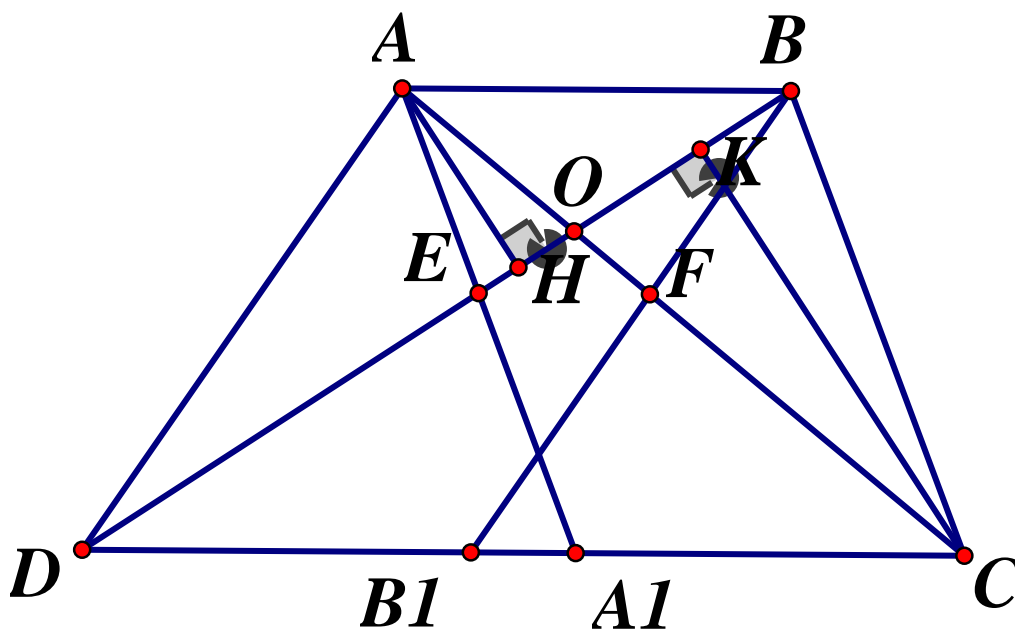
$$EF // AB$$

c) $AB^2 = EF \cdot CD$

d) Gọi S_1, S_2, S_3 và S_4 theo thứ tự là diện tích của tam giác OAB, OCD, OAD và OBC .

Chứng minh $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$

Lời giải



a) Do $AE // BC$ và $BF // AD \Rightarrow \begin{cases} \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC} \\ \frac{OF}{OA} = \frac{OB}{OD} \end{cases}$

Mặt khác $AB // CD$ ta lại có: $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ nên $\frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OA} \Rightarrow EF // AB$

b) $ABCA_1$ và ABB_1D là hình bình hành $\Rightarrow A_1C = DB_1 = AB$

Vì $EF // AB // CD$ nên $\frac{EF}{AB} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow AB^2 = EF \cdot CD$

c) Ta có: $S_1 = \frac{1}{2} AH \cdot OB; S_2 = \frac{1}{2} CK \cdot OD; S_3 = \frac{1}{2} AH \cdot OD; S_4 = \frac{1}{2} OK \cdot OD$

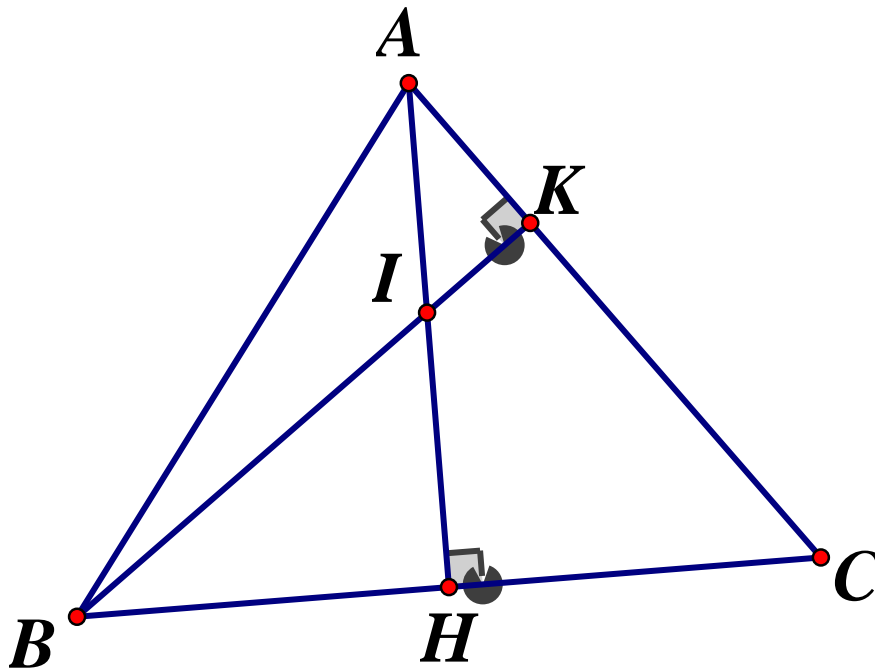
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_4} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot OB}{\frac{1}{2} \cdot CK \cdot OB} = \frac{AH}{CK}; \frac{S_3}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot OD}{\frac{1}{2} \cdot CK \cdot OD} = \frac{AH}{CK}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_4} = \frac{S_3}{S_2} \Rightarrow S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$$

Bài 16: Cho tam giác ABC (cân tại A) vẽ đường cao AH, đường cao BK

- Tìm các cặp tam giác vuông đồng dạng ? Giải thích tại sao ?
- Cho $AH = 10cm, BK = 12cm$. Hãy tính độ dài các cạnh của tam giác ABC
- Gọi I là giao điểm của AH và BK, hãy tìm điều kiện của tam giác ABC để tam giác BCI là tam giác đều ?

Lời giải



- Các cặp tam giác vuông đồng dạng là :

$$\triangle ABH \sim \triangle ACH \text{ (vì có } \widehat{BAH} = \widehat{CAH})$$

$$\triangle ABH \sim \triangle BCK \text{ (vì có } \widehat{ABH} = \widehat{BCK})$$

$$\triangle ACH \sim \triangle BCK \text{ (vì cùng đồng dạng với } \triangle ABH)$$

$$\text{b) Từ } \triangle ABH \sim \triangle BCK \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{BK} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2BH} = \frac{5}{6} \Rightarrow BH = \frac{3}{5} AB \text{ (H là chân đường cao, trung tuyến)}$$

Ta lại có: $AB^2 - BH^2 = AH^2$ (Định lý Pytago)

$$\Rightarrow AB^2 - \left(\frac{3}{5}AB\right)^2 = 10^2 \Rightarrow AB = 12,5cm$$

$$\Rightarrow AC = AB = 12,5cm \quad ; BC = 15cm$$

c) Chỉ ra được $\triangle BIC$ cân tại I

$\triangle BIC$ cân tại I trở thành tam giác đều khi $\widehat{IBC} = 60^\circ$

$$\text{Mà } \widehat{IBC} = \widehat{HAB} \Rightarrow \widehat{HAB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

Vậy để $\triangle BIC$ là tam giác đều thì $\triangle ABC$ phải cân tại A và $\widehat{A} = 120^\circ$

Bài 17: Cho hình vuông ABCD cạnh a và điểm N trên cạnh AB. Cho biết tia CN cắt tia DA tại E, tia Cx vuông góc với tia CE cắt tia AB tại F. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF.

- Chứng minh $CE = CF$;
- Chứng minh B, D, M thẳng hàng;
- Chứng minh $\triangle EAC$ đồng dạng với $\triangle MBC$;
- Xác định vị trí điểm N trên cạnh AB sao cho tứ giác ACFE có diện tích gấp 3 lần diện tích hình vuông ABCD.

Lời giải

a) Chứng minh được

$$\triangle CDE = \triangle CBF \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow CE = CF.$$

b) Chỉ ra $AM = MC = \frac{1}{2}EF \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực BD của đoạn AC. Vậy B, D, M thẳng hàng

c) Chỉ ra $\angle ACE = \angle BCM \left. \begin{array}{l} \\ \text{Chỉ ra } \angle CAE = \angle CBM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle EAC \sim \triangle MBC \text{ (g.g)}.$

d) Đặt $BN = x \Rightarrow AN = a - x$.

$$*) \text{Tính } S_{AEFC} = S_{ACE} + S_{ECF} = \frac{1}{2}DC \cdot AE + \frac{1}{2}CE^2$$

- Tính AE: Lý luận để có

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AN}{DC} \Leftrightarrow \frac{AE}{AE + AD} = \frac{AN}{DC} \Leftrightarrow \frac{AE}{AE + a} = \frac{a - x}{a} \Leftrightarrow AE \cdot a = AE(a - x) + a(a - x)$$

$$\Leftrightarrow AE = \frac{a(a - x)}{x}$$

- Tính CE^2 : Lý luận để có $CE^2 = CD^2 + DE^2 = a^2 + (a + AE)^2$

$$\Rightarrow CE^2 = a^2 + \left(a + \frac{a(a-x)}{x}\right)^2 = a^2 + \frac{a^4}{x^2}$$

$$\text{Do đó } S_{AEFC} = \frac{a^3(a+x)}{2x^2}$$

$$*) \text{ Tính } S_{ABCD} = a^2.$$

Lý luận với $S_{AEFC} = 3S_{ABCD}$ để có

$$6x^2 - ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - a)(3x + a) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \text{ (vì } a, x > 0).$$

KL: N là trung điểm của AB thì $S_{AEFC} = 3S_{ABCD}$.

Bài 18: Hình vuông $ABCD$ có E và F thuộc tia đối CB và DC sao cho $DF = BE$. Từ E kẻ đường song song với AF và từ F kẻ đường song song với AE. Hai đường này giao tại I. Tứ giác $AFIE$ là hình gì ?

Lời giải

Ta có AE song song với FI (gt); AF song song với EI (gt)

$\Rightarrow AFEI$ là hình bình hành (các cặp cạnh đối song song) (1)

Chứng minh $\triangle ADF = \triangle ABE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FAD} = \widehat{BAE}$

$$\text{Mà } \widehat{BAE} + \widehat{DAE} = 90^\circ \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{FAD} + \widehat{DAE} = 90^\circ \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $AFIE$ là hình chữ nhật

Ta lại có : $AF = AE$ (vì hai tam giác bằng nhau theo cmt) nên $AFIE$ là hình vuông.

Bài 19:

19.1: Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là một điểm trên cạnh BC. Qua A kẻ tia Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F. Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD ở K. Đường thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G. Chứng minh:

a) Tứ giác EGFK là hình thoi.

b) $AF^2 = FK.FC$

c) Chu vi tam giác EKC không đổi khi E thay đổi trên BC.

19.2: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$ và đường phân giác của góc A là $AD = d$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{d}$.

Lời giải

19.1a) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADF$ có: $\widehat{ABE} = \widehat{ADF} (=90^\circ)$ $AB = AD$ ($ABCD$ là hình vuông)

$\widehat{BAE} = \widehat{DAF}$ (cùng phụ \widehat{DAE}) Do đó $\triangle ABE = \triangle ADF$ (g-c-g) $\Rightarrow AE = AF$

$\Rightarrow \triangle AEF$ vuông cân tại A. Mà AI là trung tuyến của ... \Rightarrow AI cũng là đường cao của $\triangle AEF \Rightarrow$ AI \perp EF hay GK \perp EF

Xét $\triangle IEG$ và $\triangle IFK$ có:

$$\widehat{GIE} = \widehat{KIF} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$IE = IF \text{ (gt)}$$

$$\widehat{IEG} = \widehat{IFK} \text{ (so le trong)}$$

$$\text{Do đó } \triangle IEG = \triangle IFK \text{ (g-c-g)}$$

$$\Rightarrow IG = IK$$

Tứ giác EGFK có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường ($IE=IF$ (gt); $IG=IK$ (cmt)) đồng thời vuông góc với nhau ($GK \perp EF$) nên là hình thoi.

b) Xét $\triangle AFK$ và $\triangle CAF$ có: $\widehat{KAF} = \widehat{FCA} (=45^\circ)$

\hat{F} : góc chung

$$\text{Do đó } \triangle AFK \sim \triangle CAF \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{CF} = \frac{KF}{AF} \Rightarrow AF^2 = KF \cdot CF.$$

c) Đặt a là độ dài cạnh hình vuông ABCD \Rightarrow a không đổi

$$\triangle ABE = \triangle ADF \text{ (theo a)} \Rightarrow BE = DF$$

Ta có: EGFK là hình thoi (theo a) nên $KE = KF = KD + DF = KD + BE$

Chu vi $\triangle EKC$ là: $C_{EKC} = KC + EK + EC = KC + KD + BE + CE = CD + BE = 2a$ không đổi.

19.2:

Kẻ $DE \perp AB, DF \perp AC, E \in AB, F \in AC$

Dễ thấy AEDF là hình chữ nhật

Mà AD là tia phân giác \widehat{EAF}

Nên AEDF là hình vuông

Biến đổi qua Pi-ta-go ta được:

$$DE = DF = \frac{AD}{\sqrt{2}}$$

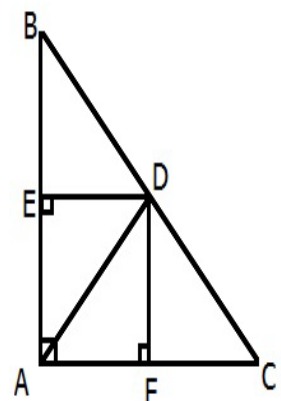
Vì $AB \parallel DF$ (cùng vuông góc với AC)

$$\Rightarrow \triangle DFC \sim \triangle BAC \text{ (tính chất đồng dạng)}$$

$$\Rightarrow \frac{DF}{AB} = \frac{CD}{BC} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự chứng minh } \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Cộng hai vế tương ứng của (1) và (2) ta được: $\frac{DF}{AB} + \frac{DE}{AC} = \frac{CD+BD}{BC}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{AD}{\sqrt{2}}}{AB} + \frac{\frac{AD}{\sqrt{2}}}{AC} = \frac{BC}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{d} \text{ (đpcm)}$$

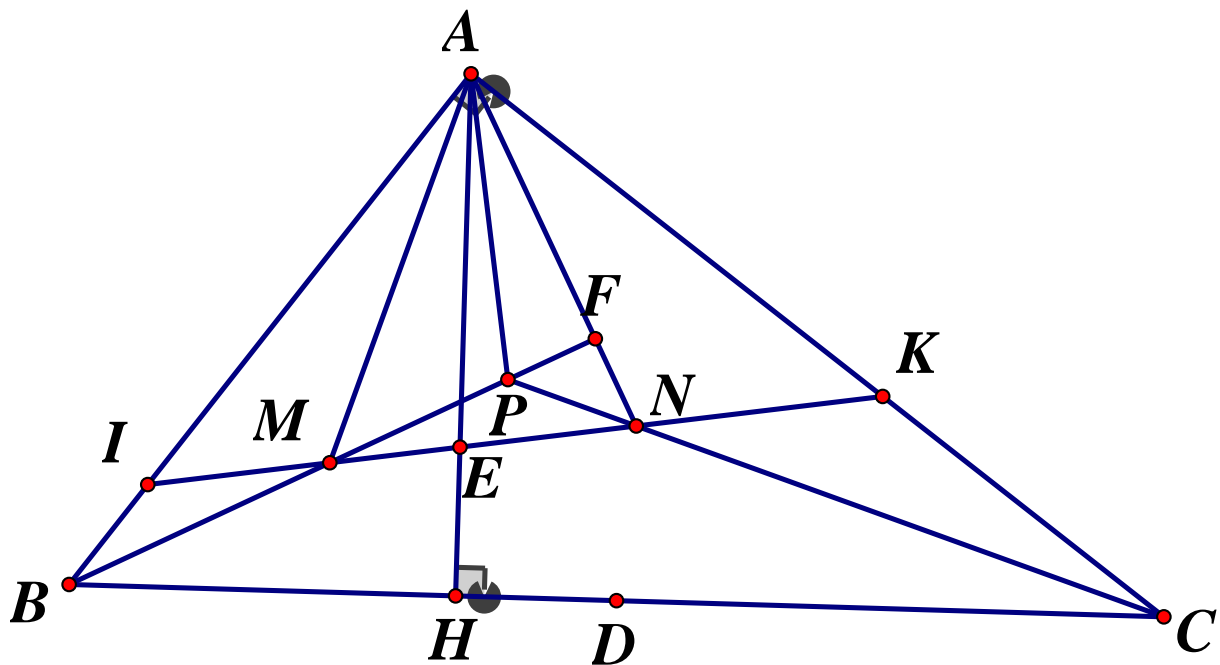
Bài 20: Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác AHB và AHC. MN cắt AB, AH, AC lần lượt tại I, E, K

d) Chứng minh : BM vuông góc với AN

e) Chứng minh : $ME.NK = MI.NE$

f) Biết diện tích của tam giác ABC là S. Tính diện tích lớn nhất của tam giác AIK theo S.

Lời giải



a) Gọi F là giao điểm của BM và AN

$$\widehat{ABH} = \widehat{HAC} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BAH})$$

$$\widehat{ABF} = \widehat{CAN} \left(\widehat{ABF} = \frac{1}{2} \widehat{ABH}; \widehat{CAN} = \frac{1}{2} \widehat{BAH} \right)$$

$$\widehat{ABF} + \widehat{BAF} = 90^\circ \text{ (vì } \widehat{CAN} + \widehat{BAF} = 90^\circ)$$

$$\Delta ABF \text{ vuông tại F} \Rightarrow BM \perp AN$$

b) Gọi P là giao điểm của BM và CN $\Rightarrow AP$ là phân giác \widehat{BAC} nên AP là phân giác ΔAIK

Chứng minh tương tự câu a ta có: $CN \perp AM$

P là trực tâm $\Delta AMN \Rightarrow AP \perp IK$; AP là đường cao ΔAIK

$\triangle AIK$ vuông cân tại $A \Rightarrow AI = AK$.

Áp dụng tính chất đường phân giác vào $\triangle AIE$ và $\triangle AEK$ ta có:

$$\frac{MI}{ME} = \frac{AI}{AE}; \frac{NK}{NE} = \frac{AK}{AE} \Rightarrow \frac{MI}{ME} = \frac{NK}{NE} \text{ (Do } AI = AK)$$

$$\Rightarrow ME \cdot NK = MI \cdot NE$$

c) Gọi D là trung điểm BC ; $AD = \frac{1}{2}BC$

$$\triangle AMI = \triangle AMH \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AI = AH$$

$$S_{AIK} = \frac{1}{2} AI \cdot AK = \frac{1}{2} AH^2$$

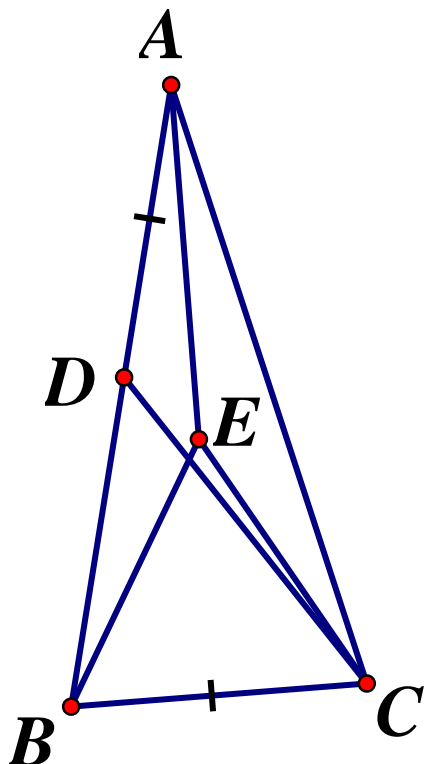
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AH \cdot 2AD = AH \cdot AD$$

$$\text{Vì } AH \leq AD \Rightarrow S_{AIK} \leq \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow S_{AIK} \leq \frac{1}{2} S$$

Vậy diện tích lớn nhất của $\triangle AIK$ là $\frac{1}{2} S$

Bài 21: Cho tam giác ABC cân tại A , có $\hat{A} = 20^\circ$. Trên AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính số đo \widehat{BDC} ?

Lời giải



Ở miền trong tam giác ABC ta dựng tam giác đều BCE khi đó:

$$\triangle ABE = \triangle ACE (c.c.c) \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAE} = 10^\circ$$

$$\widehat{ABE} = 20^\circ \text{ và } \widehat{AEB} = 150^\circ \text{ suy ra}$$

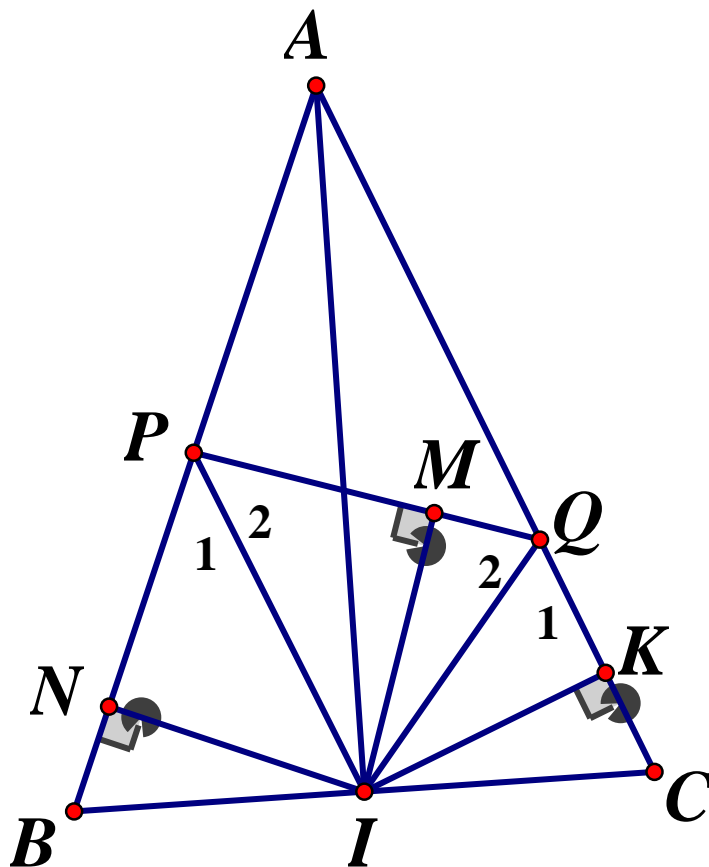
$$\triangle ADC = \triangle BEA (c.g.c) \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BEA} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = 30^\circ$$

Bài 22: Cho tam giác ABC cân tại A, có $BC = a$ không đổi. Gọi I là trung điểm của BC. Lấy $P \in AB$ và $Q \in AC$ sao cho $\widehat{PIQ} = \widehat{ABC}$. Vẽ $IK \perp AC$ ($K \in AC$)

- Chứng minh rằng tích $BP.CQ$ không đổi.
- Chứng minh rằng PI là tia phân giác của góc \widehat{BPQ} , QI là tia phân giác của \widehat{PQC}
- Gọi chu vi tam giác APQ là b , chứng minh rằng $b = 2.AK$. Tính b theo a khi

$$\widehat{BAC} = 60^\circ$$

Lời giải



- Theo tính chất góc ngoài tam giác thì $\widehat{PIC} = \widehat{B} + \widehat{P}_1$

$$\text{Mặt khác, } \widehat{PIC} = \widehat{PIQ} + \widehat{QIC} = \widehat{B} + \widehat{QIC}.$$

Suy ra $\widehat{P_1} = \widehat{QIC} \Rightarrow \Delta BPI \sim \Delta CIQ$

$$\Rightarrow \frac{BP}{BI} = \frac{CI}{CQ} \Rightarrow BP.CQ = BI.CI = \frac{a^2}{4} \text{ không đổi}$$

b) Từ $\Delta BPI \sim \Delta CIQ \Rightarrow \frac{PI}{QI} = \frac{BP}{CI} \Rightarrow \frac{PI}{QI} = \frac{BP}{BI} \Rightarrow \Delta BPI \sim \Delta IPQ \Rightarrow \widehat{P_1} = \widehat{P_2}$

Do đó PI là tia phân giác của \widehat{BPQ}

Chứng minh tương tự, cũng có QI là tia phân giác \widehat{PQC}

c) Kẻ $IM \perp PQ (M \in PQ)$, $IN \perp AB (N \in AB)$. Vì PI, QI, AI là các tia phân giác và ΔABC cân tại A nên suy ra $IM = IN = IK, AN = AK, PM = PN, QK = QM$

Có

$$\begin{aligned} b &= AP + PQ + AQ = AP + (PM + QM) + AQ \\ &= AP + PN + AQ + QK = AN + AK = 2.AK \end{aligned}$$

Nếu $\widehat{BAC} = 60^\circ$ thì $AB = BC = CA = a$ và $CK = \frac{CI}{2} = \frac{a}{4}$

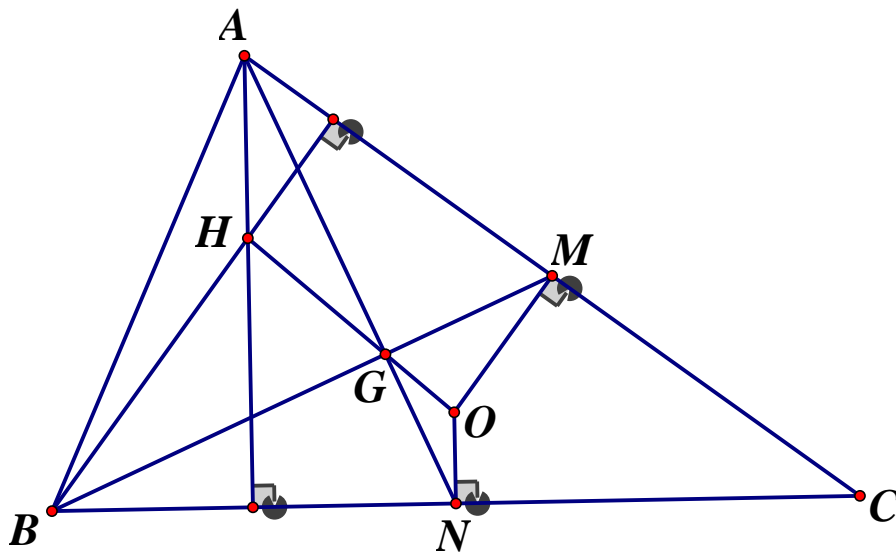
Suy ra $b = 2.AK = 2.(AC - CK) = 2.\left(a - \frac{a}{4}\right) = \frac{3a}{2}$ (đơn vị dài)

Bài 23:

- a) Cho tam giác ABC , gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AC . Gọi O, G, H lần lượt là giao điểm ba đường trung trực, ba đường cao, ba đường trung tuyến của tam giác ABC. Tính tỉ số $GH : GO$
- b) Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = 2a, CD = a$. Hãy dựng điểm M trên đường thẳng CD sao cho đường thẳng AM cắt hình thang làm hai phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải

a)



Ta có: $OM \parallel AH$ (vì cùng vuông góc với BC)

$ON \parallel BH$ (vì cùng vuông góc với AC)

$NM \parallel AB$ (đường trung bình của tam giác)

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle MNO$

Có: $\widehat{BAH} = \widehat{NMO}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

$\widehat{ABH} = \widehat{MNO}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

$$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle MNO (g.g) \Rightarrow \frac{NM}{BA} = \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2}$$

Xét $\triangle AGH$ và $\triangle MOG$ có:

$$\widehat{GAH} = \widehat{GMO} \text{ (so le trong) } (1)$$

$$\frac{GM}{GA} = \frac{1}{2} \text{ (tính chất trọng tâm) } (2)$$

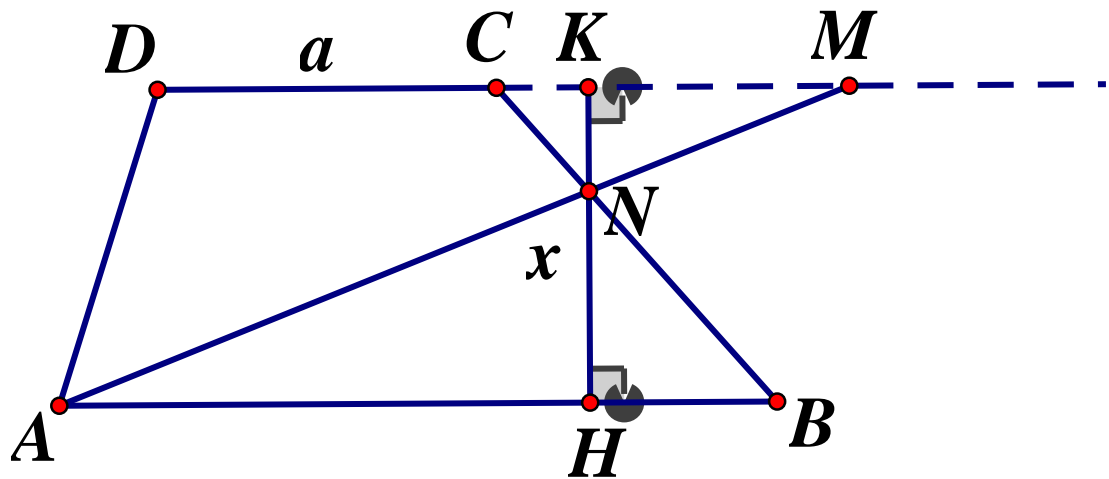
$$\frac{OM}{AH} = \frac{1}{2} \quad (cmt)$$

$$\text{Từ (1); (2); (3)} \Rightarrow \triangle AHG \sim \triangle MOG (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AGH} = \widehat{MGO} (4)$$

Mặt khác: A, G, M thẳng hàng (5)

$$\text{Từ (4), (5)} \Rightarrow H, G, O \text{ thẳng hàng và } \frac{GH}{GO} = \frac{AH}{OM} = 2$$

b)



Gọi h là đường cao của hình thang ABCD

Giả sử đã dựng được điểm M thuộc CD sao cho đường thẳng AM cắt hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Gọi N là giao điểm của AM và BC

Đặt $S_1 = S_{ADCN}$; $S_2 = S_{ANB}$; $S = S_{ABCD}$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} s_1 + s_2 = s \\ s_1 = s_2 \end{cases} \Rightarrow S_2 = S : 2 \quad (1)$$

Kẻ đường cao NH của tam giác ANB và đặt $NH = x$ ta có:

$$s = \frac{1}{2}(2a + a)h = \frac{3ah}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot x = ax$$

$$\text{Thay vào (1): } ax = \frac{1}{2} \cdot \frac{3ah}{2} \Rightarrow x = \frac{3h}{4}$$

Áp dụng định lý Talet $\Rightarrow \frac{NB}{NC} = \frac{1}{3}$ suy ra cách dựng:

Chia đoạn BC làm 4 phần bằng nhau, lấy điểm N trên BC sao cho $NC = \frac{1}{4}BC$

Đường thẳng AN cắt đường thẳng CD tại điểm M cần dựng

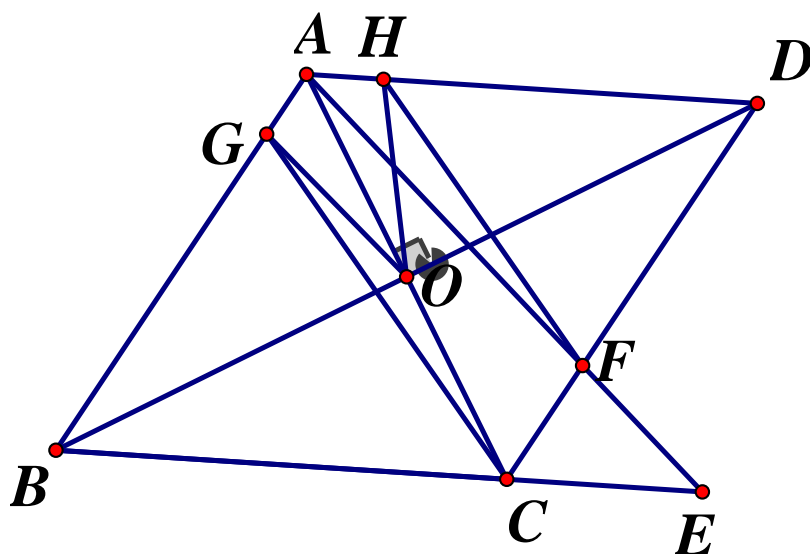
Bài 24: Cho hình thoi ABCD có góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hai đường chéo cắt nhau tại O , E thuộc tia BC sao cho BE bằng ba phần tư BC , AE cắt CD tại F . Trên đoạn thẳng AB và CD lần lượt lấy hai điểm G và H sao cho CG song song với FH

$$\text{a) Chứng minh rằng: } BG \cdot DH = \frac{3}{4}BC^2$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

b) Tính số đo góc GOH

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle BCG \sim \triangle DHF \Rightarrow \frac{BC}{DH} = \frac{BG}{DF} \Rightarrow BC \cdot DF = DH \cdot BG$

Theo định lý Ta let tính được:

$$DF = \frac{3}{4}DC = \frac{3}{4}BC \Rightarrow BG \cdot DH = \frac{3}{4}BC^2$$

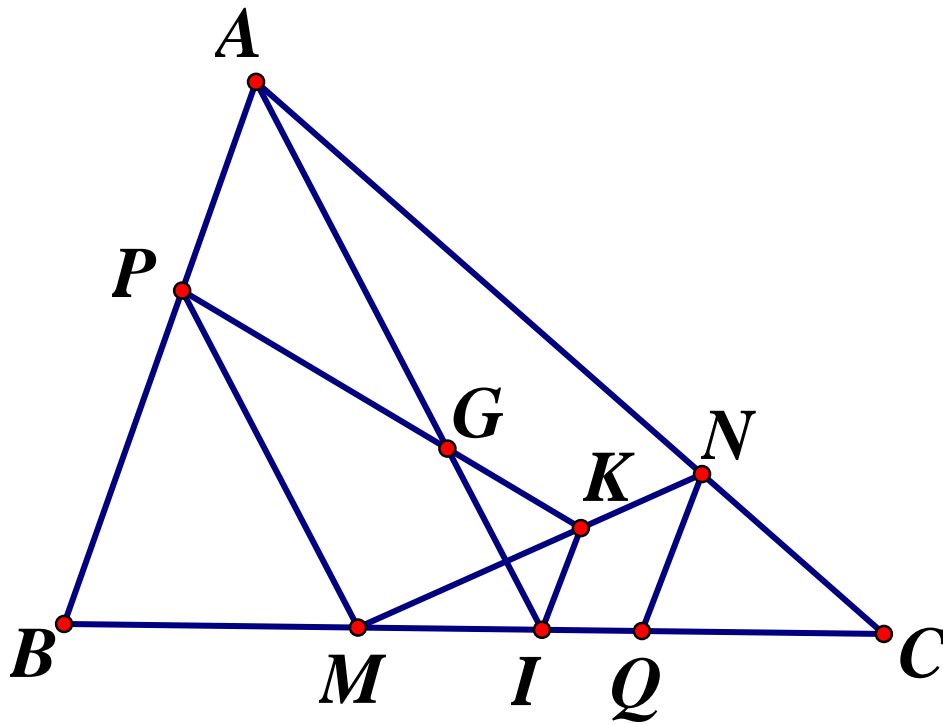
b) Theo định lý Pytago tính được:

$$BO^2 = BC^2 - CO^2 = \frac{3}{4}BC^2 \Rightarrow BG \cdot DH = BO^2 = BO \cdot DO \Rightarrow \frac{BG}{DO} = \frac{BO}{DH}$$

Ta có $\widehat{GBO} = \widehat{HDO} = 30^\circ$. Nên $\triangle BGO \sim \triangle DOH \Rightarrow \widehat{GHO} = 30^\circ$ c) Tính số đo góc GOH **Bài 25:** Cho tam giác ABC , ba điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho

$$\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} \text{ \& } \frac{BM}{BC} < \frac{1}{2}. \text{ Chứng minh rằng hai tam giác } ABC \text{ và } MNP \text{ có cùng}$$

Lời giải



Qua N kẻ $NQ \parallel AB (Q \in BC)$, theo định lý Talet ta có:

$$\frac{QC}{BC} = \frac{CN}{CA} (gt) \Rightarrow \frac{QC}{BC} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow QC = BM$$

$$\frac{QN}{AB} = \frac{CQ}{CB} (gt) \Rightarrow \frac{QN}{AB} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow AB = QN$$

Gọi I, K là trung điểm của MQ và MN . Suy ra IK là đường trung bình của tam giác MNQ , vậy

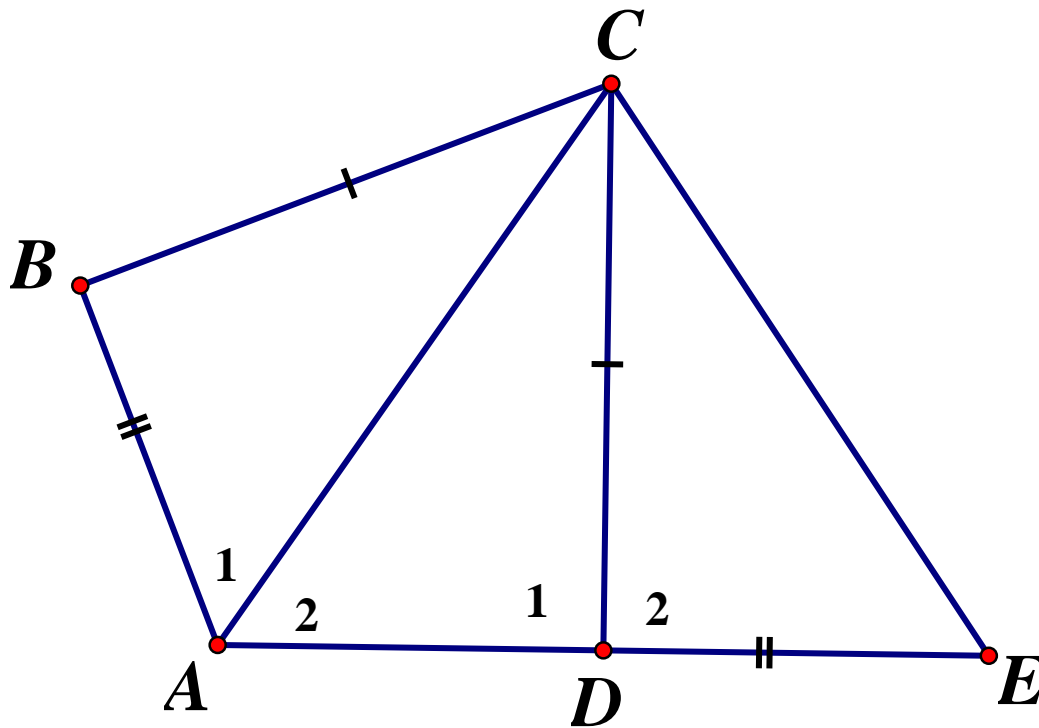
$$IK \parallel QN, IK = \frac{QN}{2} \Rightarrow IK \parallel AP; IK = \frac{AP}{2}$$

Gọi G là giao điểm của AI và PK , theo Talet ta có: $\frac{GI}{GA} = \frac{GK}{GP} = \frac{KI}{PA} = \frac{1}{2}$

Suy ra G là trọng tâm của tam giác MNP và G là trọng tâm của tam giác ABC

Bài 26: Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ và $CB = CD$. Chứng minh AC là tia phân giác của góc A .

Lời giải



Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = BA$

Ta có: $\widehat{B} + \widehat{D_1} = 180^\circ$ và $\widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D_2}$

Xét $\triangle CBA$ và $\triangle CDE$ có: $CB = CD(gt)$; $\widehat{B} = \widehat{D_2}$; $BA = DE$

$\Rightarrow \triangle CBA = \triangle CDE(c.g.c) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E} \quad (1); CA = CE$

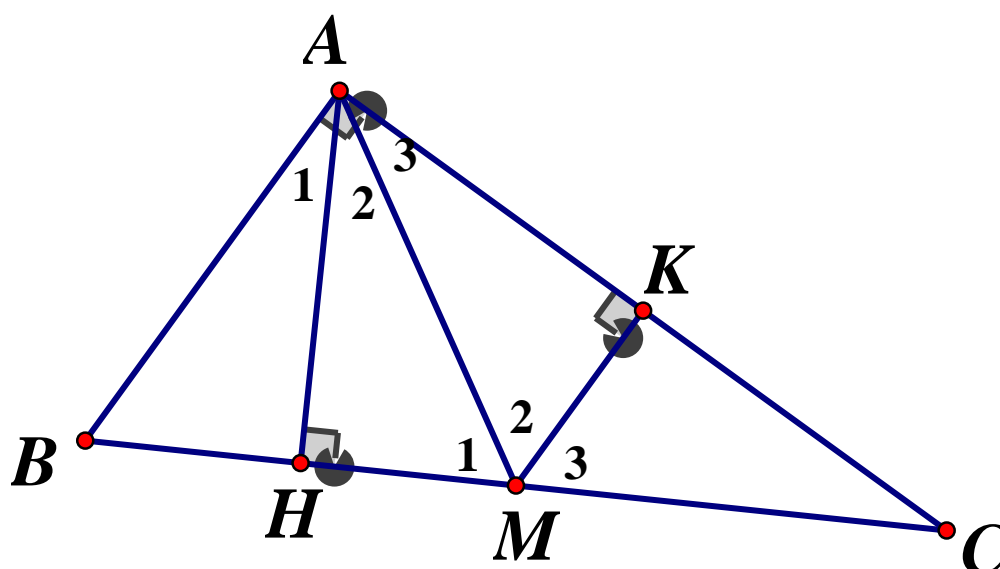
Xét $\triangle CAE$ có $CA = CE$ nên là tam giác cân $\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{E} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow AC$ là tia phân giác của góc A

Bài 27: Một tam giác có đường cao và đường trung tuyến chia góc ở đỉnh thành ba phần bằng nhau.

Tính các góc của tam giác đó.

Lời giải



Kẻ $MH \perp BC$. Khi đó $\triangle AMH = \triangle AKM$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow MK = MH$ (1)

Xét $\triangle ABM$ có AH vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên nó cân tại A

$\Rightarrow AH$ cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow MH = BH = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}MC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MK = \frac{1}{2}MC \Rightarrow \triangle MKC$ là nửa tam giác đều

Do đó: $\widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{M}_3 = 60^\circ \Rightarrow \widehat{HMK} = 120^\circ$

Vì $\triangle AHM = \triangle AKM$ nên $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = \frac{1}{2}\widehat{MHK} = \frac{1}{2}.120^\circ = 60^\circ$

Suy ra $\widehat{A}_3 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 3.\widehat{A}_3 = 3.30^\circ = 90^\circ$

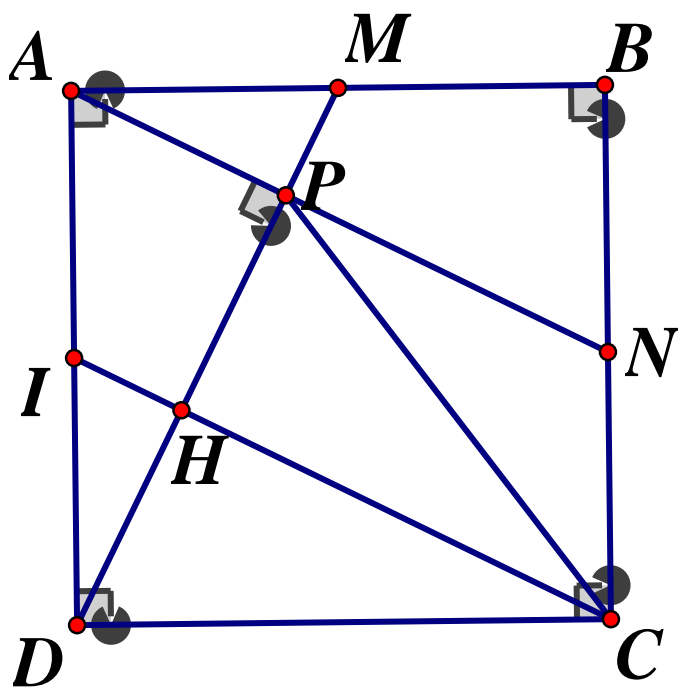
Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A, $\widehat{B} = 60^\circ$; $\widehat{C} = 30^\circ$

Bài 28: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.

Gọi P là giao điểm của AN với DM

- Chứng minh : tam giác APM là tam giác vuông.
- Tính diện tích của tam giác APM
- Chứng minh tam giác CPD là tam giác cân.

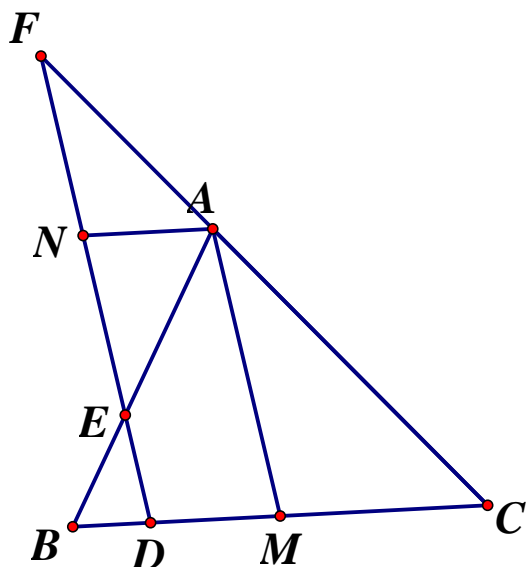
Lời giải



- Hay CH là đường cao trong tam giác $CPD(1)$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải



a) Lập luận được: $\frac{DF}{AM} = \frac{DC}{MC}$ (do $AM \parallel DF$) (1)

$$\frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM} \text{ (do } AM \parallel DE \text{)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{DE + DF}{AM} = \frac{BD + DC}{BM} = \frac{BC}{BM} = 2(MB = MC)$

$$\Rightarrow DE + DF = 2AM$$

b) $AMDN$ là hình bình hành

Ta có: $\frac{NE}{ND} = \frac{AE}{AB}$

$$\frac{NF}{ND} = \frac{FA}{AC} = \frac{DM}{BM} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{NE}{ND} = \frac{NF}{ND} \Rightarrow NE = NF$$

c) $\triangle AMC \sim \triangle FDC \Rightarrow \frac{S_{AMC}}{S_{FDC}} = \left(\frac{AM}{FD}\right)^2 = \left(\frac{ND}{FD}\right)^2$ (Do $AM = ND$)

$$\triangle FNA \sim \triangle FDC \Rightarrow \frac{S_{FNA}}{S_{FDC}} = \left(\frac{FN}{FD}\right)^2$$

Do đó $\frac{S_{AMC}}{S_{FDC}} \cdot \frac{S_{FNA}}{S_{FDC}} = \left(\frac{ND}{FD}\right)^2 \cdot \left(\frac{FN}{FD}\right)^2 \leq \frac{1}{16} \left(\frac{ND}{FD} + \frac{FN}{FD}\right)^4 = \frac{1}{16}$

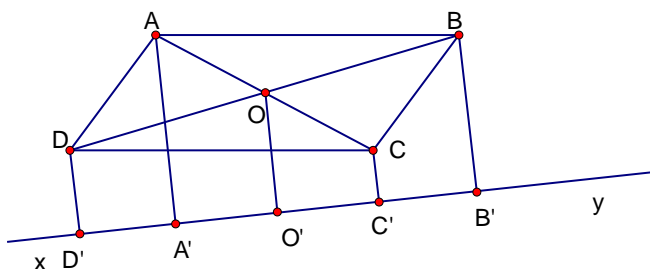
$$\Rightarrow S_{FDC}^2 \geq 16S_{AMC} \cdot S_{FNA}$$

Do $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x + y)^4 \geq 16x^2y^2$ với $x \geq 0; y \geq 0$

Bài 30: Cho hình bình hành ABCD và đường thẳng xy không có điểm chung với hình bình hành. Gọi AA', BB', CC', DD' là các đường vuông góc kẻ từ A, B, C, D đến đường thẳng xy. Tìm hệ thức liên hệ độ dài giữa AA', BB', CC' và DD'.

Lời giải

HD: C/m: $AA' + CC' = BB' + DD' = 2OO'$



Bài 31: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và một đường thẳng d không cắt cạnh nào của tam giác. Từ các đỉnh A, B, C và trọng tâm G ta kẻ các đoạn AA', BB', CC' và GG' vuông góc với đường thẳng d. Chứng minh hệ thức: $AA' + BB' + CC' = 3GG'$.

Lời giải

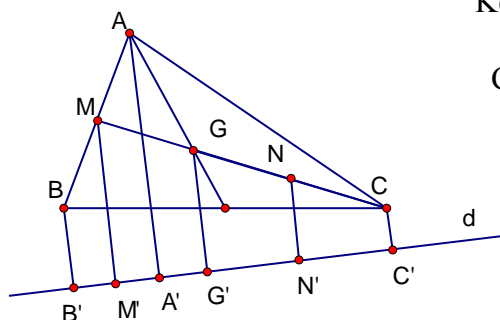
HD: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và GC.

Kẻ $MM' \perp d$ và $NN' \perp d$.

$$\text{Chỉ ra: } MM' = \frac{1}{2}(AA' + BB')(1);$$

$$GG' = \frac{1}{2}(MM' + NN')(2);$$

$$NN' = \frac{1}{2}(GG' + CC')(3)$$



Từ (1), (2) và (3) biến đổi suy ra đpcm.

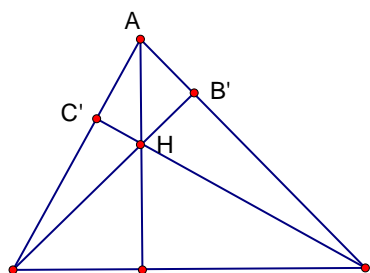
Bài 32: Cho tam giác ABC có ba đường cao AA', BB', CC'. Gọi H là trực tâm của tam giác đó.

a) Chứng minh: $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = 1;$

b) Chứng minh: $\frac{AA'}{HA'} + \frac{BB'}{HB'} + \frac{CC'}{HC'} \geq 9;$

Lời giải

a) Chứng minh: $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = 1$



Ta có: $\frac{HA'}{AA'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}; \frac{HB'}{BB'} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}; \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$

Suy ra $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

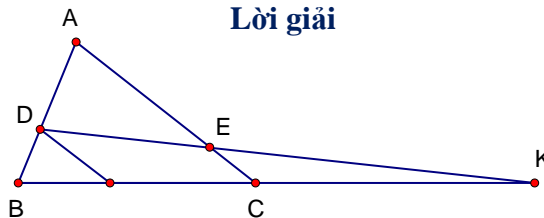
b) C/ m BĐT phụ: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Dấu « \Rightarrow » $\Leftrightarrow a = b = c > 0$

* Chú ý: Dấu « \Rightarrow » $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.

Bài 33: Cho tam giác ABC ($AC > AB$). Lấy các điểm D, E tùy ý theo thứ tự nằm trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng DE, BC. Cmr: Tỉ số $KE : KD$ không phụ thuộc vào cách chọn điểm D và E.

Lời giải



HD: Để làm xuất hiện một tỉ số bằng $\frac{KE}{KD}$ ta vẽ qua D đường thẳng $DG \parallel AC$. Theo hệ quả của đl

Talet, ta có: $\frac{KE}{KD} = \frac{KC}{KG} = \frac{EC}{DG}$

Mà $BD = EC$ (gt)

Do đó, $\frac{KE}{KD} = \frac{BD}{DG}$ (1)

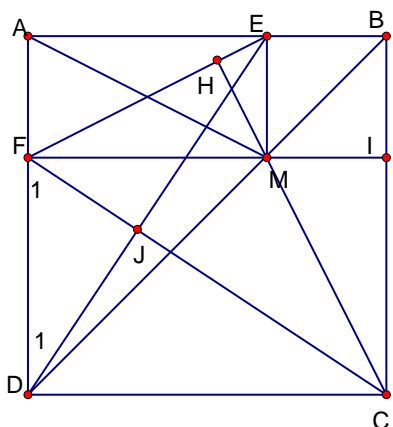
Mặt khác, $\frac{DB}{BA} = \frac{DG}{AC} \Leftrightarrow \frac{DB}{DG} = \frac{AB}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{KE}{KD} = \frac{AB}{AC}$ (không đổi) (đpcm)

Bài 34: Cho hình vuông ABCD. M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB, MF \perp AD$.

- Chứng minh $DE = CF$; $DE \perp CF$
- Chứng minh rằng ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy.
- Xác định vị trí của điểm M trên BD để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất?

Lời giải



a) Chứng minh $DE = CF$; $DE \perp CF$

HD: C/m được $EB = EM = AF$. Suy ra $AE = DF$

Khi đó, $\triangle AED = \triangle DFC$ (c.g.c). Suy ra $DE = CF$.

Ta lại có: $\widehat{FJD} = 180^\circ - (\widehat{F_1} + \widehat{D_1}) = 180^\circ - (\widehat{AED} + \widehat{D_1}) = 90^\circ$

Suy ra $DE \perp CF$ tại J.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy.

Tương tự, c/m được $EC \perp BF$

Ta có $MA = MC$ (BD là trục đối xứng của hình vuông) và $MA = EF$ (AEMF là hcn)

Do đó, $MC = EF$. Suy ra $\triangle MFC = \triangle FDE(c.c.c)$.

Suy ra $\widehat{FED} = \widehat{MCF}$

Ta lại có : $\widehat{FED} + \widehat{EFC} = 90^\circ$ ($\triangle EFJ$ vuông tại J)

Vì thế $\widehat{MCF} + \widehat{EFC} = 90^\circ$

Gọi H là giao điểm của CM và EF thì $\widehat{EHC} = 90^\circ$

Xét $\triangle EFC$ có ED, FB, CM là ba đường cao nên chúng đồng quy.

c) **Xác định vị trí của điểm M trên BD để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất?**

C/m BĐT phụ: $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. Dấu “=” $\Leftrightarrow x = y$

Áp dụng BĐT trên, ta có: $S_{AEMF} = AE \cdot AF \leq \left(\frac{AE + AF}{2}\right)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ (không đổi)

Dấu “=” $\Leftrightarrow AE = AF \Leftrightarrow ME = MF \Leftrightarrow M$ là trung điểm của BD.

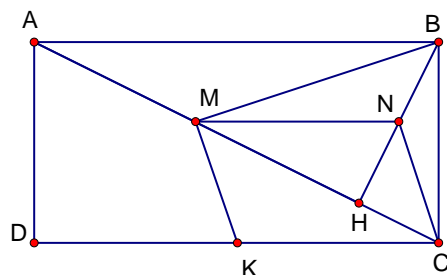
Suy ra GTLN (S_{AEMF}) $= \frac{1}{4} S_{ABCD} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của BD.

Bài 35: Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ $BH \perp AC$. Gọi M là trung điểm của AH, K là trung điểm của CD, N là trung điểm của BH.

a) Chứng minh tứ giác MNCK là hình bình hành;

b) Tính góc BMK.

Lời giải



a) **Chứng minh tứ giác MNCK là hình bình hành;**

HD: Ta c/m: $MN \parallel CK$ và $MN = CK$

b) Tính góc BMK.

+ **C/m** N là trọng tâm của tam giác BMC (?)

+ Suy ra $NC \perp MB$ mà $MK \parallel NC$ (?)

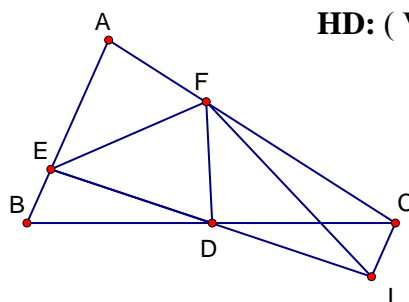
KL: $MK \perp MB$ hay $\widehat{BMK} = 90^\circ$

Bài 36: Cho tam giác ABC. Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm E và F. Chứng minh rằng $S_{DEF} \leq \frac{1}{2} S_{ABC}$. Với vị trí nào của hai điểm E và F thì S_{DEF} đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải

Chứng minh rằng $S_{DEF} \leq \frac{1}{2} S_{ABC}$.

Với vị trí nào của hai điểm E và F thì S_{DEF} đạt giá trị lớn nhất?



HD: (Vẽ điểm phụ)

Gọi I là điểm đối xứng của E qua D.

C/m được: $\triangle BED = \triangle CID$ (c.g.c). Suy ra $S_{BED} = S_{CID}$

Ta lại có: $S_{DEF} = S_{DFI} \leq S_{DFC}$

Suy ra $S_{DEF} \leq S_{DFC} + S_{CID} = S_{DFC} + S_{DBE}$ (1)

Ta lại có : $S_{DEF} \leq S_{AFDE}$ (2)

Cộng (1) và (2) về theo vế, ta được :

$$2S_{DEF} \leq S_{DFC} + S_{BED} + S_{AEDF} = S_{ABC}$$

$$\text{Do đó, } S_{DEF} \leq \frac{1}{2} S_{ABC} \text{ (đpcm)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi EF trùng với AC hoặc AB.

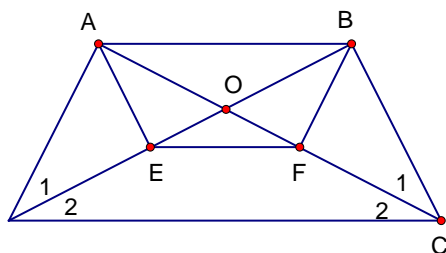
$$\text{Khi đó, } GTLN(S_{DEF}) = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

Bài 37: Cho hình thang cân ABCD có đáy nhỏ là AB, đáy lớn là CD. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường chéo BD ở E, qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường chéo AC ở F.

a) Chứng minh rằng tứ giác DEFC là hình thang cân;

b) Tính độ dài EF nếu biết AB = 5cm, CD = 10cm.

Lời giải



a) Chứng minh rằng tứ giác DEFC là hình thang cân;

$$\text{Vì } AE \parallel BC \text{ (gt) nên theo đl Ta-let ta có: } \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC} \text{ (1)}$$

Vì $BF \parallel AD$ (gt) nên theo đl Ta-let ta có: $\frac{OB}{OD} = \frac{OF}{OA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OE}{OB} \cdot \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OF}{OA}$ hay $\frac{OE}{OD} = \frac{OF}{OC}$

Theo đl Ta – let đảo suy ra $EF \parallel DC$. Do đó, DEFC là hình thang (3)

Ta c/m được $\triangle ABC = \triangle ABD$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$ mà $\widehat{BCD} = \widehat{ADC}$ (?) nên $\widehat{C_2} = \widehat{D_2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra EFCD là hình thang cân.

b) Tính độ dài EF nếu biết $AB = 5\text{cm}$, $CD = 10\text{cm}$.

Vì $AB \parallel CD$ và $EF \parallel CD$ nên $AB \parallel EF$. Theo đl Ta-let ta có: $\frac{EF}{AB} = \frac{OE}{OB}$ mà $\frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC}$ (cmt)

Suy ra $\frac{EF}{AB} = \frac{OA}{OC}$ (5).

Vì $AB \parallel CD$ nên theo đl Ta-let ta có $\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\frac{EF}{AB} = \frac{AB}{CD}$

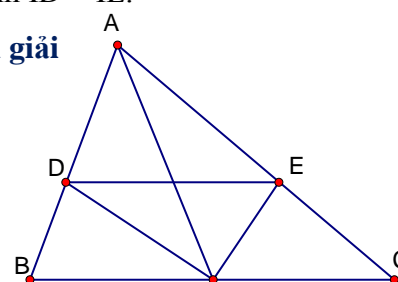
Suy ra $EF = \frac{AB^2}{CD} = \frac{5^2}{10} = 2,5(\text{cm})$

Bài 38: Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Đường phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở D, đường phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở E.

a) Chứng minh $DE \parallel BC$.

b) Gọi I là giao điểm của DE với AM. Chứng minh $ID = IE$.

Lời giải



a) Chứng minh $DE \parallel BC$.

Theo t/c tia phân giác của tam giác, ta có: $\frac{DB}{DA} = \frac{MB}{MA}$ (1) và $\frac{EC}{EA} = \frac{MC}{MA}$ (2)

Mà $MB = MC$ (gt) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{DB}{DA} = \frac{EC}{EA}$. Theo đl Ta-let đảo suy ra $DE \parallel BC$

b) Gọi I là giao điểm của DE với AM. Chứng minh $ID = IE$.

Vì $DE \parallel BC$ (cmt) nên $DI \parallel BM$ và $IE \parallel MC$. Do đó, $\frac{DI}{BM} = \frac{AI}{AM}$ (4) và $\frac{EI}{MC} = \frac{AI}{AM}$ (5)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Từ (3), (4) và (5) suy ra $ID = IE$ (đpcm)

Bài 39: Cho tam giác vuông cân ABC, $\hat{A} = 90^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm M, kẻ $BD \perp CM$, BD cắt CA ở E. Chứng minh rằng:

a) $EB \cdot ED = EA \cdot EC$;

b) $BD \cdot BE + CA \cdot CE = BC^2$

c) $\widehat{ADE} = 45^\circ$

Lời giải

a) $EB \cdot ED = EA \cdot EC$;

C/m: $\triangle EAB$ đồng dạng $\triangle EDC$ (g.g)

Suy ra $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow EA \cdot EC = EB \cdot ED$ (đpcm)

b) $BD \cdot BE + CA \cdot CE = BC^2$

Chỉ ra M là trực tâm của tam giác EBC nên $EM \perp BC$ tại H.

C/m: $\triangle EHB$ đồng dạng $\triangle CDB$ (g.g) nên $\frac{BE}{BC} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow BE \cdot BD = BH \cdot BC$ (1)

Tương tự, C/m: $\triangle EHC$ đồng dạng $\triangle BAC$ (g.g) nên $\frac{EC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow CE \cdot CA = HC \cdot BC$ (2)

Lấy (1) cộng (2) về theo vế, ta được:

$$BD \cdot BE + CA \cdot CE = (BH + HC) \cdot BC = BC^2$$

c) $\widehat{ADE} = 45^\circ$

Theo câu a, ta có: $EA \cdot EC = EB \cdot ED \Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{ED}{EC}$

Từ đó c/m được $\triangle EAD$ đồng dạng $\triangle EBC$ (c.g.c)

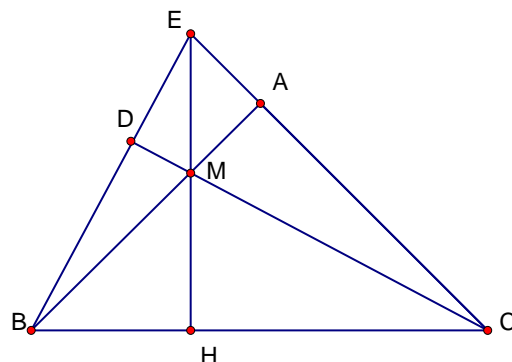
Suy ra $\widehat{EDA} = \widehat{ECB} = \widehat{ACB} = 45^\circ$ (Vì tam giác ABC vuông cân tại A).

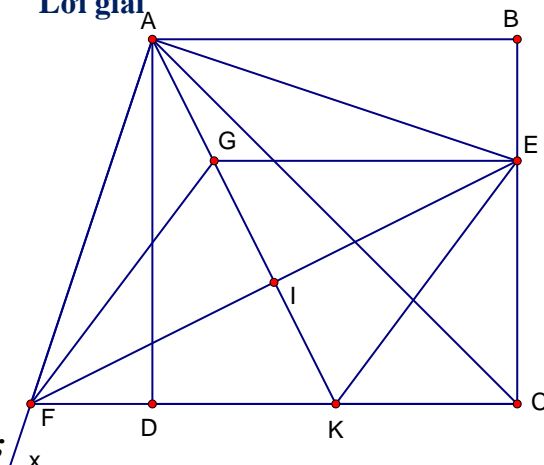
Bài 40: Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm trên cạnh BC. Qua E kẻ tia Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F. Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD ở K. Đường thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$ và tứ giác EGKF là hình thoi;

b) $\triangle AKF \sim \triangle CAF$, $AF^2 = FK \cdot FC$;

c) Khi E thay đổi trên BC, chứng minh: $EK = BE + DK$ và chu vi tam giác EKC không đổi.



Lời giải

a) $AE = AF$ và tứ giác $EGKF$ là hình thoi;

C/m: $\triangle BAE = \triangle DAF$ (cgv - gnk)

Suy ra $AE = AF$.

Xét tam giác AEF cân tại A có AI là đường trung tuyến nên cũng là đường cao.

Do đó, $GK \perp EF$ tại I (1)

Ta lại c/m được $\triangle IEG = \triangle IKF$ (g.c.g). Do đó, $GE = FK$ mà $GE \parallel FK$ (gt)

Suy ra EKFG là hình bình hành (2)

Từ (1) và (2) suy ra EKFG là hình thoi.

b) $\triangle AKF \sim \triangle CAF$, $AF^2 = FK.FC$

Ta có: $\widehat{KAF} = \widehat{ACF} = 45^\circ$ và \widehat{F} chung. Do đó, $\triangle AKF$ đồng dạng $\triangle CAF$ (g.g)

Suy ra $\frac{AF}{CF} = \frac{KF}{AF} \Rightarrow AF^2 = KF.FC$.

c) Khi E thay đổi trên BC, chứng minh: $EK = BE + DK$ và chu vi tam giác EKC không đổi.

Vì EKFG là hình thoi nên $KE = KF = KD + DF = KD + BE$

Chu vi của tam giác EKC là: $KC + EC + EK = KC + CE + BE + KD$

$$= (KC + KD) + (BE + EC) = CD + BC = 2BC \text{ (không đổi)}$$

KL :

Bài 41: Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau ở E. Các tia phân giác của các góc ACE và DBE

cắt nhau ở K. Chứng minh rằng: $\widehat{BKC} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BDC}}{2}$

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AB và CK, của CD và BK.

Sử dụng tính chất góc ngoài của tam giác, ta lần lượt có :

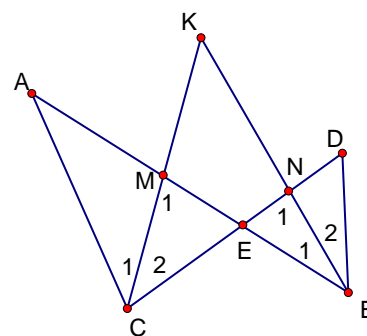
$$\widehat{K} + \widehat{B}_1 = \widehat{A} + \widehat{C}_1 (= \widehat{M}_1) \quad (1)$$

$$\widehat{K} + \widehat{C}_2 = \widehat{D} + \widehat{B}_2 (= \widehat{N}_1) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2\widehat{K} = \widehat{A} + \widehat{D} + \widehat{B}_2 + \widehat{C}_1 - \widehat{B}_1 - \widehat{C}_2 = \widehat{A} + \widehat{D}$

(Vì theo gt $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2, \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$)

Do đó, $\widehat{K} = \frac{\widehat{A} + \widehat{D}}{2}$. Vậy, $\widehat{BKC} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BDC}}{2}$



Bài 42: Cho hình thang ABCD có $AB \parallel CD$, $AB < CD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, K là giao điểm của AD và BC. Đường thẳng KO cắt AB, CD theo thứ tự ở M, N. Cmr:

a) $\frac{MA}{ND} = \frac{MB}{NC}$;

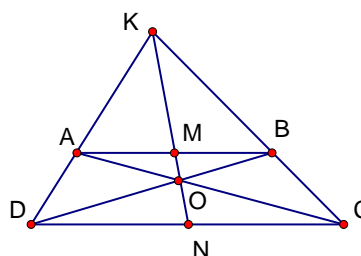
b) $\frac{MA}{NC} = \frac{MB}{ND}$

c) $MA = MB, NC = ND$

Lời giải

:

a) $\frac{MA}{ND} = \frac{MB}{NC}$.



Áp dụng đl Ta-let vào tam giác KND, KNC với $AB \parallel CD$, ta có: $\frac{MA}{ND} = \frac{KM}{KN}, \frac{MB}{NC} = \frac{KM}{KN}$

Suy ra $\frac{MA}{ND} = \frac{MB}{NC} \quad (1)$

b) $\frac{MA}{NC} = \frac{MB}{ND}$

Áp dụng đl Ta-let vào tam giác ONC, OND với $AB \parallel CD$, ta có: $\frac{MA}{NC} = \frac{OM}{ON}, \frac{MB}{ND} = \frac{OM}{ON}$

Suy ra $\frac{MA}{NC} = \frac{MB}{ND} \quad (2)$

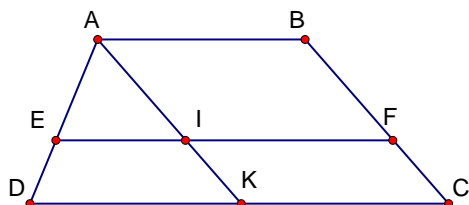
c) $MA = MB, NC = ND$

Nhân từng vế (1) với (2) ta được: $\frac{MA^2}{ND \cdot NC} = \frac{MB^2}{NC \cdot ND}$

Suy ra $MA^2 = MB^2$ hay $MA = MB$. Từ đó suy ra $NC = ND$.

Bài 43: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). $AB = 28$, $CD = 70$, $AD = 35$, vẽ một đường thẳng song song với hai cạnh đáy, cắt AD, BC theo thứ tự ở E và F. Tính độ dài EF, biết rằng $DE = 10$.

Lời giải

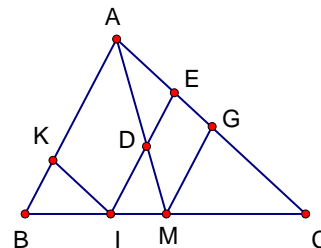


HD: Kẻ $AK \parallel BC$, cắt EF tại I .

Lần lượt tính được $EI = 30$, $EF = 58$.

Bài 44: Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM . Gọi I là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Đường thẳng qua I và song song với AC cắt AB ở K . Đường thẳng qua I và song song với AB cắt AM , AC theo thứ tự ở D , E . Chứng minh rằng $DE = BK$.

Lời giải



Chứng minh rằng $DE = BK$.

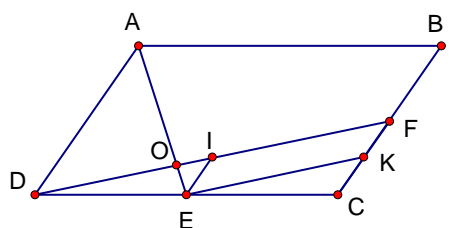
Kẻ $MG \parallel IE$, ta có: $\frac{BK}{KI} = \frac{BA}{AC}$ (1) và $\frac{DE}{AE} = \frac{MG}{AG} = \frac{MG}{GC} = \frac{BA}{AC}$ (2) (vì $AG = GC$)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BK}{KI} = \frac{DE}{AE}$ mà $KI = AE$ suy ra $DE = BK$ (đpcm)

Bài 45: Tứ giác $ABCD$ có E , F theo thứ tự là trung điểm của CD , CB . Gọi O là giao điểm của AE và DF ; $OA = 4OE$; $OD = \frac{2}{3}OF$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Kẻ $EI \parallel DA$, lấy K là trung điểm của CF .



Đặt $OD = 2a$, $OF = 3a$. Tính được $OI = 0,5a$,

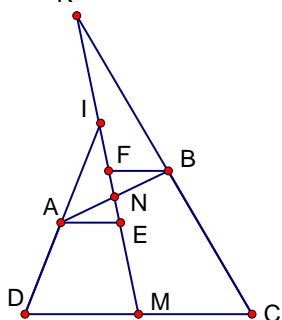
$IF = 2,5a$, $EK = 2,5a$. Từ đó c/m được $EIKF$ là hình bình hành nên $FK \parallel IE \parallel AD$. Suy ra $BC \parallel AD$.

Ta lại c/m $BC = AD$ ($= 4EI$)

Suy ra $ABCD$ là hình bình hành (đpcm)

Bài 46: Đường thẳng đi qua trung điểm các cạnh đối AB , CD của tứ giác $ABCD$ cắt các đường thẳng AD , BC theo thứ tự ở I , K . Cmr: $\frac{IA}{ID} = \frac{KB}{KC}$.

Lời giải



Gọi N , M lần lượt là trung điểm của AB , CD .

Vẽ AE , $BF \parallel DC$. Ta có: $\frac{IA}{ID} = \frac{AE}{DM} = \frac{BF}{MC} = \frac{KB}{KC}$ (đpcm)

Bài 47: Qua M thuộc cạnh BC của tam giác ABC vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh kia. Chúng cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự ở H, K. Cmr:

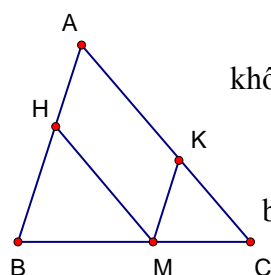
a) Tổng $\frac{AH}{AB} + \frac{AK}{AC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên cạnh BC.

b) Xét trường hợp tương tự khi M chạy trên đường thẳng BC nhưng không thuộc đoạn thẳng BC.

Lời giải

$$\text{a) Ta có : } \frac{AH}{AB} + \frac{AK}{AC} = \frac{CM}{CB} + \frac{BM}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$$

không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên cạnh BC.



$$\text{b) + Nếu M thuộc tia đối của tia CB thì } \frac{AK}{AC} - \frac{AH}{AB} = 1$$

$$\text{+ Nếu M thuộc tia đối của tia BC thì } \frac{AH}{AB} - \frac{AK}{AC} = 1$$

(Chú ý : Vẽ hình theo từng trường hợp rồi giải)

Bài 48: Cho tam giác ABC đều cạnh a, M là một điểm bất kỳ ở trong tam giác ABC.

$$\text{Chúng minh rằng: } MA + MB + MC > \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải

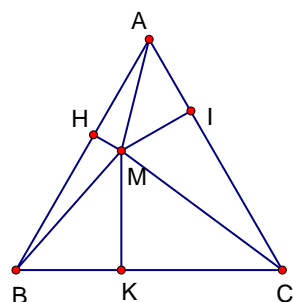
Kẻ $MH \perp AB$; $MK \perp BC$; $MI \perp AC$.

$$\text{Ta có : } MA + MB + MC > MH + MK + MI \quad (1)$$

Ta lại có :

$$\begin{aligned} MH + MK + MI &= \frac{2S_{MAB}}{AB} + \frac{2S_{MBC}}{BC} + \frac{2S_{MAC}}{AC} = \frac{2}{a} \cdot (S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC}) \\ &= \frac{2}{a} \cdot S_{ABC} = \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } MA + MB + MC > \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (đpcm)}$$



Bài 49: Cho hình vuông ABCD. Trên các tia đối CB và DC, lấy các điểm M, N sao cho DN = BM. Các đường thẳng song song kẻ từ M với AN và từ N với AM cắt nhau tại F. Cmr:

a) Tứ giác ANFM là hình vuông;

b) Điểm F nằm trên tia phân giác của \widehat{MCN} và $\widehat{ACF} = 90^\circ$;

c) Ba điểm B, O, D thẳng hàng và tứ giác BOFC là hình thang (O là trung điểm của AF)

Lời giải

a) **Tứ giác ANFM là hình vuông**

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Xét $\triangle DAN$ và $\triangle BAM$ có $AD = AB$ (gt),

$$\widehat{ADN} = \widehat{ABM} = 90^\circ, \quad BM = DN \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle DAN = \triangle BAM$ (c.g.c)

Khi đó, $AM = AN$ và $\widehat{NAD} = \widehat{MAB}$.

Có: $\widehat{NAM} = \widehat{NAD} + \widehat{DAM} = \widehat{MAB} + \widehat{DAM} = \widehat{DAB} = 90^\circ$.

Tứ giác ANFM có $MF \parallel AN$, $AM \parallel NF$ và $\widehat{NAM} = 90^\circ$
nên tứ giác ANFM là hình chữ nhật.

Mặt khác, $AN = AM$

Suy ra ANFM là hình vuông.

b) Điểm F nằm trên tia phân giác của \widehat{MCN} và $\widehat{ACF} = 90^\circ$

Kẻ $FH \perp CN$ và $FK \perp BM$.

Suy ra tứ giác CHFK là hình chữ nhật, do đó $FH \perp FK$

Suy ra $\widehat{NFH} = \widehat{MFK}$ (cặp góc có các cạnh tương ứng vuông góc)

Xét $\triangle HFN$ và $\triangle KFM$ có: $\widehat{NFH} = \widehat{MFK}$ (cmt), $NF = MF$ (?)

$$\widehat{NHF} = \widehat{MKF} = 90^\circ$$

Do đó, $\triangle HFN = \triangle KFM$ (ch-gn)

Suy ra $FH = FK$

Vậy, CF là tia phân giác của \widehat{MCN} , nghĩa là F thuộc tia phân giác của \widehat{MCN}

Do tứ giác ABCD là hình vuông nên CA là phân giác của \widehat{NCB} .

Suy ra $\widehat{ACF} = 90^\circ$ (hai tia phân giác của hai góc kề bù).

c) Ba điểm B, O, D thẳng hàng và tứ giác BOFC là hình thang (O là trung điểm của AF)

Hình vuông ANFM có hai đường chéo AF và MN cắt nhau tại O nên O là trung điểm của AF cũng là trung điểm của MN.

Xét $\triangle CMN$ có $\widehat{C} = 90^\circ$, $ON = OM \Rightarrow OC = \frac{MN}{2} = OA$

Do đó O nằm trên đường trung trực của AC, suy ra O thuộc BD là đường trung trực của AC, nghĩa là ba điểm O, B, D thẳng hàng.

Ta có: $BD \perp AC$ (t/c đường chéo của hình vuông)

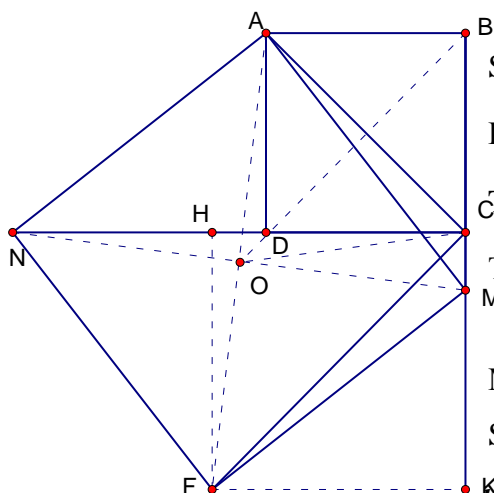
$$CF \perp AC \text{ (cmt)}$$

Khi đó, $OB \parallel CF$

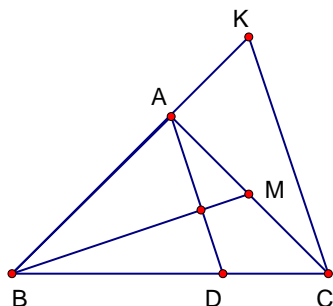
Vậy tứ giác BOFC là hình thang.

Bài 50: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BD = 2DC$. Cmr: BM vuông góc với AD.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Lời giải



Kẻ $CK \parallel AD$ (hình vẽ). Ta có: $\frac{BA}{AK} = \frac{BD}{DC}$.

Ta lại có: $BA = AC = 2AM$ (gt)

Suy ra $AK = AM$. Từ đó c/m được $\triangle CAK = \triangle BAM$ (c.g.c)

nên $\widehat{ABM} = \widehat{ACK}$

Suy ra $\widehat{ABM} + \widehat{BAD} = \widehat{ACK} + \widehat{K} = 90^\circ$. Vậy, $AD \perp BM$.

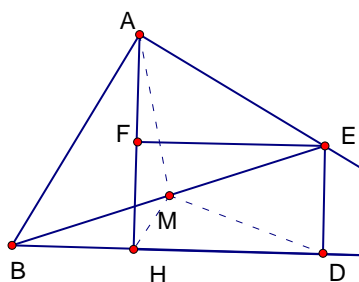
Bài 51: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Trên tia HC lấy HD = HA. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

a) Chứng minh rằng: $AE = AB$;

b) Gọi M là trung điểm của BE. Tính \widehat{AHM} .

Lời giải

a) **Chứng minh rằng: $AE = AB$**



Kẻ $EF \perp AH$, suy ra tứ giác HDEF là hình chữ nhật

$\Rightarrow EF = HD$ mà $AH = HD$ (gt) $\Rightarrow EF = AH$.

Xét $\triangle HBA$ và $\triangle FAE$ có $\widehat{H} = \widehat{F} = 90^\circ$, $EF = AH$ (cmt)

$\widehat{FEA} = \widehat{HAB}$ (cùng phụ với \widehat{FAE})

Do đó, $\triangle HBA = \triangle FAE$ (g.c.g)

Suy ra $AE = AB$

b) **Gọi M là trung điểm của BE. Tính \widehat{AHM} .**

Do tam giác ABE vuông cân tại A nên $AM = \frac{BE}{2}$.

Lại có tam giác BDE vuông tại D, có DM là đường trung tuyến nên $MD = \frac{BE}{2}$

Suy ra $AM = MD$.

Xét $\triangle AHM$ và $\triangle DHM$ có HM cạnh chung, $AM = MD$ (cmt), $AH = HD$ (gt).

Do đó, $\triangle AHM = \triangle DHM$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{MHA} = \widehat{MHD} = \frac{\widehat{AHD}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Bài 52: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC.

a) Chứng minh: $BD \cdot CE \cdot BC = AH^3$;

b) Giả sử diện tích tam giác ABC gấp đôi diện tích tứ giác ADHE, chứng tỏ tam giác ABC vuông cân.

Lời giải

a) **Chứng minh:** $BD.CE.BC = AH^3$:

C/m được $\triangle HAB$ đồng dạng $\triangle HCA$ (g.g)

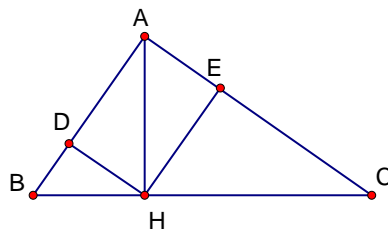
$$\text{Suy ra } \frac{AH}{HC} = \frac{HB}{AH} \Rightarrow AH^2 = HB.HC.$$

C/m được $\triangle BHD$ đồng dạng $\triangle BHA$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{BD}{BH} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow BH^2 = BD.AB.$$

C/m được $\triangle CEH$ đồng dạng $\triangle CHA$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{CE}{CH} = \frac{CH}{CA} \Rightarrow CH^2 = CE.CA.$$



Mặt khác, tam giác ABC vuông tại A, có AH là đường cao, ta có: $AH.BC = AB.AC (= 2S_{ABC})$

Từ các điều kiện trên, ta có: $AH^2 = HB.HC$

$$\Rightarrow AH^4 = BH^2.HC^2 = BD.AB.CE.AC = (BD.CE).(AB.AC) = BD.CE.BC.AH$$

$$\Rightarrow AH^3 = BD.CE.BC \text{ (đpcm)}$$

b) **Giả sử diện tích tam giác ABC gấp đôi diện tích tứ giác ADHE, chứng tỏ tam giác ABC vuông cân.**

Gọi M là trung điểm của BC suy ra $AM = \frac{BC}{2}$.

Tứ giác ADHE là hình chữ nhật (vì $\hat{A} = \hat{D} = \hat{E} = 90^\circ$) nên $S_{ADHE} = 2S_{ADH}$ mà $S_{ABC} = 2S_{ADHE}$ (gt)

$$\text{Do đó, } S_{ABC} = 4S_{ADH} \Rightarrow \frac{S_{ADH}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4} (1).$$

Ta lại c/m được $\triangle DAH$ đồng dạng $\triangle ABC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{S_{ADH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AH}{BC} \right)^2 \leq \left(\frac{AM}{BC} \right)^2 = \frac{1}{4} (2)$$

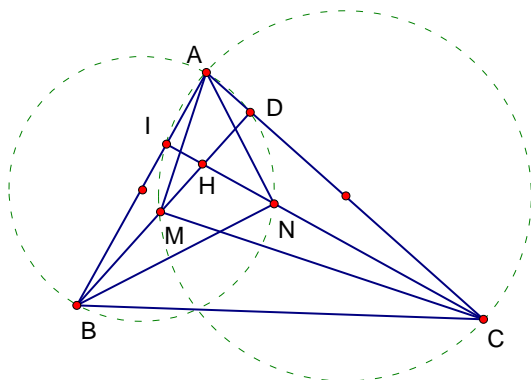
Từ (1) và (2) suy ra $AH = AM \Leftrightarrow H \equiv M \Leftrightarrow \triangle ABC$ vuông cân tại A.

Vậy, nếu $S_{ABC} = 2S_{ADHE}$ thì tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 53: Cho tam giác ABC nhọn, có trực tâm H, trên cạnh BH lấy điểm M và trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng: $AM = AN$.

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Gọi BD và CE là hai đường cao của tam giác ABC

+ C/m: $\triangle AIN$ đồng dạng $\triangle ANB$ (g.g),

suy ra: $AN^2 = AI \cdot AB$ (1)

+ C/m: $\triangle ADM$ đồng dạng $\triangle AMC$ (g.g),

suy ra: $AM^2 = AD \cdot AC$ (2)

Mặt khác, $\triangle IAC$ đồng dạng $\triangle DAB$ (g.g)

Suy ra $\frac{AI}{AC} = \frac{AD}{AB}$ hay $AI \cdot AB = AD \cdot AC$ (3)

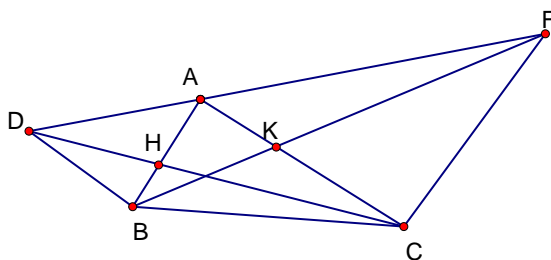
Từ (1), (2) và (3) suy ra $AM^2 = AN^2 \Leftrightarrow AM = AN$ (đpcm)

Bài 54: Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD và ACF lần lượt vuông cân tại B và C. Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của AC và BF.

Cmr: a) $AH = AK$;

b) $AH^2 = BH \cdot CK$

Lời giải



a) Cmr: $AH = AK$

Ta có: $BD \parallel CA \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD}$ mà $BD = AB$ nên $\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{AH}{AH + HB} = \frac{AC}{AC + AB}$
 $\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AC + AB} \Rightarrow AH = \frac{AC \cdot AB}{AC + AB}$ (1)

Cũng từ $CE \parallel AB$ và $CE = AB$, tương tự như trên, ta tính được $AK = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH = AK$

b) $AH^2 = BH \cdot CK$

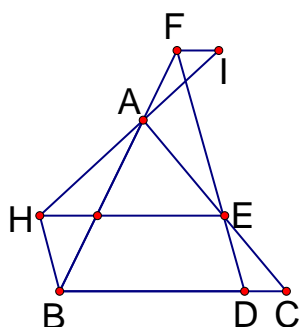
Ta có: $\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{AB}$ và $\frac{CK}{AK} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CK}{AK} \Rightarrow AH \cdot AK = BH \cdot CK \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CK$ (Vì $AH = AK$)

Bài 55: Cho tam giác ABC, một đường thẳng cắt các cạnh BC, AC theo thứ tự ở D và E. và cắt cạnh BA ở F. Vẽ hình bình hành BDEH. Đường thẳng qua F và song song với BC cắt AH ở I.

Cmr: $FI = DC$

Lời giải

Gọi K là giao điểm của AC và FI, M là giao điểm của AB và EH.



Ta có: $\frac{FI}{FK} = \frac{MH}{ME}$ (1); $\frac{DC}{FK} = \frac{DE}{FE}$ (2);

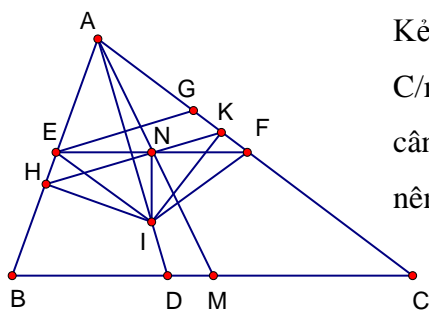
$$\frac{BD}{ME} = \frac{FD}{FE} \Rightarrow \frac{BD - ME}{ME} = \frac{FD - FE}{FE} \Rightarrow \frac{MH}{ME} = \frac{DE}{FE} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{FI}{FK} = \frac{DC}{FK}$ nên $FI = DC$ (đpcm)

Bài 56: Cho tam giác ABC, đường phân giác AD và đường trung tuyến AM. Qua điểm I thuộc AD vẽ IH vuông góc với AB, IK vuông góc với AC. Gọi N là giao điểm của HK và AM. Cmr : NI vuông góc với BC.

Lời giải

Qua N kẻ $EF \parallel BC$, c/m được $NE = NF$ (?) (1)



Kẻ $EG \parallel HK$, c/m được $KG = KF$ (?) (2)

C/m $AH = AK$, $AE = AG$ (Vì $\triangle AHI = \triangle AKI$ (ch-gn),

cân có $EG \parallel HG$

nên $\triangle AEG$ cũng cân) do đó $EH = GK$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $EH = KF$, $\triangle IHE = \triangle IKF$ (c.g.c)

$\Rightarrow IE = IF$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $\triangle IEF$ cân tại I, có IN là đường trung tuyến

nên $IN \perp EF$

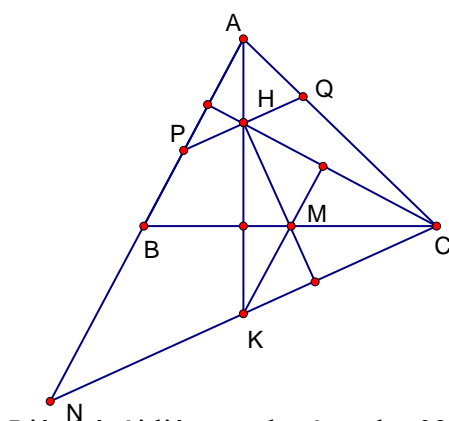
Do đó, $IN \perp BC$

Bài 57: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, trực tâm H. Một đường thẳng đi qua H cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở P và Q sao cho $HP = HQ$. Gọi M là trung điểm của BC. Cmr: HM vuông góc với PQ.

Lời giải

Qua C kẻ đường thẳng song song với PQ, cắt AB ở N, cắt AH ở K.

Do $HP = HQ$ nên $KN = KC$ (?). Từ đó, KM là đường trung bình của $\triangle CBN$



Suy ra $KM \parallel NB$ và $KM \perp CH$.

Khi đó, M là trực tâm của $\triangle CHK$ nên $HM \perp NC$

Suy ra $HM \perp PQ$

Bài 58: Hình chữ nhật ABCD có M, N theo thứ tự là trung điểm của AD và BC. Gọi E là một điểm bất kỳ thuộc tia đối của tia DC, K là giao điểm của EM và AC. Cmr: MN là tia phân giác của góc KNE.

Lời giải

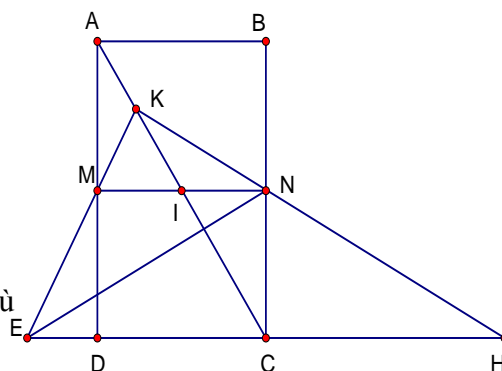
Gọi I là giao điểm của MN và AC, H là giao điểm của KN và DC.

C/m $MI = NI$ (?) rồi suy ra $EC = CH$ (?) $DC^2 = AB.MI$

Lí luận chỉ ra $\triangle NEH$ cân tại N (?) rồi suy ra NC là tia

phân giác của \widehat{ENH} mà $MN \perp NC$, \widehat{ENH} và \widehat{KNE} kề bù

Suy ra NM là tia phân giác của \widehat{KNE}



Bài 59: Cho hình thang ABCD, đáy lớn AB. Từ đỉnh D kẻ đường thẳng song song với cạnh BC, cắt đường chéo AC tại M và cắt cạnh đáy AB tại K. Từ C kẻ đường thẳng song song với AD, cắt đường chéo BD tại I và cắt cạnh AB tại F. Qua F kẻ đường thẳng song song với AC, cắt cạnh bên BC tại P.

Cmr: a) $MP \parallel AB$.

b) Ba điểm M, I, P thẳng hàng.

c) $DC^2 = AB.MI$

Lời giải

a) $MP \parallel AB$.

Ta có: $FP \parallel AC \Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{AF}{FB}$;

$$AK \parallel DC \Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK}$$

Tứ giác ADCF là hình bình hành nên $AF = DC$

Tứ giác BCDK là hình bình hành nên $FB = AK$

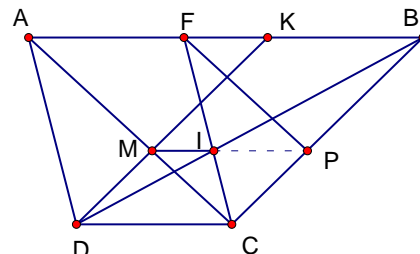
Từ các điều kiện ở trên ta có: $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} \Rightarrow MP \parallel AB$ (1)

b) Ba điểm M, I, P thẳng hàng.

Ta có: $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK} = \frac{DC}{FB}$ (Vì $AK = FB$);

$$FB \parallel DC \Rightarrow \frac{DC}{FB} = \frac{DI}{IB} \Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{DI}{IB} \Rightarrow IP \parallel DC \text{ hay } IP \parallel AB$$
 (2)

Từ (1) và (2) theo tiên đề O-clit suy ra ba điểm M, I, P thẳng hàng.



c) $DC^2 = AB.MI$

$$\text{C/m } \triangle MDC \text{ đồng dạng } \triangle KMA \text{ (?) } \Rightarrow \frac{AK}{DC} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{AK + DC}{DC} = \frac{AM + MC}{MC} \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{AC}{MC} \text{ (3)}$$

$$MI // AF \Rightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{AF}{MI} \Rightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{DC}{MI} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{AB}{DC} = \frac{DC}{MI} \Rightarrow DC^2 = AB.MI$ (đpcm)

Bài 60: Một đường thẳng đi qua đỉnh A của hình bình hành ABCD cắt đường chéo BD ở E và cắt các đường thẳng BC, DC theo thứ tự ở K, G. CMR:

a) $AE^2 = EK.EG$;

b) $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$

c) Khi đường thẳng thay đổi nhưng vẫn đi qua A thì tích $BK.DG$ có giá trị không đổi.

Lời giải

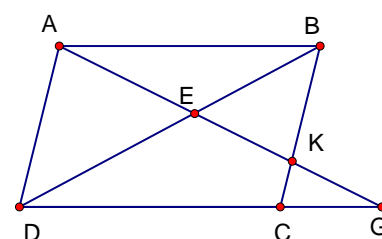
a) $AE^2 = EK.EG$

C/m $\frac{EK}{AE} = \frac{EB}{ED} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow AE^2 = EK.EG$ (?)

b) Ta có: $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG} \Leftrightarrow \frac{AE}{AK} + \frac{AE}{AG} = 1$

Ta có: $\frac{AE}{AK} = \frac{DE}{DB}$; $\frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD}$ nên $\frac{AE}{AK} + \frac{AE}{AG} = \frac{DE}{BD} + \frac{BE}{BD} = \frac{BD}{BD} = 1$

Vậy, $\frac{1}{AE} = \frac{1}{AK} + \frac{1}{AG}$ (đpcm)



c) Khi đường thẳng thay đổi nhưng vẫn đi qua A thì tích $BK.DG$ có giá trị không đổi.

Ta có: $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{CG} (?) \Rightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{CK}{CG} (1)$ và $\frac{KC}{AD} = \frac{CG}{DG} (?) \Rightarrow \frac{AD}{DG} = \frac{KC}{CG} (2)$

Từ (1) và (2) ta được $\frac{BK}{AB} = \frac{AD}{DG} \Rightarrow BK.DG = AB.AD$ (không đổi)

Vậy, ...

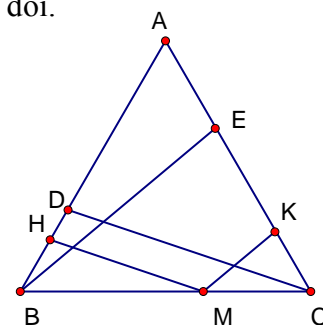
Bài 61: Cho tam giác ABC đều, các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AC, AB sao cho $AD = BE$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cạnh BC. Vẽ $MH // CD$, $MK // BE$ ($H \in AB$; $K \in AC$).
Cmr: Khi M chuyển động trên cạnh BC thì tổng $MH + MK$ có giá trị không đổi.

Lời giải

Ta có: $\frac{MH}{CD} + \frac{MK}{BE} = \frac{BM}{BC} + \frac{MC}{BC} = 1 (?)$

C/m $\triangle ACD = \triangle CEB$ (?) $\Rightarrow CD = BE$

Khi đó, $\frac{MH}{CD} + \frac{MK}{BE} = \frac{MH}{CD} + \frac{MK}{CD} = 1 \Rightarrow MH + MK = CD$ (không đổi) (?)



Bài 62: Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác BD cắt đường cao AH tại I
Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

- a) Chứng minh: tam giác ADI cân.
 b) Chứng minh: $AD \cdot BD = BI \cdot DC$
 c) Từ D kẻ DK vuông góc BC tại K. Tứ giác ADKI là hình gì? Chứng minh điều ấy.

Lời giải

a) Chứng minh: tam giác ADI cân....

Ta có: $\widehat{AID} = \widehat{BIH}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{BIH} + \widehat{HBI} = 90^\circ$ (tam giác HBI vuông tại H)

Suy ra $\widehat{AIB} + \widehat{IBH} = 90^\circ$

Mặt khác, $\widehat{ADI} + \widehat{IBA} = 90^\circ$ (tam giác ABD vuông tại A)

$\widehat{ABI} = \widehat{HBI}$ (BD là phân giác)

Suy ra $\widehat{AID} = \widehat{ADI}$, do đó tam giác AID cân tại A.

b) Chứng minh: $AD \cdot BD = BI \cdot DC$

Xét $\triangle IAB$ và $\triangle DCB$ có $\widehat{ABI} = \widehat{CBD}$, $\widehat{IAB} = \widehat{DCB}$ (cùng phụ với \widehat{ABC})

Do đó, $\triangle IAB$ đồng dạng $\triangle DCB \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BI}{BD}$ (1)

Mặt khác, $\triangle ABC$ có BD là đường phân giác nên $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BI}{BD} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow AD \cdot BD = BI \cdot DC$

c) Từ D kẻ DK vuông góc BC tại K. Tứ giác ADKI là hình gì? Chứng minh điều ấy.

Vì BD là tia phân giác của \widehat{ABC} nên $DA = DK$ (?)

Mà $IA = DA$ (câu a) nên $IA = DK$.

Tứ giác ADKI có $IA = DK$ và $IA \parallel DK$ (cùng vuông góc với BC)

Suy ra ADKI là hình bình hành

Ta lại có: $IA = DA$ (câu a)

Suy ra ADKI là hình thoi.

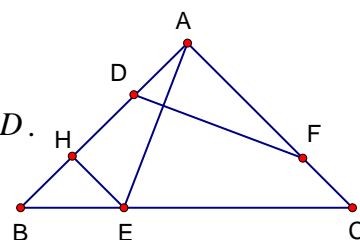
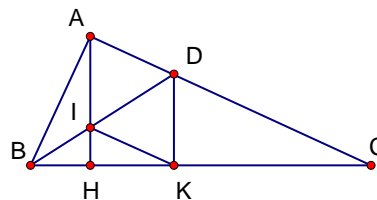
Bài 63: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, các điểm D, E, F theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CA theo cùng một tỉ số. Cmr: $AE = DF$; $AE \perp DF$.

Lời giải

+ **Cmr: $AE = DF$**

Vẽ $EH \perp AB$. Ta có: $\frac{HE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{AD}{AB}$, mà $AC = AB$ nên $HE = AD$.

Từ giả thiết $\frac{AD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CA}$ mà $AC = AB$ nên $AD = CF$.



Suy ra được $AD = EH = BH$ nên $AH = AF$.

Ta c/m được $\triangle AHE = \triangle FAD$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = DF$.

+ **Cmr:** $AE \perp DF$

(HS tự giải)

Bài 64: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có diện tích S, $AB = \frac{2}{3}CD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE. Tính diện tích tứ giác EMFN theo S.

Lời giải

Đặt $S_{AEM} = x$ (ĐK: $x > 0$)

Do $\frac{MF}{MA} = \frac{MD}{ME} = \frac{DF}{AE} = \frac{3}{2}$ nên $S_{EMF} = \frac{3}{2}x$ (1)

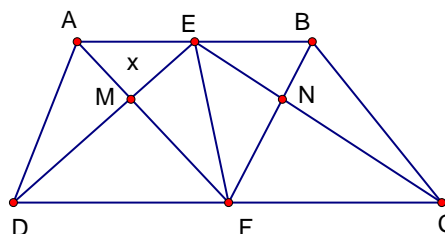
$$S_{AMD} = \frac{3}{2}x; S_{DMF} = \frac{3}{2}S_{AMD} = \frac{9}{4}x$$

Từ đó, $S_{AEFD} = \frac{25}{4}x$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{EMF} = \frac{6}{25}S_{AEFD}$.

Tương tự, $S_{ENF} = \frac{6}{25}S_{BEFC}$.

Suy ra $S_{EMFN} = \frac{6}{25}S_{ABCD} = \frac{6}{25}S$



Bài 65: Cho hình bình hành ABCD, M là trung điểm của BC. Điểm N trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Gọi giao điểm của AM, AN với BD là P, Q. Cmr: $S_{APQ} = \frac{1}{2}S_{AMN}$

Lời giải

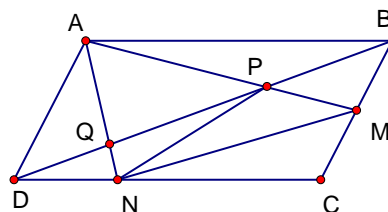
$$\text{Cmr: } S_{APQ} = \frac{1}{2}S_{AMN}$$

Trước hết ta có: $\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}} = \frac{S_{APQ}}{S_{APN}} \cdot \frac{S_{APN}}{S_{AMN}} = \frac{AQ}{AN} \cdot \frac{AP}{AM}$ (?)

Do đó, ta cần tính: $\frac{AQ}{AN}, \frac{AP}{AM}$

Ta có: $\frac{AQ}{QN} = \frac{AB}{DN} = 3(?) \Rightarrow \frac{AQ}{AQ+QN} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AQ}{AN} = \frac{3}{4}$

Và $\frac{AP}{PM} = \frac{AD}{BM} = 2 \Rightarrow \frac{AP}{AP+PM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{2}{3}$



Do đó, $\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}} = \frac{AQ}{AN} \cdot \frac{AP}{AM} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{APQ} = \frac{1}{2} S_{AMN}$.

Bài 66: Cho góc xOy và điểm M cố định thuộc miền trong của góc. Một đường thẳng quay quanh M cắt tia Ox, Oy theo thứ tự ở A, B. Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của tam giác MOA, MOB.

Cmr: $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$ không đổi.

Lời giải

Vẽ $MK \parallel OA$, ta có :

$$\frac{OK}{OB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{S_{MOK}}{S_{MOB}} = \frac{S_{MOA}}{S_{AOB}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MOK}}{S_2} = \frac{S_1}{S_1 + S_2} \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} = \frac{1}{S_{MOK}} \Rightarrow \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{1}{S_{MOK}} \text{ (không đổi)}$$

(Vì M cố định nên K cố định, do đó S_{MOK} không đổi)

Bài 67: Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CA theo tỉ số 1:2. Các điểm I, K theo thứ tự chia trong các cạnh ED, FE theo tỉ số 1:2. Chứng minh: $IK \parallel BC$.

Lời giải

Chứng minh: $IK \parallel BC$.

Gọi M là trung điểm của AF, N là giao điểm của DM và EF

Ta có: $\frac{AD}{DB} = \frac{AM}{MC} \left(= \frac{1}{2} \right)$ nên $DM \parallel BC$ (đl Ta-let đảo) (1)

$MN \parallel EC$ mà $MF = FC$ nên $EF = FN$

Ta có: $\frac{EK}{EN} = \frac{EK}{EF} \cdot \frac{EF}{EN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ mà $\frac{EI}{ED} = \frac{1}{3}$

Do đó, $\frac{EK}{EN} = \frac{EI}{ED}$ suy ra $IK \parallel DN$ (đl Ta-let đảo) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IK \parallel BC$ (đpcm).

Bài 68: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), M là trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của BM và AC.

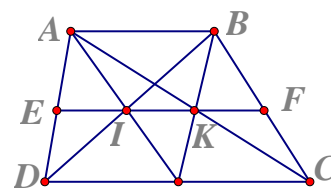
a) Chứng minh $IK \parallel AB$.

b) Đường thẳng IK cắt AD, BC theo thứ tự ở E, F. Cmr: $EI = IK = KF$.

Lời giải

a) Chứng minh $IK \parallel AB$.

Ta có: $\frac{MI}{IA} = \frac{ID}{IB} = \frac{DM}{AB} = \frac{MC}{AB} = \frac{MK}{KB} \Rightarrow IK \parallel AB$ (đl Ta-let đảo)



b) Cmr: $EI = IK = KF$.

Ta có: $\frac{EI}{DM} = \frac{IK}{MC} \left(= \frac{AI}{AM} \right)$ mà $DM = MC$ nên $EI = IK$.

C/m tương tự, $IK = KF$.

Vậy, $EI = IK = KF$ (đpcm)

Bài 69: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm K sao cho $AH = HK$. Vẽ $KE \perp BC$ ($E \in AC$).

a) Gọi M là trung điểm của BE. Tính \widehat{BHM} .

b) Gọi G là giao điểm của AM với BC. Chứng minh: $\frac{GB}{BC} = \frac{AH}{HK + HC}$.

Lời giải

a) Tính \widehat{BHM} .

Ta có: $AM = \frac{1}{2}BE = MK$ (?)

C/m được $\triangle MAH = \triangle MKH$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{KHM} = \frac{1}{2}\widehat{AHK} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BHM} = 180^\circ - \widehat{MHK} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

b) Chứng minh: $\frac{GB}{BC} = \frac{AH}{HK + HC}$

Kẻ $EI \parallel BC$ ($I \in AH$), C/m được IHKE là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow IE = HK = AH \Rightarrow \triangle AIE = \triangle BHA \text{ (cgv - gn)} \Rightarrow AB = AE$$

Tam giác ABE vuông cân tại A có $BM = ME$ nên AG là tia phân giác của \widehat{BAC}

$$\text{Do đó, } \frac{BG}{GC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BG}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} \quad (1)$$

$$\text{Vì } KE \parallel AH \text{ nên } \frac{HK}{HC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{HK}{HK + HC} = \frac{AE}{AE + AC}$$

$$\text{Hay } \frac{AH}{HK + HC} = \frac{AB}{AB + AC} \quad (2) \text{ (Vì } AH = HK, AB = AE \text{)}$$

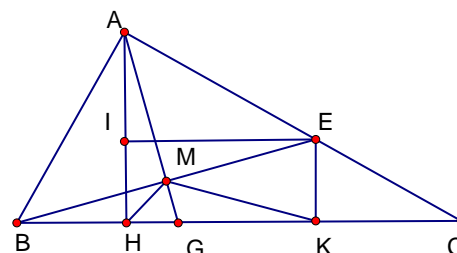
Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài 70: Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 90^\circ$, đường cao AH, đường trung tuyến BM cắt AH tại I. Giả sử $BH = AC$. Chứng minh: CI là tia phân giác của \widehat{ACB} .

Lời giải

Chứng minh: CI là tia phân giác của \widehat{ACB} .

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Kẻ $MK \perp BC$ tại K.

Vì $IH \parallel MK$ nên $\frac{IB}{IM} = \frac{BH}{HK} = \frac{AC}{HK}$ (1) (Vì $BH = AC$)

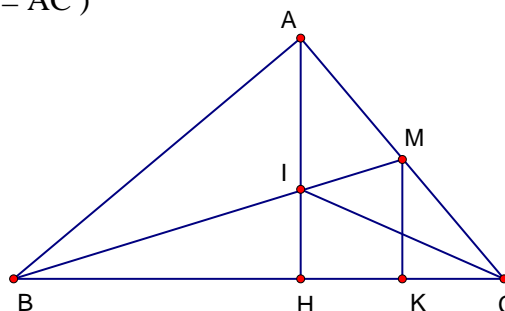
C/m được $\triangle ABC$ đồng dạng $\triangle HAC$ (g.g)

Do đó, $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC}$

$$\Rightarrow \frac{BC}{2CM} = \frac{AC}{2HK} \Rightarrow \frac{BC}{CM} = \frac{AC}{HK} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{IB}{IM} = \frac{CB}{CM}$

Hay CI là tia phân giác của \widehat{ACB} .



Bài 71: a) Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = 3cm$, $AC = 6cm$. Tính độ dài đường phân giác AD.

b) Cho tam giác ABC với đường phân giác AD thỏa mãn $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$. Tính \widehat{BAC} .

Lời giải

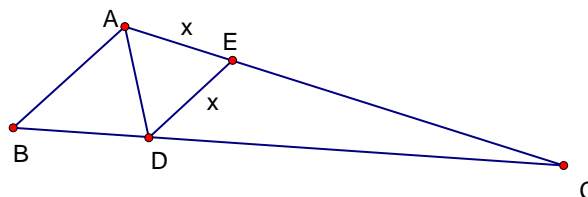
a) Tính độ dài đường phân giác AD.

Kẻ $DE \parallel AB$, c/m $\triangle ADE$ đều

Đặt $AD = DE = EA = x > 0$

$$\text{Ta có: } \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{6-x}{6}$$

Giải ra $x = 2cm$. Vậy, $AD = 2cm$.



b) Cho tam giác ABC với đường phân giác AD thỏa mãn $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$. Tính \widehat{BAC} .

Kẻ $DE \parallel AB$. Đặt $DE = EA = x > 0$. Ta có :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{AB} = \frac{AC-x}{AC} = 1 - \frac{x}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{AB} + \frac{x}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$\text{Theo đề bài, ta có: } \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AD = x$. Khi đó, $\triangle ADE$ đều suy ra $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

Bài 72: Cho tam giác ABC có $AB = 6cm$, $AC = 8cm$, các đường trung tuyến BD và CE vuông góc với nhau. Tính độ dài BC.

Lời giải

Gọi G là giao điểm của BD và CE. Đặt $GD = x$, $GE = y$ thì $GB = 2x$, $GC = 2y$.

Áp dụng định lý Pytago cho các tam giác vuông BGE, CGD ta có :

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$EG^2 + BG^2 = EB^2 = 9 \Rightarrow y^2 + 4x^2 = 9$$

$$\text{Và } DG^2 + CG^2 = DB^2 = 16 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 16$$

$$\text{Suy ra } x^2 + y^2 = 5 \quad (1)$$

Áp dụng định lý Pytago cho các tam giác vuông BGC, ta có :

$$BC^2 = BG^2 + CG^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4(x^2 + y^2) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } BC^2 = 4.5 = 20 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

Bài 73: Cho hình vuông ABCD. Trên tia BC lấy điểm M nằm ngoài đoạn BC và trên tia CD lấy điểm N nằm ngoài đoạn CD sao cho BM = DN. Đường vuông góc với MA tại M và đường vuông góc với NA tại N cắt nhau ở F. Chứng minh:

- AMFN là hình vuông;
- CF vuông góc với CA.

Lời giải

a) AMFN là hình vuông;

Theo đl Pi-ta-go, trong tam giác vuông CMN ta có :

$$MN^2 = CM^2 + CN^2$$

$$CM^2 = (BM - BC)^2 = BM^2 + BC^2 - 2BM \cdot BC$$

$$CN^2 = (CD + DN)^2 = CD^2 + DN^2 + 2CD \cdot DN$$

$$\text{Mà } BM = DN, AB = BC = CD = DA \text{ (gt)}$$

$$\text{Do đó, } MN^2 = CM^2 + CN^2 = BM^2 + AB^2 + DN^2 + AD^2 = AM^2 + AN^2$$

Theo đl Pi-ta-go đảo, suy ra tam giác AMN vuông tại A.

Tứ giác AMFN có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Ta c/m: $\triangle ABM = \triangle ADN$ (c.g.c) suy ra $AM = AN$.

Khi đó, AMFN là hình vuông.

b) CF vuông góc với CA.

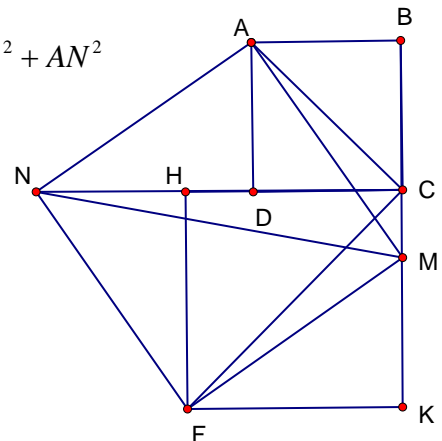
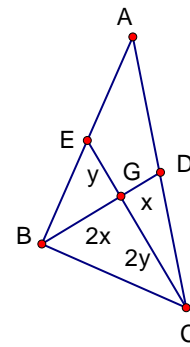
Kẻ $FH \perp DN, FK \perp CM$ kéo dài.

$$\text{C/m : } \triangle HFN = \triangle KFM \text{ (ch-gn)} \Rightarrow FH = FK$$

Do đó, F nằm trên tia phân giác của \widehat{NCM}

Khi đó, CF và CA là hai tia phân giác của hai góc kề bù.

Vậy, $CF \perp CA$ (đpcm).



Bài 74: Cho hình vuông ABCD có giao điểm các đường chéo là O. Kẻ đường thẳng d bất kỳ qua O. Chứng minh rằng: Tổng các bình phương các khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến đường thẳng d là một số không đổi.

Lời giải

Gọi chân các đường vuông góc kẻ từ các đỉnh A, B, C, D của hình vuông đến đường thẳng d qua O lần lượt là M, N, P, Q. Vì do đối xứng ta có :

$$AM = CP, BN = DQ, AO = OC, BO = DO$$

$$AM^2 + BN^2 + CP^2 + DQ^2 = 2(AM^2 + BN^2) \quad (1)$$

C/m : $\triangle AOM = \triangle OBN$ (?), suy ra $BN = OM$.

$$\text{Do đó, } AM^2 + BN^2 = AM^2 + OM^2 = OA^2 = \left(\frac{AB\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} AB^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AM^2 + BN^2 + CP^2 + DQ^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} AB^2 = AB^2$ (không đổi)

Bài 75: Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ một điểm O ở trong tam giác vẽ

$OD \perp BC$ ($D \in BC$), $OE \perp CA$ ($E \in CA$), $OF \perp AB$ ($F \in AB$).

Tìm vị trí của điểm O để tổng $OD^2 + OE^2 + OF^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

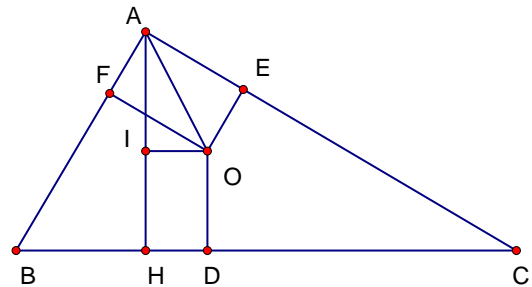
Lời giải

a) Chứng minh BĐT: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$

Ta có: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) \geq x^2 + 2xy + y^2$

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \quad (\text{đúng})$$

Vậy, $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$. Dấu “=” $\Leftrightarrow x = y$.



b) **Tìm vị trí của điểm O để tổng $OD^2 + OE^2 + OF^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.**

Kẻ $AH \perp BC$ tại H, $OI \perp AH$ tại I.

$$\text{Ta có: } OE^2 + OF^2 = OE^2 + AE^2 = OA^2 \geq AI^2$$

Mặt khác, $OD = IH$

$$\text{Suy ra } OD^2 + OE^2 + OF^2 \geq IH^2 + AI^2 \geq \frac{(IH + IA)^2}{2} = \frac{AH^2}{2} \quad (\text{không đổi})$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow OA = AI = IH = \frac{AH}{2} \Leftrightarrow O$ là trung điểm của AH.

Suy ra $GTNN(OD^2 + OE^2 + OF^2) = \frac{AH^2}{2} \Leftrightarrow O$ là trung điểm của AH.

* **Chú ý: BĐT** $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$. Dấu “=” $\Leftrightarrow x = y$

Bài 76: Cho hình thang vuông ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AB = 7cm$, $DC = 13cm$, $BC = 10cm$. Đường trung trực của BC cắt đường thẳng AD ở N. Gọi M là trung điểm của BC. Tính MN.

Lời giải

Kẻ $MH \perp AD, BK \perp CD$.

C/m: MH là đường trung bình của tứ giác ABCD.

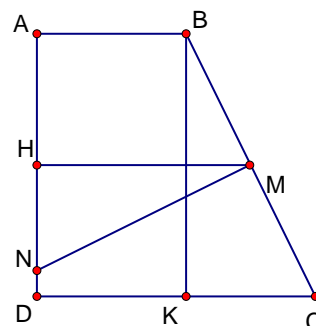
Do đó, $MH = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}(7 + 13) = 10(cm)$.

Ta có: $DK = AB = 7cm$, $KC = CD - DK = 13 - 7 = 6cm$,

$$BK = \sqrt{BC^2 - CK^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(cm).$$

C/m: $\triangle MHN$ đồng dạng $\triangle BKC$ (g.g)

Do đó, $\frac{MN}{BC} = \frac{MH}{BK} \Rightarrow MN = \frac{MH \cdot BC}{BK} = \frac{10 \cdot 10}{8} = 12,5(cm)$



Bài 77: Cho tam giác ABC vuông tại A. Dựng AD vuông góc với BC tại D. Đường phân giác BE cắt AD tại F. Chứng minh: $\frac{FD}{FA} = \frac{EA}{EC}$

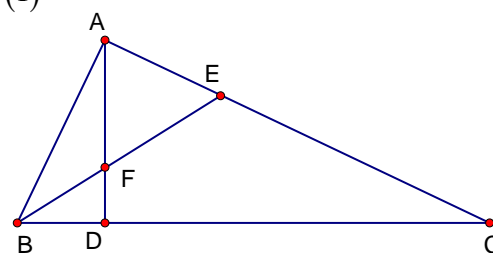
Lời giải

Ta có: BF là đường phân giác của $\triangle ABD$, do đó $\frac{FD}{FA} = \frac{BD}{BA}$ (1)

BE là đường phân giác của $\triangle ABC$, do đó $\frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC}$ (2)

C/m: $\triangle DBA$ đồng dạng $\triangle ABC$ (g.g), do đó $\frac{DB}{AB} = \frac{BA}{BC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{FD}{FA} = \frac{EA}{EC}$ (đpcm)



Bài 78: Cho tam giác ABC. Kẻ phân giác trong và ngoài của góc B cắt AC ở I và D (lần lượt theo thứ tự A, I, C, D). Từ I và D kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB ở M và N.

a) Tính AB và MN, biết $MI = 12cm$, $BC = 20cm$.

b) Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt BI tại E và cắt BD tại F. Chứng minh:

$$BI \cdot IC = AI \cdot IE \text{ và } CE = CF$$

Lời giải

a) Tính AB và MN, biết $MI = 12\text{cm}$, $BC = 20\text{cm}$.

+C/m: $\triangle MIB$ cân tại M $\Rightarrow MB = MI = 12\text{cm}$

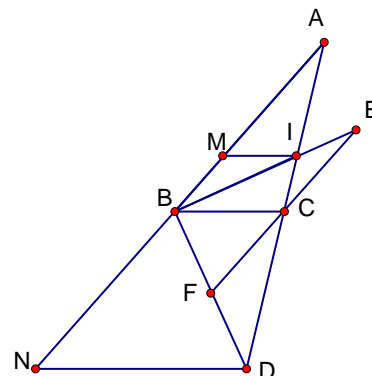
Vì $MI \parallel BC$ nên theo hệ quả của định lý Ta-lét ta có:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{IM}{BC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AB-12}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow AB = 30\text{cm}$$

BD là phân giác ngoài của $\triangle ABC$, ta có: $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$

Mặt khác, $BC \parallel MN$ nên theo đl Ta-lét ta có:

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AD}{CD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AB}{BN} = \frac{1}{2} \Rightarrow BN = 60\text{cm} \Rightarrow MN = 72\text{cm}$$



b) Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt BI tại E và cắt BD tại F.

Chứng minh: $BI \cdot IC = AI \cdot IE$ và $CE = CF$

Vì $CE \parallel BA$ (gt) nên $\frac{IE}{IB} = \frac{IC}{IA} \Rightarrow IB \cdot IC = IA \cdot IE$

Ta lại tính được $\frac{CE}{AB} = \frac{IC}{IA} = \frac{BM}{MA} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ (1)

$$\frac{CF}{AB} = \frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CE}{AB} = \frac{CF}{AB} \Rightarrow CE = CF$ (đpcm)

Bài 79: Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, dựng hai tia Bx , Cy vuông góc với cạnh BC . Trên tia Bx lấy điểm D sao cho $BD = BA$, trên tia Cy lấy điểm E sao cho $CE = CA$. Gọi G là giao điểm của BE và CD , K và L lần lượt là giao điểm của AD , AE với cạnh BC .

a) Chứng minh rằng $CA = CK$; $BA = BL$.

b) Đường thẳng qua G song song với BC cắt AD , AE theo thứ tự tại I , J . Gọi H là hình chiếu vuông góc của G lên BC . Chứng minh IHK là tam giác vuông cân.

Lời giải

a) Chứng minh rằng $CA = CK$; $BA = BL$.

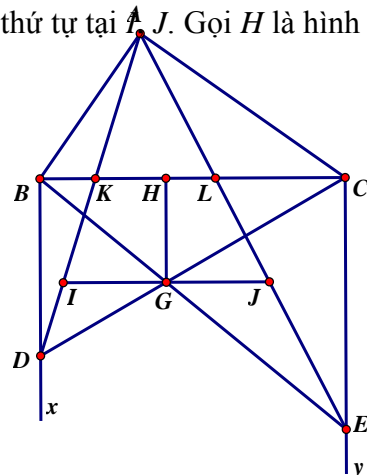
$\triangle BAD$ cân nên $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$.

Mặt khác $\widehat{AKC} = \widehat{BKD} = 90^\circ - \widehat{BDA} = 90^\circ - \widehat{BAD} = \widehat{KAC}$;

Suy ra $\triangle ACK$ cân tại C hay $CA = CK$.

Tương tự, $BA = BL$.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



b) Chứng minh IHJ là tam giác vuông cân.

Từ giả thiết ta có $IJ \parallel BC$, $BD \parallel GH \parallel CE$. Áp dụng Thales:

$$\frac{IG}{CK} = \frac{DG}{DC} = \frac{BH}{BC} = \frac{GH}{CE} = \frac{GH}{CK} \Rightarrow IG = GH \quad (1).$$

Tương tự, $GJ = GH \quad (2)$.

Hơn nữa, do $IJ \parallel BC$ và $HG \perp BC$ suy ra $HG \perp IJ \quad (3)$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra IHJ là tam giác vuông cân tại H .

Bài 80: Cho tam giác ABC , đường phân giác AD chia cạnh đối diện thành các đoạn thẳng $BD = 2\text{cm}$, $DC = 4\text{cm}$. Đường trung trực của AD cắt đường thẳng BC tại K . Tính độ dài KD .

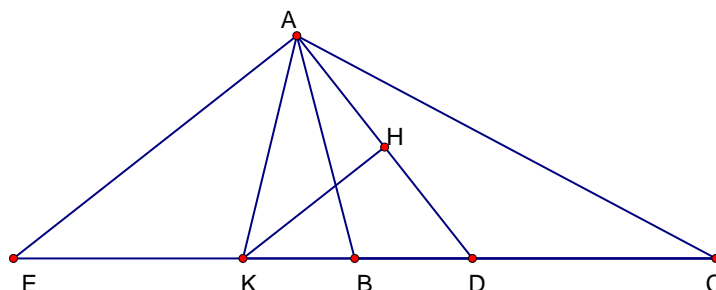
Lời giải

Cách 1: Vẽ đường phân giác ngoài tại A , cắt đường BC

tại E . Ta có: $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Suy ra $EB = BC = 6\text{cm}$, $ED = 8\text{cm}$.

Khi đó, $KD = \frac{ED}{2} = 4\text{cm}$.



Cách 2:

Ta có: $\widehat{ADK} = \widehat{DAB} + \widehat{BAK}$ (Vì $\triangle KAD$ cân tại K).

Mặt khác $\widehat{ADK} = \widehat{DAC} + \widehat{C}$ (T/c góc ngoài)

Mà $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$ (Vì AD là phân giác)

Do đó, $\widehat{BAK} = \widehat{C}$

Từ đó c/m được $\triangle KAB$ đồng dạng với $\triangle KCA$ (g.g)

Suy ra $\frac{KB}{KA} = \frac{AB}{AC}$ mà $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ nên $KB = \frac{1}{2} KA$

Do đó, $KB = \frac{1}{2} KD$. Từ đó tính $KD = 4\text{cm}$.

Bài 81: Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến, AD là đường phân giác. Biết $AC = 9\text{cm}$, $AB = 6\text{cm}$, diện tích tam giác ABC là 24cm^2 . Tính diện tích tam giác ADM .

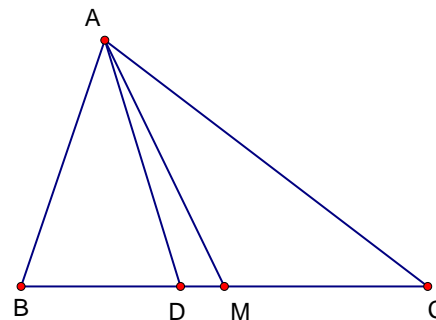
Lời giải

Theo t/c đường phân giác trong tam giác ta có:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{6} = \frac{DC}{9} = k \quad (k > 0)$$

Suy ra $DB = 6k$, $DC = 9k$

Ta có: $BC = DB + DC = 6k + 9k = 15k$



Do đó, $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{15k}{2}$

Suy ra $DM = BM - DB = \frac{15k}{2} - 6k = \frac{3k}{2}$

Từ đó suy ra $\frac{S_{ADM}}{S_{ABC}} = \frac{DM}{BC} = \frac{3k}{2} : 15k = \frac{1}{10}$

Vậy, $S_{ADM} = \frac{1}{10}S_{ABC} = \frac{1}{10} \cdot 24 = 2,4 (cm^2)$

Bài 82: Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM, cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F.

a) Chứng minh khi điểm D chuyển động trên cạnh BC thì tổng DE + DF có giá trị không đổi.

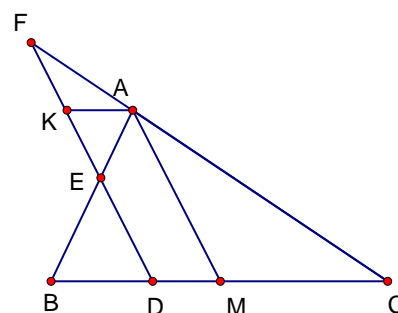
b) Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt EF ở K. Chứng minh rằng K là trung điểm của EF

Lời giải

a) Ta có: $\frac{DE}{AM} + \frac{DF}{AM} = \frac{BD}{BM} + \frac{DC}{MC} = \frac{BC}{BM} = 2(?)$

Suy ra $DE + DF = 2AM$ (không đổi)

b) C/m $\frac{FK}{AM} = \frac{KE}{AM} \left(= \frac{KA}{MC} \right) \Rightarrow EK = FK$



Vậy, K là trung điểm của EF.

Bài 83: Cho các tam giác ABC, I là giao điểm của ba đường phân giác. Đường thẳng vuông góc với CI tại I cắt AC, BC theo thứ tự ở M, N. Cmr:

a) Tam giác AIM đồng dạng với tam giác ABI.

b) $\frac{AM}{BN} = \left(\frac{AI}{BI} \right)^2$.

Lời giải

a) Ta có: $\widehat{M}_1 = \widehat{A}_2 + \widehat{I}_1$

Mà $\widehat{M}_1 = 90^\circ - \widehat{C}_1 = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} = \widehat{A}_2 + \widehat{B}_1$

Suy ra $\widehat{I}_1 = \widehat{B}_1$

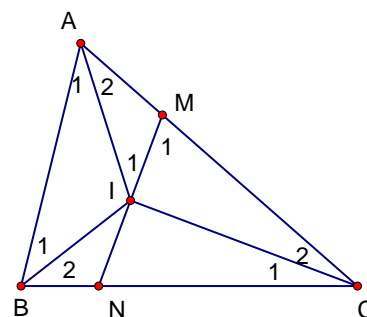
Do đó, $\triangle AIM$ đồng dạng $\triangle ABI$ (g.g)

b) Từ câu a, suy ra $\frac{AM}{AI} = \frac{AI}{AB} \Leftrightarrow AI^2 = AM \cdot AB$ (1)

Tương tự, $BI^2 = BN \cdot AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AI^2}{BI^2} = \frac{AM}{BN}$ (đpcm)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Bài 84: Cho tam giác ABC cân tại A có $BC = 2a$, M là trung điểm của BC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$.

- a) Cmr: $BD \cdot CE$ không đổi.
 b) Cmr: DM là tia phân giác của góc BDE
 c) Tính chu vi tam giác AED nếu ABC là tam giác đều.

Lời giải

- a) Cmr: $BD \cdot CE$ không đổi.

Ta có: $\widehat{DMC} = \widehat{DME} + \widehat{CME}$ và $\widehat{DMC} = \widehat{B} + \widehat{BDM}$

Mà $\widehat{DME} = \widehat{B}$ nên $\widehat{CME} = \widehat{BDM}$

Do đó, $\triangle BDM$ đồng dạng $\triangle CME$ (g.g)

Suy ra $\frac{BD}{CM} = \frac{MB}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = CM \cdot BM = a^2$ (không đổi).

- b) Cmr: DM là tia phân giác của góc BDE

Từ $\triangle BDM$ đồng dạng $\triangle CME$ (câu a) ta suy ra $\frac{DM}{ME} = \frac{DB}{CM} \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{BD}{BM}$ (vì $CM = BM$)

Do đó, $\triangle DME$ đồng dạng $\triangle DBM$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{MDE} = \widehat{BDM}$

Vậy, DM là tia phân giác của góc BDE.

- c) Tính chu vi tam giác AED nếu ABC là tam giác đều.

Từ câu b, suy ra DM là tia phân giác của góc BDE, EM là tia phân giác của góc CED.

Kẻ $MH \perp AB, MI \perp DE, MK \perp AC$.

Ta có: $DH = DI, EI = EK$

Do đó, $C_{ADE} = AI + AK = 2AK$

Ta lại có $CK = \frac{MC}{2} = \frac{a}{2}, AC = 2a$ nên $AK = 1,5a$

Vậy, chu vi của tam giác AED là $3a$.

Bài 85: Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC, điểm M nằm giữa A và D. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của MB và MC. Gọi E là giao điểm của DI và AB, F là giao điểm của DK và AC.

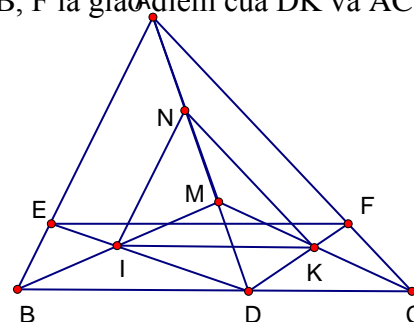
Cmr: $EF \parallel IK$.

Lời giải

Cmr: $EF \parallel IK$.

Gọi N là trung điểm của AM.

C/m: $\frac{ID}{IE} = \frac{KD}{KF} \left(= \frac{ND}{NA} \right) (?)$



Theo đl Ta – lét đảo suy ra $EF \parallel IK$ (đpcm)

*** Chú ý:** Có thể thay điều kiện: I, K là trung điểm của MB, MC bởi điều kiện tổng quát hơn là I, K chia trong MB, MC theo cùng một tỉ số.

Bài 86: Cho hình vuông $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo. Lấy điểm G, H thứ tự thuộc cạnh BC, CD sao cho $\widehat{GOH} = 45^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB . Cmr:

a) Tam giác HOD đồng dạng với tam giác OGB ;

b) $MG \parallel AH$

Lời giải

a) Tam giác HOD đồng dạng với tam giác OGB

Ta có: $\widehat{HOD} + \widehat{BOG} = 180^\circ - \widehat{GOH} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$$\widehat{OGB} + \widehat{BOG} = 180^\circ - \widehat{OBG} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Do đó, $\widehat{HOD} = \widehat{OGB} = 135^\circ$

Từ đó suy ra $\triangle HOD$ đồng dạng $\triangle OGB$ (g.g) (?)

b) $MG \parallel AH$:

Từ câu a, suy ra $\frac{HD}{OB} = \frac{DO}{BG}$

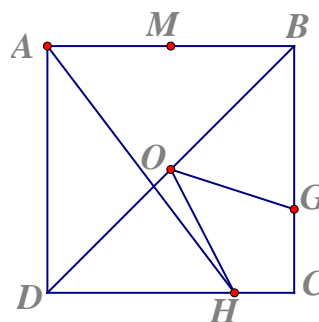
Đặt $BM = a$ thì $AD = 2a, OB = OD = a\sqrt{2}$

Ta có: $HD \cdot BG = OB \cdot OD = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 2a \cdot a = AD \cdot BM$

$$\Rightarrow \frac{HD}{AD} = \frac{BM}{BG}$$

Từ đó, c/m được $\triangle ADH$ đồng dạng $\triangle GMB$ (c.g.c) (?)

Suy ra $\widehat{AHD} = \widehat{GMB} \Rightarrow \widehat{HAB} = \widehat{GMB} \Rightarrow MG \parallel AH$ (đpcm).



Bài 87: Cho tam giác ABC và hình bình hành $AEDF$ có $E \in AB, F \in AC, D \in BC$. Tính diện tích của hình bình hành, biết rằng $S_{EBD} = 3\text{cm}^2, S_{FDC} = 12\text{cm}^2$.

Lời giải

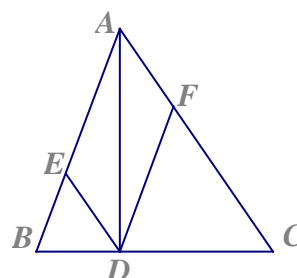
C/m: $\triangle EBD$ đồng dạng $\triangle FDC$ (g.g) (?)

Suy ra $\frac{S_{EBD}}{S_{FDC}} = \left(\frac{BE}{DF}\right)^2 = \left(\frac{ED}{FC}\right)^2$. Mà $\frac{S_{EBD}}{S_{FDC}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Do đó $\frac{BE}{DF} = \frac{ED}{FC} = \frac{1}{2}$

Suy ra $AE = DF = 2DE, AF = ED = \frac{1}{2}FC$

Vậy $S_{ADE} = 2S_{BED} = 2 \cdot 3 = 6(\text{cm}^2)$; $S_{ADF} = \frac{1}{2}S_{FDC} = 6(\text{cm}^2)$; $S_{AEDF} = S_{ADE} + S_{ADF} = 12(\text{cm}^2)$



Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Tổng quát, nếu $S_{BED} = m, S_{FDC} = n$ **thì** $S_{AEDF} = 2\sqrt{mn}$

Bài 88: Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 2. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, DC. Gọi I, H theo thứ tự là giao điểm của AF với BE, BD. Tính S_{EIHD}

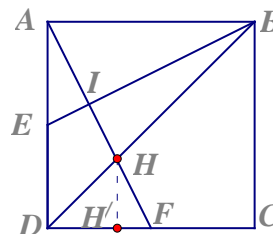
Lời giải

Trước hết tính S_{AIE}, S_{DHF}

Ta c/m $AF \perp BE$ (?)

Ta có: $\triangle AIE$ đồng dạng $\triangle ADF$ (g.g) (?) nên $\frac{S_{AIE}}{S_{ADF}} = \frac{AE^2}{AF^2} = \frac{1}{5}$ (?)

Ta có: $S_{ADF} = 1cm^2$ (?) $\Rightarrow S_{AIE} = \frac{1}{5}cm^2$



Vì $\triangle HH'F$ đồng dạng $\triangle ADF$ (g.g) (?) có tỉ số đồng dạng là $\frac{1}{3}$ nên ta tính được $HH' = \frac{2}{3}cm$

Do đó, $S_{DHF} = \frac{1}{3}cm^2$. Từ đó suy ra $S_{EIHD} = \frac{7}{15}cm^2$.

Bài 89: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD, AB < CD$). Gọi O là giao điểm của AC với BD và I là giao điểm của DA với CB. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh: $\frac{OA + OB}{OC + OD} = \frac{IA + IB}{IC + ID}$.

b) Chứng minh: Bốn điểm I; O; M; N thẳng hàng.

c) Giả sử $3AB = CD$ và diện tích hình thang ABCD bằng S. Hãy tính diện tích tứ giác IAOB theo S.

Lời giải

a) Chứng minh: $\frac{OA + OB}{OC + OD} = \frac{IA + IB}{IC + ID}$.

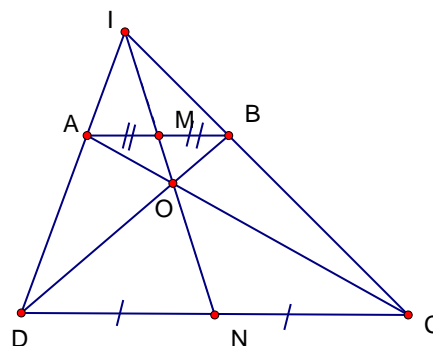
Chứng minh được: $\triangle OAB$ đồng dạng với $\triangle OCD$ (g - g)

Suy ra $\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA + OB}{OC + OD}$ (1)

Chứng minh được: $\triangle IAB$ đồng dạng với $\triangle IDC$ (g - g)

Suy ra $\frac{AB}{CD} = \frac{IA}{ID} = \frac{IB}{IC} = \frac{IA + IB}{ID + IC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OA + OB}{OC + OD} = \frac{IA + IB}{IC + ID}$



b) Chứng minh: Bốn điểm I; O; M; N thẳng hàng.

Ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow \frac{AM}{CN} = \frac{OA}{OC}$ (3) và $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ (vì $AB \parallel CD$, *so le trong*) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\triangle OAM$ đồng dạng với $\triangle OCN$ ($c - g - c$)

Do đó $\widehat{AOM} = \widehat{CON}$. Suy ra M, O, N thẳng hàng (*)

Ta lại có: $\frac{AB}{CD} = \frac{IA}{ID} \Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{IA}{ID}$ (5) và \hat{I} - chung (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\triangle IAM$ đồng dạng với $\triangle IDN$ ($c - g - c$)

Do đó $\widehat{AMI} = \widehat{DNI}$. Suy ra M, I, N thẳng hàng (**)

Từ (*) và (**) suy ra bốn điểm $I; O; M; N$ thẳng hàng.

c) Giả sử $3AB = CD$ và diện tích hình thang $ABCD$ bằng S . Hãy tính diện tích tứ giác $IAOB$ theo S

Ta có $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{AOB} + S_{AOD}} = \frac{1}{1+3} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{ABD}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{4} S_{ABD}$

Ta lại có $\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABD} + S_{BDC}} = \frac{1}{1+3} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{ABD} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$

Do đó $S_{AOB} = \frac{1}{16} S_{ABCD} = \frac{1}{16} S$ (7)

Mặt khác $\frac{S_{IAB}}{S_{ICD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{S_{IAB}}{S_{ICD} - S_{IAB}} = \frac{1}{9-1} \Rightarrow \frac{S_{IAB}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8} \Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{8} S_{ABCD} = \frac{1}{8} S$ (8)

Từ (7) và (8) suy ra $S_{IAOB} = S_{IAB} + S_{AOB} = \frac{1}{8} S + \frac{1}{16} S = \frac{3}{16} S$.

Bài 90: Cho hình vuông $ABCD$, trên tia đối của tia CD lấy điểm E . Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BE tại F , nó cắt DC tại G . Gọi H, I, J, M, K lần lượt là giao điểm của GF với BC , EF với HD , EA với HC , AB với HD , AE với DH .

90.1.a) Chứng minh: $\frac{DG}{AD} = \frac{GF}{EF}$; $CE = \frac{BC \cdot EF}{GF}$. Từ đó suy ra $DG + CE \geq 2CD$ và $EG \geq 3CD$

b) Tìm GTLN của $\frac{S_{ABCD}}{S_{AEG}}$

90.2.a) Chứng minh: $\triangle BHA = \triangle CEB$ và $\triangle DAE = \triangle CDH$

b) Chứng minh: $AE \perp DH$

c) Chứng minh: $AI \parallel DJ \parallel GB$

d) Chứng minh: $\triangle AFB$ đồng dạng với $\triangle ABH$; $\triangle AFD$ đồng dạng với $\triangle ADH$

Từ đó có nhận xét gì về \widehat{AFD} và \widehat{ADH} .

90.3.a) Chứng minh: $KD^2 = KI \cdot KH$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

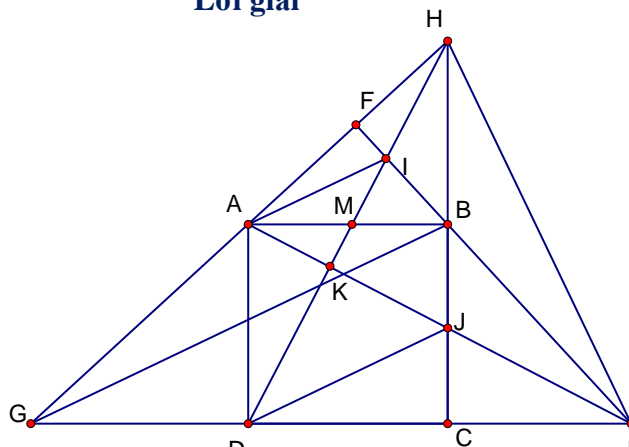
b) Chứng minh: $EJ.EK.HJ = HK.HD.EC$

c) Chứng minh: $HJ.HC.EK = EI.EF.HK$

90.4. Chứng minh: Khi E thay đổi trên tia đối của tia CD thì $\frac{BM}{CJ}$ là không đổi.

90.5. Qua bài này, các em hãy khai thác thêm nhiều tính chất mới thú vị.

Lời giải



90.1.a) Chứng minh: $\frac{DG}{AD} = \frac{GF}{EF}$; $CE = \frac{BC.EF}{GF}$. Từ đó suy ra $DG + CE \geq 2CD$ và $EG \geq 3CD$

+ C/ m: $\triangle DGA$ đồng dạng $\triangle FGE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DG}{FG} = \frac{DA}{FE} \Rightarrow \frac{DG}{AD} = \frac{GF}{EF}$. Từ đó, ta có:

$$DG = \frac{DA.GF}{EF} \quad (1)$$

+ C/ m: $\triangle CEB$ đồng dạng $\triangle FEG$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CE}{FE} = \frac{CB}{FG} \Rightarrow CE = \frac{CB.FE}{FG} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $DG + CE = \frac{DA.GF}{EF} + \frac{CB.FE}{FG} = CD \cdot \left(\frac{GF}{EF} + \frac{EF}{GF} \right)$ (Vì $AD = BC = CD$)

$$\Rightarrow DG + CE \geq CD \cdot 2 \sqrt{\frac{GF}{EF} \cdot \frac{EF}{GF}} = 2CD \quad (\text{BĐT Cô-si cho hai số không âm}).$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow \frac{GF}{EF} = \frac{EF}{GF} \Leftrightarrow GF = EF \Leftrightarrow \triangle FGE$ cân tại F. Vì $DG + CE \geq 2CD$ nên $EG \geq 3CD$

b) Tìm GTLN của $\frac{S_{ABCD}}{S_{AEG}}$

Ta có: $\frac{S_{ABCD}}{S_{AEG}} = \frac{AD.CD}{\frac{1}{2}AD.EG} = \frac{2CD}{EG} \leq \frac{2CD}{3CD} = \frac{2}{3}$. Suy ra $GTLN \left(\frac{S_{ABCD}}{S_{AEG}} \right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \triangle FGE$ cân tại F.

90.2.a) Chứng minh: $\triangle BHA = \triangle CEB$ và $\triangle DAE = \triangle CDH$

+ C/m: $\triangle BHA = \triangle CEB$ (g.c.g) ($\widehat{BAH} = \widehat{CBE}$ cùng phụ với \widehat{ABF}) $\Rightarrow BH = CE \Rightarrow CH = DE$

+ C/ m: $\triangle DAE = \triangle CDH$ (c.g.c)

b) Chứng minh: $AE \perp DH$

Vì $\triangle DAE = \triangle CDH$ (cmt) nên $\widehat{AED} = \widehat{DHC}$, mà $\widehat{DHC} = \widehat{ADK}$ ($AD \parallel CH$, slt)

Do đó, $\widehat{AED} = \widehat{ADK}$.

Xét $\triangle ADK$ có: $\widehat{DAK} + \widehat{ADK} = \widehat{DAE} + \widehat{AED} = 90^\circ$ (Vì $\triangle ADE$ vuông tại D).

Suy ra $\widehat{AKD} = 90^\circ \Rightarrow AE \perp DH$ tại K.

c) Chứng minh: $AI \parallel DJ \parallel GB$

Ta C/m được: + I là trực tâm của tam giác HAE suy ra $AI \perp HE$ (3)

+ J là trực tâm của tam giác HDE suy ra $DJ \perp HE$ (4)

+ B là trực tâm của tam giác HGE suy ra $GB \perp HE$ (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra $AI \parallel DJ \parallel GB$.

d) Chứng minh: $\triangle AFB$ đồng dạng với $\triangle ABH$; $\triangle AFD$ đồng dạng với $\triangle ADH$

Từ đó có nhận xét gì về \widehat{AFD} và \widehat{ADH} .

+ C/m được: $\triangle AFB$ đồng dạng với $\triangle ABH$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AH} \quad (\text{Vì } AB = AD).$$

Xét $\triangle AFD$ và $\triangle ADH$ có: \hat{A} - chung và $\frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AH}$ (cmt)

Do đó, $\triangle AFD$ đồng dạng $\triangle ADH$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{AFD} = \widehat{ADH}$

90.3.a) Chứng minh: $KD^2 = KI.KH$

Vì $AI \parallel DJ$ (cmt) nên $\frac{KD}{KI} = \frac{KJ}{KA}$ (6)

Vì $AD \parallel HJ$ (cùng vuông góc với GE) nên $\frac{KH}{KD} = \frac{KJ}{KA}$ (7)

Từ (6) và (7) suy ra $\frac{KD}{KI} = \frac{KH}{KD} \Rightarrow KD^2 = KH.KI$

b) Chứng minh: $EJ.EK.HJ = HK.HD.EC$

+ C/m: $\triangle ECJ$ đồng dạng $\triangle EKD$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{EC}{EK} = \frac{CJ}{KD} = \frac{EJ}{ED} \Rightarrow ED = \frac{EJ.EK}{EC} \quad (8)$$

+ C/m: $\triangle HCD$ đồng dạng $\triangle HKJ$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{HC}{HK} = \frac{CD}{KJ} = \frac{HD}{HJ} \Rightarrow HC = \frac{HD.HK}{HJ} \quad (9)$$

Mà $DE = HC$ (cmt) (10)

Từ (8), (9) và (10) suy ra $\frac{EJ.EK}{EC} = \frac{HD.HK}{HJ} \Rightarrow EJ.EK.HJ = HD.HK.EC$.

c) Chứng minh: $HJ.HC.EK = EI.EF.HK$

+ C/m: $\triangle HJK$ đồng dạng $\triangle HDC$ (g.g)

Suy ra $\frac{HJ}{HD} = \frac{HK}{HC} \Rightarrow HJ.HC = HK.HD \Rightarrow HJ.HC.EK = HK.HD.EK$ (11)

+ C/m: $\triangle EFA$ đồng dạng $\triangle EKI$ (g.g)

Suy ra $\frac{EF}{EK} = \frac{FA}{KI} = \frac{EA}{EI} \Rightarrow EF.EI = EK.EA = HD.EK$ (12) (Vì $EA = DH$ (cmt))

Từ (11) và (12) suy ra $HJ.HC.EK = EI.EF.HK$ (đpcm)

90.4. Chứng minh: Khi E thay đổi trên tia đối của tia CD thì $\frac{BM}{CJ}$ là không đổi.

C/m: $\triangle HMB$ đồng dạng $\triangle EJC$ (g.g). Suy ra $\frac{MB}{CJ} = \frac{HB}{EC} = 1$ (Vì $HB = EC$ (cmt))

Vậy, khi E di chuyển trên tia đối của tia CD thì $\frac{MB}{CJ} = 1$ không đổi.

90.5. Qua bài này, các em hãy khai thác thêm nhiều tính chất mới thú vị. (HS tự giải)

Bài 91: Cho $\triangle ABC$ cân tại A với A là góc nhọn; CD là đường phân giác \widehat{ACB} ($D \in AB$); qua D kẻ đường vuông góc với CD , đường này cắt đường thẳng CB tại E . Chứng minh:
 $BD = \frac{1}{2}EC$.

Lời giải

Gọi K là trung điểm cạnh EC .

Ta có: $\triangle DEC$ vuông tại D (gt) có K là trung điểm cạnh huyền EC

$$\Rightarrow DK = \frac{EC}{2} \text{ và } DK = KC$$

$$\Rightarrow \triangle KCD \text{ cân tại } K$$

$$\Rightarrow \widehat{KCD} = \widehat{KDC}.$$

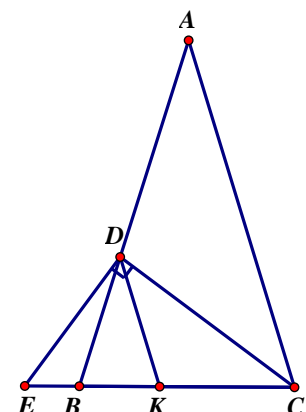
Vì $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$ (gt CD là đường phân giác \widehat{ACB})

$$\text{nên } \widehat{KDC} = \widehat{KCD} = \widehat{ACD}.$$

Ta lại có: $\widehat{BKD} = \widehat{KCD} + \widehat{KDC}$ (góc ngoài tại điểm K của $\triangle KCD$)

$$= \widehat{KCD} + \widehat{ACD}$$

$$= \widehat{ACB} = \widehat{DBC} \text{ (gt } \triangle ABC \text{ cân tại } A)$$



$$\Rightarrow \triangle DKB \text{ cân tại } D \Rightarrow DB = DK = \frac{EC}{2}. \quad (\text{đpcm})$$

Bài 92: Cho tứ giác $ABCD$. Đường thẳng qua A song song với BC , cắt BD tại P và đường thẳng qua B song song với AD cắt AC tại Q . Chứng minh $PQ \parallel CD$.

Lời giải

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD .

Áp dụng hệ quả định lý Talet, ta có:

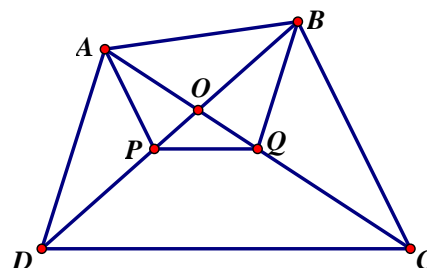
$$- AP \parallel BC \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OP}{OB}$$

$$- BQ \parallel AD \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{OQ}{OA} = \frac{OB}{OD}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OQ}{OA} = \frac{OP}{OB} \cdot \frac{OB}{OD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OQ}{OC} = \frac{OP}{OD}$$

$$\Rightarrow PQ \parallel CD \quad (\text{định lý Talet đảo}). \quad (\text{đpcm})$$



Bài 93: Cho hình thang $ABCD$, đáy AD và BC , có $\hat{A} = 90^\circ$, E là giao điểm của hai đường chéo, F là hình chiếu của E lên AB .

a) Chứng minh $\triangle BFC \sim \triangle AFD$.

b) Gọi K là giao điểm của AC và DF . Chứng minh $KE \cdot FC = CE \cdot FK$.

Lời giải

a) Chứng minh $\triangle BFC \sim \triangle AFD$.

$$\text{Vì } BC \parallel AD \text{ nên ta có } \frac{BC}{AD} = \frac{EB}{ED} \quad (1)$$

$$EF \parallel AD \text{ nên ta có } \frac{FB}{FA} = \frac{EB}{ED} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{BC}{AD} = \frac{FB}{FA};$$

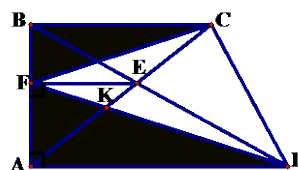
Lại có $\hat{A} = \hat{B} \quad (=90^\circ)$. Suy ra $\triangle BFC \sim \triangle AFD$ (c-g-c)

b) Gọi K là giao điểm của AC và DF . Chứng minh $KE \cdot FC = CE \cdot FK$.

$$\triangle BFC \sim \triangle AFD \Rightarrow \widehat{BFC} = \widehat{DFA} \Rightarrow \widehat{CFE} = \widehat{DFE}$$

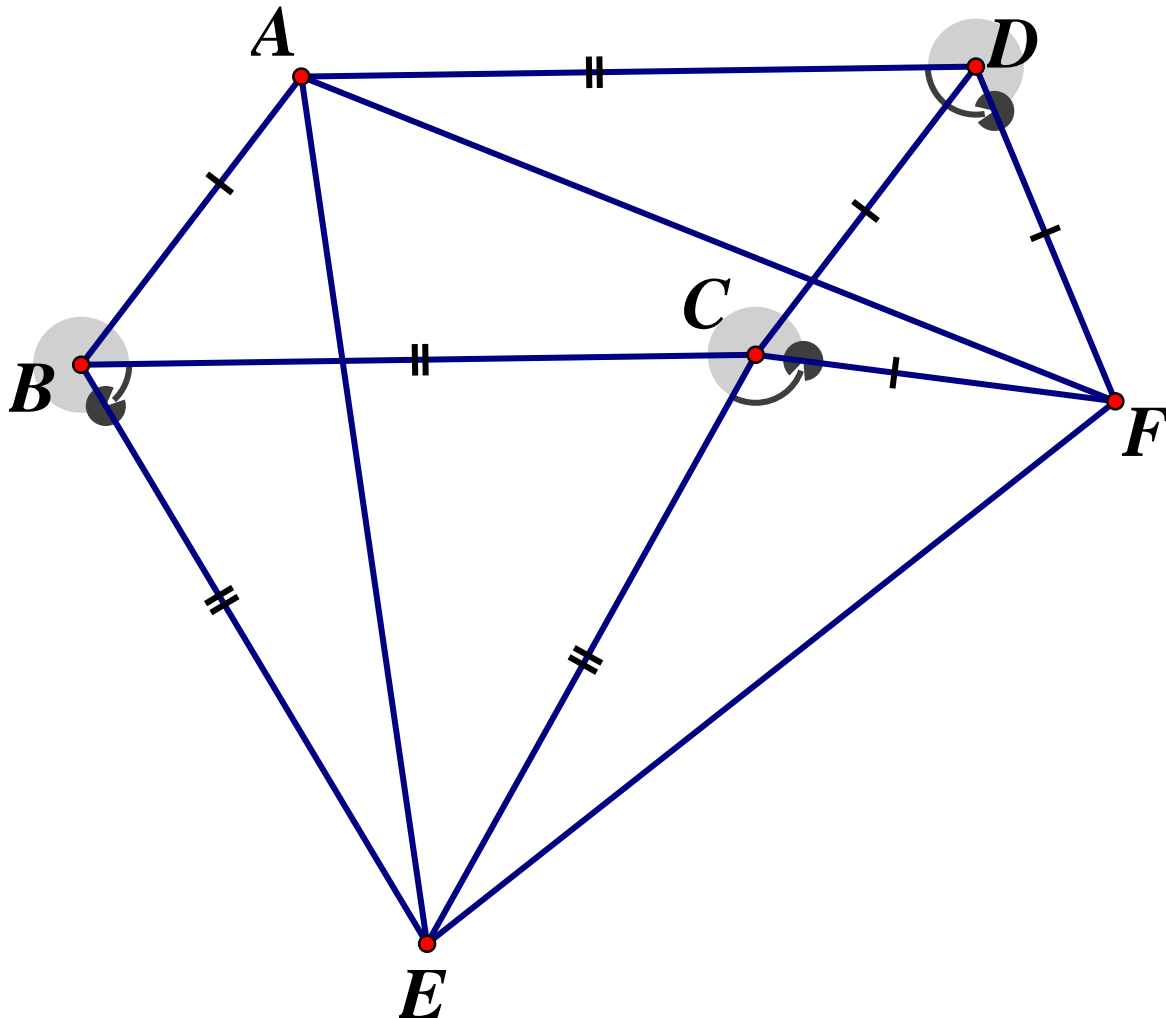
Hay FE là phân đường góc của $\triangle CFK$

$$\Rightarrow \frac{FK}{KE} = \frac{FC}{CE} \Rightarrow KE \cdot FC = CE \cdot FK \quad (\text{đpcm}).$$



Bài 94: Cho hình bình hành $ABCD$ có góc ABC nhọn. Vẽ ra phía ngoài hình bình hành các tam giác đều BCE và DCF . Tính số đo \widehat{EAF}

Lời giải



Chứng minh được $\widehat{ABE} = \widehat{ECF}$

Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle FCE (c.g.c) \Rightarrow AE = EF$

Tương tự: $AF = EF$

$\Rightarrow AE = EF = AF \Rightarrow \triangle AEF$ đều $\Rightarrow \widehat{EAF} = 60^\circ$

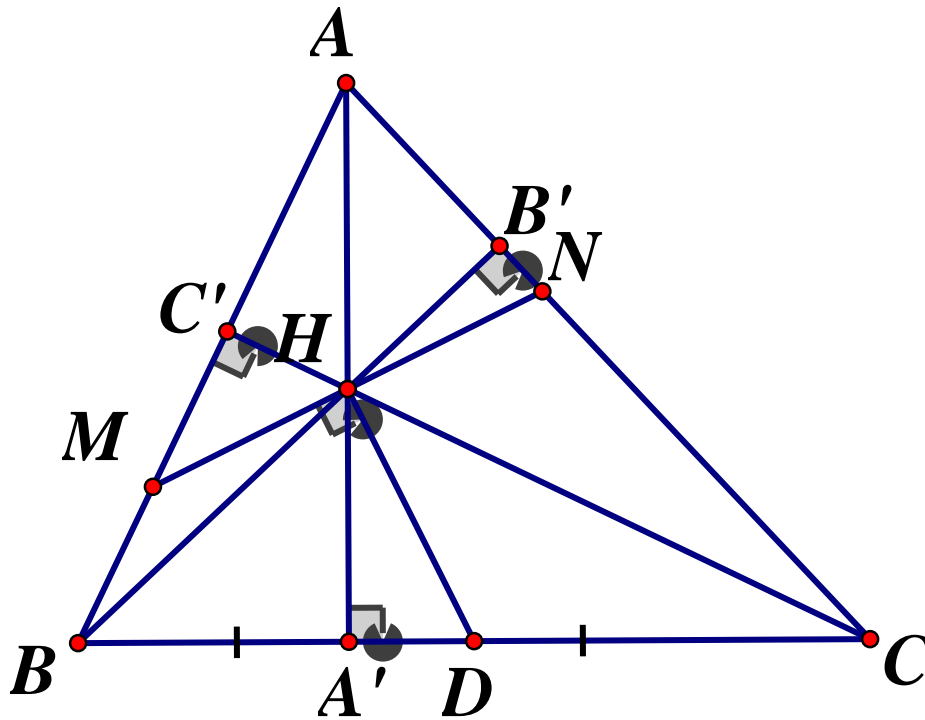
Bài 95: Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' và H là trực tâm

a) Chứng minh $BC' \cdot BA + CB' \cdot CA = BC^2$

b) Chứng minh rằng: $\frac{HB \cdot HC}{AB \cdot AC} + \frac{HA \cdot HB}{BC \cdot AC} + \frac{HC \cdot HA}{BC \cdot AB} = 1$

c) Gọi D là trung điểm của BC . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với DH cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh H là trung điểm của MN .

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle BHC' \sim \triangle BAB' \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{BC'}{BB'} \Rightarrow BH \cdot BB' = BC' \cdot BA$ (1)

Chứng minh $\triangle BHA' \sim \triangle BCB' \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BA'}{BB'} \Rightarrow BH \cdot BB' = BC \cdot BA'$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC' \cdot BA = BA' \cdot BC$

Tương tự: $CB' \cdot CA = CA' \cdot BC$

$\Rightarrow BC' \cdot BA + CB' \cdot CA = BA' \cdot BC + CA' \cdot BC = (BA' + A'C) \cdot BC = BC^2$

b) Có $\frac{BH}{AB} = \frac{BC'}{BB'} \Rightarrow \frac{BH \cdot CH}{AB \cdot AC} = \frac{BC' \cdot CH}{BB' \cdot AC} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$

Tương tự: $\frac{AH \cdot BH}{CB \cdot CA} = \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}; \frac{AH \cdot CH}{CB \cdot AB} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}$

$\Rightarrow \frac{HB \cdot HC}{AB \cdot AC} + \frac{HA \cdot HB}{AC \cdot BC} + \frac{HC \cdot HA}{BC \cdot AB} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

c) Chứng minh $\triangle AHM \sim \triangle CDH (g.g) \Rightarrow \frac{HM}{HD} = \frac{AH}{CD}$ (3)

Chứng minh $\triangle AHN \sim \triangle BDH (g.g) \Rightarrow \frac{AH}{BD} = \frac{HN}{HD}$ (4)

Bài 96: Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng cùng có tính chất chia hình vuông này thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 505 đường thẳng trong 2018 đường thẳng trên đồng quy.

Lời giải

Gọi E, F, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD . Lấy các điểm I, G trên EF và K, H trên PQ thỏa mãn:

$$\frac{IE}{IF} = \frac{HP}{HQ} = \frac{GF}{GE} = \frac{KQ}{KP} = \frac{2}{3}$$

Xét d là một trong các đường thẳng bất kỳ đã cho cắt hai đoạn thẳng AD, BC, EF lần lượt tại M, N, G' . Ta có:

$$\frac{S_{ABMN}}{S_{CDNM}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{AB \cdot (BM + AN)}{2}}{\frac{CD \cdot (CM + DN)}{2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{EG'}{G'F} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow G \equiv G' \text{ hay } d \text{ qua } G.$$

Từ lập luận trên suy ra mỗi đường thẳng thỏa mãn yêu cầu của đề bài đều đi qua một trong 4 điểm G, H, I, K

Do có 2018 đường thẳng đi qua 1 trong 4 điểm G, H, I, K theo nguyên lý Dirichle phải tồn tại ít nhất $\left\lceil \frac{2018}{4} \right\rceil + 1 = 505$ đường thẳng cùng đi qua một điểm trong 4 điểm trên.

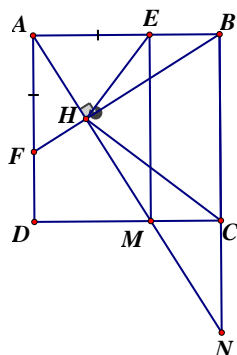
Vậy có ít nhất 505 đường thẳng trong số 2018 đường thẳng đã cho đồng quy.

Bài 97: Cho hình vuông $ABCD$ trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N

- 1) Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật
- 2) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH . Chứng minh rằng $AC = 2EF$
- 3) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Lời giải

Lời giải



- a) Ta có: $\widehat{DAM} = \widehat{ABF}$ (cùng phụ với \widehat{BAH})

$AB = AD$ (gt); $\widehat{BAF} = \widehat{ADM} = 90^\circ$ (ABCD là hình vuông)

$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BAF$ (g. c. g)

$\Rightarrow DM = AF$, mà $AF = AE$ (gt) nên $AE = DM$

Lại có: $AE \parallel DM$ (vì $AB \parallel DC$)

Suy ra tứ giác AEMD là hình bình hành . Mặt khác : $\widehat{DAE} = 90^\circ$ (gt)

Vậy tứ giác AEMD là hình chữ nhật

b) Ta có: $\triangle ABH \sim \triangle FAH$ (g. g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH} \text{ hay } \frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH} \quad (AB = BC; AE = AF)$$

Lại có: $\widehat{HAB} = \widehat{HBC}$ (cùng phụ với \widehat{ABH})

$\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle AEH$ (c. g. c)

$$\Rightarrow \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2, \text{ mà } \frac{S_{CBH}}{S_{EAH}} = 4 \text{ (gt)} \Rightarrow BC^2 = (2AE)^2$$

$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E$ là trung điểm của AB , F là trung điểm của AD .

Do đó: $BD = 2 EF$ hay $AC = 2 EF$ (đpcm)

c) Do $AD \parallel CN$. Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$$

Lại có: $MC \parallel AB$ (gt). Áp dụng hệ quả định lý Ta let ta có:

$$\frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{MN}{AN} = \frac{MC}{MN} \text{ hay } \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1 \text{ (Pytago)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \text{ (đpcm)}$$

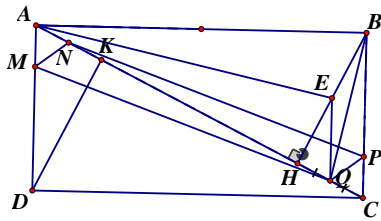
Bài 98: Cho hình chữ nhật ABCD, $AB = 2AD$. Trên cạnh AD lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $AM = CP$. Kẻ BH vuông góc với AC tại H. Gọi Q là trung điểm của CH đường thẳng kẻ qua P song song với MQ cắt AC tại N.

a) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

b) Khi M là trung điểm của AD. Chứng minh BQ vuông góc với NP.

c) Đường thẳng AP cắt DC tại điểm F. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{4AF^2}$

Lời giải



a) Chứng minh được $DH \parallel BK$ (1)

Chứng minh được $\triangle AHD = \triangle CKB \Rightarrow DH = BK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác MNPQ là hình bình hành.

b) Gọi E là trung điểm BK chứng minh được QE là đường trung bình $\triangle KBC$ nên

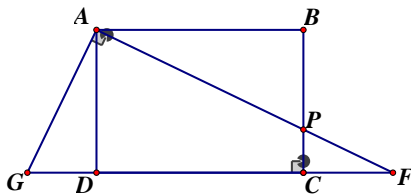
$$QE \parallel BC \Rightarrow QE \perp AB \text{ (vì } BC \perp AB) \text{ và } QE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$$

Chứng minh $AM = QE$ và $AM \parallel QE \Rightarrow AMQE$ là hình bình hành

Chứng minh $AE \parallel NP \parallel MQ$ (3)

Xét $\triangle AQB$ có BK và QE là hai đường cao của tam giác nên E là trực tâm của tam giác nên AE là đường cao thứ ba của tam giác $AE \perp BQ \Rightarrow BQ \perp NP$

c)



Vẽ tia Ax vuông góc với AF. Gọi giao của Ax với CD là G.

Chứng minh $\widehat{GAD} = \widehat{BAP}$ (cùng phụ với \widehat{PAD}) $\Rightarrow \triangle ABP \sim \triangle ADG$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AP}{AG} = \frac{AB}{AD} = 2 \Rightarrow AG = \frac{1}{2}AP$$

Ta có: $\triangle AGF$ vuông tại A có $AD \perp GF$ nên $AG \cdot AF = AD \cdot GF = 2S_{AGF}$

$$\Rightarrow AG^2 \cdot AF^2 = AD^2 \cdot GF^2 \quad (1)$$

Ta chia hai vế của (1) cho $AD^2 \cdot AG^2 \cdot AF^2$ mà $AG^2 + AF^2 = GF^2$ (dl Pytago)

$$\Rightarrow \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AG^2} + \frac{1}{AF^2} \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}AP\right)^2} + \frac{1}{AF^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{AB^2} = \frac{4}{AP^2} + \frac{1}{AF^2} \Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{4AF^2}$$

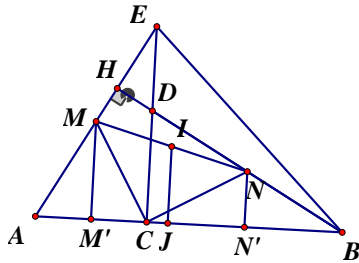
Bài 99: Cho đoạn thẳng AB dài a(cm). Lấy điểm C bất kỳ thuộc đoạn thẳng AB (C khác A và B).

Vẽ tia Cx vuông góc với AB. Trên tia Cx lấy hai điểm D và E sao cho $CD = CA$ và $CE = CB$.

a) Chứng minh AE vuông góc với BD

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

- b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AE và BD. Tìm vị trí của điểm C trên đoạn thẳng AB để đa giác CMEDN có diện tích lớn nhất
- c) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng khoảng cách từ I đến AB không phụ thuộc vào vị trí điểm C.

Lời giải

- a) Gọi H là giao điểm của BD và AE

$$\Delta ACE = \Delta DCB (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{B}$$

$$\text{Suy ra } \Delta DHE \sim \Delta DCB (\text{g.g}) \Rightarrow \widehat{DHE} = \widehat{CDB} = 90^\circ$$

- b) Ta có:

$$S_{CMEDN} = S_{CME} + S_{CDN} = \frac{1}{2} S_{ACE} + \frac{1}{2} S_{BCD} = \frac{1}{4} \cdot AC \cdot CE + \frac{1}{4} \cdot CB \cdot CD = \frac{1}{2} AC \cdot CB$$

Mặt khác, theo bất AM-GM ta có: $AC \cdot CB \leq \frac{(AC+CB)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$

Suy ra $S_{CMEDN} \geq \frac{a^2}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AC = CB$ hay C là trung điểm AB

- c) Gọi J, M', N' lần lượt là hình chiếu vuông góc của I, M, N lên AB

Ta có: IJ là đường trung bình của hình thang MNN'M' nên $IJ = \frac{MM' + NN'}{2}$ (1)

Ta lại có MM' là đường trung bình của ΔACE và NN' là đường trung bình ΔBCD nên

$$MM' = \frac{CE}{2} = \frac{CB}{2} \text{ và } NN' = \frac{CD}{2} = \frac{AC}{2} \quad (2)$$

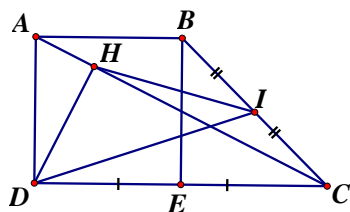
Từ (1) và (2) suy ra $IJ = \frac{\frac{AC}{2} + \frac{CB}{2}}{2} = \frac{AB}{4} = \frac{a}{4}$

Vậy khoảng cách của điểm I đến đoạn AB không phụ thuộc vào vị trí của điểm C.

Bài 100: Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$

- a) Tính diện tích hình thang ABCD theo a
- b) Gọi I là trung điểm của BC, H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC. Chứng minh $\widehat{HDI} = 45^\circ$

Lời giải



- a) Gọi E là trung điểm của CD, chỉ ra ABED là hình vuông và BEC là tam giác vuông cân
 Từ đó suy ra $AB = AD = a$; $BC = 2a$

$$\text{Diện tích của hình thang } ABCD \text{ là } S = \frac{(AB+CD).AD}{2} = \frac{(a+2a).a}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

- b) $\widehat{ADH} = \widehat{ACD}$ (1) (hai góc nhọn có cặp cạnh tương ứng vuông góc)

Xét hai tam giác ADC và IBD vuông tại D và B có:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{IB}{BC} = \frac{1}{2}$$

Do đó hai tam giác ADC và IBD đồng dạng

$$\text{Suy ra } \widehat{ACD} = \widehat{BDI} \quad (2)$$

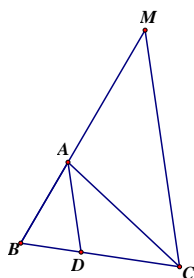
$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \widehat{ADH} = \widehat{BDI}$$

$$\text{Mà } \widehat{ADH} + \widehat{BDH} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BDI} + \widehat{BDH} = 45^\circ \text{ hay } \widehat{HDI} = 45^\circ$$

Bài 101: Cho tam giác ABC có $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$. Độ dài các đường phân giác trong của tam giác kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là l_a ; l_b ; l_c . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Lời giải



Gọi AD là đường phân giác trong góc A, qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường thẳng AB tại M

Ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{AMC}$ (hai góc ở vị trí đồng vị)

$\widehat{DAC} = \widehat{ACM}$ (hai góc ở vị trí so le trong)

Mà $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ nên $\widehat{AMC} = \widehat{ACM}$ hay $\triangle ACM$ cân tại A, suy ra $AM = AC = b$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Do $AD \parallel CM$ nên $\frac{AD}{CM} = \frac{BA}{BM} = \frac{c}{b+c}$

Mà $CM < AM + AC = 2b \Rightarrow \frac{c}{b+c} > \frac{AD}{2b} \Rightarrow \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ (1)

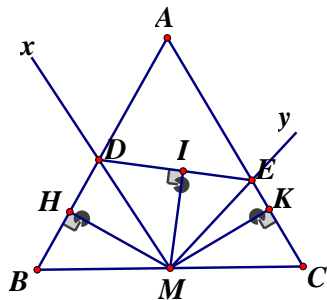
Tương tự ta có: $\frac{1}{l_b} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$ (2); $\frac{1}{l_c} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ (3);

Cộng (1);(2);(3) về theo về ta có điều phải chứng minh.

Bài 102: Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$, M là trung điểm của BC. $\widehat{xMy} = 60^\circ$ quay quanh đỉnh M cố định sao cho hai tia Mx; My cắt AB, AC lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng:

- $\triangle BDM \sim \triangle CME$ và tích $BD \cdot CE$ không phụ thuộc vào vị trí của \widehat{xMy}
- DM là phân giác của \widehat{BDE}
- $BD \cdot ME + CE \cdot MD > a \cdot DE$
- Chu vi $\triangle ADE$ không đổi khi \widehat{xMy} quay quanh M

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{DMC} = 60^\circ + \widehat{CME} = 60^\circ + \widehat{BDM} \Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{CME}$

Suy ra: $\triangle BMD \sim \triangle CEM$ (g.g) vì $\widehat{DBM} = \widehat{MCE} = 60^\circ$; $\widehat{BDM} = \widehat{CME}$ (cmt)

Suy ra $\frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = BM \cdot CM = a^2$ (không đổi)

b) Vì $\triangle BMD \sim \triangle CEM \Rightarrow \frac{BD}{MD} = \frac{CM}{EM}$ hay $\frac{BD}{MD} = \frac{BM}{ME}$

Lại có: $\widehat{DBM} = \widehat{DME} = 60^\circ \Rightarrow \triangle BMD \sim \triangle MED$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{EDM}$ suy ra DM là phân giác của \widehat{BDE}

c) Vì $\triangle BMD \sim \triangle MED \Rightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{BM}{ME} \Rightarrow BD \cdot ME = a \cdot DM$ (1)

Tương tự chứng minh được: $\triangle CEM \sim \triangle MED \Rightarrow CE \cdot MD = a \cdot ME$ (2)

Cộng về theo về của (1) và (2) ta được:

$BD \cdot ME + CE \cdot MD = a \cdot DM + a \cdot ME = a \cdot (DM + ME) < a \cdot DE$

d) Kẻ MH, MI, MK lần lượt vuông góc với AB, DE, AC tại H, I, K suy ra

$MH = MI = MK$

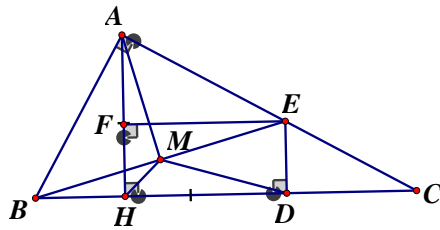
Suy ra $DI = DH$, $EI = EK$. Suy ra chu vi $\triangle ADE = 2AH$

Vì $\widehat{HBM} = 60^\circ$ và $BM = a$ nên $BH = \frac{a}{2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{2}$. Suy ra chu vi tam giác ADE không đổi và bằng $3a$

Bài 103: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH. Trên tia HC lấy $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E

- Chứng minh $AE = AB$
- Gọi M là trung điểm của BE. Tính góc AHM.

Lời giải



- Kẻ $EF \perp AH$ suy ra tứ giác HDEF là hình chữ nhật

$$\Rightarrow EF = HD \text{ mà } HD = AH \text{ (gt)} \Rightarrow EF = AH$$

Xét $\triangle HBA$ và $\triangle FAE$ có: $\widehat{H} = \widehat{F} = 90^\circ$; $AH = EF$; $\widehat{FEA} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ \widehat{FAE})

Do đó: $\triangle HBA = \triangle FAE$ (g.g) $\Rightarrow AE = AB$

- Ta có $\triangle BAE$ vuông tại A $\Rightarrow AM = \frac{1}{2}BE$

$$\triangle BDE \text{ vuông tại } D \Rightarrow DM = \frac{1}{2}BE$$

Do đó: $AM = DM$

Xét $\triangle AHM$ và $\triangle DHM$ có:

$$AM = MD$$

$$AH = HD$$

HM là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle AHM = \triangle DHM \Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{MHD} = \frac{\widehat{AHD}}{2} = 45^\circ$$

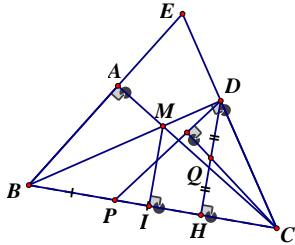
$$\text{Vậy } \widehat{AHM} = 45^\circ$$

Bài 104: Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AC. Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với tia BM, đường thẳng này cắt tia BM tại D, cắt tia BA tại E.

- Chứng minh: $EA \cdot EB = ED \cdot EC$

- b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh AC thì tổng $BM \cdot BD + CM \cdot CA$ có giá trị không đổi
- c) Kẻ $DH \perp BC$ ($H \in BC$). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, CH. Chứng minh $CQ \perp PD$.

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle EBD \sim \triangle ECA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{ED}{EA} \Rightarrow EA \cdot EB = ED \cdot EC$

b) Kẻ $MI \perp BC$ ($I \in BC$). Ta có: $\triangle BIM \sim \triangle BDC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BI}{BD} \Rightarrow BM \cdot BD = BI \cdot BC \quad (1)$$

Tương tự: $\triangle ACB \sim \triangle ICM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{CI}{CA} \Rightarrow CM \cdot CA = CI \cdot CB \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BM \cdot BD + CM \cdot CA = BI \cdot BC + CI \cdot BC = BC \cdot (BI + CI) = BC^2$

(Không đổi)

c) $\triangle BHD \sim \triangle DHC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BH}{DH} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{2BP}{2DQ} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BP}{DQ} = \frac{BD}{DC}$$

Chứng minh được: $\triangle DPB \sim \triangle CQD$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BDP} = \widehat{CDQ}$

Mà $\widehat{BDP} + \widehat{PDC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DCQ} + \widehat{PDC} = 90^\circ \Rightarrow CQ \perp PD$

Bài 105: Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$ và chu vi bằng 18cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC, biết các độ dài đều là số nguyên dương và BC có độ dài là một số chẵn.

Lời giải

Vì $AB < AC < BC$ nên $2BC > AB + AC \Rightarrow 3BC > AB + AC + BC = 18 \Rightarrow BC > 6 \quad (1)$

Theo BĐT tam giác ta có: $BC < AB + AC \Rightarrow 2BC < AB + AC + BC = 18 \Rightarrow BC < 9 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $6 < BC < 9$ mà BC có độ dài là một số chẵn. Do đó $BC = 8cm$.

Tương tự, c/m được $2 < AB < AC < 8$ và $AB + AC = 10$

Suy ra $AB = 3cm, AC = 7cm$ hoặc $AB = 4cm, AC = 6cm$

Vậy, $AB = 3cm, AC = 7cm, BC = 8cm$ hoặc $AB = 4cm, AC = 6cm, BC = 8cm$.

Bài 106: Cho tam giác ABC có $AC = 3AB$ và số đo của góc A bằng 60° . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{ADB} = 30^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với AD tại D lấy điểm E sao cho $DE = DC$ (E và A cùng phía với BC). Chứng minh rằng $AE \parallel BC$.

Lời giải

Chứng minh rằng $AE \parallel BC$.

Gọi K là giao điểm của AC và DE .

Vì: $\widehat{ADB} = 30^\circ$; $\widehat{ADK} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{KDC} = 60^\circ$

Và $\triangle DEC$ đều

Nên $\triangle ABC \cong \triangle DKC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DK}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$.

Do đó $DK = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}DE \Rightarrow \frac{KD}{KE} = \frac{1}{2}$ (1).

Kẻ $CH \perp DE$ ($H \in DE$) thì $DH = \frac{1}{2}DE \Rightarrow \frac{KH}{KD} = \frac{1}{2}$;

Mặt khác $AD \parallel CH$ (cùng vuông góc với DH);

Nên theo Talet ta có: $\frac{KC}{KA} = \frac{KH}{KD} = \frac{1}{2}$ (2).

Từ (1), (2) và do $\widehat{AKE} = \widehat{CKD}$ nên theo Talet $AE \parallel CD$.

Bài 107: Cho tam giác ABC , M là trung điểm của AC và các đường thẳng AD , BM và CE đồng qui tại K ($K \in AM$; $D \in BC$; $E \in AB$). Hai tam giác AKE và BKE có diện tích là 10 và 20. Tính diện tích tam giác ABC

Lời giải

Tính diện tích tam giác ABC .

+ Gọi h là khoảng cách từ K đến AB , ta có:

$$\frac{S_{\triangle AKE}}{S_{\triangle BKE}} = \frac{AE \times h / 2}{BE \times h / 2} = \frac{AE}{BE} \Leftrightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2}.$$

+ Suy ra: $\frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle BCE}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle ACE}$

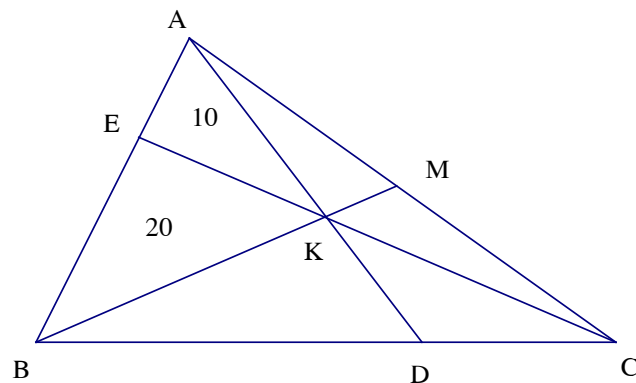
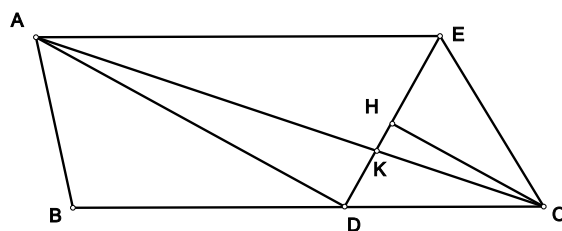
+ Tương tự: $\frac{S_{\triangle AKM}}{S_{\triangle CKM}} = \frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow S_{\triangle AKM} = S_{\triangle CKM}$

Đặt $x = S_{\triangle AKM} = S_{\triangle CKM}$, ta có:

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM} \Leftrightarrow 20 + 10 + x = x + S_{\triangle BCK} \Rightarrow S_{\triangle BCK} = 30$$

Do đó, $S_{\triangle BCK} + S_{\triangle BEK} = 20 + 30 = 50$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Mà $BE = 2AE \Rightarrow S_{AEC} = 25 \Rightarrow S_{ABC} = 75$ (đvdt)

Bài 108: Cho tam giác ABC . Gọi Q là điểm trên cạnh BC (Q khác B, C). Trên AQ lấy điểm P (P khác A, Q). Hai đường thẳng qua P song song với AC, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N .

a) Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AB} + \frac{AN}{AC} + \frac{PQ}{AQ} = 1$.

b) Xác định vị trí điểm Q để $\frac{AM \cdot AN \cdot PQ}{AB \cdot AC \cdot AQ} = \frac{1}{27}$.

Lời giải

a) Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AB} + \frac{AN}{AC} + \frac{PQ}{AQ} = 1$.

Gọi E, F là giao điểm của NP, MP với BC .

Do $NE \parallel AB, MF \parallel AC$ nên theo Thales ta có:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{FC}{BC}; \frac{AN}{AC} = \frac{BE}{BC}$$

$$\frac{PQ}{AQ} = \frac{EQ}{BQ} = \frac{FQ}{QC} = \frac{EQ + FQ}{BQ + QC} = \frac{EF}{BC}.$$

Từ đó: $\frac{AM}{AB} + \frac{AN}{AC} + \frac{PQ}{AQ} = \frac{FC}{BC} + \frac{BE}{BC} + \frac{EF}{BC} = 1$ (đpcm).

b) Xác định vị trí điểm Q để $\frac{AM \cdot AN \cdot PQ}{AB \cdot AC \cdot AQ} = \frac{1}{27}$.

Áp dụng câu a) và BĐT Cauchy cho 3 số dương: $\frac{AM}{AB}, \frac{AN}{AC}, \frac{PQ}{AQ}$:

$$1 = \frac{AM}{AB} + \frac{AN}{AC} + \frac{PQ}{AQ} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{PQ}{AQ}} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{PQ}{AQ} \leq \frac{1}{27}.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{PQ}{AQ} = \frac{1}{3}$.

Khi đó $MN \parallel BC$. Vì AQ đi qua trung điểm MN nên Q là trung điểm của BC .

Vậy, khi Q là trung điểm của BC thì $\frac{AM \cdot AN \cdot PQ}{AB \cdot AC \cdot AQ} = \frac{1}{27}$.

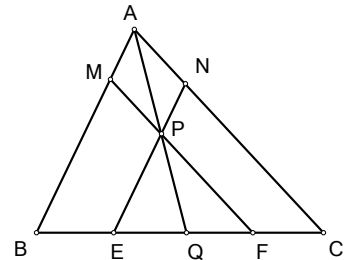
Bài 109: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AC và BD . Gọi G là giao điểm của đường thẳng đi qua E vuông góc với AD với đường thẳng đi qua F vuông góc với BC . So sánh GA và GB .

Lời giải

So sánh GA và GB .

Gọi I là trung điểm của AB .

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Nối EF, EI, IF, ta có IE là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow IE \parallel BC$

$$\text{Mà } GF \perp BC \Rightarrow GF \perp IE \quad (1)$$

Chứng minh tương tự $GE \perp IF$ (2)

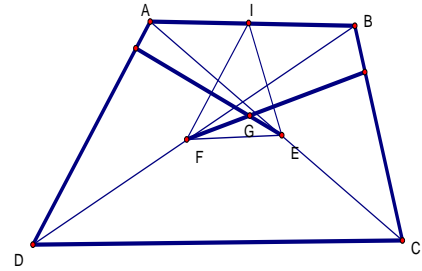
Từ (1) và (2) \Rightarrow G là trục tâm của ΔEIF

$$\Rightarrow \text{IG} \perp \text{EF} \quad (3)$$

Dễ chứng minh $EF \parallel AB$ (4)

Từ (3) và (4) \Rightarrow IG \perp AB

Vậy $\triangle AGB$ cân tại $G \Rightarrow GA = GB$.



Bài 110: a) Cho tam giác ABC cân tại A ($\hat{A} < 90^\circ$), có BH là đường cao, BD là phân giác của góc

$\widehat{ABH} (H, D \in AC)$. Chứng minh rằng: $\frac{BH}{CD} > 1$.

b) Cho tam giác ABC có AD là đường phân giác trong của góc A ($D \in BC$). Gọi k_a là khoảng cách từ D đến AB (hoặc AC). Tương tự, gọi BE là phân giác trong của góc B ($E \in AC$) và k_b là khoảng cách từ E đến BA (hoặc BC), gọi CF là phân giác trong của góc C ($F \in AB$) và k_c là khoảng cách từ F đến CA (hoặc CB). Gọi h_a, h_b, h_c tương ứng là 3 chiều cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác đã cho. Tìm giá trị bé nhất của biểu thức $\frac{k_a}{h_a} + \frac{k_b}{h_b} + \frac{k_c}{h_c}$

Lời giải

a) Chứng minh rằng: $\frac{BH}{CD} > 1$

Kẻ DK vuông góc với AC tại D, $K \in AB$, kẻ DL vuông góc với BC tại L,

Gọi O là giao điểm của DL và BH .

$$\text{Ta có } \widehat{DBC} = \widehat{DBH} + \widehat{HBC} = \frac{1}{2} \widehat{AKD} + 90^0 - \widehat{C}$$

$$= \frac{1}{2}(90^0 - \hat{A}) + 90^0 - \hat{C} = \frac{1}{2}[90^0 - (180^0 - 2\hat{C})] + 90^0 - \hat{C} = 45^0$$

Suy ra tam giác BDL vuông cân tại L $\Rightarrow BL = DL$.

C/m: $\Delta BLO = \Delta DLC (cgv - gnk)$

Suy ra $BO = DC$

Mà $BH = BO + OH > BO$. Do đó, $BH > DC$

Suy ra $\frac{BH}{CD} > 1$ (đpcm)

b). Tìm giá trị bé nhất của biểu thức $\frac{k_a}{h_a} + \frac{k_b}{h_b} + \frac{k_c}{h_c}$

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a$ (1)

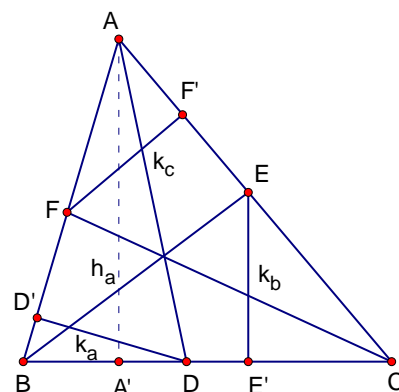
Mặt khác, $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} = \frac{1}{2}(b+c).k_a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{k_a}{h_a} = \frac{a}{b+c}$

Tương tự, $\frac{k_b}{h_b} = \frac{b}{c+a}, \frac{k_c}{h_c} = \frac{c}{a+b}$

Suy ra $\frac{k_a}{h_a} + \frac{k_b}{h_b} + \frac{k_c}{h_c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (theo câu a)

Suy ra $GTNN \left(\frac{k_a}{h_a} + \frac{k_b}{h_b} + \frac{k_c}{h_c} \right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c$. Lúc đó tam giác ABC đều.



Bài 111: Cho hình bình hành ABCD có $\hat{A} < 90^\circ$. Dựng các tam giác vuông cân tại A là BAM và DAN (B và N cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AD, D và M cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB). Chứng minh rằng AC vuông góc với MN.

Lời giải

ABCD là hình bình hành nên

$$\widehat{DAB} + \widehat{CDA} = 180^\circ$$

Từ giả thiết ta lại có

$$\widehat{MAN} + \widehat{DAB} = \widehat{MAB} + \widehat{DAN} = 180^\circ$$

Suy ra $\widehat{MAN} = \widehat{CDA}$

Từ đó $\triangle MAN = \triangle CDA$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{AMN} = \widehat{DCA} = \widehat{BAC}$.

Lại có $AB \perp AM$

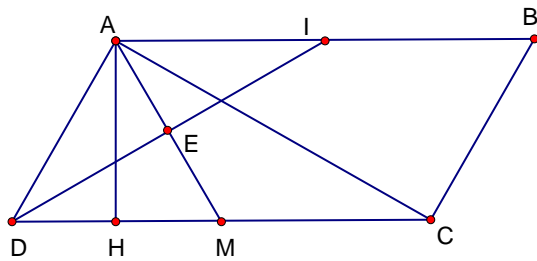
Suy ra $MN \perp AC$.

Bài 112: Cho hình bình hành ABCD có $\hat{A} = 120^\circ$. Đường phân giác của góc D đi qua trung điểm I của cạnh AB.

a) Chứng minh: $AB = 2AD$.

b) Kẻ $AH \perp DC$ ($H \in DC$). Chứng minh: $DI = 2AH$.

c) Chứng minh: $AC \perp AD$.

Lời giải

a) Chứng minh: $AB = 2AD$

Ta có: $AB = 2AI$ (Vì I là trung điểm của AB) (1)

Ta lại có: $\widehat{ADI} = \widehat{IDC}$ (Vì DI là phân giác của \widehat{ADC}),
mà $\widehat{AID} = \widehat{IDC}$ (Vì $AB \parallel DC$, slt)

Do đó, $\widehat{ADI} = \widehat{AID}$ suy ra $\triangle ADI$ cân tại A nên $AD = AI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB = 2AD$

b) Kẻ $AH \perp DC$ ($H \in DC$). Chứng minh: $DI = 2AH$

Gọi M là trung điểm của DC , E là giao điểm của AM và DI .

Ta có $DA = DM \left(= \frac{1}{2} AB \right)$ và $\widehat{ADM} = 60^\circ$ nên tam giác ADM đều.

Suy ra DI là đường phân giác nên cũng là đường cao.

Do đó, $DI \perp AM$ tại E .

Vì $\triangle ADM$ đều có AH, DE là hai đường cao nên $AH = DE$ (3)

Vì $\triangle ADI$ cân tại A , có $AE \perp DI$ tại E nên $DI = 2DE$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $DI = 2AH$.

c) Chứng minh: $AC \perp AD$

Xét tam giác ADC có AM là đường trung tuyến và $AM = DM = \frac{1}{2} DC$ nên $\widehat{DAC} = 90^\circ$.

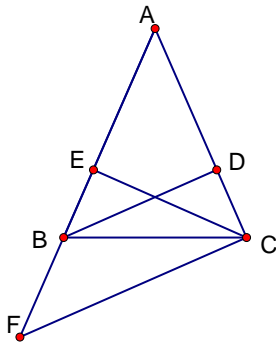
Vậy, $AC \perp AD$.

Bài 113: Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , kẻ các đường cao BD và CE . Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với cạnh AC , đường thẳng này cắt đường thẳng AB tại điểm F .

b) Chứng minh: $AB^2 = AE \cdot AF$.

b) Chứng minh: $\frac{CE}{CF} = \frac{BE}{BF}$.

Lời giải



a) Chứng minh hệ thức: $AB^2 = AE \cdot AF$.

Ta có: $BD \parallel FC$ (cùng vuông góc với AC)

Suy ra $\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AF}$ (1)

Ta lại có: $AB = AC$ và $AE = AD$ (?) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AF}$, do đó $AB^2 = AE \cdot AF$.

b) Chứng minh: $\frac{CE}{CF} = \frac{BE}{BF}$.

+ C/m: $\triangle BCE = \triangle CBD$ (ch - gn)

Suy ra $\widehat{BCE} = \widehat{DBC}$

+ Mặt khác, $\widehat{DBC} = \widehat{BCF}$ (Vì $BD \parallel FC$, slt)

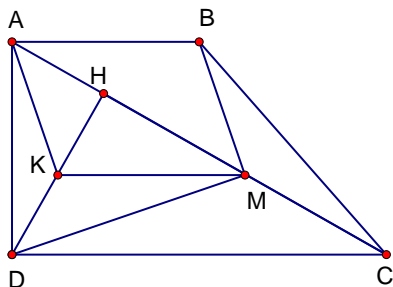
Suy ra $\widehat{BCE} = \widehat{BCF}$

Khi đó CB là đường phân giác của $\triangle ECF$.

Suy ra $\frac{CE}{CF} = \frac{BE}{BF}$ (đpcm)

Bài 114: Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) và $DC = 2AB$, H là hình chiếu của D trên AC và M là trung điểm của đoạn HC . Chứng minh: $BM \perp MD$.

Lời giải



Gọi K là trung điểm của DH .

C/m: MK là đường trung bình của $\triangle DHC$.

Suy ra $KM \parallel DC$ và $KM = \frac{1}{2}DC$ (1)

Ta lại có: $AB = \frac{1}{2}DC$ và $AB \parallel DC$ (gt) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB = KM$ và $AB \parallel KM$

Do đó, $ABMK$ là hình bình hành, cho ta $BM \parallel AK$ (3)

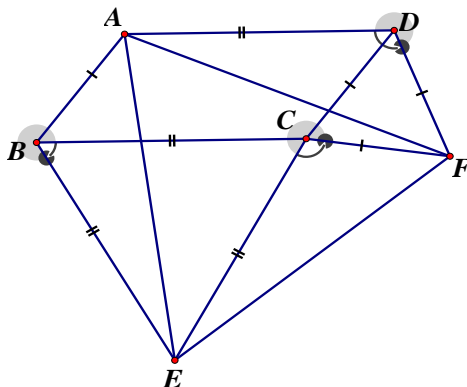
Vì $MK \parallel AB$ và $AB \perp AD$ (gt) nên $MK \perp AD$

Trong tam giác ADM có $MK \perp AD$ và $DH \perp AM$ nên K là trực tâm của tam giác ADM , do đó $AK \perp DM$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $BM \perp MD$ (đpcm)

Bài 115: Cho hình bình hành $ABCD$ có góc ABC nhọn. Vẽ ra phía ngoài hình bình hành các tam giác đều BCE và DCF . Tính số đo \widehat{EAF}

Lời giải



Chứng minh được $\widehat{ABE} = \widehat{ECF}$

Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle FCE$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = EF$

Tương tự: $AF = EF$

$\Rightarrow AE = EF = AF \Rightarrow \triangle AEF$ đều $\Rightarrow \widehat{EAF} = 60^\circ$

Bài 116: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a , biết hai đường chéo cắt nhau tại O . Lấy điểm I thuộc cạnh AB , điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{IOM} = 90^\circ$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông). Gọi N là giao điểm của AM và CD , K là giao điểm của OM và BN .

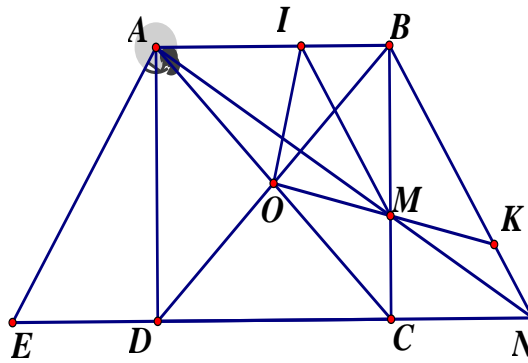
3) Chứng minh $\triangle BIO = \triangle CMO$ và tính diện tích tứ giác $BIOM$ theo a

4) Chứng minh $\widehat{BKM} = \widehat{BCO}$

Chứng minh $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



1) $\widehat{IBO} = \widehat{MCO} (= 45^\circ)$ (Tính chất đường chéo hình vuông)

$BO = CO$ (tính chất đường chéo hình vuông)

$\widehat{BOI} = \widehat{COM}$ (cùng phụ với \widehat{BOM})

$\Rightarrow \triangle BIO = \triangle CMO$ (g.c.g)

$\Rightarrow S_{BIO} = S_{CMO}$ mà $S_{BMOI} = S_{BOI} + S_{BMO}$

Do đó: $S_{BMOI} = S_{CMO} + S_{BMO} = S_{BOC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} a^2$

2) Ta có: $\triangle BIO = \triangle CMO$ (cmt) $\Rightarrow CM = BI \Rightarrow BM = AI$

Vì $CN \parallel AB$ nên $\frac{BM}{CM} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow IM \parallel BN$

Ta có: $OI = OM$ ($\triangle BIO = \triangle CMO$) $\Rightarrow \triangle IOM$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{IMO} = \widehat{MIO} = 45^\circ$

Vì $IM \parallel BN \Rightarrow \widehat{BKM} = \widehat{IMO} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BKM} = \widehat{BCO}$

3) Qua A kẻ tia Ax vuông góc AN cắt CD tại E .

Chứng minh $\triangle ADE = \triangle ABM$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = AM$

Ta có: $\triangle ANE$ vuông tại A có $AD \perp NE$

$$S_{AEN} = \frac{AD \cdot NE}{2} = \frac{AN \cdot AE}{2} \Rightarrow AD \cdot NE = AN \cdot AE \Rightarrow (AD \cdot NE)^2 = (AN \cdot AE)^2$$

Áp dụng định lý Pytago vào $\triangle ANE$ ta có: $AN^2 + AE^2 = NE^2$

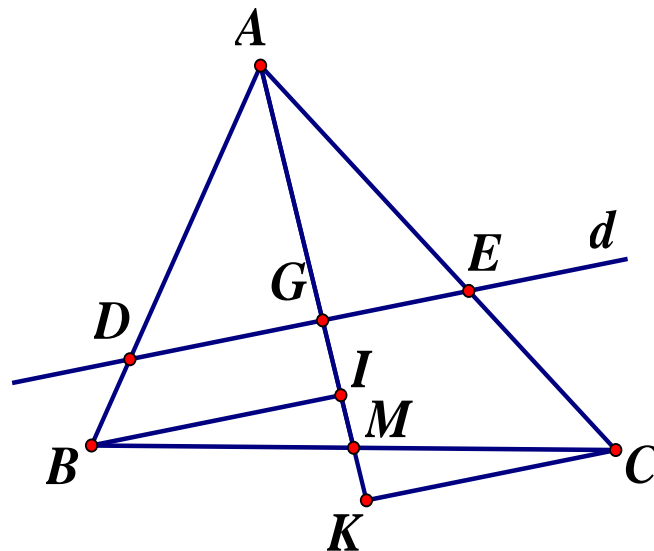
$$\Rightarrow AD^2 \cdot (AN^2 + AE^2) = AN^2 \cdot AE^2 \Rightarrow \frac{AN^2 + AE^2}{AN^2 \cdot AE^2} = \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$$

$$\text{Mà } AE = AM \text{ và } CD = AD \Rightarrow \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$$

Bài 117: Cho tam giác ABC ($AB < AC$), trọng tâm G . Qua G vẽ đường thẳng d cắt các cạnh

AB, AC theo thứ tự ở D và E . Tính giá trị biểu thức $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC

Qua B vẽ đường thẳng song song với d cắt AM tại I, ta có: $\frac{AB}{AD} = \frac{AI}{AG}$ (1)

Qua C vẽ đường thẳng song song với d cắt AM tại K, ta có: $\frac{AC}{AE} = \frac{AK}{AG}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = \frac{AI + AK}{AG}$ (3)

Mặt khác: $AI + AK = (AM - MI) + (AM + MK) = 2AM$ (4)

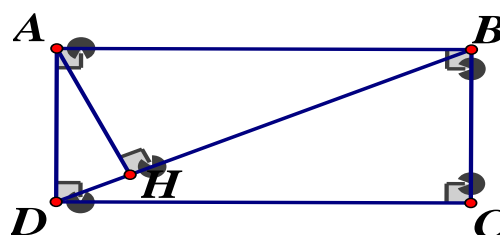
(Vì $MI = MK$ do $\triangle BMI = \triangle CMK$)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = \frac{2AM}{AG} = \frac{2AM}{\frac{2}{3}AM} = 3$

Bài 118: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = a = 12\text{cm}$, $BC = b = 9\text{cm}$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BD

- Chứng minh tam giác AHB đồng dạng với tam giác BCD
- Tính độ dài đoạn thẳng AH
- Tính diện tích tam giác AHB

Lời giải



- Chứng minh được $\triangle AHB \sim \triangle BCD$ (g.g)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$b) \Delta AHB \sim \Delta BCD(\text{cmt}) \Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow AH = \frac{a.b}{BD}$$

$$\text{Áp dụng định lý Pytago được: } BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{225} = 15(\text{cm})$$

$$\text{Từ đó tính được: } AH = \frac{12.9}{15} = 7,2(\text{cm})$$

$$c) \Delta AHB \sim \Delta BCD \text{ theo tỉ số } k = \frac{AH}{BC} = \frac{7.2}{9}$$

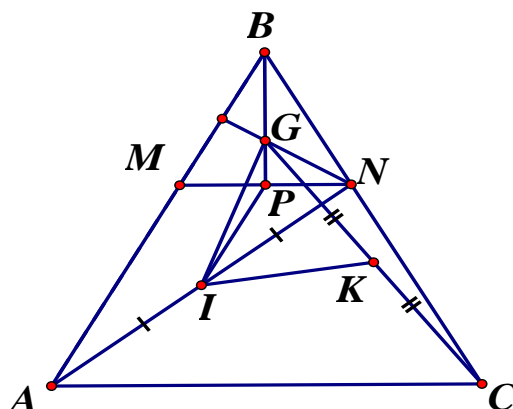
Gọi S, S' lần lượt là diện tích của ΔBCD và ΔAHB , ta có: $S = 54\text{cm}^2$

$$\frac{S'}{S} = k^2 = \left(\frac{7.2}{9}\right)^2 \Rightarrow S' = \left(\frac{7.2}{9}\right)^2 .54 = 34,56(\text{cm}^2)$$

Vậy diện tích tam giác AHB bằng $34,56(\text{cm}^2)$

Bài 119: Cho tam giác đều ABC. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh AB và BC sao cho $BM = BN$. Gọi G là trọng tâm ΔBMN và I là trung điểm của AN. Tính các góc của tam giác ICG.

Lời giải



Ta có BMN là tam giác đều, nên G là trọng tâm của ΔBMN . Gọi P là trung điểm của MN,

$$\text{Ta có: } \frac{GP}{GN} = \frac{1}{2} \text{ (tính chất trọng tâm tam giác đều)}$$

$$\text{Lại có: } \frac{PI}{MA} = \frac{PI}{NC} = \frac{1}{2} \text{ suy ra } \frac{GP}{GN} = \frac{PI}{NC} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{GPI} = \widehat{GPM} + \widehat{MPI} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

$$\text{Và } \widehat{GNC} = \widehat{GNP} + \widehat{PNC} = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ, \text{ do đó: } \widehat{GPI} = \widehat{GNC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \Delta GPI \sim \Delta GNC(\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{PGI} = \widehat{NGC} \text{ và } GI = \frac{1}{2}GC$$

$$\text{Mà } \widehat{IGC} = 60^\circ \quad \left(\widehat{IGC} = \widehat{PGN} = 60^\circ \right)$$

Gọi K là trung điểm của GC thì $GI = GK = \frac{1}{2}GC$, suy ra $\triangle GIK$ đều nên $IK = \frac{1}{2}GC$

Điều này chứng tỏ $\triangle GIC$ vuông tại I

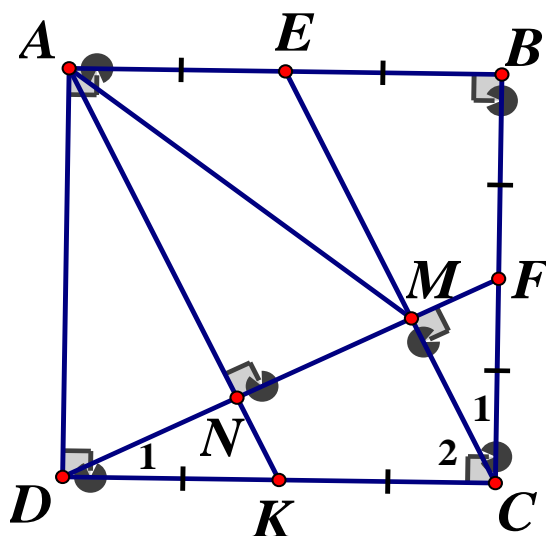
Vậy $\widehat{GIC} = 90^\circ; \widehat{IGC} = 60^\circ; \widehat{GCI} = 30^\circ$

Bài 120: Cho hình vuông ABCD, gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB, BC.

c) Chứng minh rằng: $CE \perp DF$

d) Gọi M là giao điểm của CE và DF. Chứng minh rằng: $AM = AD$

Lời giải



a) Chứng minh được $\triangle CBE = \triangle DFC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1}$

Lại có: $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{C_2} = 90^\circ \Rightarrow CE \perp DF$

b) Gọi K là trung điểm của CD. Chứng minh được tứ giác AECK là hình bình hành suy ra $AK \parallel CE$

Gọi N là giao điểm của AK và DF. $\triangle DCM$ có $DK = KC$ và $KN \parallel CM$ nên N là trung điểm của DM. Vì $CM \perp DM$ (câu a), $KN \parallel CM \Rightarrow KN \perp DM$

Tam giác $\triangle ADM$ có AN là đường cao đồng thời là trung tuyến nên là tam giác cân tại A.
 $\Rightarrow AM = AD$

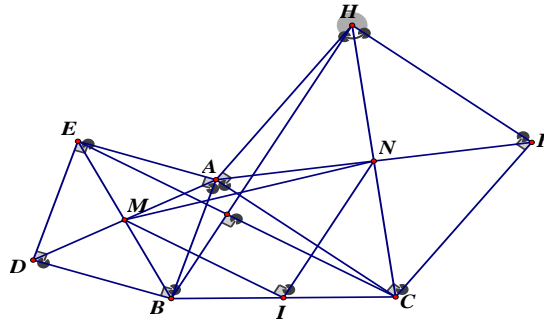
Bài 121: Cho tam giác ABC. Vẽ ở ngoài tam giác các hình vuông ABDE, ACFH.

a) Chứng minh rằng $EC = BH; EC \perp BH$

b) Gọi M, N thứ tự là tâm của các hình vuông ABDE, ACFH. Gọi I là trung điểm của BC.

Tam giác MNI là tam giác gì? Vì sao?

Lời giải



a) Chứng minh được: $\triangle EAC = \triangle BAH$ (c.g.c) $\Rightarrow EC = BH, \widehat{AEC} = \widehat{ABH}$

Gọi K và O thứ tự là giao điểm của EC với BA và BH

Xét $\triangle AEK$ và $\triangle OBK$ có: $\widehat{AEK} = \widehat{OBK}; \widehat{AKE} = \widehat{OKB} \Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{BOK}$

$\Rightarrow \widehat{BOK} = 90^\circ$. Vậy $EC \perp BH$

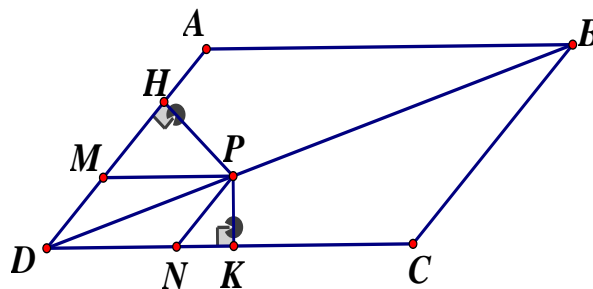
b) Ta có: $MI \parallel EC; MI = \frac{1}{2}EC; IN \parallel BH; IN = \frac{1}{2}BH$

Mà $EC \perp BH$ và $EC = BH$ nên $MI = IN$ và $MI \perp IN$

Vậy tam giác MIN vuông cân tại I

Bài 122: Chứng minh rằng trong một hình bình hành, khoảng cách từ một điểm trên đường chéo đến hai cạnh kề (hai cạnh kề và đường chéo cùng đi qua một đỉnh của hình bình hành), tỉ lệ nghịch với hai cạnh ấy.

Lời giải



Kẻ $PH \perp AD; PK \perp DC; PM \parallel CD; PN \parallel AD$

Chứng minh $\triangle HMP \sim \triangle KNP$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{PH}{PK} = \frac{PM}{PN} \Rightarrow \frac{PH}{PK} = \frac{DN}{PN} \text{ (do PMDN là hình bình hành)}$$

Chứng minh $\triangle DNP \sim \triangle DCB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DN}{DC} = \frac{PN}{BC}$

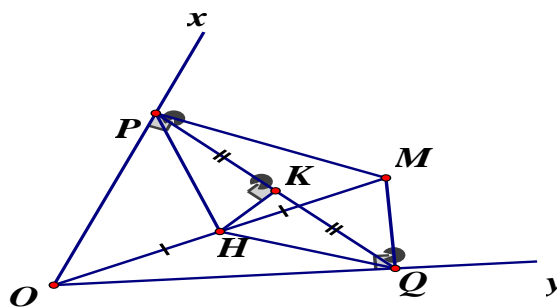
$$\Rightarrow \frac{DN}{PN} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \frac{PH}{PK} = \frac{DC}{BC} \text{ (đpcm)}$$

Bài 123: Gọi M là điểm nằm trong $\widehat{xOy} = m^0 (0 < m < 90)$. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M trên Ox, Oy . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của OM, PQ

c) Chứng minh $HK \perp PQ$

d) Tính số đo \widehat{HPQ} theo m

Lời giải



a) $\triangle MPO$ vuông tại P , đường trung tuyến $PH = \frac{1}{2}OM$

$\triangle MQO$ vuông tại Q , đường trung tuyến $QH = \frac{1}{2}OM$

$\Rightarrow PH = QH \Rightarrow \triangle HPQ$ cân tại $H \Rightarrow HK \perp PQ$

b) $\widehat{MHQ} = 2\widehat{MOQ}; \widehat{MHP} = 2\widehat{MOP}$

$\Rightarrow \widehat{PHQ} = 2\widehat{POQ} = 2.m^0 \Rightarrow \widehat{PHK} = m^0 \Rightarrow \widehat{HPQ} = 90^0 - m^0$

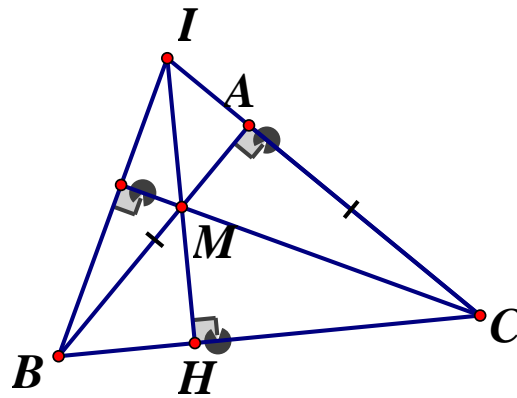
Bài 124: Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi M là một điểm nằm giữa A và B . Trên tia đối của tia AC lấy điểm I sao cho $AI = AM$.

c) Chứng minh rằng: $CM \perp BI$

d) Trên BC lấy điểm P sao cho $BP = 2CP$. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC có chứa điểm A , vẽ tia Px sao cho $\widehat{xPB} = 60^0$. Tia Px cắt tia CA tại D . Tính số đo \widehat{CBD}

Lời giải

a)



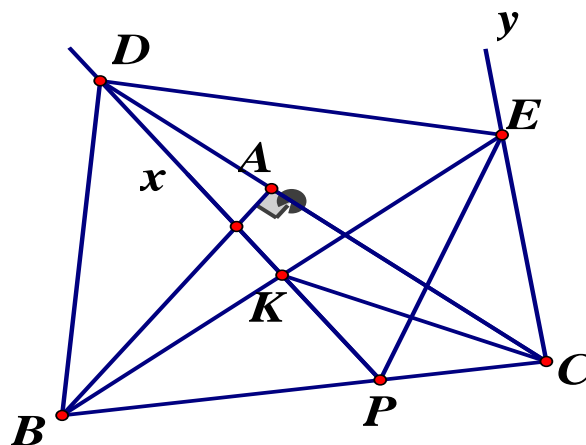
Tia IM cắt BC tại H

$\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $\widehat{C} = 45^\circ$, $\triangle IAM$ vuông cân tại M nên $\widehat{I} = 45^\circ$

$\triangle IHC$ có $\widehat{C} + \widehat{I} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{H} = 90^\circ \Rightarrow IH \perp BC$

Chứng minh được M là trực tâm $\triangle IBC \Rightarrow CM \perp BI$

b)



Gọi E là điểm đối xứng với B qua PD $\Rightarrow EP = PB = 2PC$

$\Rightarrow \triangle BPE$ cân tại P nên đường trung trực của PD cũng là phân giác

$\Rightarrow \widehat{BPD} = \widehat{DPE} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{EPC} = 60^\circ$

Chứng minh được $\triangle EPC$ vuông tại C

Chứng minh được CD là phân giác của $\triangle PCE$

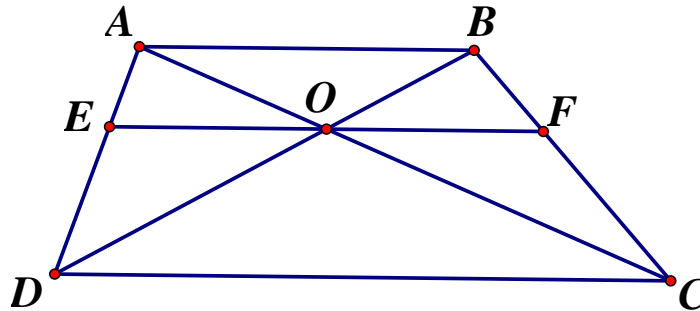
Chứng minh được ED là phân giác ngoài tại đỉnh E của $\triangle PCE$

Chứng minh được $\widehat{yEP} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{DEP} = 75^\circ$

Chứng minh được $\widehat{PBD} = 75^\circ$ hay $\widehat{CBD} = 75^\circ$

Bài 125: Cho hình thang ABCD ($AB // CD$), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Một đường thẳng d qua O song song với 2 đáy cắt hai cạnh bên AD, BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF}$.

Lời giải



Xét $\triangle ABD$ có $OE // AB \Rightarrow \frac{OE}{AB} = \frac{OD}{DB}$ (Hệ quả định lý Talet) (1)

Xét $\triangle ABC$ có $OF // DC \Rightarrow \frac{OF}{CD} = \frac{OB}{BD}$ (hệ quả định lý Talet) (2)

Xét $\triangle ABC$ có $OF // AB \Rightarrow \frac{OF}{AB} = \frac{OC}{AC}$ (hệ quả định lý Talet) (3)

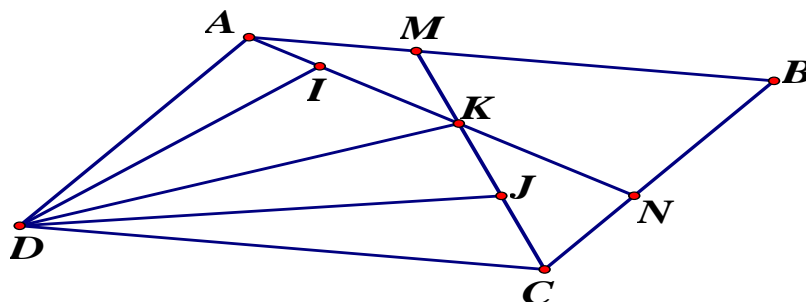
Xét $\triangle ABD$ có $OE // DC \Rightarrow \frac{OE}{DC} = \frac{AO}{AC}$ (Hệ quả định lý Talet) (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra

$$\begin{aligned} \frac{OE}{AB} + \frac{OF}{CD} + \frac{OF}{AB} + \frac{OE}{DC} &= \frac{OD}{DB} + \frac{OB}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC} \\ \Leftrightarrow \frac{OE}{AB} + \frac{OF}{AB} + \frac{OF}{CD} + \frac{OE}{DC} &= \frac{OD}{DB} + \frac{OB}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC} \\ \Leftrightarrow \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{DC} &= \frac{BD}{BD} + \frac{AC}{AC} \Leftrightarrow \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{DC} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{EF} \end{aligned}$$

Bài 126: Cho hình bình hành ABCD. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC sao cho $AN = CM$. Gọi K là giao điểm của AN và CM. Chứng minh rằng KD là tia phân giác của \widehat{AKC}

Lời giải



Kẻ DI, DJ lần lượt vuông góc với AK, CK

Ta có: $S_{AND} = \frac{1}{2} AN \cdot DI = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (Do chung đáy AD , cùng chiều cao hạ từ N) (1)

$S_{CDM} = \frac{1}{2} CM \cdot DJ = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ (Do chung đáy CD , cùng chiều cao hạ từ M) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{2} AN \cdot DI = \frac{1}{2} CM \cdot DJ \Leftrightarrow DI = DJ$ (Vì $AN = CM$)

$\Rightarrow \triangle DIK = \triangle DJK$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{IKD} = \widehat{JKD}$

$\Rightarrow KD$ là tia phân giác \widehat{AKC}

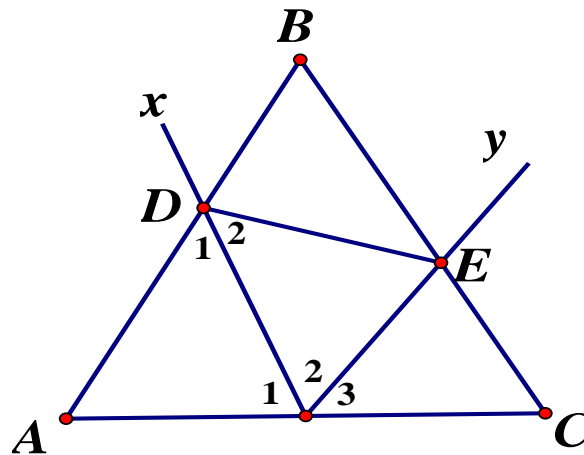
Bài 127: Cho tam giác đều ABC , gọi M là trung điểm của BC . Một góc $\widehat{xMy} = 60^\circ$ quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại D và E . Chứng minh

d) $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$

e) DM, EM lần lượt là tia phân giác của các góc \widehat{BDE} và \widehat{CED}

f) Chu vi tam giác ADE không đổi.

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle CEM$

Vì $BM = CM = \frac{BC}{2}$, nên ta có: $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$

b) Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle MED \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$, do đó DM là tia phân giác \widehat{BDE}

Chứng minh tương tự ta có EM là tia phân giác \widehat{CED}

c) Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC

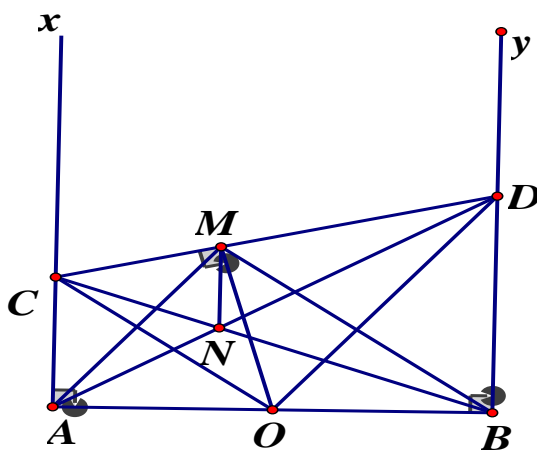
Chứng minh $DH = DI, EI = EK$ Suy ra chu vi $ADE = 2AH$ không đổi

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 128: Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C (C khác A). Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC , đường thẳng này cắt By tại D . Từ O hạ đường vuông góc OM xuống CD (M thuộc CD)

- Chứng minh $OA^2 = AC \cdot BD$
- Chứng minh tam giác AMB vuông
- Gọi N là giao điểm của BC và AD . Chứng minh $MN \parallel AC$

Lời giải



- Xét $\triangle ACO$ và $\triangle BOD$ có:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ; \widehat{COA} = \widehat{ODB} \text{ (cùng phụ với } \widehat{DOB})$$

$$\text{Nên } \triangle ACO \sim \triangle BOD (g.g) \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{BD}{BO} \Rightarrow AO \cdot BO = AC \cdot BD$$

$$\text{Mà } AO = BO \text{ nên } AO^2 = AC \cdot BD$$

- Xét $\triangle CMO$ và $\triangle OMD$ có:

$$\widehat{CMO} = \widehat{OMD} = 90^\circ; \widehat{OCM} = \widehat{DOM} \text{ (cùng phụ với } \widehat{COM})$$

$$\Rightarrow \triangle CMO \sim \triangle OMD \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{OM}{MD} \quad (1)$$

$$\text{Mà } \triangle ACO \sim \triangle BOD \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{AO}{OD} \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{OB}{BD} \text{ (Do } AO = OB) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{OM}{MD} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \triangle OMD \sim \triangle OBD$$

$$\Rightarrow \widehat{MOD} = \widehat{BOD} \Rightarrow \triangle OMD = \triangle OBD \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow OM = OB = OA \Rightarrow \triangle AMB \text{ vuông tại } M$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

c) Ta có: $AC \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \frac{CN}{NB} = \frac{AC}{BD}$

Mà $BD = MD$ ($\triangle OMD = \triangle OBD$)

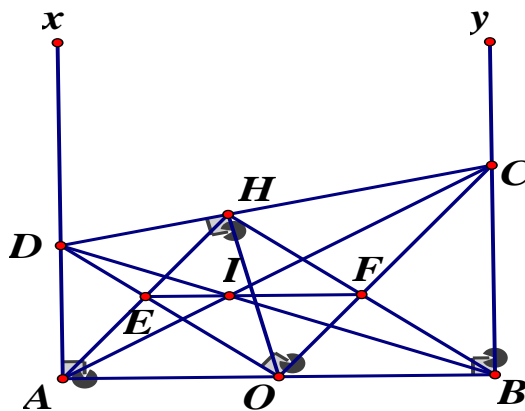
Tương tự ta chứng minh $AC = CM$

Nên $\frac{CN}{NB} = \frac{CM}{DM} \Rightarrow MN \parallel BD \parallel AC$

Bài 129: Cho O là trung điểm của đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm D bất kỳ, qua O vẽ hai đường thẳng vuông góc với DO tại O cắt By tại C

- Chứng minh $BC \cdot AD = a^2$
- Chứng minh DO và CO lần lượt là tia phân giác của \widehat{ADC} và \widehat{BCD}
- Vẽ $OH \perp CD$ ($H \in CD$). Gọi I là giao điểm của AC và BD , E là giao điểm của AH và DO , F là giao điểm của BH và CO . Chứng minh ba điểm E, I, F thẳng hàng
- Xác định vị trí của điểm D trên tia Ax để tích $DO \cdot CO$ có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải



- Chứng minh $\widehat{ADO} = \widehat{BOC}$ (cùng phụ với \widehat{AOD})

Chứng minh $\triangle ADO \sim \triangle BOC$ (gg) $\Rightarrow \frac{OA}{BC} = \frac{AD}{OB} \Rightarrow BC \cdot AD = a^2$

- Chứng minh $\frac{OB}{BC} = \frac{OD}{OC}$. Từ đó chứng minh $\triangle ODC \sim \triangle BOC$ (c.g.c)

Suy ra và kết luận CO là tia phân giác của \widehat{BCD}

Chỉ ra $\triangle ADO \sim \triangle ODC$ (cùng đồng dạng với $\triangle BOC$)

Chứng minh DO là tia phân giác của \widehat{ADC}

- Chứng minh $\triangle vuông OBC = \triangle vuông OHC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Rightarrow CB = CH$$

Chứng minh OC là đường trung trực HB

Tương tự chứng minh AD = DH và OD là trung trực của HA

Chứng minh EF là đường trung bình $\triangle AHB \Rightarrow EF // AB$

$$\text{Chỉ ra } EH // OC \Rightarrow \frac{DE}{EO} = \frac{DH}{HC} = \frac{AD}{BC}$$

$$AD // BC \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{DI}{IB}$$

$$\text{Suy ra } \frac{DE}{EO} = \frac{DI}{IB}. \text{ Áp dụng định lý Ta let đảo cho } \triangle DOB \Rightarrow EI // OB$$

Theo tiên đề Oclit kết luận E, I, F thẳng hàng

$$\text{d) Chỉ ra } 2S_{\triangle ODC} = OC \cdot OD = OH \cdot DC = a \cdot DC \text{ nhỏ nhất}$$

$$\Leftrightarrow DC \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow DC \perp Ax \Leftrightarrow ABCD \text{ là hình chữ nhật} \Leftrightarrow AD = BC; CD = AB$$

$$\text{Mà } BC \cdot AD = a^2 \Leftrightarrow AD^2 = a^2 \Leftrightarrow AD = a$$

Xét tam giác vuông AHB có HO là đường trung tuyến thuộc cạnh huyền

$$\Rightarrow OH = \frac{AB}{2} = a$$

Suy ra GTNN của OD.OC bằng $2a^2$ khi và chỉ khi $D \in Ax$ và $AD = a$.

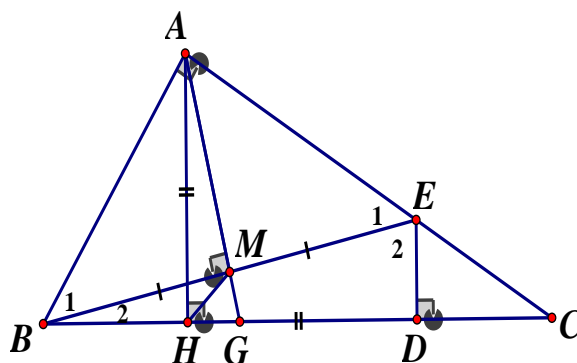
Bài 130: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

1. Chứng minh rằng: $\triangle BEC \sim \triangle ADC$. Tính độ dài đoạn BE theo $m = AB$
2. Gọi M là trung điểm của đoạn BE. Chứng minh rằng hai tam giác $\triangle BHM, \triangle BEC$ đồng dạng.

Tính số đo của \widehat{AHM}

$$3. \text{ Tia AM cắt BC tại G. Chứng minh: } \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$$

Lời giải



4.1 $\triangle CDE$ và $\triangle CAB$ có: \widehat{C} chung; $\widehat{CDE} = \widehat{CAB} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle CDE \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}.$$

Hai tam giác ADC và BEC có:

$$\widehat{C} \text{ chung}; \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} (\text{cmt}) \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BEC (\text{c.g.c})$$

Suy ra: $\widehat{BEC} = \widehat{ADC} = 135^\circ$ (Vì $\triangle AHD$ vuông cân tại H theo giả thiết)

Nên $\widehat{AEB} = 45^\circ$, do đó $\triangle ABE$ vuông cân tại A

$$\text{Suy ra } BE = AB\sqrt{2} = m\sqrt{2}$$

$$4.2 \text{ Ta có: } \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC} \text{ (do } \triangle BEC \sim \triangle ADC)$$

Mà $AD = AH\sqrt{2}$ ($\triangle AHD$ vuông cân tại H)

$$\text{Nên } \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH\sqrt{2}}{AC} = \frac{BH}{AB\sqrt{2}} = \frac{BH}{BE} \text{ (Do } \triangle BHM \sim \triangle CBA)$$

Do đó: $\triangle BHM \sim \triangle BEC (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{BEC} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{AHM} = 45^\circ$

4.3 Tam giác ABE vuông cân tại A , nên tia AM còn là tia phân giác góc BAC

$$\text{Suy ra } \frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC} \text{ mà } \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC} (\triangle ABC \sim \triangle DEC)$$

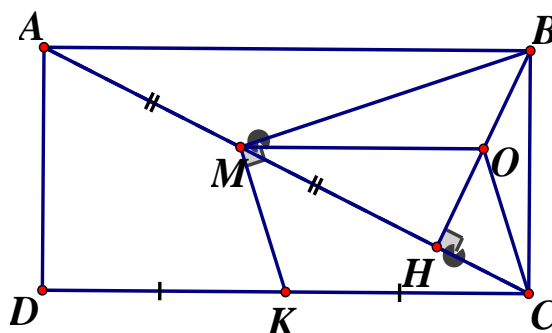
$$\text{Ta lại có: } ED \parallel AH \Rightarrow \frac{ED}{DC} = \frac{AH}{HC}$$

$$\text{Mà } HD = HC \Rightarrow \frac{ED}{DC} = \frac{AH}{HC} = \frac{HD}{HC}$$

$$\Rightarrow \frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GC+GB} = \frac{HD}{HC+HD} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{HC+AH}$$

Bài 131: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Vẽ BH vuông góc với AC ($H \in AC$). Gọi M là trung điểm của AH , K là trung điểm của CD . Chứng minh rằng: $BM \perp MK$.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng BH

Ta có M, O lần lượt là trung điểm của AH, BH nên: MO là đường trung bình $\triangle HAB$

$$\text{Vậy } MO = \frac{1}{2}AB, MO \parallel AB$$

$$\text{Mà } AB = CD, AB \parallel CD, KC = \frac{1}{2}CD$$

Do đó: $MO = KC, MO \parallel KC$, suy ra tứ giác MOCK là hình bình hành.

Từ đó có: $CO \parallel MK$

Ta có: $MO \parallel KC, KC \perp CB \Rightarrow MO \perp CB$

Tam giác MBC có $MO \perp CB, BH \perp MC$ nên O là trực tâm $\triangle MBC \Rightarrow CO \perp BM$

Ta có: $CO \perp BM$ và $CO \parallel MK$ nên $BM \perp MK$

Bài 132:

Một trường học được xây dựng trên khu đất

hình chữ nhật ABCD có $AB = 50\text{m}$,

$BC = 200\text{m}$. Ở phía chiều rộng AB tiếp giáp

đường chính, người ra sử dụng hai lô đất hình

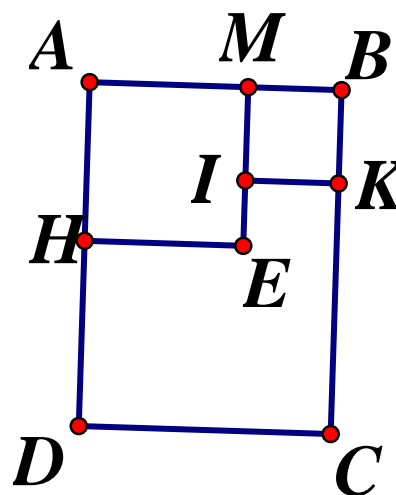
vuông AMEH, BMIK để xây dựng phòng làm

việc và nhà để xe. Diện tích còn lại để xây

phòng học và các công trình khác (như hình

vẽ). Tính diện tích lớn nhất còn lại để xây

phòng học và các công trình khác.



Lời giải

$$\text{Đặt : } AM = a, MB = b \Rightarrow (a + b)^2 = 50^2$$

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 = 50^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 1250$$

$$\text{Diện tích nhỏ nhất } S_{AMEH} + S_{BMK} = 1250 (\text{m}^2)$$

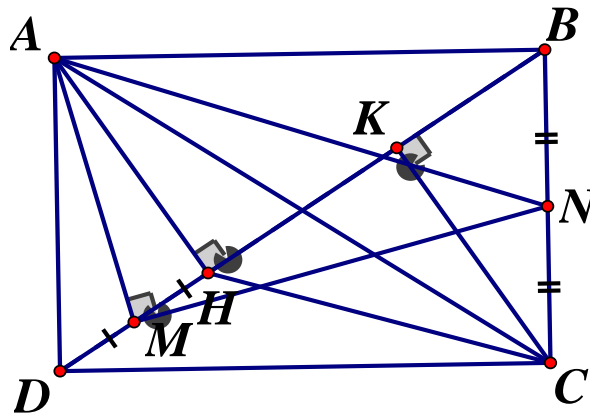
$$\text{Diện tích lớn nhất còn lại: } 10000 - 1250 = 8750 (\text{m}^2)$$

Bài 133: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 8\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$. Gọi H là hình chiếu của A trên BD.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DH, BC

- a) Tính diện tích tứ giác ABCH
b) Chứng minh $AM \perp MN$.

Lời giải



a)

$$\triangle ABH \sim \triangle DBA$$

$$\text{Tính } AH = 4,8\text{cm}; BH = 6,4\text{cm}$$

$$\text{Kẻ } KC \perp BD. \quad C/m \quad KC = AH = 4,8\text{cm}$$

$$S_{ABCH} = S_{ABH} + S_{BHC} = \frac{1}{2} AH \cdot HB + \frac{1}{2} CK \cdot HB = 30,72 (\text{cm}^2)$$

$$\text{b) } \triangle AHD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{HD}{BC}.$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DM}{CN}; \triangle ADM \sim \triangle ACN \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AN}$$

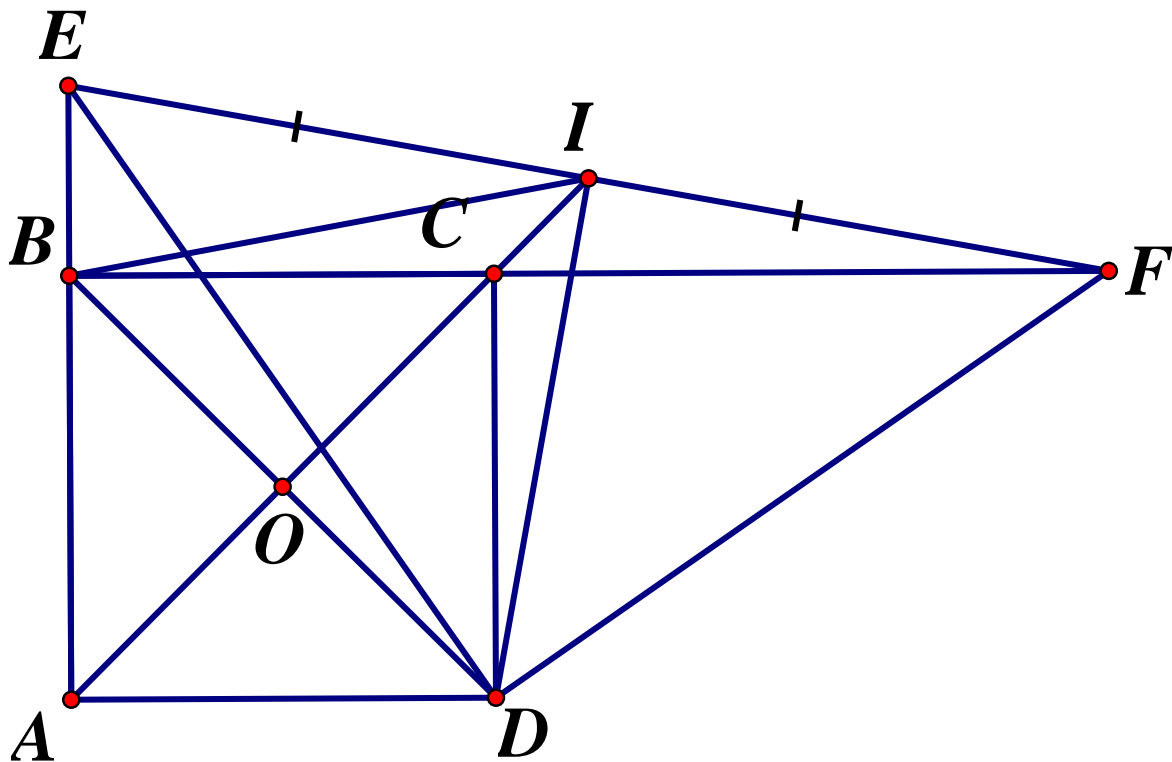
$$\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{NAC} \Rightarrow \widehat{NAM} = \widehat{CAD}; \frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AN}$$

$$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AMN (\text{cgc}) \Rightarrow AM \perp MN$$

Bài 134: Cho hình vuông $ABCD$; Trên tia đối của tia BA lấy E , trên tia đối tia CB lấy F sao cho $AE = CF$

- a) Chứng minh $\triangle EDF$ vuông cân
b) Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo AC và BD . Gọi I là trung điểm EF . Chứng minh O, C, I thẳng hàng

Lời giải



a) Ta có $\triangle ADE = \triangle CDF$ (cgc) $\Rightarrow \triangle EDF$ cân tại D

Mặt khác $\triangle ADE = \triangle CDF$ (cgc) $\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{F}_2$

Mà $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 + \widehat{F}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{F}_2 + \widehat{E}_2 + \widehat{F}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EDF} = 90^\circ$

Vậy $\triangle EDF$ vuông cân

b) Theo tính chất đường chéo hình vuông $\Rightarrow CO$ là trung trực BD

Mà $\triangle EDF$ vuông cân $\Rightarrow DI = \frac{1}{2}EF$, tương tự: $BI = \frac{1}{2}EF \Rightarrow DI = BI$

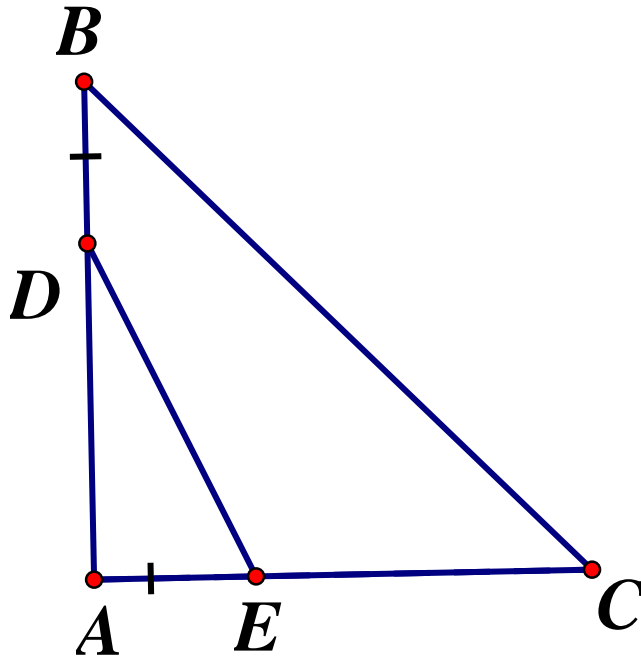
$\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của DB $\Rightarrow I$ thuộc đường thẳng CO

Hay O, C, I thẳng hàng.

Bài 135: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí điểm D, E sao cho

- DE có độ dài nhỏ nhất
- Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải



- Đặt $AB = AC = a$ không đổi ; $AE = BD = x$ ($0 < x < a$)

Áp dụng định lý Pytago với $\triangle ADE$ vuông tại A có:

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 = (a - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 \\ &= 2(x^2 - ax) - a^2 = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } DE_{\min} \Leftrightarrow DE^2_{\min} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow BD = AE = \frac{a}{2} \Leftrightarrow D, E \text{ là trung điểm } AB, AC$$

- Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{ADE} &= \frac{1}{2} AD \cdot AE = \frac{1}{2} AD \cdot BD = \frac{1}{2} AD \cdot (AB - AD) = \frac{1}{2} (AD^2 - AB \cdot AD) \\ &= -\frac{1}{2} \left(AD^2 - 2 \frac{AB}{2} AD + \frac{AB^2}{4} \right) + \frac{AB^2}{8} = -\frac{1}{2} \left(AD - \frac{AB}{2} \right)^2 + \frac{AB^2}{8} \leq \frac{AB^2}{8} \end{aligned}$$

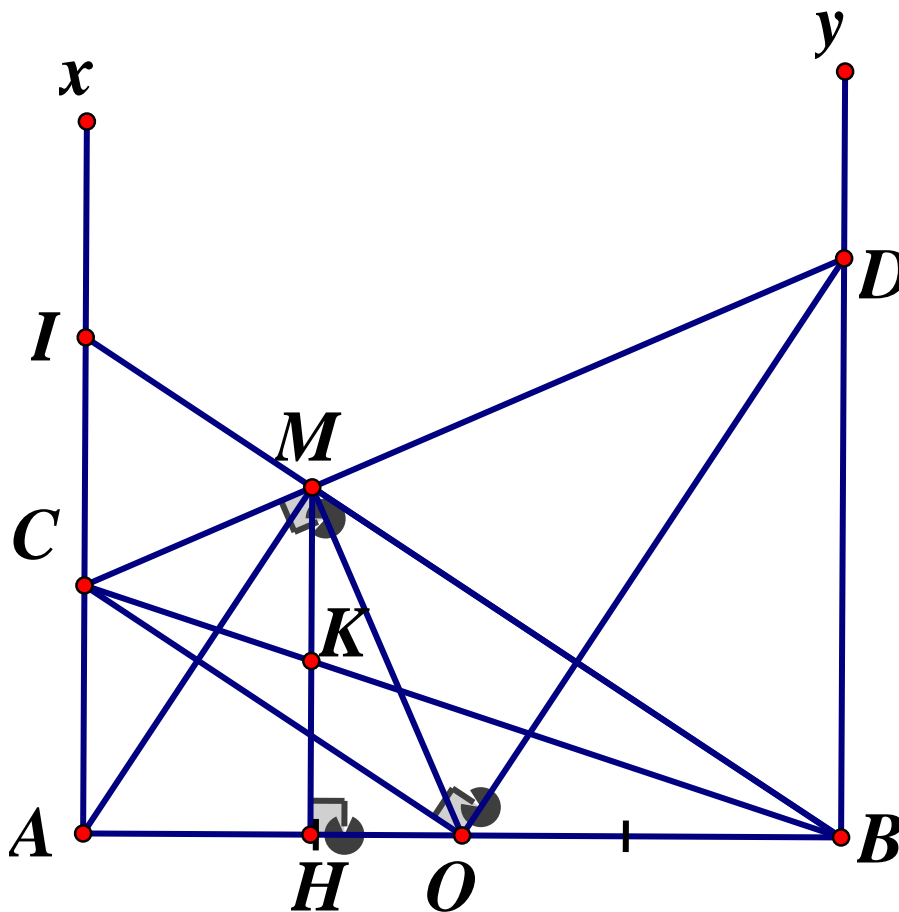
$$\text{Vậy } S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3}{8}AB^2 \text{ (Không đổi)}$$

Do đó $\min S_{BDEC} = \frac{3}{8}AB^2$ khi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC

Bài 136: Cho O là trung điểm của đoạn AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là cạnh AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D

- Chứng minh $AB^2 = 4AC.BD$
- Kẻ $OM \perp CD$ tại M. Chứng minh $AC = CM$.
- Từ M kẻ MH vuông góc với AB tại H. Chứng minh BC đi qua trung điểm MH
- Tìm vị trí của C trên tia Ax để diện tích tứ giác ABDC nhỏ nhất

Lời giải



$$\text{a) Chứng minh } \triangle OAC \sim \triangle DBO (g.g) \Rightarrow \frac{OA}{DB} = \frac{AC}{OB} \Rightarrow OA.OB = AC.BD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = AC.BD \Rightarrow AB^2 = 4AC.BD \quad (dpcm)$$

b) Theo câu a ta có: $\Delta OAC \sim \Delta DBO (g - g) \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OB}$

Mà $OA = OB \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{OA}$

+) Chứng minh : $\Delta OAC \sim \Delta DOC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{OCM}$

+) Chứng minh : $\Delta OAC = \Delta OMC (ch - gn) \Rightarrow AC = MC (dfcm)$

c) Ta có $\Delta OAC = \Delta OMC \Rightarrow OA = OM; CA = CM \Rightarrow OC$ là trung trực AM
 $\Rightarrow OC \perp AM,$

Mặt khác $OA = OM = OB \Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M

$\Rightarrow OC // BM$ (vì cùng vuông góc với AM) hay $OC // BI$

+) Xét ΔABI có OM đi qua trung điểm AB , song song BI suy ra OM đi qua trung điểm $AI \Rightarrow IC = AC$

+) $MH // AI$ theo hệ quả định lý ta lại có: $\frac{MK}{IC} = \frac{BK}{BC} = \frac{KH}{AC}$

Mà $IC = AC \Rightarrow MK = HK \Rightarrow BC$ đi qua trung điểm $MH (dfcm)$

d) Tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông

$\Rightarrow S_{ABDC} = \frac{1}{2}(AC + BD).AB$

Ta thấy $AC, BD > 0$, nên theo BĐT Cô si ta có:

$$AC + BD \geq 2\sqrt{AC \cdot BD} = 2\sqrt{\frac{AB^2}{4}} = AB \Rightarrow S_{ABDC} \geq \frac{1}{2}AB^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow AC = BD = \frac{AB}{2} = OA$

Vậy C thuộc tia Ax và cách điểm A một đoạn bằng OA .

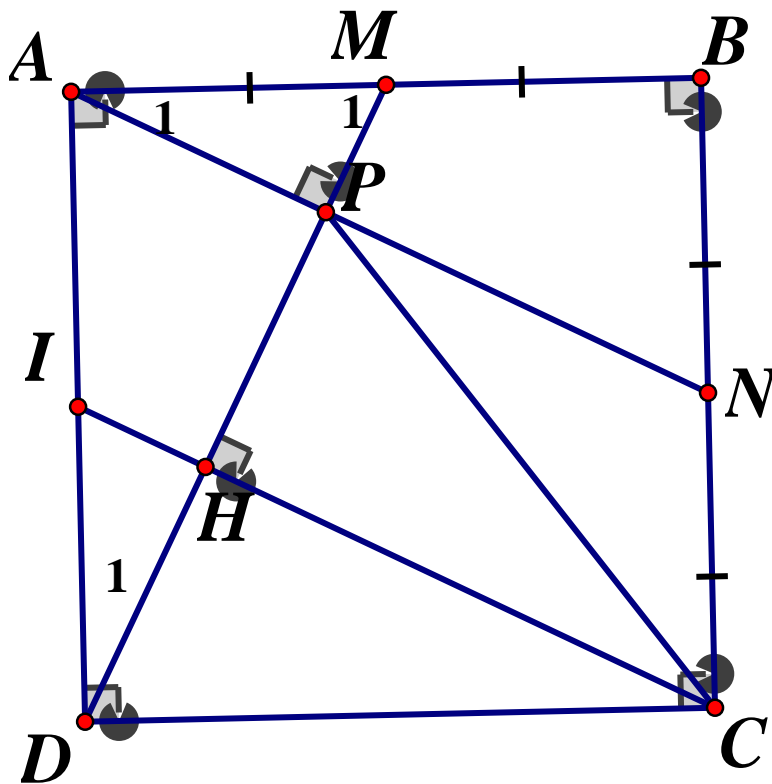
Bài 137: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $4cm$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi P là giao điểm của AN với DM

a) Chứng minh ΔAPM là tam giác vuông

b) Tính diện tích của tam giác APM

c) Chứng minh tam giác CPD là tam giác cân

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle ADM = \triangle BAN (cgc) \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1}$

Mà $\widehat{D_1} + \widehat{M_1} = 90^\circ$ ($\triangle ADM$ vuông tại A)

Do đó: $\widehat{A_1} + \widehat{M_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{APM} = 90^\circ$. Hay $\triangle APM$ vuông tại P

b) Tính được $AP = \frac{4\sqrt{5}}{5} (cm)$, $AM = \frac{2\sqrt{5}}{5} cm$, $S_{APM} = \frac{4}{5} (cm^2)$

c) Gọi I là trung điểm của AD. Nối C với I; CI cắt DM tại H

Chứng minh tứ giác $AICN$ là hình bình hành

$\Rightarrow AN // CI$ mà $AN \perp DM \Rightarrow CI \perp DM$

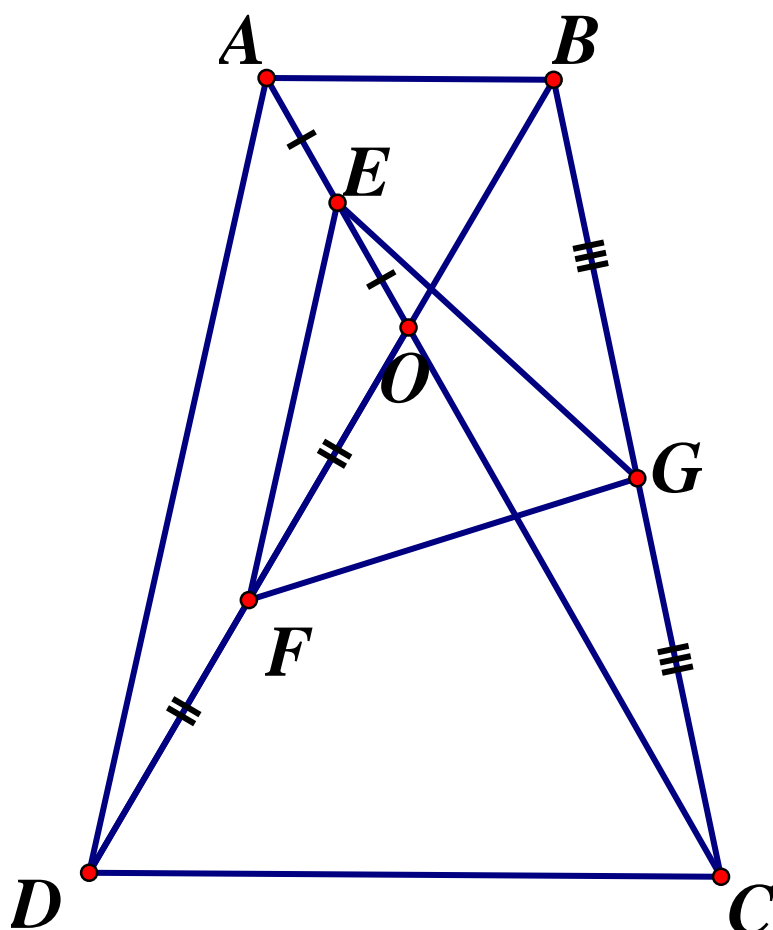
Hay CH là đường cao trong $\triangle CPD$ (1)

Vận dụng định lý về đường trung bình trong $\triangle ADP$ chứng minh được H là trung điểm DP suy ra CH là trung tuyến trong $\triangle CPD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CPD$ cân tại C

Bài 138: Cho hình thang cân $ABCD$ có $\widehat{ACD} = 60^\circ$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của OA, OD, BC . Tam giác EFG là tam giác gì? Vì sao?

Lời giải



Do $ABCD$ là hình thang cân và $\widehat{ACD} = 60^\circ$ suy ra $\triangle OAB$ và $\triangle OCD$ là các tam giác đều
 Chứng minh $\triangle BFC$ vuông tại F

Xét $\triangle BFC$ vuông tại F có: $FG = \frac{1}{2}BC$

Chứng minh $\triangle BEC$ vuông tại E có $EG = \frac{1}{2}BC$

Xét EF là đường trung bình $\triangle AOD \Rightarrow EF = \frac{1}{2}AD \Rightarrow EF = \frac{1}{2}BC$ (ABCD hthang cân)

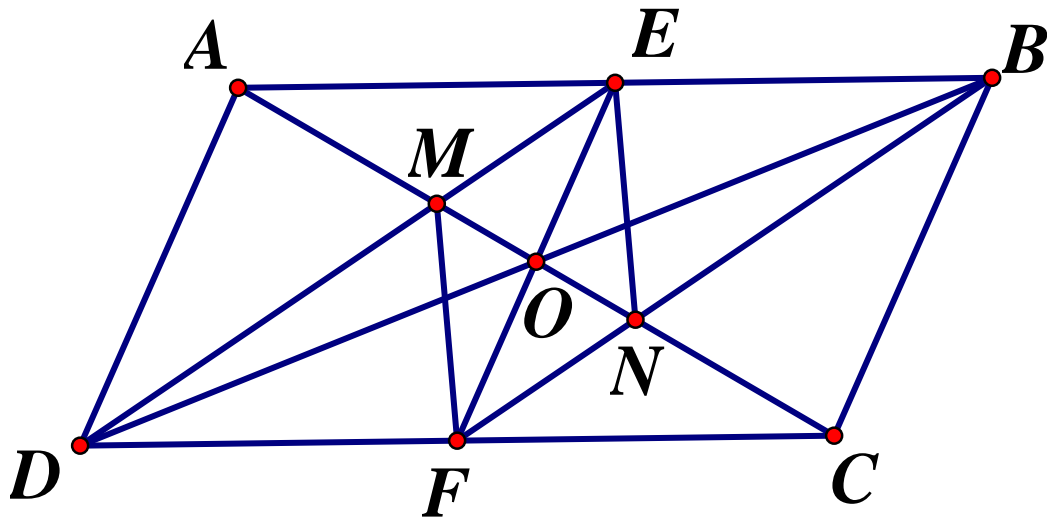
Suy ra $EF = EG = FG \Rightarrow \triangle EFG$ đều

Bài 139:

Cho hình bình hành $ABCD$ có E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD .

- Chứng minh rằng các đường thẳng AC, BD, EF đồng quy
- Gọi giao điểm của AC với DE và BF theo thứ tự là M và N . Chứng minh rằng $EMFN$ là hình bình hành

Lời giải



a)

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$, ta có O là trung điểm của BD .

Chứng minh $BEDF$ là hình bình hành

Có O là trung điểm của BD nên O cũng là trung điểm của EF

Vậy EF, BD, AC đồng quy tại O

a) Xét $\triangle ABD$ có M là trọng tâm, nên $OM = \frac{1}{3}OA$

Xét $\triangle BCD$ có N là trọng tâm, nên $ON = \frac{1}{3}OC$

Mà $OA = OC$ nên $OM = ON$

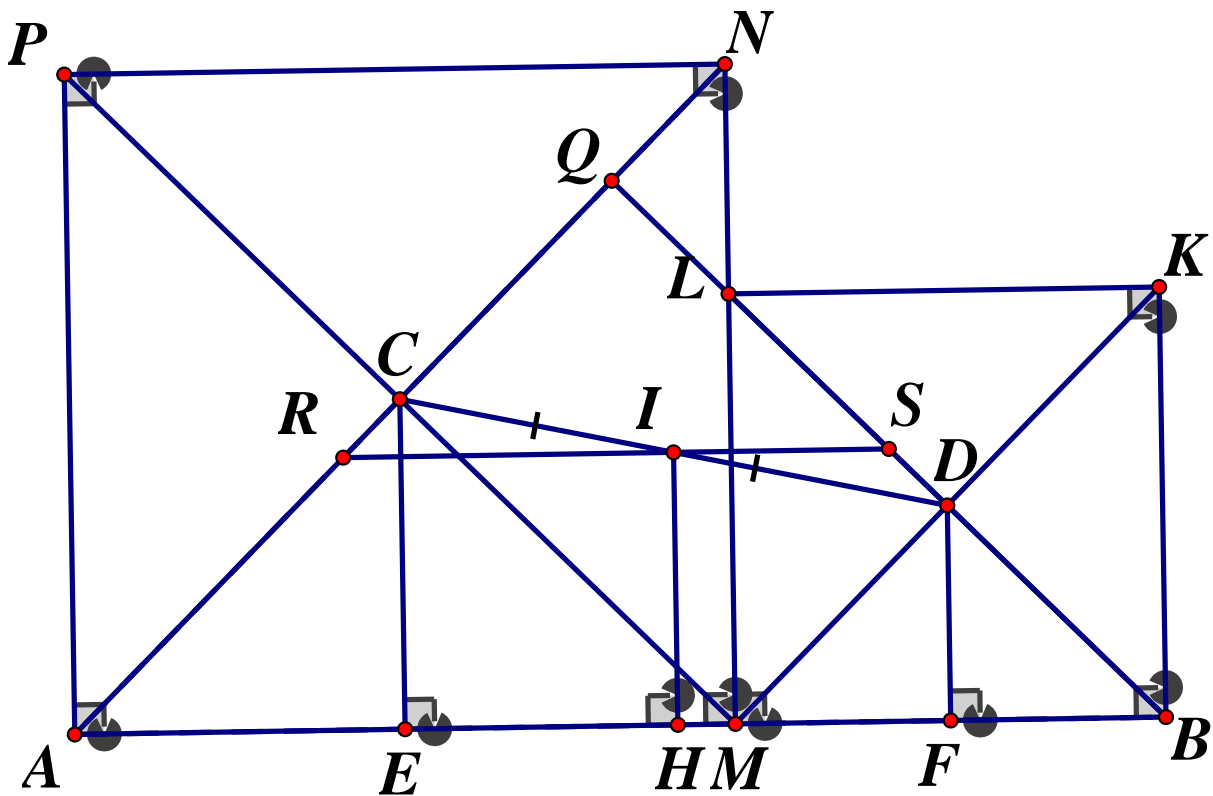
Tứ giác $EMFN$ có $OM = ON, OE = OF$ nên là hình bình hành

Bài 140: Cho đoạn thẳng $AB = a$. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B . Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMNP, BMLK$ có tâm theo thứ tự là C, D . Gọi I là trung điểm của CD .

a) Tính khoảng cách từ I đến AB

b) Khi điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì điểm I di chuyển trên đường nào ?

Lời giải



a) Kẻ CE, IH, DF cùng vuông góc với AB suy ra tứ giác $CDFE$ là hình thang vuông.

Chứng minh được: $CE = \frac{AM}{2}, DF = \frac{BM}{2} \Rightarrow CE + DF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow IH = \frac{a}{4}$

b) Khi M di chuyển trên AB thì I di chuyển trên đoạn RS song song với AB và cách AB một

khoảng bằng $\frac{a}{4}$ (R là trung điểm của AQ)

S là trung điểm của BQ , Q là giao điểm của BL và AN)

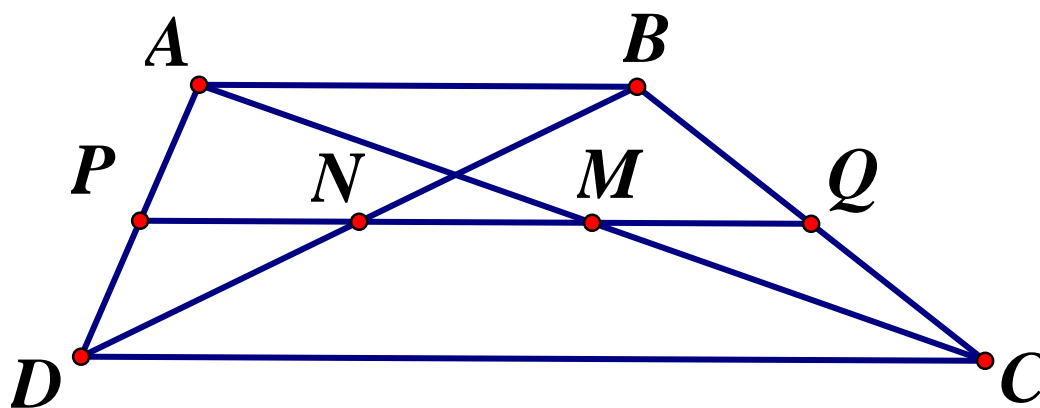
Bài 141:

Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$). Gọi N và M theo thứ tự là trung điểm của các đường chéo AC, BD . Chứng minh rằng:

1) $MN \parallel AB$

2) $MN = \frac{CD - AB}{2}$

Lời giải



- 1) Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AD và BC

Chứng minh được $\frac{AP}{AD} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow PN \parallel AB$ (định lý Talet đảo)

Mà $PM \parallel AB$ (đường trung bình)

$\Rightarrow P, M, N$ thẳng hàng (Tiên đề Oclit)

Vậy $MN \parallel AB$

- 2) Tương tự $\Rightarrow P, M, N, Q$ thẳng hàng

$$\text{Rút ra ta được: } PQ = \frac{AB + CD}{2} \quad (1); PM = \frac{AB}{2} \quad (2); NQ = \frac{AB}{2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } MN = PQ - (PM + NQ) = \frac{CD - AB}{2}$$

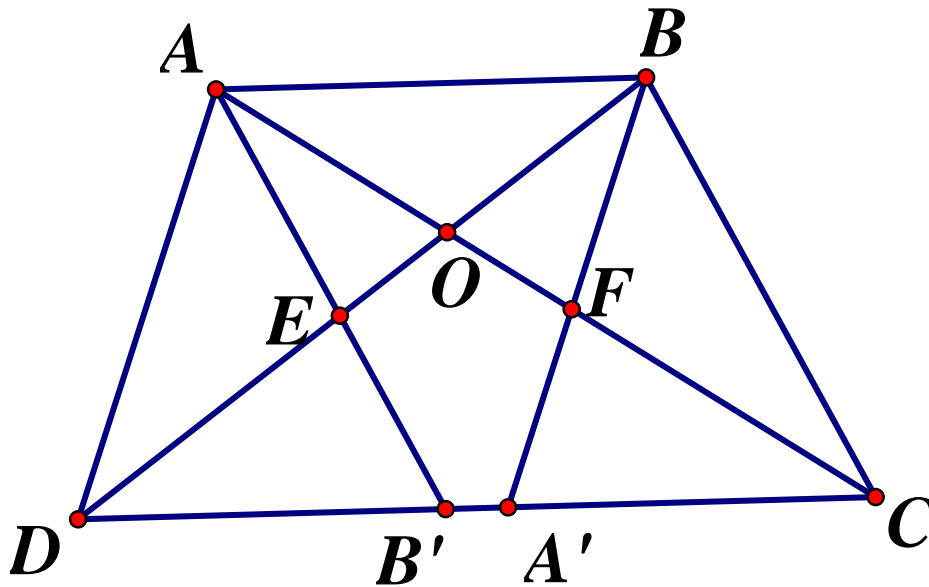
Bài 142: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$ và $AB < CD$); Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC, BD. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt BD tại E, cắt CD tại A'; đường thẳng qua B và song song với AD cắt AC tại F, cắt CD tại B'. Gọi diện tích các tam giác OAB, OCD, ACD, ABC lần lượt là S_1, S_2, S_3, S_4 . Chứng minh:

a) $EF \parallel AB$

b) $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{BD}$ và $AB^2 = EF \cdot CD$

c) $\frac{S_1}{S_4} + \frac{S_2}{S_3} = 1$

Lời giải



$$a) \quad AE \parallel BC \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC}$$

$$BF \parallel AD \Rightarrow \frac{OF}{OA} = \frac{OB}{OC}$$

$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OA} \Rightarrow EF \parallel AB \text{ (Ta let đảo)}$$

$$b) \quad AB \parallel DA' \Rightarrow \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DA'} \Rightarrow \frac{EB}{ED + EB} = \frac{AB}{AB + DA'}$$

$$AB = A'C \text{ được: } \frac{EB}{BD} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{EF}{DB'} \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{EF}{AB} \text{ (Do } AB = DB')$$

$$\Rightarrow AB^2 = EF \cdot DC$$

$$c) \quad \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} = \frac{OA}{AC} \quad (1); \quad \frac{S_{OCD}}{S_{ADC}} = \frac{OA}{AC} \quad (2)$$

(Tỷ số DT hai tam giác có cùng đáy bằng tỉ số đường cao)

Cộng (1) (2) về theo về ta có : đpcm

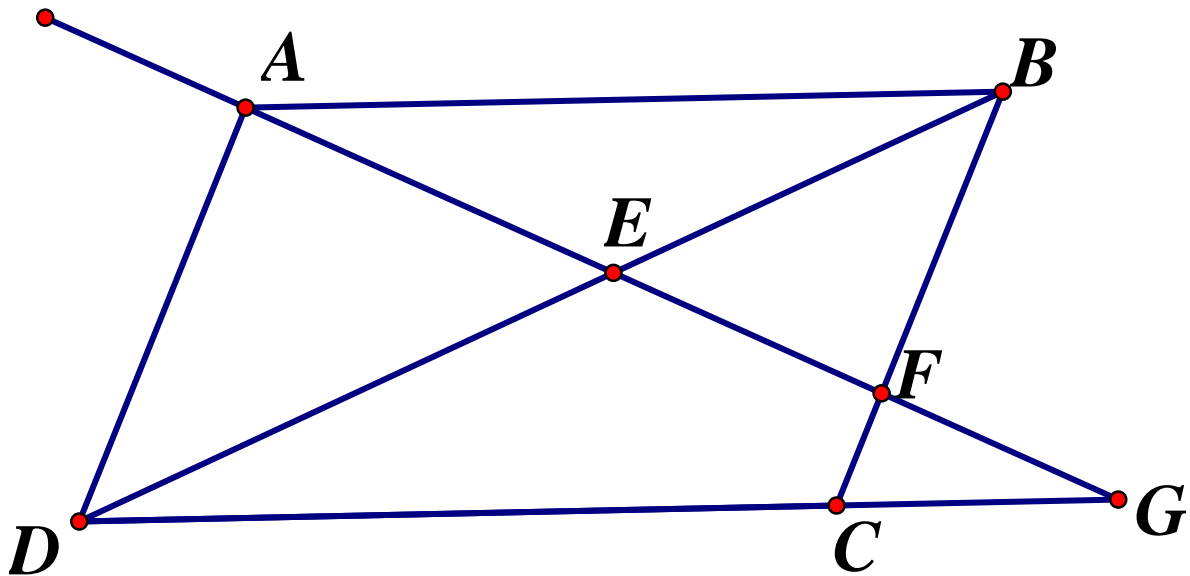
Bài 143: Cho hình bình hành $ABCD$. Với $AB = a, AD = b$. Từ đỉnh A , kẻ một đường thẳng a bất kỳ cắt đường chéo BD tại E , cắt cạnh BC tại F và cắt tia DC tại G .

$$a) \quad \text{Chứng minh : } AE^2 = EF \cdot EG$$

$$b) \quad \text{Chứng minh rằng khi đường thẳng } a \text{ quay quanh } A \text{ thay đổi thì tích } BF \cdot DG \text{ không đổi}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải



a) Do $AB \parallel CD$ nên ta có: $\frac{EA}{EG} = \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DG}$ (1)

Do $BF \parallel AD$ nên ta có: $\frac{EF}{EA} = \frac{EB}{ED} = \frac{AD}{FB}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{EA}{EG} = \frac{EF}{EA}$ hay $AE^2 = EF \cdot EG$

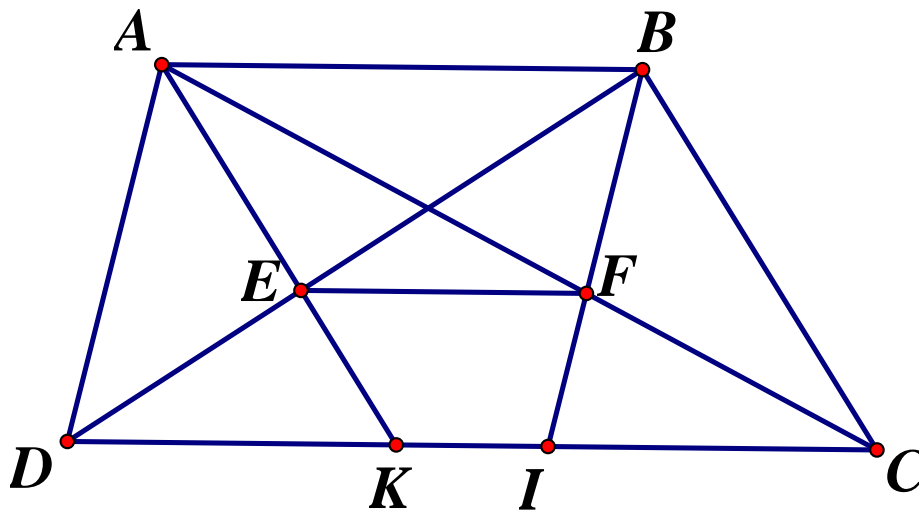
b) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AB}{DG} = \frac{FB}{AD} \Rightarrow BF \cdot DG = AB \cdot AD = a \cdot b$ (không đổi)

Bài 144: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB < CD$. Qua A và B kẻ các đường thẳng song song với BC và AD lần lượt cắt CD ở K và I . Gọi E là giao điểm của AK và BD , F là giao điểm của BI và AC . Chứng minh rằng:

a) $EF \parallel AB$

b) $AB^2 = CD \cdot EF$

Lời giải



a) Ta có: $AB \parallel CD$ nên theo hệ quả Ta let ta có:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AB}{IC} \quad (1) \qquad \frac{AE}{EK} = \frac{AB}{DK} \quad (2)$$

Mặt khác ta có:

Tứ giác $ABCK$ là hình bình hành (do $AB \parallel CD, BC \parallel AK$) nên $AB = CK$ (3)

Tứ giác $ABID$ là hình bình hành (do $AB \parallel CD, BI \parallel AD$) nên $AB = DI$ (4)

Từ (3) (4) suy ra $CK = DI \Rightarrow IC = DK$ (5)

Từ (1) (2) (5) suy ra $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EK} \Rightarrow EF \parallel DC \Rightarrow EF \parallel AB$

b) Ta có: $AB \parallel CD$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CI} = \frac{AF}{CF} \quad (*) \quad (\text{Do } AB = DI \text{ nên } AB + CI = DI + CI = CD)$$

Mặt khác $\triangle AEF \sim \triangle AKC$ ($EF \parallel KC$)

$$\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{KC} \text{ mà } KC = AB \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{AB} \quad (**)$$

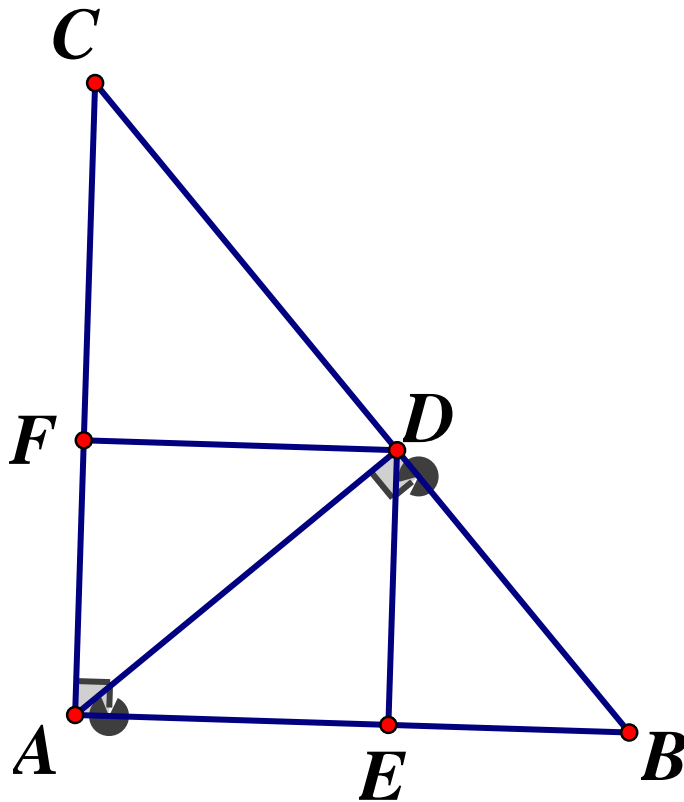
Từ (*) và (**) suy ra $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{AB}$ hay $AB^2 = EF \cdot CD$ (đpcm).

Bài 145: Cho tam giác ABC vuông tại A , D là điểm di động trên cạnh BC . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm D lên AB, AC

a) Xác định vị trí của điểm D để tứ giác $AEDF$ là hình vuông

b) Xác định vị trí của điểm D sao cho $3AD + 4EF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



- a) Tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật (vì $\widehat{E} = \widehat{A} = \widehat{F} = 90^\circ$)

Để tứ giác $AEDF$ là hình vuông thì AD là tia phân giác của \widehat{BAC}

- b) Do tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật nên $AD = EF$

$$\Rightarrow 3AD + 4EF = 7AD$$

$3AD + 4EF$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow D$ là hình chiếu vuông góc của A lên BC

Bài 146:

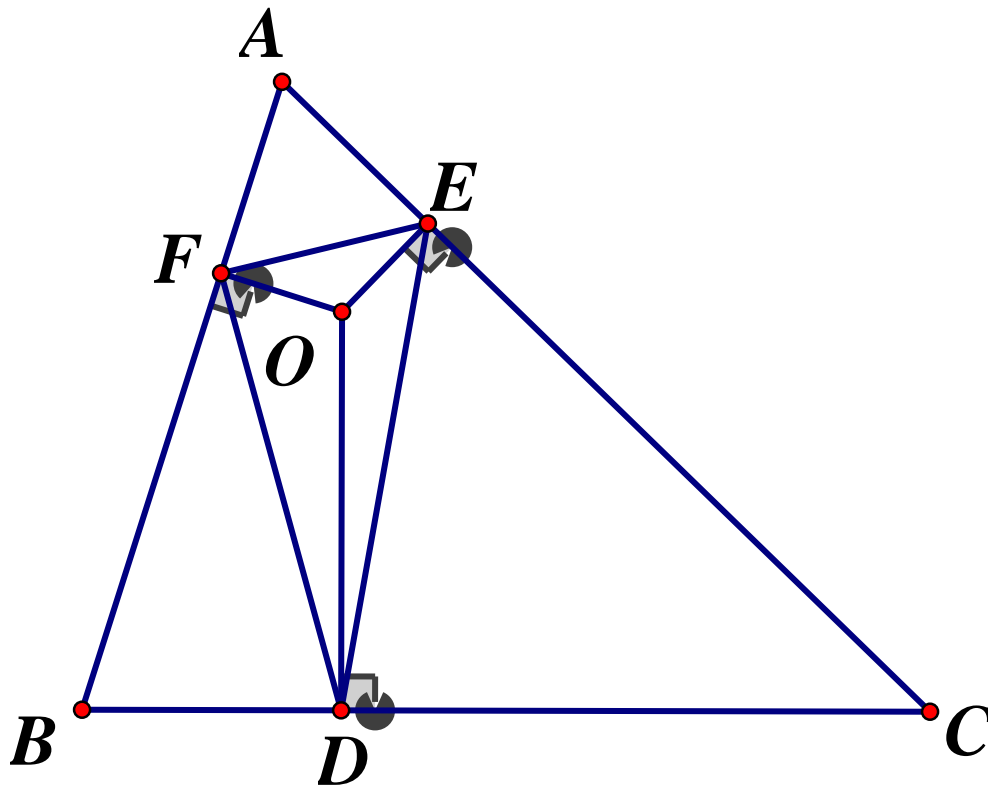
Trong tam giác ABC , các điểm A, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho

$$\widehat{AFE} = \widehat{BFD}; \widehat{BDF} = \widehat{CDE}; \widehat{CED} = \widehat{AEF}$$

- a) Chứng minh rằng: $\widehat{BDF} = \widehat{BAC}$

- b) Cho $AB = 5, BC = 8, CA = 7$. Tính độ dài đoạn BD .

Lời giải



- a) Đặt $\widehat{AFE} = \widehat{BFD} = \omega$, $\widehat{BDF} = \widehat{CDE} = \alpha$; $\widehat{CED} = \widehat{AEF} = \beta$

Ta có: $\widehat{BAC} + \beta + \omega = 180^\circ (*)$

Qua D, E, F lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, AC, AB cắt nhau tại O . Suy ra O là giao điểm ba đường phân giác của tam giác DEF

$$\Rightarrow \widehat{OFD} + \widehat{OED} + \widehat{ODF} = 90^\circ (1)$$

Ta có:

$$\widehat{OFD} + \omega + \widehat{OED} + \beta + \widehat{ODF} + \alpha = 270^\circ (2)$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow \alpha + \beta + \omega = 180^\circ (**)$$

$$\text{Từ } (*) \& (**) \Rightarrow \widehat{BAC} = \alpha = \widehat{BDF}$$

- b) Chứng minh tương tự câu a) ta có:

$$\widehat{B} = \beta, \widehat{C} = \omega \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle DBF \sim \triangle DEC \sim \triangle ABC$$

\Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BC} = \frac{5}{8} \\ \frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} = \frac{7}{8} \\ \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7AE = 5AF \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7(7 - CE) = 5(5 - BF) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} BD = \frac{5BF}{8} \\ CD = \frac{7CE}{8} \\ 7CE - 5BF = 24 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow CD - BD = 3 \quad (3)$$

$$\text{Ta lại có: } CD + BD = 8 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) } \Rightarrow BD = 2,5$$

Bài 147: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi

Lời giải

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z trong đó cạnh huyền là z

(x, y, z là các số nguyên dương)

$$\text{Ta có: } xy = 2(x + y + z)(1) \text{ và } x^2 + y^2 = z^2 (2)$$

Từ (2) suy ra $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có:

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$$

$$z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y)$$

$$z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$$

$$(z + 2)^2 = (x + y - 2)^2$$

Suy ra $z + 2 = x + y - 2 \Rightarrow z = x + y - 4$; thay vào (1) ta được:

$$xy = 2(x + y + x + y - 4)$$

$$xy - 4x - 4y = -8$$

$$(x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4$$

Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y, z là:

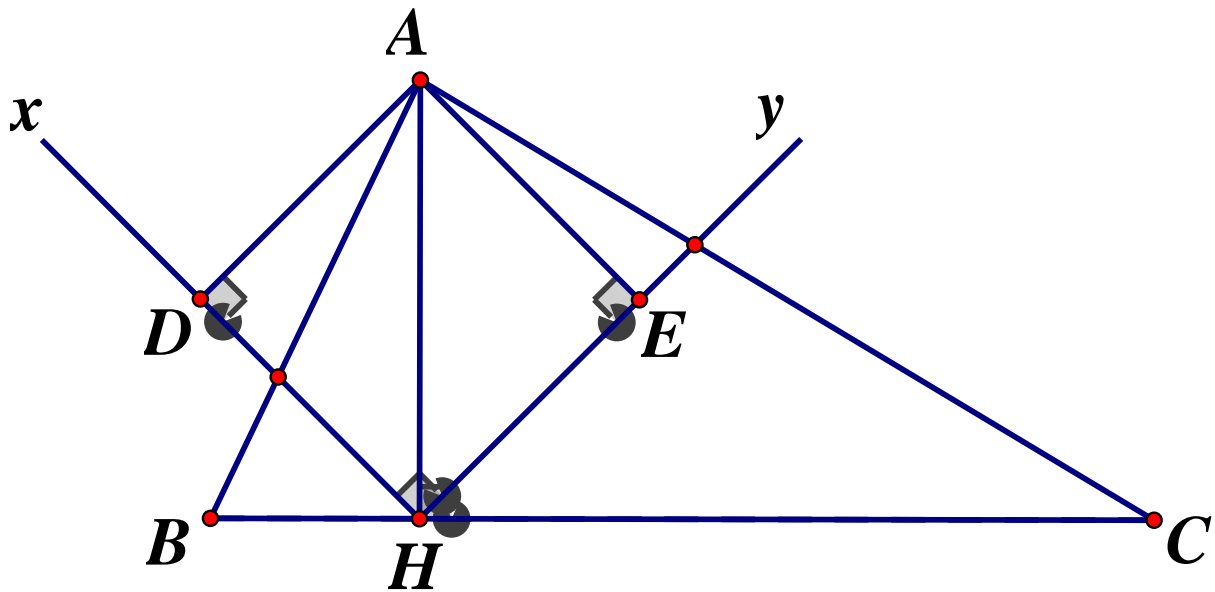
$$(x; y; z) \in \{(5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10)\}$$

Bài 148: Cho tam giác ABC , đường cao AH , vẽ phân giác Hx của góc \widehat{AHB} và phân giác Hy của \widehat{AHC} . Kẻ AD vuông góc với Hx , AE vuông góc với Hy

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ là hình vuông.

Lời giải



Tứ giác $ADHE$ là hình vuông

Hx là phân giác của \widehat{AHB} ; Hy là phân giác của \widehat{AHC} mà \widehat{AHB} và \widehat{AHC} là hai góc kề bù nên

$Hx \perp Hy$

Hay $\widehat{DHE} = 90^\circ$, mặt khác: $\widehat{AHD} = \widehat{AEH} = 90^\circ$ nên tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật (1)

$$\widehat{AHD} = \frac{\widehat{AHB}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ, \text{ Do } \widehat{AHE} = \frac{\widehat{AHC}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Hay HA là phân giác \widehat{DHE} (2)

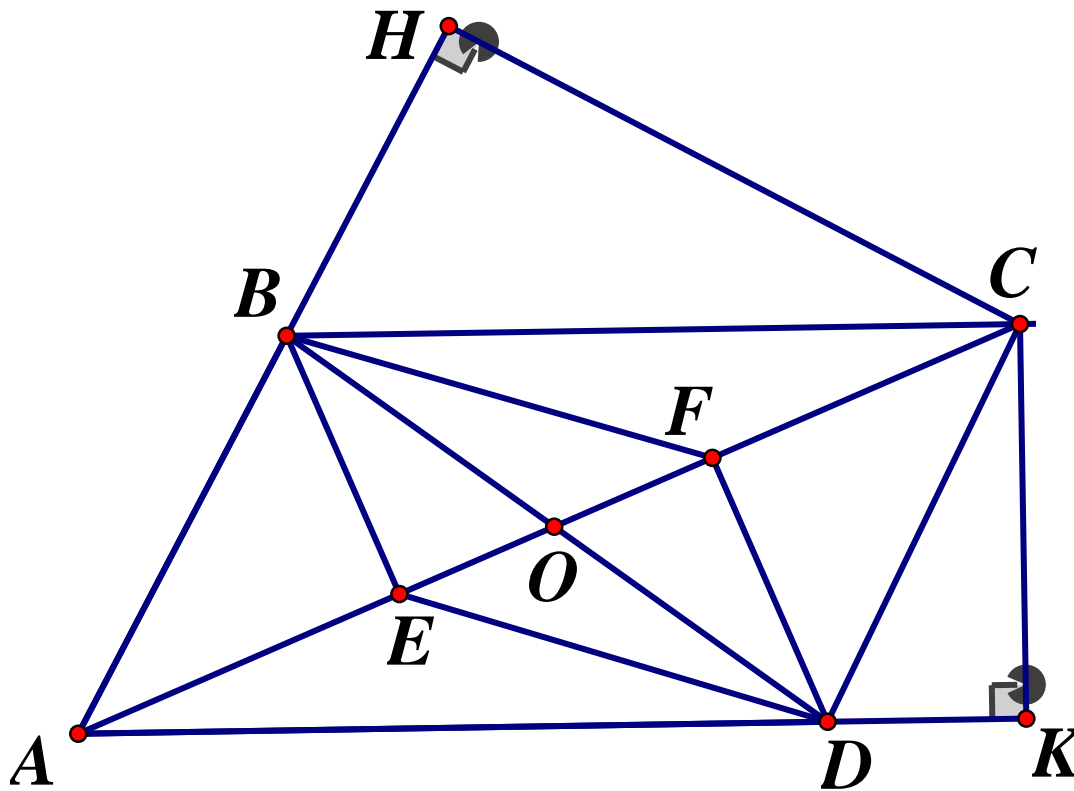
Từ (1) và (2) ta có tứ giác $ADHE$ là hình vuông.

Bài 149:

Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD

- Tứ giác $BEDF$ là hình gì ? Vì sao ?
- Chứng minh rằng : $CH.CD = CB.CK$
- Chứng minh rằng: $AB.AH + AD.AK = AC^2$

Lời giải



a) Ta có $BE \perp AC(gt); DF \perp AC(gt) \Rightarrow BE \parallel DF$

Chứng minh $\triangle BEO = \triangle DFO(g.c.g) \Rightarrow BE = DF$

Suy ra tứ giác $BEDF$ là hình bình hành

b) Ta có : $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{HBC} = \widehat{KDC}$

Chứng minh $\triangle CBH \sim \triangle CDK(g.g) \Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CK}{CD} \Rightarrow CH.CD = CK.CB$

c) Chứng minh $\triangle AFD \sim \triangle AKC(g.g) \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow AD.AK = AF.AC$

Chứng minh $\triangle CFD \sim \triangle AHC(g.g) \Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{AH}{AC}$

Mà $CD = AB \Rightarrow \frac{CF}{AB} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AB.AH = CF.AC$

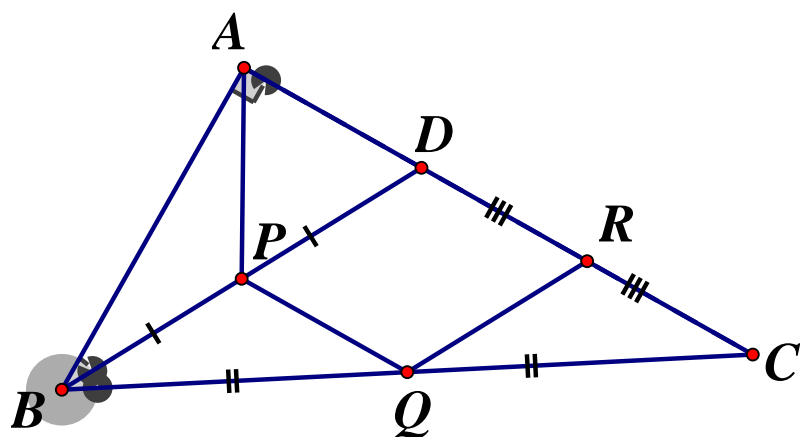
Suy ra $AB.AH + AB.AH = CF.AC + AF.AC = (CF + AF).AC = AC^2$

Bài 150: Cho tam giác ABC vuông tại A , phân giác BD . Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của BD, BC, DC

a) Chứng minh $APQR$ là hình thang cân

b) Biết $AB = 6cm, AC = 8cm$. Tính độ dài của AR

Lời giải



a) PQ là đường trung bình tam giác BDC , suy ra $PQ \parallel AR$ nên $APQR$ là hình thang.

$$AQ = \frac{1}{2}BC \text{ (trung tuyến tam giác vuông } \triangle ABC)$$

$$PR = \frac{1}{2}BC \text{ (đường trung bình tam giác } \triangle BDC)$$

Suy ra $AQ = PR \Rightarrow APQR$ là hình thang cân

b) Tính được $BC = 10cm$

Tính chất đường phân giác trong của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{AC} = \frac{BA}{BC + BC}$$

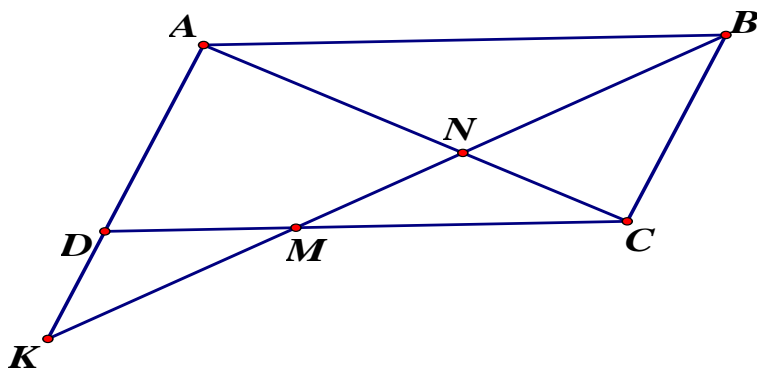
Thay số tính đúng $AD = 3cm, DC = 5cm, DR = 2,5cm$

Kết quả $AR = 5,5cm$

Bài 151: Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng qua B cắt cạnh CD tại M, cắt đường chéo AC tại N và cắt đường thẳng AD tại K. Chứng minh:

$$\frac{1}{BN} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{BK}$$

Lời giải



$AB \parallel AC$ (hai cạnh đối diện hình bình hành). Theo định lý Talet có:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AN} = \frac{MN}{NB} \Rightarrow \frac{MC + AB}{AB} = \frac{MN + NB}{BN} = \frac{BM}{BN} \quad (1)$$

$$\frac{KM}{BK} = \frac{KD}{KA} = \frac{MD}{AB} \Rightarrow \frac{BK - KM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \Rightarrow \frac{BM}{BK} = \frac{AB - MD}{AB} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = \frac{AB + MC}{AB} - \frac{AB - MD}{AB} = \frac{MC + MD}{AB}$$

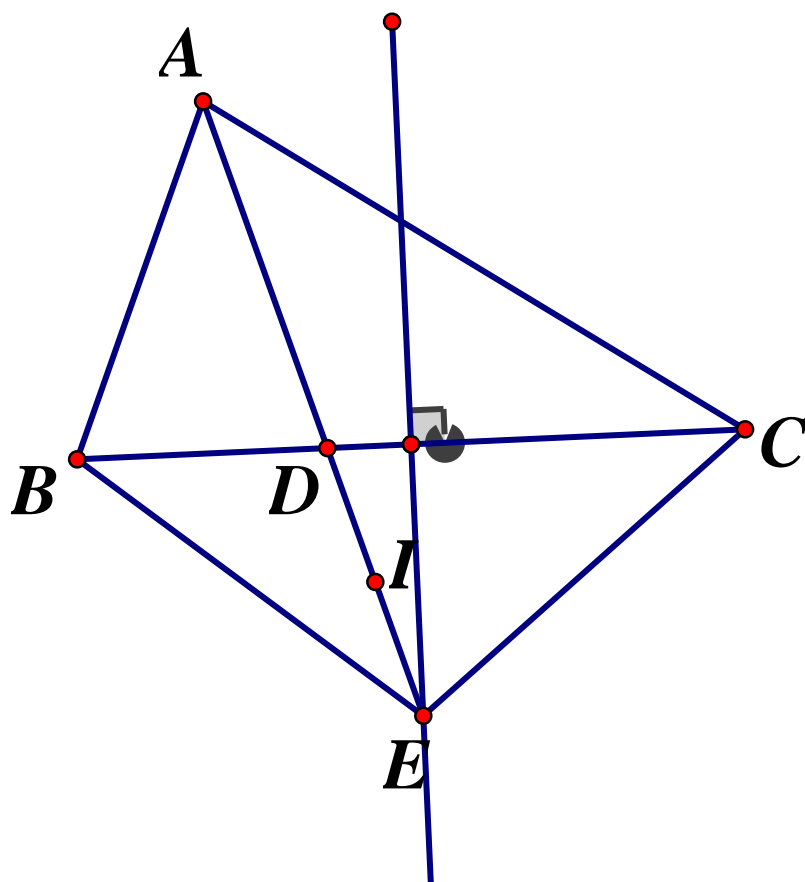
Mà $MC + MD = CD = AB$ nên $\frac{BM}{BN} - \frac{BM}{BK} = 1$ (Điều phải chứng minh)

Bài 152: Cho tam giác ABC phân giác AD . Trên nửa mặt phẳng không chứa A bờ BC , vẽ tia Cx

sao cho $\widehat{BCx} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$. Cx cắt AD tại E ; I là trung điểm DE . Chứng minh rằng:

- e) $\triangle ABD \sim \triangle CED$
- f) $AE^2 > AB \cdot AC$
- g) $4AB \cdot AC = 4AI^2 - DE^2$
- h) Trung trực của BC đi qua E

Lời giải



- a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CED$ có: $\widehat{BAD} = \widehat{BCE} \left(= \frac{1}{2} \widehat{BAC} \right)$; $\widehat{ADB} = \widehat{CDE}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle CED (g.g)$$

b) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEC$ có:

$$\widehat{BAD} = \widehat{EAD} \left(= \frac{1}{2} \widehat{BAC} \right); \widehat{ABD} = \widehat{AEC} (\triangle ABD = \triangle CED) \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEC (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AE < AE^2 (AD < AE)$$

$$\text{Vậy } AE^2 > AB.AC$$

c) Ta có:

$$4AI^2 - DE^2 = 4AI^2 - 4DI^2 = 4.(AI - DI)(AI + DI) = 4AD.(AI + IE) = 4AD.AE \text{ Mà } AD.AE = AB.AC \text{ (câu b)} \Rightarrow 4AB.AC = 4AI^2 - DE^2$$

d)

$$+) \triangle ABE \sim \triangle ADC$$

$$\text{Vì } \widehat{BAD} = \widehat{DAC}; \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC} (AD.AE = AB.AC)$$

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ADC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ACB}$$

$$\text{Xét } \triangle BDE \text{ và } \triangle ADC \text{ có: } \widehat{BDE} = \widehat{ADC} \text{ (đối đỉnh); } \widehat{BED} = \widehat{ACD}$$

$$\Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle ADC (g.g) \Rightarrow \widehat{DBE} = \widehat{DAC} = \widehat{BCE}$$

$$\Rightarrow \triangle BEC \text{ cân tại E} \Rightarrow \text{Trung trực BC qua E}$$

Bài 153: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH. Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa C, vẽ hình vuông AHKE. Gọi P là giao điểm của AC và KE

a) Chứng minh $\triangle ABP$ vuông cân

b) Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành APQB, gọi I là giao điểm của BP và AQ. Chứng minh H, I, E thẳng hàng

c) Tứ giác HEKQ là hình gì? Chứng minh

Lời giải

a/ CM được $\triangle BHA = \triangle PEA (g.c.g)$

$$\Rightarrow AB = AP \text{ mà } \widehat{BAP} = 90^\circ (gt)$$

Vậy $\triangle BPA$ vuông cân

b/Ta có : $HA = HK$

$$\Rightarrow H \text{ nằm trên đường trung trực của AK}$$

$$\text{Ta có : } AE = KE$$

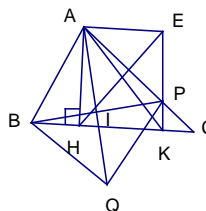
$$\Rightarrow E \text{ nằm trên đường trung trực của KA}$$

$$\triangle PBK \text{ vuông có } IB = IP \text{ (t/c đ/c hnh ABQP)}$$

$$\Rightarrow IK = IP = IB (*)$$

Ta có ABQP là hbh(gt), có $BA = AP$ ($\triangle BPA$ vuông cân tại A) $\Rightarrow APQB$ là hình thoi, mà

$$\widehat{BAP} = 90^\circ (gt)$$



$\Rightarrow APQB$ là hình vuông nên $PI = IA(**)$.

Từ (*) và (**) suy ra $IK = IA$ nên I nằm trên đường trung trực của AK

Vậy H, I, E thẳng hàng.

c/ Ta có $APQB$ là hình vuông (cmt) nên $AP = BQ$

$$\text{mà } IK = \frac{PB}{2} \Rightarrow IK = \frac{AQ}{2}$$

$\triangle AKQ$ có $AI = IQ$ (t/c đ/c hv)

$$\text{Mà } IK = \frac{AQ}{2} \text{ (cmt)} \Rightarrow \triangle AKQ \text{ vuông ở } K$$

$\Rightarrow AK \perp KQ$ mà $AK \perp HE$ (EAHK là hv) $\Rightarrow KQ \parallel HE$

Vậy HEKQ là hình thang

Bài 154: Tính diện tích hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), biết $AB = 42\text{cm}$, $\hat{A} = 45^\circ$; $\hat{B} = 60^\circ$ và chiều cao của hình thang bằng 18m

Lời giải

Qua A và B kẻ AA' và BB' vuông góc với CD.

Tứ giác $ABB'A'$ là hcn và $A'A = BB' = 18\text{m}$

$$\widehat{A'AB} = 90^\circ, \widehat{DAB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{A'AD} = 45^\circ$$

Do đó $\triangle A'AD$ vuông cân

$$\Rightarrow A'D = A'A = 18\text{m}$$

$$\widehat{B'BA} = 90^\circ, \widehat{CBA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B'BC} = 30^\circ$$

vì thế trong tam giác vuông $B'BC$

ta có $B'C = \frac{BB'}{2}$. Theo định lí Pi ta go, ta có:

$$B'C^2 = BC^2 - B'B^2$$

$$\Rightarrow B'C^2 = 4B'C^2 - B'B^2$$

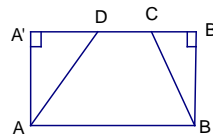
$$\Rightarrow 3B'C^2 = B'B^2$$

$$\Rightarrow B'C = \frac{B'B}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} \text{ (cm)}$$

Suy ra :

$$CD = A'B' - A'D - B'C = 42 - 18 - \frac{18}{\sqrt{3}} = 24 - \frac{18}{\sqrt{3}} \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot A'A = \frac{1}{2} \left(42 + 24 - \frac{18}{\sqrt{3}} \right) 18 \approx 498,6 \text{ (cm}^2\text{)}$$

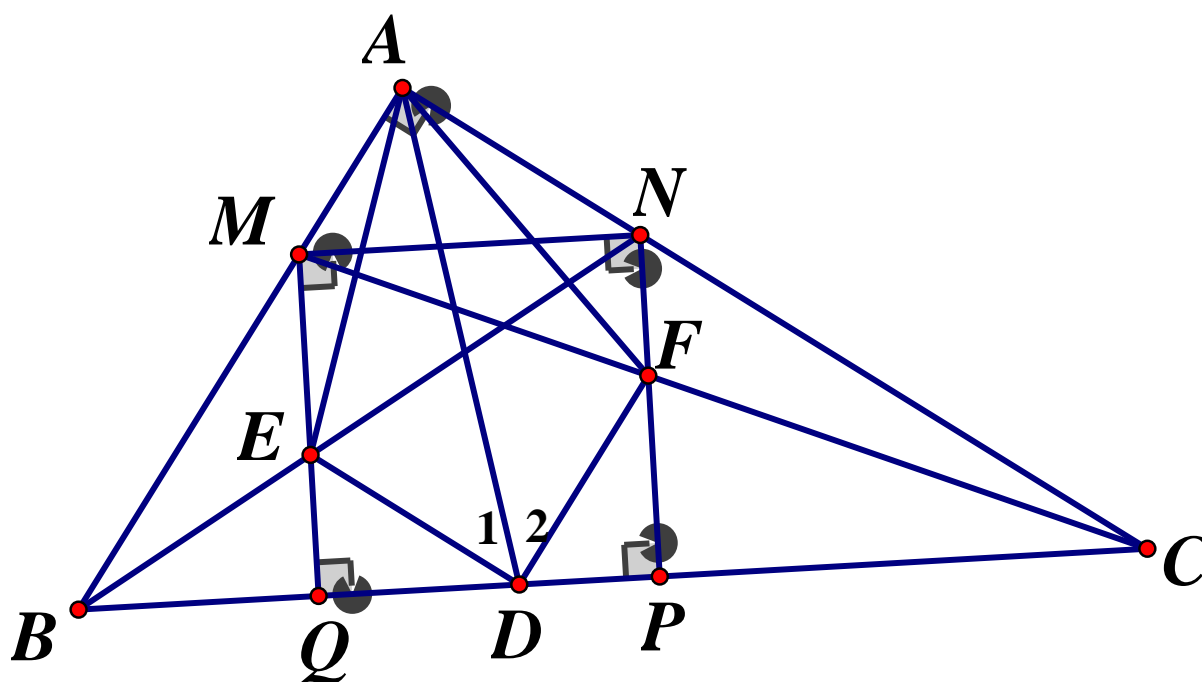


Bài 155: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Vẽ hình vuông $MNPQ$ có M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của BN và MQ; CM và NP. Chứng minh rằng

c) DE song song với AC

d) $DE = DF; AE = AF$

Lời giải



a) Chứng minh được $\frac{BE}{EN} = \frac{BQ}{QP} = \frac{BQ}{MQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow DE \parallel NC$ hay $DE \parallel AC$

b) Do $DE \parallel AC \Rightarrow \frac{DE}{CN} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow DE = \frac{BD}{BC} \cdot CN$ (1)

Tương tự: $DF = \frac{CD}{BC} \cdot BM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DE}{DF} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CN}{BM}$

Mà $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ và $\frac{CN}{BM} = \frac{AC}{AB}$ nên $\frac{DE}{DF} = 1 \Rightarrow DE = DF$

Ta có: $\widehat{D_1} = \widehat{DAC} = \widehat{DAB} = \widehat{D_2} \Rightarrow \triangle ADE = \triangle ADF \Rightarrow AE = AF$

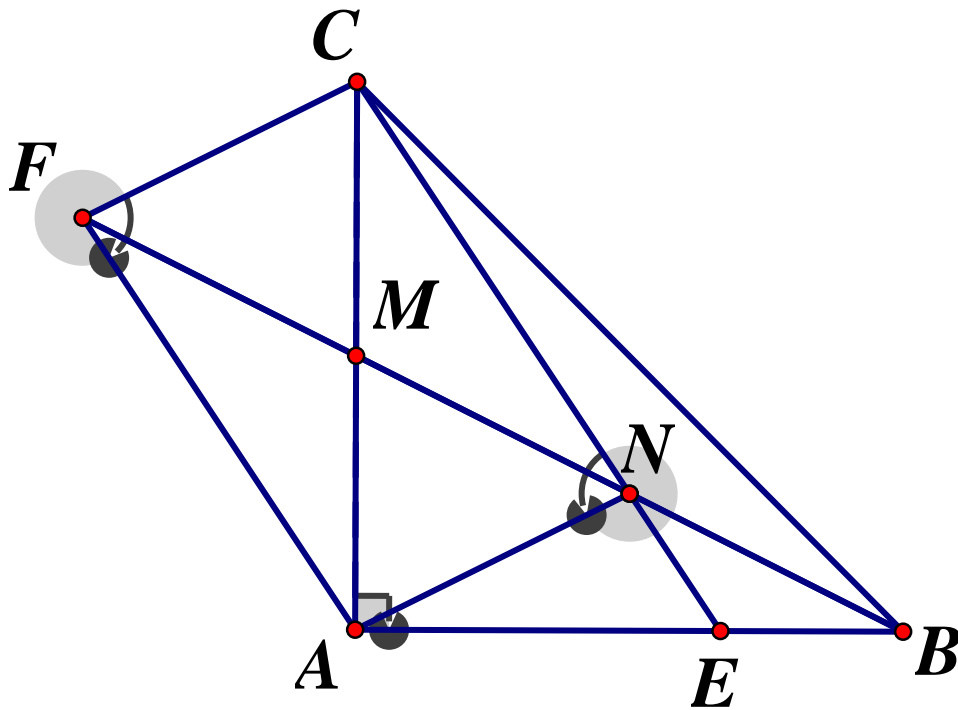
Bài 156: Cho tam giác vuông cân $ABC (AB = AC)$. M là trung điểm của AC , trên BM lấy điểm

N sao cho $NM = MA$; CN cắt AB tại E . Chứng minh :

c) Tam giác BNE đồng dạng với tam giác BAN

d) $\frac{NC}{AN} = \frac{NB}{AB} + 1$

Lời giải



a) $\triangle ANC$ vuông tại N (vì $AM = MC = MN$)

$$\widehat{CNM} + \widehat{MNA} = 90^\circ \text{ \& \; } \widehat{BAN} + \widehat{NAC} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{MNA} = \widehat{NAC} \Rightarrow \widehat{CNM} = \widehat{BAN}$$

Mặt khác $\widehat{CNM} = \widehat{BNE}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{BNE} = \widehat{BAN} \Rightarrow \triangle BNE \sim \triangle BAN$

b) Trên tia đối tia MN lấy điểm F sao cho $FM = MN$

Tứ giác $ANCF$ là hình chữ nhật (vì có 2 đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

$$\Rightarrow CE \parallel AF \Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{ENB} \text{ (đồng vị)} \Rightarrow \triangle BAN \sim \triangle BFA$$

$$\Rightarrow \frac{FA}{AN} = \frac{BF}{BA} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{AB + NB}{AB} \Rightarrow \frac{NC}{AN} = \frac{NB}{AB} + 1 \text{ (dfcm)}$$

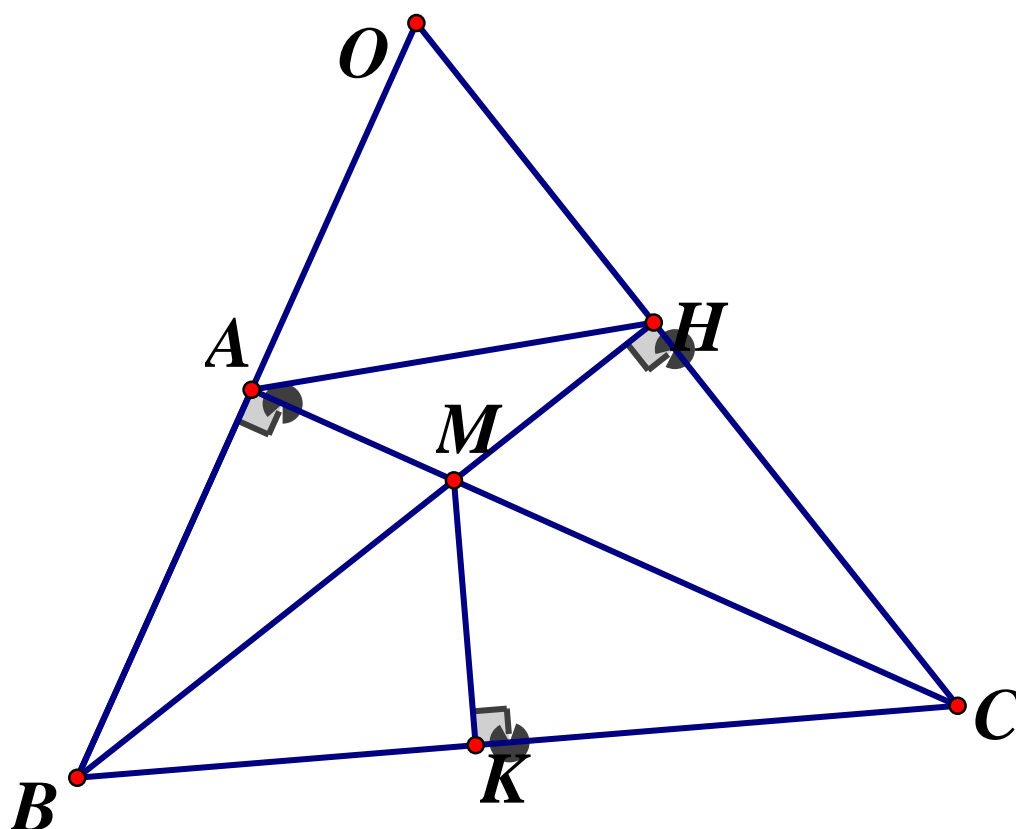
Bài 157: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là một điểm di động trên AC. Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với tia BM cắt tia BM tại H, cắt tia BA tại O. Chứng minh rằng:

a) $OA \cdot OB = OC \cdot OH$

b) \widehat{OHA} có số đo không đổi

c) Tổng $BM \cdot BH + CM \cdot CA$ không đổi

Lời giải



$$a) \quad \triangle BOH \sim \triangle COA (g.g) \Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow OA \cdot OB = OH \cdot OC$$

$$b) \quad \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OH}{OB} \text{ và } \widehat{O} \text{ chung} \Rightarrow \triangle OHA \sim \triangle OBC$$

$$\Rightarrow \widehat{OHA} = \widehat{OBC} \text{ (không đối)}$$

$$c) \quad \text{Vẽ } MK \perp BC; \triangle BKM \sim \triangle BHC (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BK}{BH} \Rightarrow BM \cdot BH = BK \cdot BC \quad (3)$$

$$\triangle CKM \sim \triangle CAB (g.g) \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CK}{CA} \Rightarrow CM \cdot CA = BC \cdot CK \quad (4)$$

Cộng từng vế của (3) và (4) ta có:

$$BM \cdot BH + CM \cdot CA = BK \cdot BC + BC \cdot CK = BC \cdot (BK + KC) = BC^2 \text{ (Không đổi)}$$

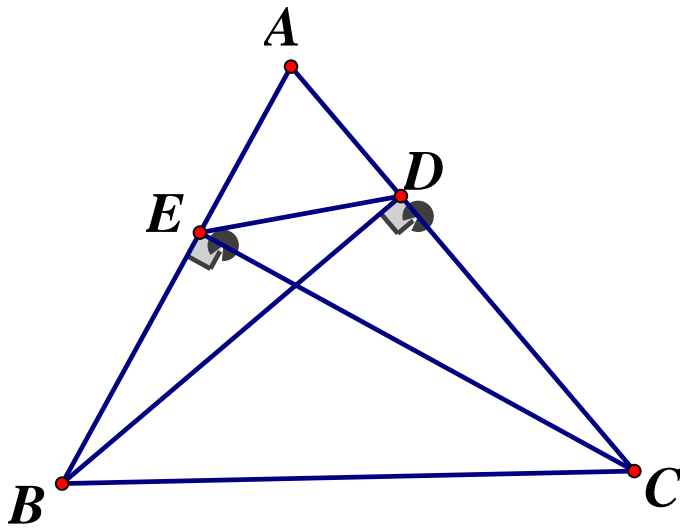
Bài 158: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao BD, CE cắt nhau tại H

$$a) \text{ Chứng minh } \triangle ABD \sim \triangle ACE$$

$$b) \text{ Chứng minh } BH \cdot HD = CH \cdot HE$$

$$c) \text{ Nối } D \text{ với } E, \text{ cho biết } BC = a, AB = AC = b. \text{ Tính độ dài đoạn thẳng } DE \text{ theo } a$$

Lời giải

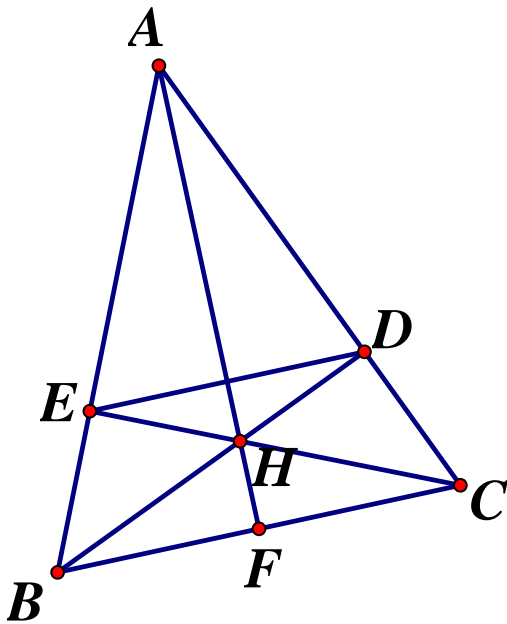


a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có: \widehat{A} chung; $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE (g.g)$

b) Xét $\triangle BHE$ và $\triangle CHD$ có:

$$\widehat{BEH} = \widehat{CDH} = 90^\circ; \widehat{BHE} = \widehat{CHD} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle BHE \sim \triangle CHD (g.g) \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{HE}{HD} \Rightarrow BH.HD = CH.HE$$



c) Khi $AB = AC = b$ thì $\triangle ABC$ cân tại A

$$\text{Suy ra được } DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow DE = \frac{AD.BC}{AC}$$

$$\text{Gọi giao điểm của } AH \text{ và } BC \text{ là } F \Rightarrow AF \perp BC, FB = FC = \frac{a}{2}$$

$$\triangle DBC \sim \triangle FAC \Rightarrow \frac{DC}{FC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow DC = \frac{BC \cdot FC}{AC} = \frac{a^2}{2b}$$

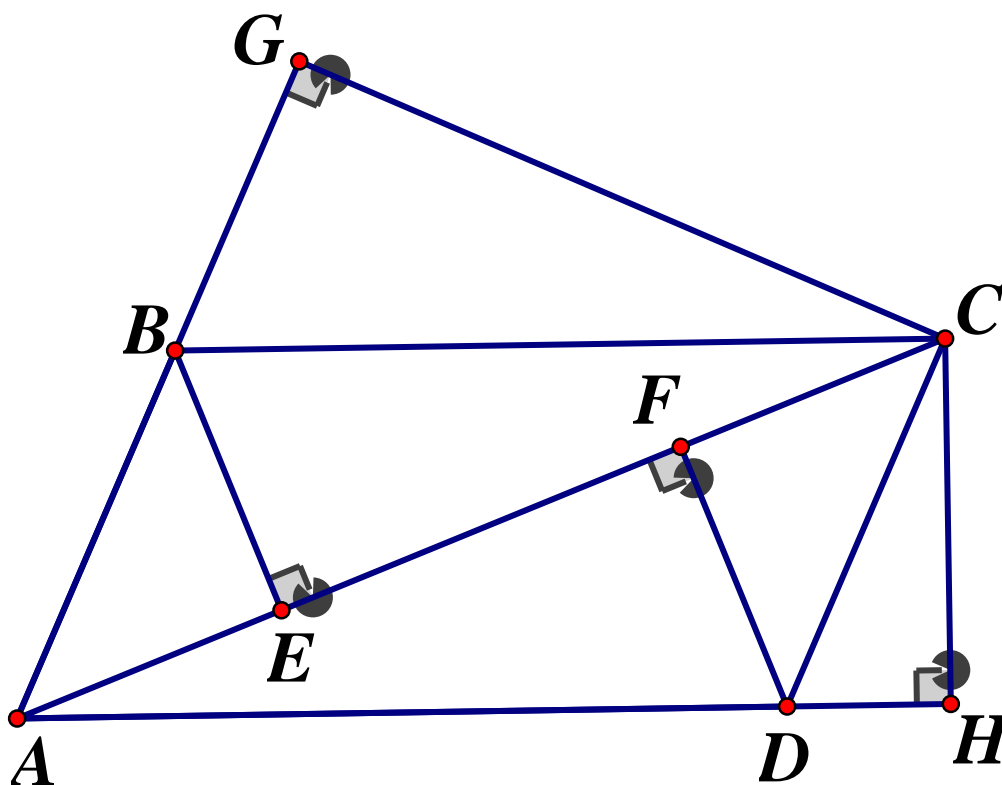
$$\Rightarrow DE = \frac{AD \cdot BC}{AC} = \frac{(AC - DC) \cdot BC}{AC} = \frac{\left(b - \frac{a^2}{2b}\right) \cdot a}{b} = \frac{a(2b^2 - a^2)}{2b^2}$$

Bài 159: Cho hình bình hành $ABCD$ ($AC > BD$). Gọi G, H lần lượt là hình chiếu của C lên AB và AD . Chứng minh

c) $\triangle ABC \sim \triangle HCG$

d) $AC^2 = AB \cdot AG + AD \cdot AH$

Lời giải



a) Chứng tỏ được $\triangle CBG \sim \triangle CDH \Rightarrow \frac{CG}{CH} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{BA}$

Và $\widehat{ABC} = \widehat{HCG}$ (cùng bù với \widehat{BAD}) $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle HCG$

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, D trên AC .

$$\triangle AFD \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AF}{AH} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AF \cdot AC = AD \cdot AH$$

$$\triangle AEB \sim \triangle AGC \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AG \cdot AB$$

Cộng được : $AF.AC + AE.AC = AD.AH + AG.AB$

$$\Leftrightarrow AC.(AF + AE) = AD.AH + AG.AB$$

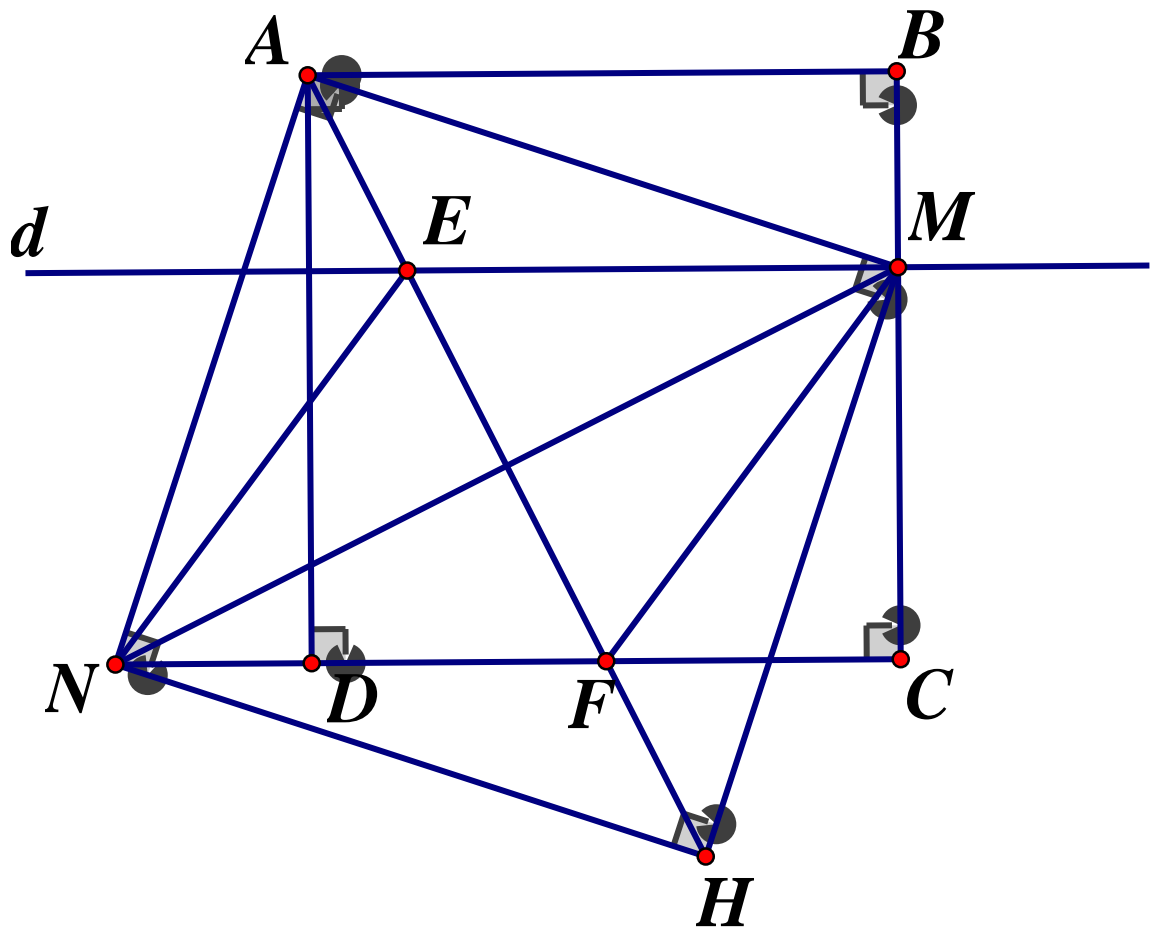
Chứng tỏ được: $AE = FC$. Thay được:

$$AC.(AF + FC) = AD.AH + AG.AB \Rightarrow AC^2 = AD.AH + AG.AB$$

Bài 160: Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB , d cắt AH ở E , cắt DC ở F .

- e) Chứng minh rằng $BM = ND$
- f) Chứng minh rằng N, D, C thẳng hàng
- g) $EMFN$ là hình gì ?
- h) Chứng minh: $DF + BM = FM$ và chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi vị trí trên BC .

Lời giải



a) $ABCD$ là hình vuông (gt) $\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{MAD} = 90^\circ$ (gt) (1)

Vì $AMHN$ là hình vuông (gt) $\Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{MAD} = 90^\circ$ (2)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

Ta có: $\triangle AND = \triangle AMB(c.g.c) \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D_1} = 90^\circ$ và $BM = ND$

b) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{D_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = \widehat{NDC} \Rightarrow \widehat{NDC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
 $\Rightarrow N; D; C$ thẳng hàng

c) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AH và MN của hình vuông $AMHN$
 $\Rightarrow O$ là tâm đối xứng của hình vuông $AMHN$
 $\Rightarrow AH$ là đường trung trực của đoạn MN ,
 mà $E; F \in AH \Rightarrow EN = EM$ và $FM = FN$ (3)

Tam giác vuông EOM = tam giác vuông FON ($OM = ON; \widehat{N_1} = \widehat{M_3}$)

$\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow EM = NF$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow EM = NE = NF = FM \Rightarrow MENF$ là hình thoi (5)

d) Từ (5) $\Rightarrow FM = FN = FD + DN$ mà $DN = MB$ (cmt) $\Rightarrow MF = DF + BM$

Gọi chu vi tam giác MCF là p và cạnh hình vuông $ABCD$ là a

$P = MC + CF + MF = MC + CF + BM + DF$ (vì $MF = DF + MB$)

$= (MC + MB) + (CF + FD) = BC + CD = a + a = 2a$

Hình vuông $ABCD$ cho trước $\Rightarrow a$ không đổi $\Rightarrow p$ không đổi

Bài 161: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy điểm P , gọi M là điểm đối xứng của C qua P .

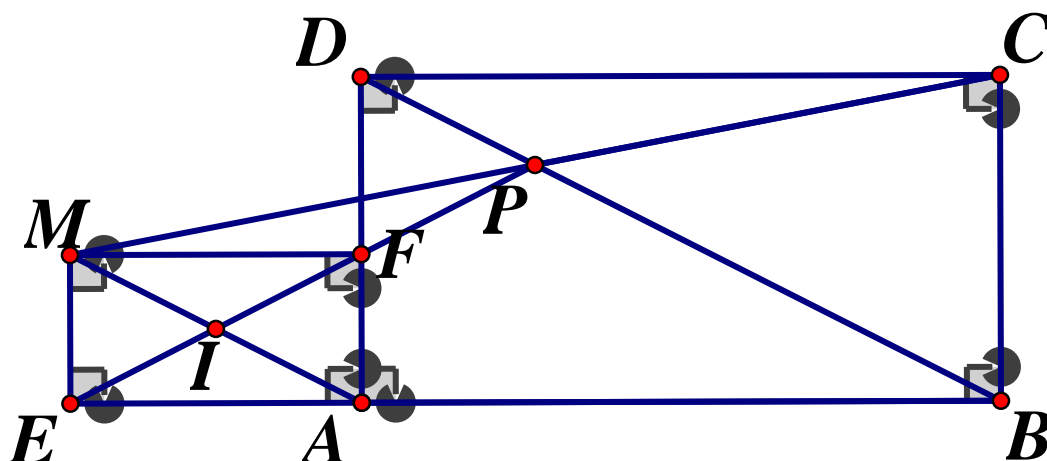
e) Tứ giác $AMDB$ là hình gì ?

f) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB , AD . Chứng minh $EF \parallel AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng

g) Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật $MEAF$ không phụ thuộc vào vị trí điểm P

Giả sử $CP \perp BD$ và $CP = 2,4cm, \frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$. Tính các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$

Lời giải



a) Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$

$\Rightarrow PO$ là đường trung bình tam giác CAM

$\Rightarrow AM \parallel PO \Rightarrow AMDB$ là hình thang

b) Do $AM \parallel BD$ nên $\widehat{OBA} = \widehat{MAE}$ (đồng vị)

Tam giác AOB cân ở O nên $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$

Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật $AEMF$ thì $\triangle AIE$ cân ở I nên $\widehat{IAE} = \widehat{IEA}$

Từ chứng minh trên : có $\widehat{FEA} = \widehat{OAB}$, do đó: $EF \parallel AC$ (1)

Mặt khác IP là đường trung bình của $\triangle MAC$ nên $IP \parallel AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) $\triangle MAF \sim \triangle DBA(g.g) \Rightarrow \frac{MF}{FA} = \frac{AD}{AB}$ Không đổi

d) Nếu $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{PD}{9} = \frac{PB}{16} = k \Rightarrow PD = 9k, PB = 16k$

Nếu $CP \perp BD$ thì $\triangle CBD \sim \triangle DCP(g.g) \Rightarrow \frac{CP}{PD} = \frac{PB}{CP}$

Do đó: $CP^2 = PB \cdot PD$ hay $(2,4)^2 = 9 \cdot 16k^2 \Rightarrow k = 0,2$

$PD = 9k = 1,8(cm)$; $PB = 16k = 3,2(cm)$ $BD = 5(cm)$

Chứng minh $BC^2 = BP \cdot BD = 16$, do đó: $BC = 4cm$, $CD = 3cm$.

Bài 162: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của CD .

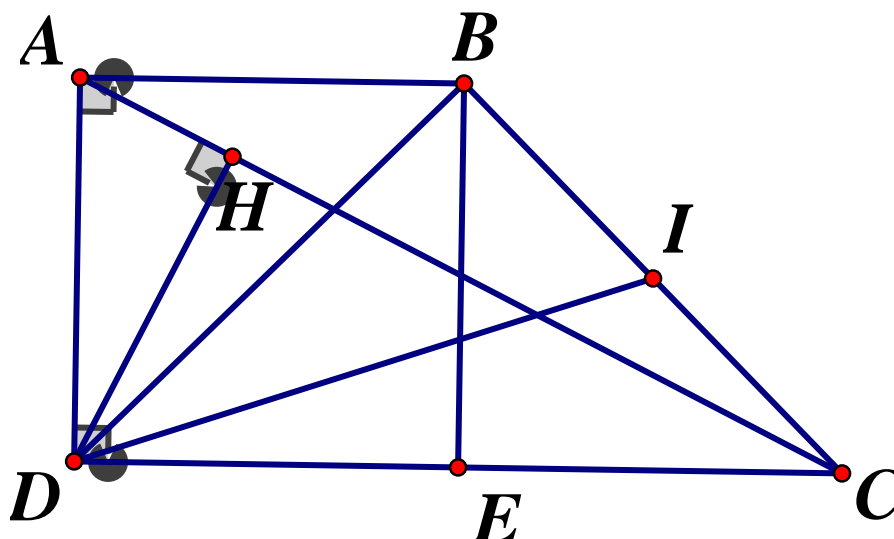
d) Tứ giác $ABED$ là hình gì ? Tại sao ?

e) Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo a

f) Gọi I là trung điểm của BC , H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC . Tính góc

\widehat{HDI}

Lời giải



a) Chỉ ra $ABED$ là hình bình hành ($AB // DE, AB = DE$)

Chỉ ra $ABED$ là hình thoi ($AB=AD$)

Chỉ ra $ABED$ là hình vuông ($\widehat{BAD} = 90^\circ$)

b) Chỉ ra $\triangle BEC$ vuông cân

Từ đó suy ra $AB = AD = a, DC = 2a$

Diện tích của hình thang $ABCD$ là: $S = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}$

c) $\widehat{ACH} = \widehat{ACD}$ (1) (cùng phụ với góc HDC)

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle IBD$ vuông tại D và B có:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{IB}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle IBC$$

Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BDI}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{BDI}$

Mà $\widehat{ADH} + \widehat{BDI} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BDI} + \widehat{BDH} = 45^\circ$ hay $\widehat{HDI} = 45^\circ$

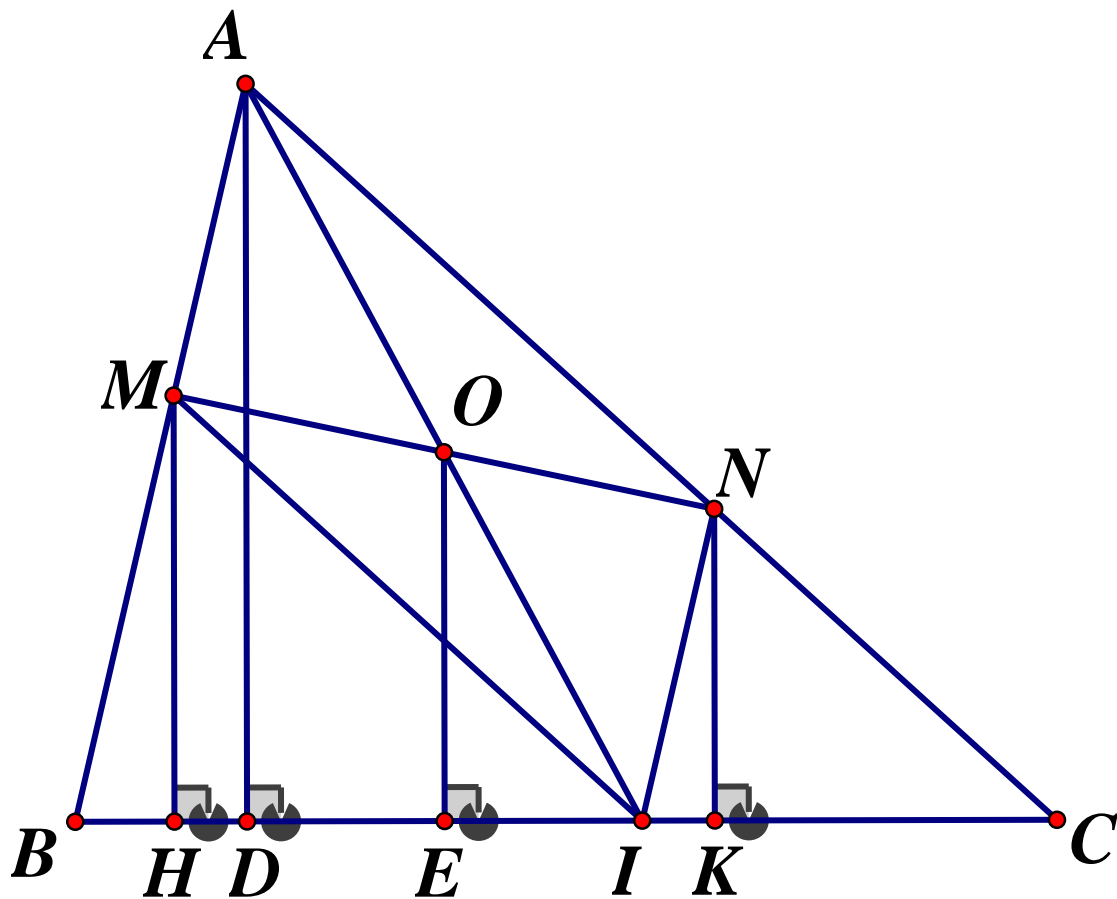
Bài 163: Cho tam giác ABC . Gọi I là một điểm di chuyển trên cạnh BC . Qua I , kẻ đường thẳng song song với cạnh AC cắt cạnh AB tại M . Qua I , kẻ đường thẳng song song với cạnh AB cắt cạnh AC tại N

4) Gọi O là trung điểm của AI . Chứng minh rằng ba điểm M, O, N thẳng hàng

5) Kẻ MH, NK, AD vuông góc với BC lần lượt tại H, K, D . Chứng minh rằng $MH + NK = AD$

6) Tìm vị trí của điểm I để MN song song với BC .

Lời giải



- 1) Ta có: $IM \parallel AC, IN \parallel AB \Rightarrow AMIN$ là hình bình hành
 $\Rightarrow MN$ cắt AI tại trung điểm mỗi đường. Mà O là trung điểm AI
 $\Rightarrow M, O, N$ thẳng hàng (đpcm)
- 2) Kẻ OE vuông góc với BC . Chứng minh $MHKN$ là hình thang vuông.
Ta có: O là trung điểm MN mà $OE \parallel MH \parallel NK$. Suy ra OE là đường trung bình của hình thang vuông $MNKH$ nên $MH + NK = 2OE$ (1)
Xét $\triangle ADI$ có O là trung điểm của AI và $OE \parallel AD$. Suy ra OE là đường trung bình của $\triangle ADI$ nên $AD = 2OE$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $MH + NK = AD$ (đpcm)

- 3) Ta có: $MN \parallel BC \Leftrightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle ABC$ (do O là trung điểm AI) $\Leftrightarrow I$ là trung điểm BC (vì $MI \parallel AC, MA = MB$)

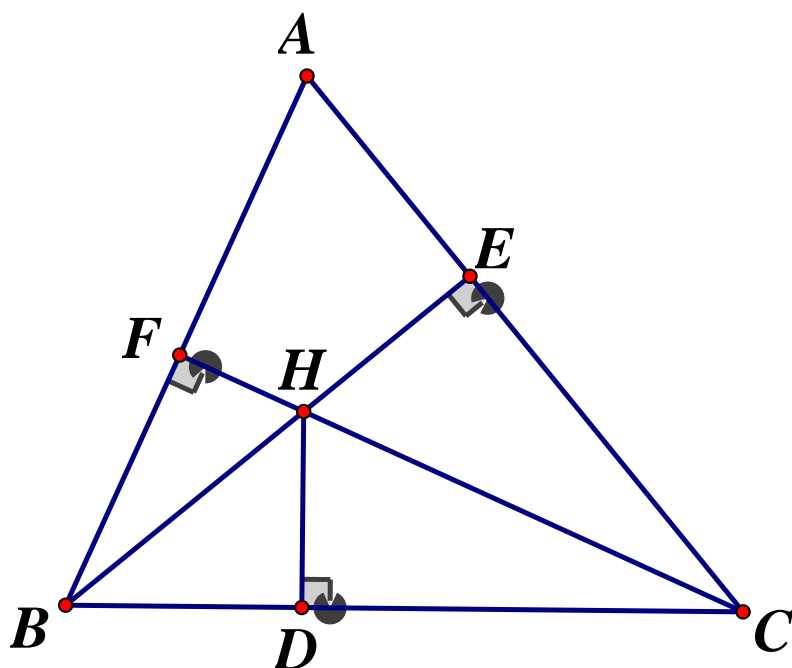
Vậy để MN song song với BC thì I là trung điểm BC .

Bài 164: Cho tam giác ABC , các góc B và C nhọn. Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H .

Chứng minh rằng:

- d) $AB \cdot AF = AC \cdot AE$
e) $\triangle AEF \sim \triangle ABC$
f) $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$

Lời giải



$$a) \quad \triangle ABE \sim \triangle ACF (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AB \cdot AF = AC \cdot AE$$

$$b) \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

$$\triangle AEF, \triangle ABC \text{ có } \hat{A} \text{ chung và } \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c)$$

$$c) \quad \text{Vẽ } HD \perp BC$$

$$\triangle BHD \sim \triangle BCE (g.g) \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BD}{BE} \Rightarrow BH \cdot BE = BC \cdot BD \quad (1)$$

$$\triangle CHD \sim \triangle CBF (g.g) \Rightarrow \frac{CH}{BC} = \frac{CD}{CF} \Rightarrow CH \cdot CF = BC \cdot CD \quad (2)$$

$$\text{Cộng từng vế (1) và (2) ta được: } BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC \cdot (BD + CD) = BC \cdot BC = BC^2$$

Bài 165: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Trên cạnh AB lấy M ($0 < MB < MA$) và trên cạnh BC lấy N sao cho $\widehat{MON} = 90^\circ$. Gọi E là giao điểm của AN với DC , gọi K là giao điểm của ON với BE .

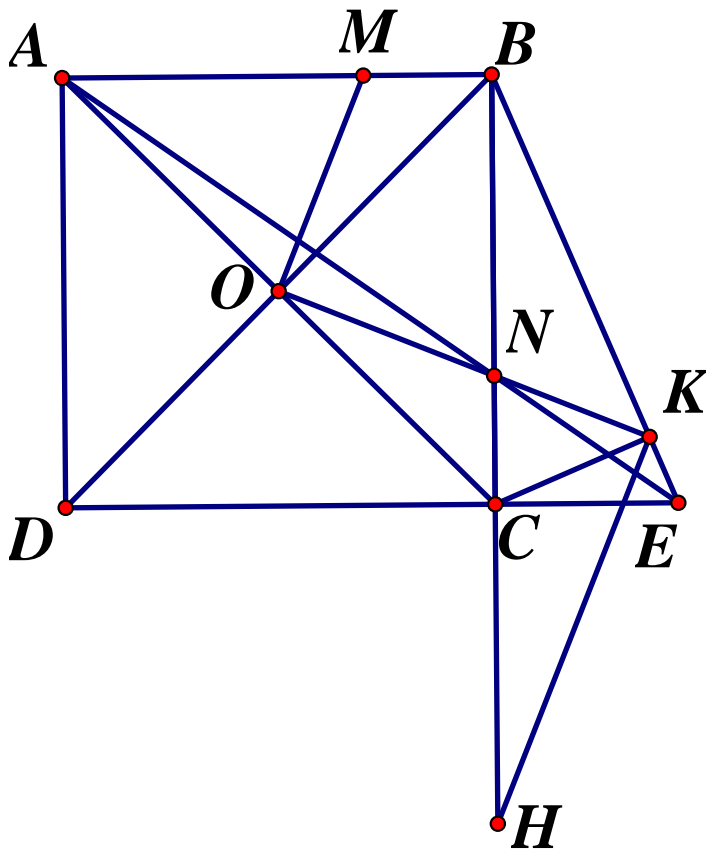
a) Chứng minh $\triangle MON$ vuông cân

b) Chứng minh MN song song với BE

c) Chứng minh CK vuông góc với BE

d) Qua K vẽ đường song song với OM cắt BC tại H . Chứng minh: $\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = 1$

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{BOC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CON} + \widehat{BON} = 90^\circ$; vì
 $\widehat{MON} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BOM} + \widehat{BON} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{CON}$

Ta có BD là phân giác $\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{MBO} = \widehat{CBO} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = 45^\circ$

Tương tự ta có: $\widehat{NCO} = \widehat{DCO} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = 45^\circ$. Vậy ta có: $\widehat{MBO} = \widehat{NCO}$

Xét $\triangle OBM$ và $\triangle OCN$ có $OB = OC$; $\widehat{BOM} = \widehat{CON}$; $\widehat{MBO} = \widehat{NCO}$
 $\Rightarrow \triangle OBM = \triangle OCN \Rightarrow OM = ON$

Xét $\triangle MON$ có $\widehat{MON} = 90^\circ$; $OM = ON \Rightarrow \triangle MON$ vuông cân

b) $\triangle OBM = \triangle OCN \Rightarrow MB = NC$ mà $AB = BC \Rightarrow AB - MB = BC - NC$

$$\Rightarrow AM = BM \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC}$$

Ta có: $AB \parallel CD \Rightarrow AM \parallel CE \Rightarrow \frac{AN}{NE} = \frac{BN}{NC}$

Vậy ta có: $\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NE} \Rightarrow MN \parallel BE$ (Theo định lý Talet đảo)

c) Vì $MN \parallel BE \Rightarrow \widehat{BKN} = \widehat{MNO} = 45^\circ$ (đồng vị và có tam giác MON vuông cân)

$$\Rightarrow \triangle BNK \sim \triangle ONC \text{ (vì có } \widehat{BNK} = \widehat{ONK}; \widehat{BKN} = \widehat{OCN} = 45^\circ) \Rightarrow \frac{NB}{NK} = \frac{NO}{NC}$$

Xét $\triangle BNO; \triangle KNC$ có $\widehat{BNO} = \widehat{CNK}$; $\frac{NB}{NK} = \frac{NO}{NC} \Rightarrow \triangle BNO \sim \triangle KNC$

$$\Rightarrow \widehat{NKC} = \widehat{NBO} = 45^\circ$$

Vậy ta có: $\widehat{BKC} = \widehat{BKN} + \widehat{CKN} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow CK \perp BE$

d) Vì $KH \parallel OM$ mà $MK \perp OK \Rightarrow MK \perp KH \Rightarrow \widehat{NKH} = 90^\circ$ mà $\widehat{NKC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{CKH} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BKN} = \widehat{NKC} = \widehat{CKH} = 45^\circ$

Xét $\triangle BKC$ có $\widehat{BKN} = \widehat{NKC} \Rightarrow KN$ là phân giác trong của $\triangle BKC$, mà $KH \perp KN$

$$\Rightarrow KH \text{ là phân giác ngoài của } \triangle BKC \Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{HC}{HB}$$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{KN}{KH} = \frac{BN}{BH}$

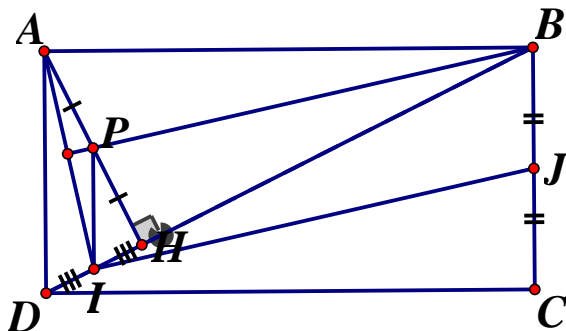
$$\text{Vậy ta có } \frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{NC}{BH} = \frac{HC}{HB} + \frac{BN}{BH} + \frac{CN}{BH} = \dots = \frac{BH}{BH} = 1$$

Bài 166: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD; I và J thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng DH và BC. Tính số đo của góc \widehat{AIJ}

b) Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H, trên đoạn BH lấy điểm M và trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AM = AN$

Lời giải

a)



Gọi P là trung điểm của AH $\Rightarrow PI$ là đường trung bình của tam giác AHD
 $\Rightarrow PI \parallel AD$

Mà $AD \perp AB$ nên $PI \perp AB$ và P là trực tâm $\triangle ABI$

Từ đó ta có tứ giác BPIJ là hình bình hành $\Rightarrow BP \parallel IJ$

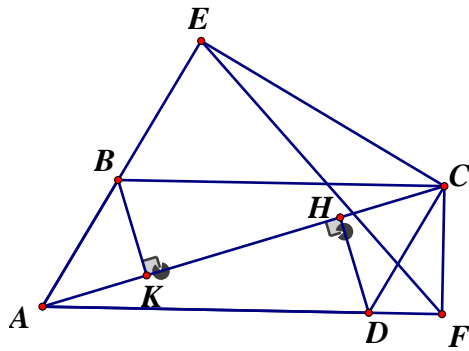
Mà $BP \perp AI$ nên $IJ \perp AI$

Bài 167: Cho hình bình hành ABCD ($AC > BD$), hình chiếu vuông góc của C lên AB, AD lần lượt là E và F. Chứng minh:

1) $CE \cdot CD = CB \cdot CF$ và $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle FCE$

2) $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$

Lời giải



1) Chứng minh $\Delta EBC \sim \Delta FDC(g.g) \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{BC}{DC}, DC = AB \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{BC}{BA}$

Chứng minh $\widehat{ABC} = \widehat{FCE} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta FCE$

2) H, K là hình chiếu vuông góc của D, B lên AC

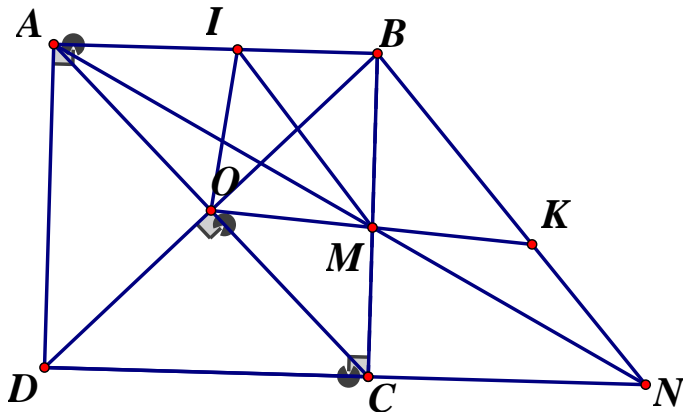
Chứng minh $AB.AE = AK.AC$; $AD.AF = AH.AC$

Chứng minh $KC = AH$

$$\Rightarrow AB.AE = AD.AF = AC^2$$

Bài 168: Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Một đường thẳng kẻ qua A cắt cạnh BC tại M và cắt đường thẳng CD tại N. Gọi K là giao của OM và DN . Chứng minh CK vuông góc với BN.

Lời giải



Trên cạnh AB lấy I sao cho $IB = CM$.

Xét $\triangle IBO$ và $\triangle MCO$ có: $IB = CM$; $\widehat{IBO} = \widehat{MCO} = 45^0$; $BO = CO$

$$\Rightarrow \Delta BO = \Delta MCO (\text{c.g.c}) \Rightarrow OI = OM, \widehat{IOB} = \widehat{MOC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BOI} + \widehat{BOM} = \widehat{BOM} + \widehat{MOC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MOI} = 90^0$$

$\Rightarrow \Delta MOI$ vuông cân tại O nên $\widehat{OMI} = \widehat{OIM} = 45^\circ$

Vì $IB = CM, AB = CB$ nên $\frac{BI}{BA} = \frac{CM}{CB}$ (1) và $AB \parallel CN$ nên $\frac{CM}{CB} = \frac{NM}{NA}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{BI}{BA} = \frac{NM}{NA} \Rightarrow IM \parallel BN$ (Talet đảo) do đó $\widehat{OKB} = \widehat{OMI} = 45^\circ$ (đồng vị)

$$\triangle OMC \sim \triangle BMK (g.g) \Rightarrow \frac{MC}{MK} = \frac{MO}{MB}$$

Xét $\triangle CMK$ và $\triangle OMB$ có: $\frac{MC}{MK} = \frac{MO}{MB}$ (cmt) và $\widehat{CMK} = \widehat{OMB}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \triangle CMK \sim \triangle OMB (c.g.c) \Rightarrow \widehat{MKC} = \widehat{MOB} \text{ mà}$$

$$\widehat{MBO} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{MKC} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CKB} = \widehat{MKB} + \widehat{MKC} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

Vậy CK vuông góc với BN

Bài 169: Cho tam giác nhọn ABC . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Chứng minh rằng:

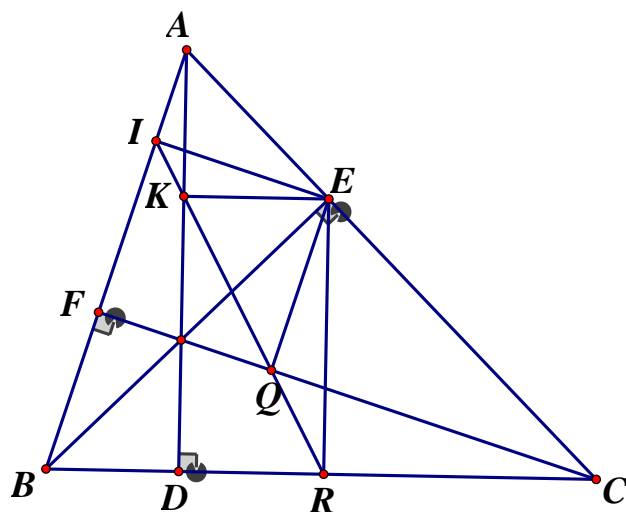
a) Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC

b) $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$

c) $AD \cdot HD \leq \frac{BC^2}{4}$

d) Gọi I, K, Q, R lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ E xuống AB, AD, CF, BC . Chứng minh bốn điểm I, K, Q, R cùng nằm trên một đường thẳng.

Lời giải



a) Ta có: $\triangle AEB \sim \triangle AFC (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$

Từ đó suy ra $\triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c)$

b) $\triangle BDH \sim \triangle BEC (g.g) \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH \cdot BE = BC \cdot BD$ (1)

$$\Delta CDH \sim \Delta CFB(g.g) \Rightarrow \frac{CD}{CF} = \frac{CH}{BC} \Rightarrow CH.CF = BC.CD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BH.BE + CH.CF = BC.BD + BC.CD = BC^2$

$$c) \text{ Chứng minh được } \Delta DBH \sim \Delta DAC(g.g) \Rightarrow \frac{DH}{DC} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow DH.DA = DC.DB$$

$$\text{Lại có: } DC.DB \leq \frac{(DC + DB)^2}{4} = \frac{BC^2}{4}$$

$$\text{Do đó: } AD.HD \leq \frac{BC^2}{4}$$

a) Từ giả thiết suy ra $EI // CF, EK // BC, EQ // AB, ER // AD$

Áp dụng định lý Talet ta có:

$$* \frac{AI}{AF} = \frac{AE}{AC} = \frac{AK}{AD} \Rightarrow IK // DF \quad (3)$$

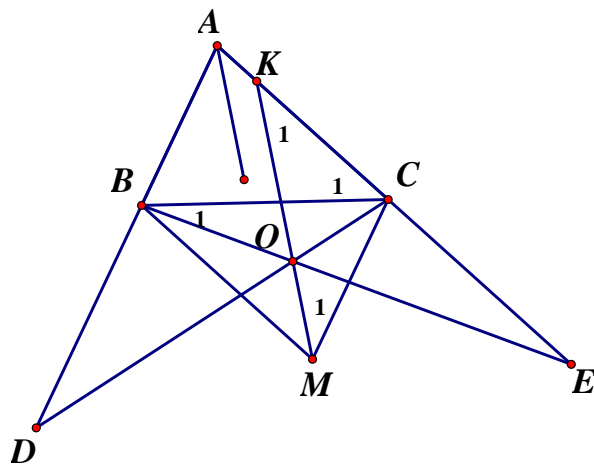
$$* \frac{BF}{BI} = \frac{BH}{BE} = \frac{BD}{BR} \Rightarrow IR // DF \quad (4)$$

$$* \frac{CR}{CD} = \frac{CE}{CA} = \frac{CQ}{CF} \Rightarrow RQ // DF \quad (5)$$

Từ (3);(4);(5) suy ra bốn điểm I, K, Q, R thẳng hàng

Bài 170: Cho tam giác ABC . Trên tia đối của các tia BA, CA lấy theo thứ tự các điểm D, E sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD . Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A , đường thẳng này cắt AC ở K . Chứng minh $AB = CK$

Lời giải



Vẽ hình bình hành $ABMC \Rightarrow AB = CM \quad (1)$

Ta có: $\widehat{B}_1 = \frac{1}{2}\widehat{C}_1 = \frac{1}{2}\widehat{CMB}$ nên BO là tia phân giác của \widehat{CBM}

Tương tự CO là tia phân giác của \widehat{BCM}

Do đó MO là tia phân giác của \widehat{BMC}

Suy ra OM song song với tia phân giác của \widehat{A} , suy ra K, O, M thẳng hàng

$$\text{Ta có: } \widehat{M_1} = \frac{1}{2} \widehat{BMC} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = \widehat{K_1}$$

$$\text{Nên tam giác } KMC \text{ cân tại } C \Rightarrow CK = CM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CK = AB$

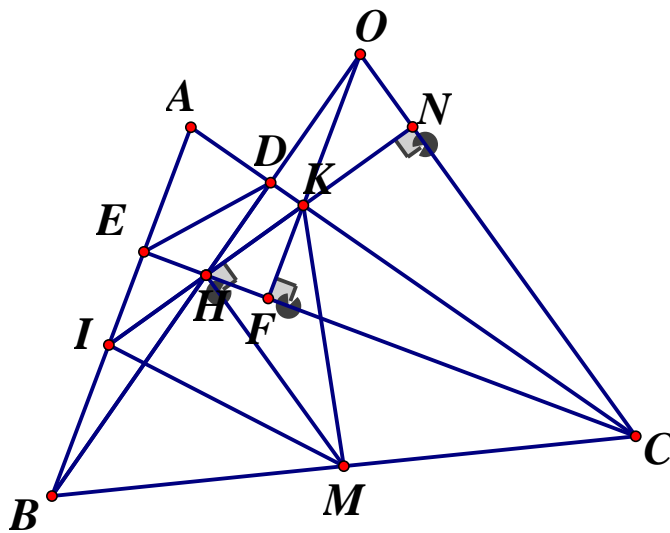
Bài 171: Cho tam giác ABC nhọn, BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H .

a) Chứng minh rằng: $\triangle HED \sim \triangle HBC$

b) Chứng minh rằng: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

c) Gọi M là trung điểm của BC , qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM , cắt AB tại I , cắt AC tại K . Chứng minh tam giác IMK là tam giác cân

Lời giải



$$\text{a) } \triangle BHE \sim \triangle CHD (g.g) \Rightarrow \frac{HE}{HB} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \triangle HED \sim \triangle HBC (c.g.c)$$

$$\text{b) } \triangle ABD \sim \triangle ACE (g.g) \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC (c.g.c)$$

c) Kẻ $KF \perp CE$. Gọi O là giao điểm của KF và $HD \Rightarrow O$ là trực tâm tam giác CHO

$\Rightarrow HK \perp CO \Rightarrow MH$ là đường trung bình của tam giác BCO

$\Rightarrow HB = HO \Rightarrow \triangle BEH = \triangle OFH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow HE = HF \Rightarrow \triangle HEI = \triangle HFK (g.c.g)$

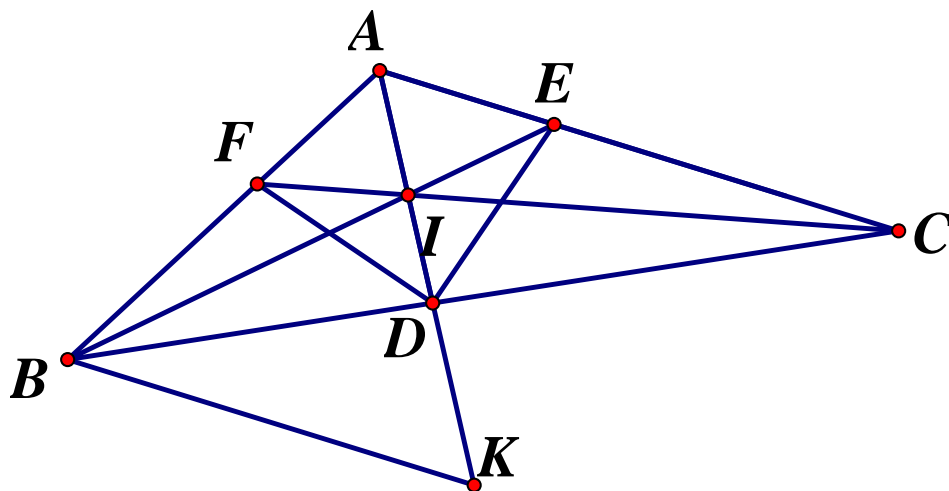
$\Rightarrow HI = HK \Rightarrow \triangle MIK$ cân tại M (vì có đường cao đồng thời là đường trung tuyến)

Bài 172: Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Các phân giác AD, BE và CF

$$\text{a) Chứng minh rằng } \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$

b) Tính \widehat{FDE}

Lời giải

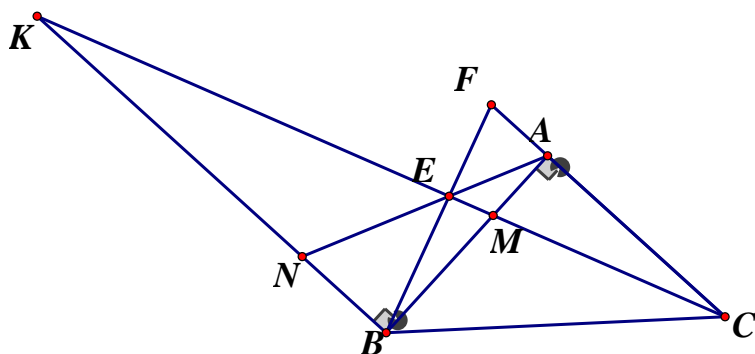
a) Từ B kẻ $BK \parallel AC$ cắt AD tại K, ta có tam giác ABK đều

Do đó:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{DK}{DA} = \frac{AB - AD}{AD} = AC \cdot (AB - AD) \Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$

b) Áp dụng tính chất đường phân giác tính được $BD = \frac{BC \cdot AB}{AB + AC}$ Từ (a) suy ra $AD = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC}$ Suy ra $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} = \frac{EA}{EB}$ nên DE là phân giác của \widehat{BDA} Chứng minh tương tự được DF là phân giác \widehat{ADC} Từ đó suy ra $\widehat{EDF} = 90^\circ$ **Bài 173:** Cho tam giác vuông cân ABC ($AB = AC$). Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 2MA$, trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ đường thẳng Bx vuông góc với AB , trên Bx lấy điểm N sao cho $BN = \frac{1}{2}AB$. Đường thẳng MC cắt NA tại E , đường thẳng BE cắtđường thẳng AC tại F .a) Chứng minh $AF = AM$.b) Gọi H là trung điểm của FC . Chứng minh $EH = BM$

Lời giải



a) Đường thẳng EC cắt đường thẳng BN tại K .

Ta có: $AC \perp AB(gt), KB \perp AB(gt) \Rightarrow FC // KB$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AF}{NB} = \frac{AE}{EN} \\ \frac{AC}{NK} = \frac{AE}{EN} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AF}{NB} = \frac{AC}{NK} \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AC}{NK} \Rightarrow AF = \frac{AB^2}{2NK} \quad (1)$$

$$\frac{AC}{BK} = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AC}{KN + NB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{KN + \frac{AB}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2AB}{2KN + AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4AB = 2KN + AB \Rightarrow KN = \frac{3}{2}AB \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AF = \frac{AB^2}{3AB} = \frac{AB}{3} \Rightarrow AF = AM \text{ (Đpcm)}$$

b) Từ chứng minh trên suy ra $\triangle AFB = \triangle AMC \Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{ACM}$

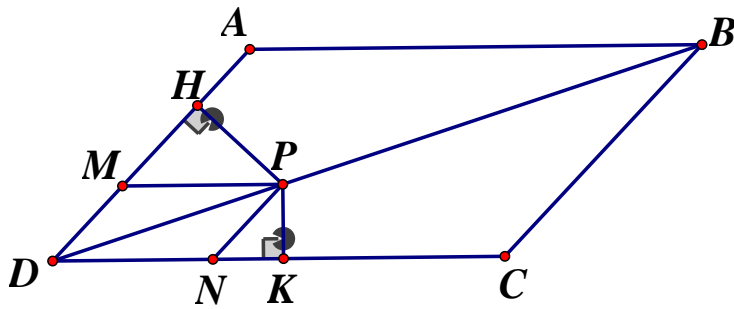
$$\text{Mà } \widehat{ABF} + \widehat{AFB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACM} + \widehat{AFB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{FEC} = 90^\circ \Rightarrow EH = \frac{FC}{2} = FH$$

$$\text{Mà } FH = FA + AH = \frac{AC}{3} + \frac{AC}{3} = \frac{2AC}{3} = BM \Rightarrow EH = BM \text{ (đpcm)}$$

Bài 174: Chứng minh rằng trong một hình bình hành, khoảng cách từ một điểm trên đường chéo đến hai cạnh kề (hai cạnh kề và đường chéo cùng đi qua một đỉnh của hình bình hành), tỉ lệ nghịch với hai cạnh ấy.

Lời giải



Kẻ $PH \perp AD; PK \perp CD; PM \parallel CD; PN \parallel AD$

Chứng minh $\triangle HMP \sim \triangle KNP (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{PH}{PK} = \frac{PM}{PN} \Rightarrow \frac{PH}{PK} = \frac{DN}{PN} \text{ (do PMDN là hình bình hành)}$$

$$\text{Chứng minh } \triangle DNP \sim \triangle DCB (g.g) \Rightarrow \frac{DN}{DC} = \frac{PN}{BC}$$

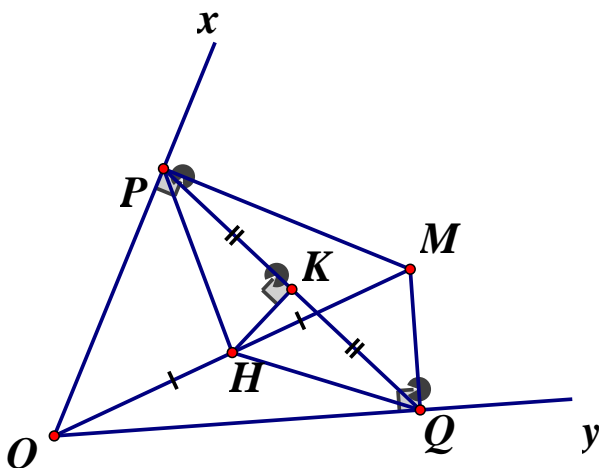
$$\Rightarrow \frac{DN}{PN} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \frac{PH}{PK} = \frac{DC}{BC} \text{ (đpcm)}$$

Bài 175: Gọi M là điểm nằm trong $\widehat{xOy} = m^\circ (0 < m < 90)$. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M trên Ox, Oy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của OM, PQ

a) Chứng minh $HK \perp PQ$

b) Tính số đo \widehat{HPQ} theo m

Lời giải



a) $\triangle MPO$ vuông tại P, đường trung tuyến $PH = \frac{1}{2}OM$

$\triangle MQO$ vuông tại Q, đường trung tuyến $QH = \frac{1}{2}OM$

$$\Rightarrow PH = QH \Rightarrow \triangle HPQ \text{ cân tại H} \Rightarrow HK \perp PQ$$

b) $\widehat{MHQ} = 2\widehat{MOQ}; \widehat{MHP} = 2\widehat{MOP}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Rightarrow \widehat{PHQ} = 2.\widehat{POQ} = 2.m^0 \Rightarrow \widehat{PHK} = m^0 \Rightarrow \widehat{HPQ} = 90^0 - m^0$$

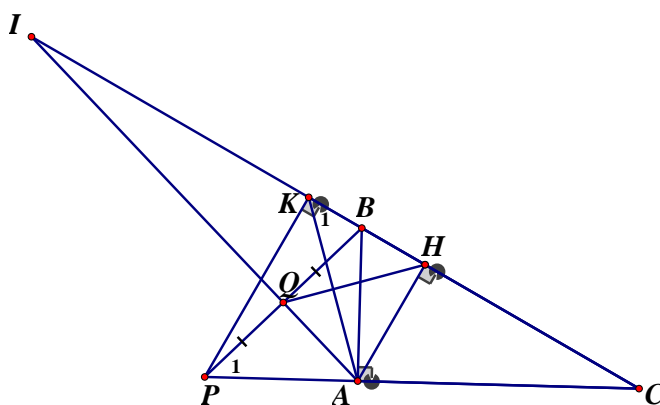
Bài 176: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$). Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $KH = HA$. Qua K kẻ đường thẳng song song với AH , cắt đường thẳng AC tại P .

a) Chứng minh : Tam giác AKC đồng dạng với tam giác BPC

b) Gọi Q là trung điểm của BP . Chứng minh tam giác BHQ đồng dạng với tam giác BPC .

c) Tia AQ cắt BC tại I . Chứng minh $\frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$.

Lời giải



$$a) PK \parallel AH \Rightarrow \triangle CKP \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{CK}{CP} = \frac{CA}{CB}$$

Suy ra $\triangle AKC \sim \triangle BPC$ (c.g.c) (1)

b) $\triangle AKH$ vuông cân tại $H \Rightarrow \widehat{K_1} = 45^0$. Từ (1) $\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{P_1} = 45^0 \Rightarrow \triangle BAP$ vuông cân tại A
 $\Rightarrow BP = AB\sqrt{2}$

$$\text{Chứng minh } \triangle BHA \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{2}AB}{\sqrt{2}BC} \Rightarrow \frac{BH}{\sqrt{2}AB} = \frac{AB}{\sqrt{2}BC} \Rightarrow \frac{BH}{\sqrt{2}AB} = \frac{\sqrt{2}AB}{2BC}$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{BP} = \frac{BP}{2BC} \Rightarrow \frac{BH}{BP} = \frac{BQ}{BC} \quad (BP = 2BQ)$$

$$\triangle BHQ \text{ và } \triangle BPC \text{ có: } \frac{BH}{BP} = \frac{BQ}{BC}; \widehat{PBC} \text{ chung} \Rightarrow \triangle BHQ \sim \triangle BPC \text{ (c.g.c)}$$

c) $\triangle BAP$ vuông cân tại A , AQ là trung tuyến nên cũng là phân giác $\Rightarrow AI$ là phân giác ngoài của

$$\triangle ABC \Rightarrow \frac{IC}{IB} = \frac{AC}{AB} \quad (2)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{HB} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có:

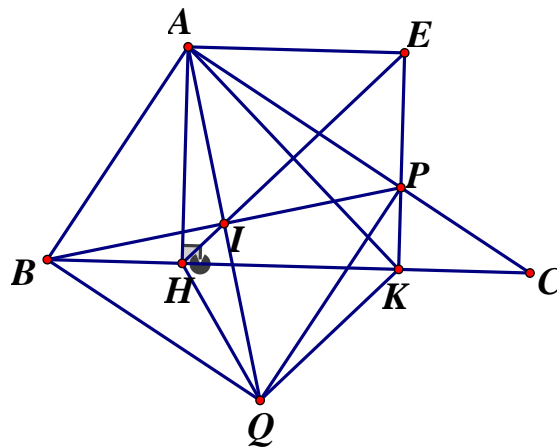
$$\frac{IC}{IB} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow \frac{IB + BC}{IB} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow 1 + \frac{BC}{IB} = \frac{AH}{HB}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1 \text{ (đpcm)}$$

Bài 177: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH . Trong nửa mặt phẳng bờ AH có chứa C , vẽ hình vuông $AHKE$. Gọi P là giao điểm của AC và KE

- Chứng minh $\triangle ABP$ vuông cân
- Gọi Q là đỉnh thứ tư của hình bình hành $APQB$, gọi I là giao điểm của BP và AQ . Chứng minh H, I, E thẳng hàng.
- Tứ giác $HEKQ$ là hình gì ?

Lời giải



a) Chứng minh được: $\triangle BHA = \triangle PEA$ (g.c.g)

$\Rightarrow AB = AP$ mà $\widehat{BAP} = 90^\circ$ (gt) vậy $\triangle BPA$ vuông cân

b) Ta có: $HA = HK \Rightarrow H$ nằm trên đường trung trực của AK

Ta có: $AE = KE \Rightarrow E$ nằm trên đường trung trực của KA

$\triangle PBK$ vuông có $IB = IP$ (tính chất đường chéo hình bình hành $ABQP$)

$\Rightarrow IK = IP = IB$ (*)

Ta có $ABQP$ là hình bình hành (giả thiết), có $BA = AP$ ($\triangle BPA$ vuông cân tại A)

$\Rightarrow APQB$ là hình thoi, mà $\widehat{BAP} = 90^\circ$ (gt)

$\Rightarrow APQB$ là hình vuông nên $PI = IA$ (**)

Từ (*)(**) suy ra $IK = IA$ nên I nằm trên đường trung trực của AK

Vậy H, I, E thẳng hàng

c) Ta có: $APQB$ là hình vuông (cmt) nên $AP = BQ$ mà $IK = \frac{PB}{2} \Rightarrow IK = \frac{AQ}{2}$

$\triangle AKQ$ có $AI = IQ$ (tính chất đường chéo hình vuông)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

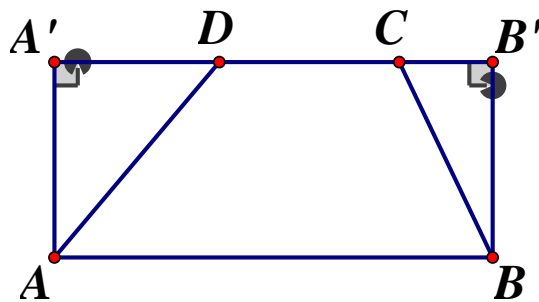
Mà $IK = \frac{AQ}{2} (cmt) \Rightarrow \Delta AKQ$ vuông ở K

$\Rightarrow AK \perp KQ$ mà $AK \perp HE$ (EAHK là hình vuông) $\Rightarrow QK // HE$

Vậy $HEKQ$ là hình thang

Bài 178: Tính diện tích hình thang $ABCD$ ($AB // CD$), biết $AB = 42cm$, $\hat{A} = 45^\circ$; $\hat{B} = 60^\circ$, chiều cao của hình thang bằng $18cm$

Lời giải



Qua A và B kẻ AA' và BB' vuông góc với CD .

Tứ giác $ABB'A'$ là hình chữ nhật và $AA' = BB' = 18cm$, $\widehat{A'AB} = 90^\circ$

$\widehat{DAB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{A'AD} = 45^\circ$. Do đó $\Delta A'AD$ vuông cân $\Rightarrow A'D = A'A = 18cm$

$\widehat{B'BA} = 90^\circ$, $\widehat{CBA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B'BC} = 30^\circ$

vì thế trong tam giác vuông $B'BC$ ta có $B'C = \frac{BB'}{\sin 30^\circ}$.

Theo định lý Pytago ta có:

$$B'C^2 = BC^2 - B'B^2$$

$$\Rightarrow B'C^2 = 4B'B^2 - B'B^2$$

$$\Rightarrow 3B'B^2 = B'C^2$$

$$\Rightarrow B'C = \frac{B'B}{\sin 30^\circ} = \frac{18}{\sin 30^\circ} (cm)$$

Suy ra :

$$CD = A'B' - A'D - B'C = 42 - 18 - \frac{18}{\sin 30^\circ} = 24 - \frac{18}{\sin 30^\circ} (cm)$$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot AA' = \frac{1}{2} \left(42 + 24 - \frac{18}{\sin 30^\circ} \right) \cdot 18 \approx 498,6 (cm^2)$$

Bài 179: Cho hình vuông $ABCD$, trên tia đối của tia CD lấy điểm M bất kỳ ($CM < CD$), vẽ hình vuông $CMNP$ (P nằm giữa B và C), DP cắt BM tại H, MP cắt BD tại K.

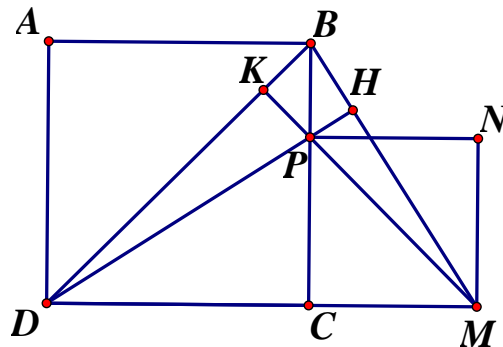
a) Chứng minh: DH vuông góc với BM .

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

b) Tính $Q = \frac{PC}{BC} + \frac{PH}{DH} + \frac{KP}{MK}$

c) Chứng minh: $MP.MK + DK.BD = DM^2$

Lời giải



a) Chứng minh được : DH vuông góc với BM

Chúng minh được: $\widehat{CD} = \widehat{BC}$; $\widehat{PC} = \widehat{CM}$; $\widehat{DCB} = \widehat{BCM} = 90^0$

$$\Rightarrow \Delta DPC = \Delta BMC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{BHP} = 90^0$$

b) Chứng minh được: $MP \perp BD \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}DM \cdot PC}{\frac{1}{2}DM \cdot BC} = \frac{S_{\Delta PDM}}{S_{\Delta BDM}}$

$$\text{Trùng tự } \frac{PH}{DH} = \frac{\frac{1}{2}.DB.KP}{\frac{1}{2}.DB.MK} = \frac{S_{PBM}}{S_{BDM}}; \frac{PH}{DH} = \frac{\frac{1}{2}.DB.KP}{\frac{1}{2}.DB.MK} = \frac{S_{PBD}}{S_{BDM}}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{S_{PDM} + S_{PBM} + S_{PBD}}{S_{RDM}} = 1.$$

c) Chứng minh: $\Delta MCP \sim \Delta MKD(g.g) \Rightarrow MP.MK = MC.MD$ (1)

Chứng minh: $\triangle DBC \sim \triangle DKM (g.g) \Rightarrow DK.BD = DC.DM$ (2)

Từ (1) & (2)

$$\Rightarrow MP.MK + DK.BD = DM.(MC + DC)$$

$$\Rightarrow MP.MK + DK.BD = DM^2$$

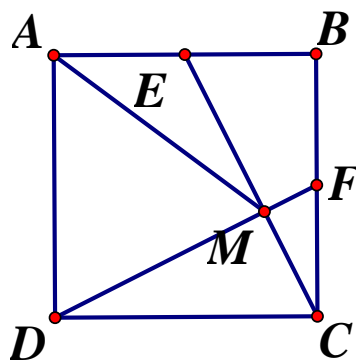
Bài 180: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . M là giao điểm của CE và DF .

a) Chứng minh CE vuông góc với DF

b) Chứng minh $\frac{CM.CE}{CF} = a$

c) Tính diện tích ΔMDC theo a

Lời giải



$$a) \triangle BEC = \triangle CFD (c.g.c) \Rightarrow \widehat{ECB} = \widehat{FDC}$$

$$\triangle CDF \text{ vuông tại } C \Rightarrow \widehat{DFC} + \widehat{FDC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DFC} + \widehat{ECB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle CMF \text{ vuông tại } M$$

Hay $CE \perp DF$

$$b) \text{ Xét } \triangle CMF \text{ và } \triangle CBE \text{ có: } \widehat{CMF} = \widehat{CBE} = 90^\circ; \widehat{MCF} \text{ chung} \\ \Rightarrow \triangle CMF \sim \triangle CBE (g - g)$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{CF}{CE} \Rightarrow \frac{CM \cdot CE}{CF} = BC$$

$$\text{Mà } BC = a \text{ do đó: } \frac{CM \cdot CE}{CF} = a$$

$$c) \triangle CMD \sim \triangle FCD (g.g) \Rightarrow \frac{CD}{FD} = \frac{CM}{FC}$$

$$\text{Do đó: } \frac{S_{\triangle CMD}}{S_{\triangle FCD}} = \left(\frac{CD}{FD} \right)^2 \Rightarrow S_{\triangle CMD} = \left(\frac{CD}{FD} \right)^2 \cdot S_{\triangle FCD}$$

$$\text{Mà: } S_{\triangle FCD} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot CD = \frac{1}{4} CD^2$$

$$\text{Vậy: } S_{\triangle CMD} = \frac{CD^2}{FD^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot CD^2.$$

Trong $\triangle DCF$ theo Pitago ta có:

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 = CD^2 + \left(\frac{1}{2} BC^2 \right) = CD^2 + \frac{1}{4} CD^2 = \frac{5}{4} \cdot CD^2$$

$$\text{Do đó: } S_{\triangle CMD} = \frac{CD^2}{\frac{5}{4} CD^2} \cdot \frac{1}{4} CD^2 = \frac{1}{5} CD^2 = \frac{1}{5} a^2$$

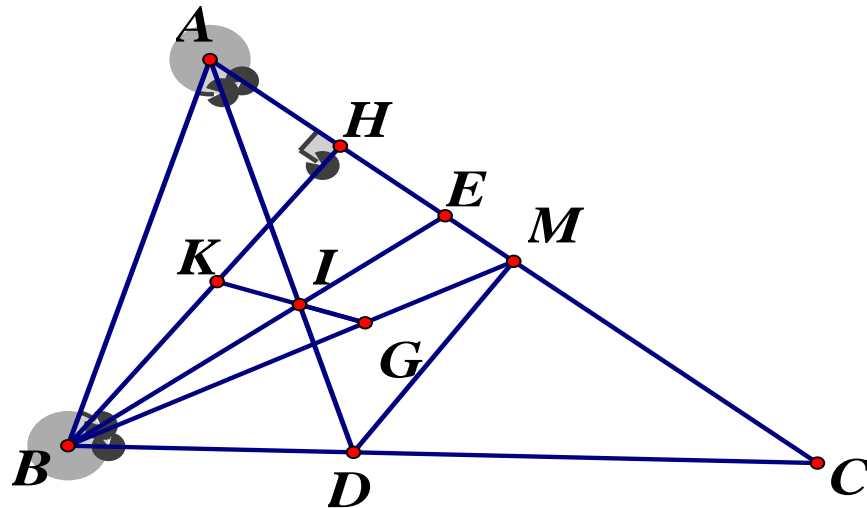
Bài 181: Cho tam giác ABC có $AB = 2a; AC = 3a; BC = 4a$. Đường phân giác AD và BE cắt nhau tại I . Gọi M là trung điểm của AC , G là trọng tâm tam giác ABC

a) Tính độ dài đoạn thẳng BD theo a

b) Chứng minh $IG \parallel AC$

c) Tính tỉ số diện tích của tứ giác $EIGM$ và $\triangle ABC$

Lời giải



$$a) \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD + DC}{AB + AC} = \frac{BC}{AB + AC} = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5} \Rightarrow BD = \frac{8a}{5}$$

$$b) \frac{EA}{AB} = \frac{EC}{BC} = \frac{EA + EC}{AB + BC} = \frac{AC}{AB + BC} = \frac{3a}{6a} = \frac{1}{2}$$

$$EA = a; EC = 2a$$

$$\Rightarrow \frac{IE}{IB} = \frac{EA}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \Rightarrow \frac{GM}{GB} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{GM}{GB} = \frac{IE}{IB} = \frac{1}{2} \Rightarrow IG \parallel EM \text{ (ta lết đảo)} \Rightarrow IG \parallel AC$$

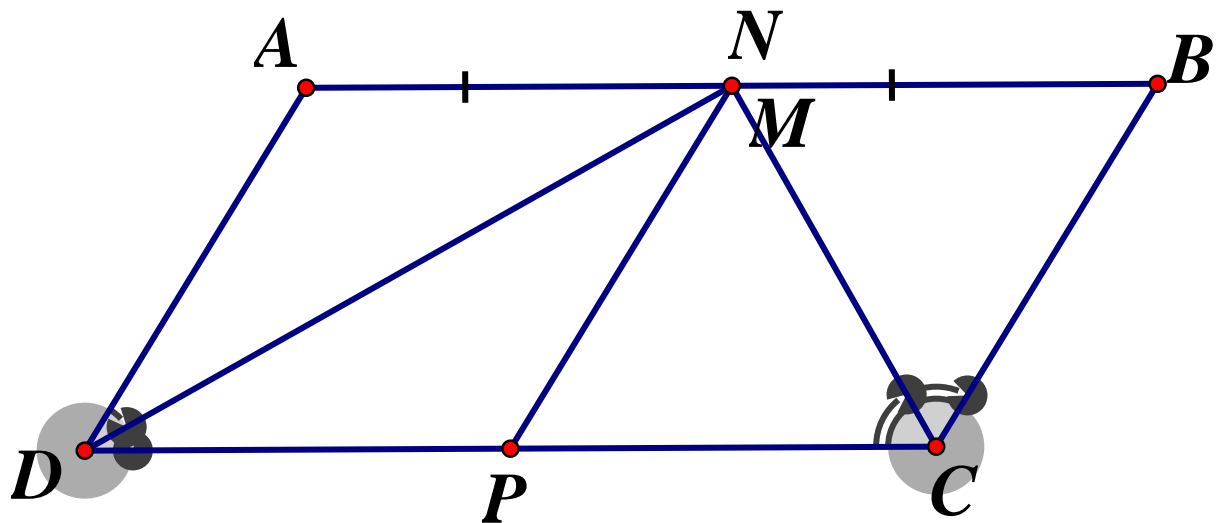
$$c) \frac{S_{BIG}}{S_{BEM}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\text{Tính } EM = 0,5a; \frac{S_{BEM}}{S_{ABC}} = \frac{0,5a}{3a} = \frac{1}{6}; \frac{S_{BIG}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BIG}}{S_{BEM}} \cdot \frac{S_{BEM}}{S_{ABC}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{27}$$

$$\frac{S_{EIGM}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BEM} - S_{AIG}}{S_{ABC}} = \frac{1}{6} - \frac{2}{27} = \frac{5}{54}$$

Bài 182: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2BC$, đường phân giác các góc C và D cắt nhau tại M . Chứng minh A, M, B thẳng hàng

Lời giải



Gọi N là trung điểm AB, P là trung điểm CD

Chứng minh $ANPD$ và $NBCP$ là các hình thoi

Suy ra N là giao điểm của phân giác các góc C và D

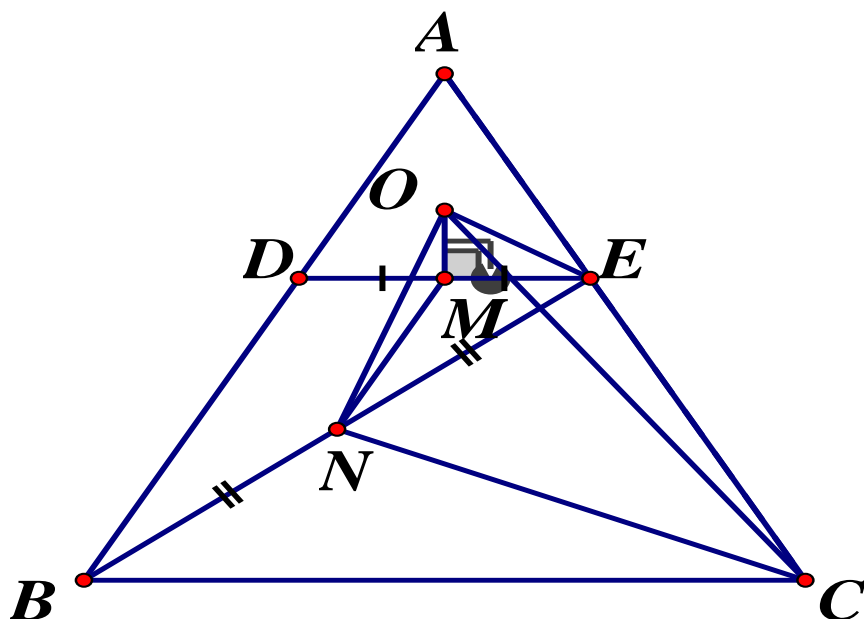
Suy ra N trùng với M

Vậy A, M, B thẳng hàng

Bài 183: Cho tam giác ABC đều. Một đường thẳng song song với BC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE và BE. Gọi O là trọng tâm của tam giác ADE.

- Chứng minh $\triangle OMN \sim \triangle OEC$
- Chứng minh ON vuông góc với NC .

Lời giải



$$\text{a) } OA = OE, \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OM}{OE} = \frac{1}{2}$$

$$BD = EC; \frac{MN}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MN}{EC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{EC} = \frac{OM}{OE} \Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{OEC} = 150^\circ \Rightarrow \triangle OMN \sim \triangle OEC (c.g.c)$$

b)

$$\text{Từ } \triangle OMN \sim \triangle OEC, \text{ ta có: } \widehat{ONM} = \widehat{OCE}; \widehat{MON} = \widehat{EOC} \text{ và } \frac{ON}{OM} = \frac{OC}{OE}$$

$$\Rightarrow \widehat{MON} = \widehat{EOC} \Rightarrow \widehat{NOC} = \widehat{MOE}$$

$$\triangle ONC \sim \triangle OME (c.g.c) \Rightarrow \widehat{ONC} = \widehat{OME} = 90^\circ$$

Suy ra $ON \perp NC$

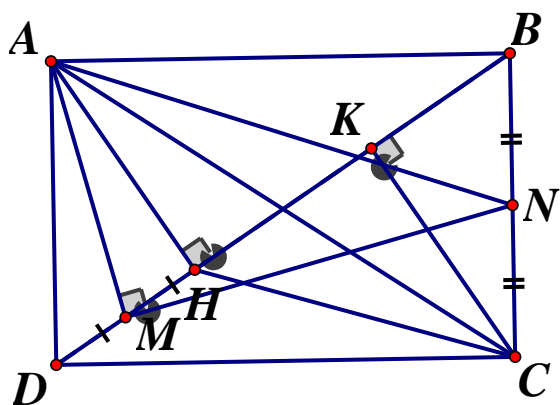
Bài 184: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$. Gọi H là hình chiếu của A trên BD .

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DH, BC

e) Tính diện tích tứ giác $ABCH$

f) Chứng minh $AM \perp MN$.

Lời giải



c)

$$\triangle ABH \sim \triangle DBA$$

$$\text{Tính } AH = 4,8\text{cm}; BH = 6,4\text{cm}$$

$$\text{Kẻ } KC \perp BD. \quad C / m \quad KC = AH = 4,8\text{cm}$$

$$S_{ABCH} = S_{ABH} + S_{BHC} = \frac{1}{2} AH \cdot HB + \frac{1}{2} KC \cdot HB = 30,72 (\text{cm}^2)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$d) \quad \Delta AHD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{HD}{BC}.$$

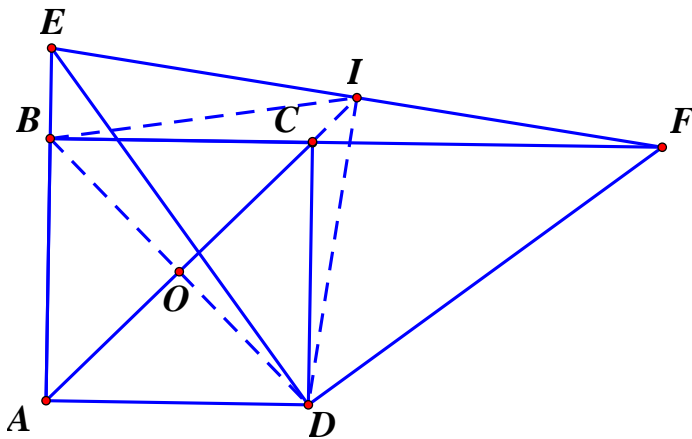
$$\begin{aligned} \frac{AD}{AC} &= \frac{DM}{CN}; \Delta ADM \sim \Delta ACN \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AN} \\ \Rightarrow \widehat{MAD} &= \widehat{NAC} \Rightarrow \widehat{NAM} = \widehat{CAD}; \frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AN} \\ \Rightarrow \Delta ADC &\sim \Delta AMN (cgc) \Rightarrow AM \perp MN \end{aligned}$$

Bài 185: Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E, trên tia đối tia CB lấy F sao cho AE = CF

a) Chứng minh ΔEDF vuông cân

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi I là trung điểm EF. Chứng minh O, I, C thẳng hàng

Lời giải



a) Chứng minh ΔEDF vuông cân

Ta có $\Delta ADE = \Delta CDF (c.g.c) \Rightarrow \Delta EDF$ cân tại D

Mặt khác $\Delta ADE = \Delta CDF (c.g.c) \Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{BFD}$

Mà $\widehat{BED} + \widehat{DEF} + \widehat{BFE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BFD} + \widehat{DEF} + \widehat{BFE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EDF} = 90^\circ$

Vậy ΔEDF vuông cân

b) Chứng minh O, C, I thẳng hàng

Theo tính chất đường chéo hình vuông $\Rightarrow CO$ là trung trực BD

Mà ΔEDF vuông cân $\Rightarrow DI = \frac{1}{2} EF$

Tương tự $BI = \frac{1}{2} EF \Rightarrow DI = BI$

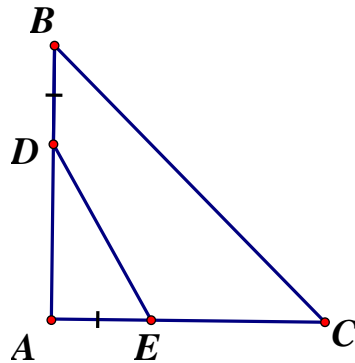
$\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của DB, nên I thuộc đường thẳng CO

Hay O, C, I thẳng hàng.

Bài 186: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí điểm D, E sao cho

- DE có độ dài nhỏ nhất
- Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất

Lời giải



- DE có độ dài nhỏ nhất

Đặt $AB = AC = a$ không đổi ; $AE = BD = x$ ($0 < x < a$)

Áp dụng định lý Pytago với $\triangle ADE$ vuông tại A có:

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 = (a-x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2(x^2 - ax) - a^2 \\ &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } DE \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow DE^2 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow BD = AE = \frac{a}{2}$$

Nên D, E là trung điểm AB, AC

- Tứ giác BDEC có diện tích nhỏ nhất

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_{ADE} &= \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot (AB - AD) = -\frac{1}{2} (AD^2 - AB \cdot AD) \\ &= -\frac{1}{2} \left(AD^2 - 2 \cdot \frac{AB}{2} \cdot AD + \frac{AB^2}{4} \right) + \frac{AB^2}{8} \\ &= -\frac{1}{2} \left(AD - \frac{AB}{2} \right)^2 + \frac{AB^2}{8} \leq \frac{AB^2}{8} \end{aligned}$$

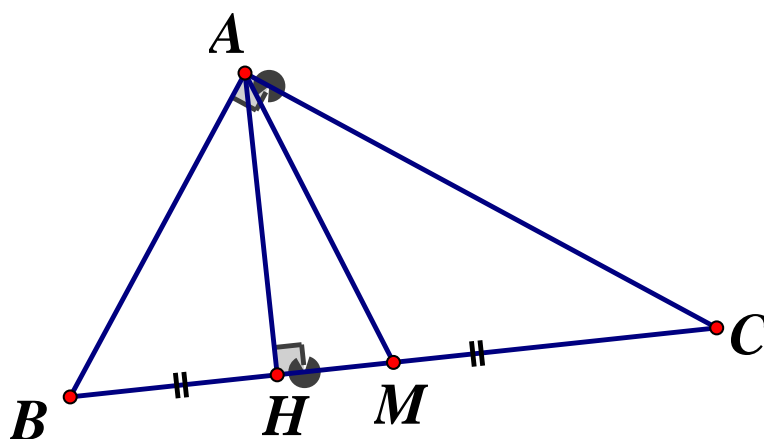
$$\text{Vậy } S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3}{8} AB^2 \text{ không đổi}$$

$$\text{Do đó } \min S_{BDEC} = \frac{3}{8} AB^2 \text{ khi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC}$$

Bài 187: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, có $AB = 15\text{ cm}$, $AC = 20\text{ cm}$. Kẻ đường cao AH và trung tuyến AM

- Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle HBA$
- Tính BC; AH; BH; CH
- Tính diện tích $\triangle AHM$

Lời giải



- Xét $\triangle ABC$ và $\triangle HBA$ có: $\hat{A} = \hat{H} = 90^\circ$; \hat{B} chung $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle HBA (g.g)$
- Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABC có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 (cm)$$

$$\text{Vì } \triangle ABC \sim \triangle HBA \text{ nên } \frac{AB}{HB} = \frac{AC}{HA} = \frac{BC}{BA} \text{ hay } \frac{15}{HB} = \frac{20}{HA} = \frac{25}{15}$$

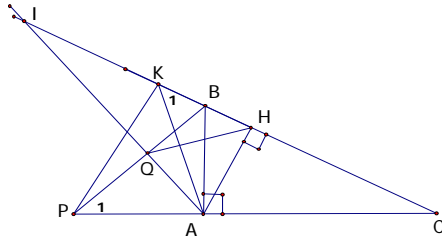
$$\Rightarrow AH = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12 (cm); BH = \frac{15 \cdot 15}{25} = 9 (cm); HC = BC - BH = 25 - 9 = 16 (cm)$$

$$c) HM = BM - BH = \frac{BC}{2} - BH = \frac{25}{2} - 9 = 3,5 (cm)$$

$$S_{AHM} = \frac{1}{2} AH \cdot HM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3,5 = 21 (cm^2)$$

Bài 188: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$). Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $KH = HA$. Qua K kẻ đường thẳng song song với AH, cắt đường thẳng AC tại P.

- Chứng minh: Tam giác ABC Đồng dạng với tam giác KPC.
- Gọi Q là trung điểm của BP. Chứng minh: QH là đường trung trực của đoạn thẳng AK.

Lời giải

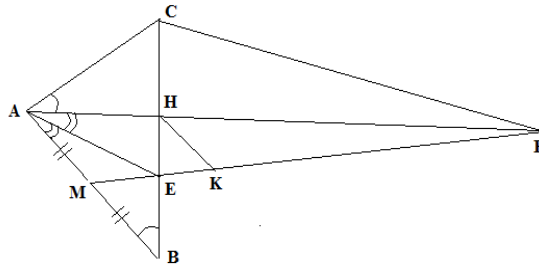
a) Chứng minh: $\triangle ABC \cong \triangle KPC$ (g.g)

b) Gọi Q là trung điểm của BP. Chứng minh: QH là đường trung trực của đoạn thẳng AK.

Ta có: $AQ = KQ = \frac{PB}{2}$ (Trung tuyến ứng với nửa cạnh huyền trong tam giác vuông).

Lại có: $HK = HA$ (Giả thiết). Do đó: QH là đường trung trực của AK.

Bài 189: Cho tam giác ABC có $\hat{A} > \hat{B}$. Trên cạnh BC lấy điểm H sao cho $\hat{HAC} = \hat{ABC}$. Đường phân giác của góc \hat{BAH} cắt BH ở E. Từ trung điểm M của AB kẻ ME cắt đường thẳng AH tại F. Chứng minh rằng: $CF \parallel AE$.

Lời giải

Ta có: $\hat{CEA} = \hat{B} + \hat{BAE} = \hat{HAC} + \hat{EAH} = \hat{CAE}$

$\Rightarrow \triangle CAE$ cân ở C $\Rightarrow CA = CE$ (1)

Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt MF ở K. Ta có:

$$\frac{BE}{EH} = \frac{MB}{KH} = \frac{MA}{KH} = \frac{FA}{FH} \quad (2)$$

AE là phân giác của $\triangle ABH \Rightarrow \frac{BE}{EH} = \frac{AB}{AH}$ (3)

$\triangle CAH$ và $\triangle CBA$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{CA}{CH} = \frac{CE}{CH}$ (theo (1)) (4)

Từ (2), (3), (4) $\Rightarrow \frac{FA}{FH} = \frac{CE}{CH}$ hay $\frac{AH}{FH} = \frac{EH}{CH} \Rightarrow AE \parallel CF$ (đpcm)

Bài 190: Từ đỉnh A của $\triangle ABC$ ta hạ các đường vuông góc AM, AN với phân giác trong và ngoài tương ứng của góc B. Hạ các đường vuông góc AP, AQ với phân giác trong và ngoài tương ứng của góc C.

- Chứng minh rằng 4 điểm MNPQ thẳng hàng
- Cho $QN = 10$ cm tính chu vi tam giác ABC
- Cho điểm O chuyển động trên BC tìm vị trí của O sao cho tích khoảng cách từ O đến AB và AC đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Gọi $E = AB \cap MN$ và $F = AC \cap PQ$

ta thấy tứ giác AQCP và AMBN là hình chữ nhật

$\Rightarrow E, F$ lần lượt là trung điểm của AB và AC $\Rightarrow EF \parallel BC$

Mà $\widehat{QPC} = \widehat{C}_4$ (vì cùng bằng \widehat{C}_3) nên $PQ \parallel BC \Rightarrow PQ$ thuộc EF (1)

Tương tự M, N thuộc đường thẳng EF (2)

Từ (1) và (2) suy ra M, N, P, Q thẳng hàng.

b) Ta có $QN = QF + EF + EN$ (1)

Theo tính chất hình chữ nhật ta có

$$QF = \frac{1}{2}AC \text{ (tính chất) (2)}$$

$$NE = \frac{1}{2}BC \text{ (tính chất) (3)}$$

$$EF = \frac{1}{2}BC \text{ (Tính chất đường trung bình tam giác) (4)}$$

$$\text{Từ (1) (2) (3) và (4) ta có } QN = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$$

Vậy $QN = 10$ cm thì chu vi của $\triangle ABC = 2QN = 20$ cm

C) Kẻ BI vuông góc với AC và CJ vuông góc với AB

Vì $OH \parallel CJ$, $OK \parallel BI$ nên theo định lý ta lét ta có

$$\frac{OH}{CJ} + \frac{OK}{BI} = \frac{BO}{BC} + \frac{CO}{BC} = 1$$

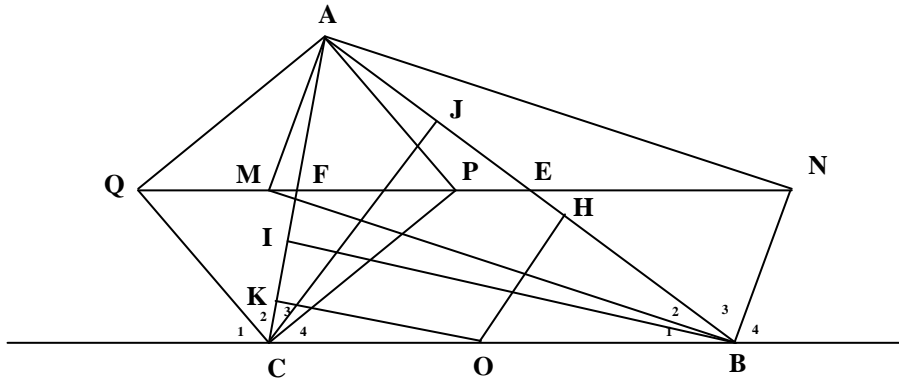
Đặt $OH = x$, $BI = p$ và $CJ = q$

$$\text{Ta có } 0 \leq x \leq q; 0 \leq OK \leq p \text{ và } \frac{x}{q} + \frac{OK}{p} = 1$$

$$\text{Do đó } \frac{q}{p} \cdot OH \cdot OK = x(q - x) = -x^2 - qx = -\left(x - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{q^2}{4} \leq \frac{q^2}{4}$$

$$\Rightarrow OH \cdot OK \leq \frac{pq}{4}$$

Vậy $OH \cdot OK$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{pq}{4}$ khi và chỉ khi $x = \frac{q}{2}$ hay O là trung điểm của BC



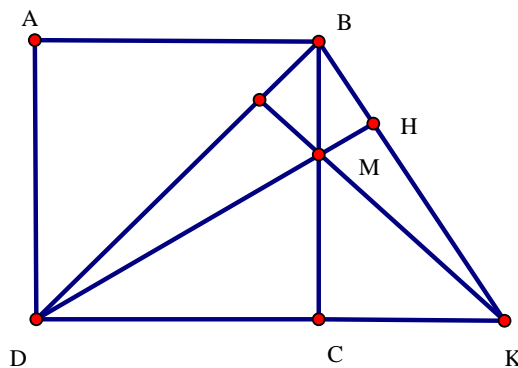
Bài 191: Cho hình vuông ABCD cạnh a, lấy điểm M bất kỳ trên cạnh BC (M khác B và C). Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng DM tại H, kéo dài BH cắt đường thẳng DC tại K.

1. Chứng minh KM vuông góc với DB.
2. Chứng minh rằng: $KC \cdot KD = KH \cdot KB$.
3. Ký hiệu S_{ABM}, S_{DCM} lần lượt là diện tích các tam giác ABM và DCM.

a) Chứng minh tổng $(S_{ABM} + S_{DCM})$ không đổi.

b) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để $(S_{ABM}^2 + S_{DCM}^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó theo a.

Lời giải



1.

Vì $BM \perp DK, DM \perp BK$ nên M là trực tâm $\triangle BDK$ do đó $KM \perp DB$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

2.

Xét $\triangle KHD$ và $\triangle KCB$ có \widehat{K} chung và $\widehat{KHD} = \widehat{KCB} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle KHD \sim \triangle KCB (gg) \Rightarrow \frac{KH}{KC} = \frac{KD}{KB} \Rightarrow KC \cdot KD = KH \cdot KB$$

3a)

$$\begin{aligned} S_{ABM} + S_{DCM} &= \frac{1}{2} AB \cdot BM + \frac{1}{2} CD \cdot CM = \frac{1}{2} a \cdot BM + \frac{1}{2} a \cdot CM \\ &= \frac{1}{2} a (BM + CM) = \frac{1}{2} a^2 \end{aligned}$$

Vậy $S_{ABM} + S_{DCM}$ không đổi

3b)

Với hai số thực x, y bất kỳ ta có $2(x^2 + y^2) = (x - y)^2 + (x + y)^2 \geq (x + y)^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} (x + y)^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$

$$\text{Áp dụng ta có } S_{ABM}^2 + S_{DCM}^2 \geq \frac{1}{2} (S_{ABM} + S_{DCM})^2 = \frac{a^4}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi $S_{ABM} = S_{DCM} \Leftrightarrow BM = CM \Leftrightarrow M$ là trung điểm của BC

Vậy $\min(S_{ABM}^2 + S_{DCM}^2) = \frac{a^4}{8}$. Khi M là trung điểm của BC

Bài 192: Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N .

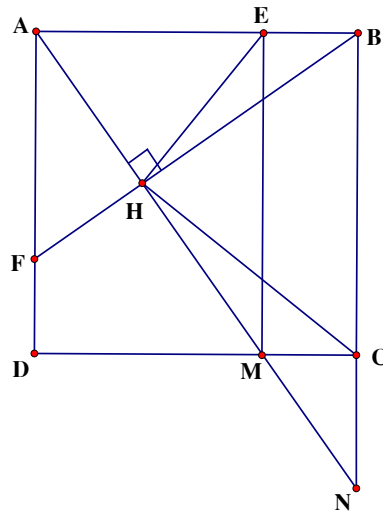
a) Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $\triangle CBH$ đồng dạng với $\triangle EAH$

c) Biết diện tích $\triangle CBH$ gấp bốn lần diện tích $\triangle EAH$. Chứng minh rằng: $AC = 2EF$.

d) Chứng minh rằng: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{DAM} = \widehat{ABF}$ (cùng phụ \widehat{BAH})

$$AB = AD \text{ (gt)}$$

$$\widehat{BAF} = \widehat{ADM} = 90^\circ \text{ (ABCD là hình vuông)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle BAF \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow DM = AF, \text{ mà } AF = AE \text{ (gt)}$$

$$\text{Nên. } AE = DM$$

$$\text{Lại có } AE \parallel DM \text{ (vì } AB \parallel DC \text{)}$$

Suy ra tứ giác AEMD là hình bình hành

$$\text{Mặt khác. } \widehat{DAE} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

Vậy tứ giác AEMD là hình chữ nhật

b) Ta có $\triangle ABH \sim \triangle FAH$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BH}{AH} \text{ hay } \frac{BC}{AE} = \frac{BH}{AH} \text{ (} AB=BC, AE=AF \text{)}$$

$$\text{Lại có } \widehat{HAB} = \widehat{HBC} \text{ (cùng phụ } \widehat{ABH} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle CBH \sim \triangle EAH \text{ (c.g.c)}$$

c) Từ $\triangle CBH \sim \triangle EAH$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle CBH}}{S_{\triangle EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2, \text{ mà } \frac{S_{\triangle CBH}}{S_{\triangle EAH}} = 4 \text{ (gt)} \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE}\right)^2 = 4 \text{ nên } BC^2 = (2AE)^2$$

$$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } AB, F \text{ là trung điểm của } AD$$

$$\text{Do đó: } BD = 2EF \text{ hay } AC = 2EF \text{ (đpcm)}$$

d) Do $AD \parallel CN$ (gt). Áp dụng hệ quả định lý ta lét, ta có:

$$\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lại có: $MC \parallel AB$ (gt). Áp dụng hệ quả định lý ta lét, ta có:

$$\Rightarrow \frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN} \text{ hay } \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \quad (\text{đpcm})$$

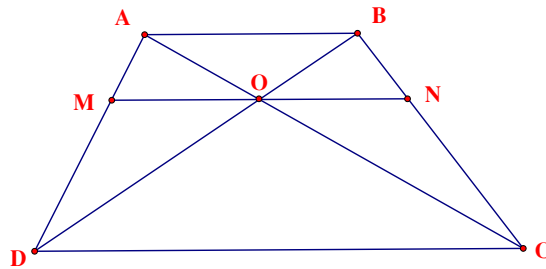
Bài 193: Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M và N.

a) Chứng minh rằng $OM = ON$.

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$.

c) Biết $S_{AOB} = 2015^2$ (đơn vị diện tích); $S_{COD} = 2016^2$ (đơn vị diện tích). Tính S_{ABCD} .

Lời giải



a) Lập luận để có $\frac{OM}{AB} = \frac{OD}{BD}$, $\frac{ON}{AB} = \frac{OC}{AC}$

Lập luận để có $\frac{OD}{DB} = \frac{OC}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{OM}{AB} = \frac{ON}{AB} \Rightarrow OM = ON$$

b) Xét $\triangle ABD$ để có $\frac{OM}{AB} = \frac{DM}{AD}$ (1), xét $\triangle ADC$ để có $\frac{OM}{DC} = \frac{AM}{AD}$ (2)

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow OM \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right) = \frac{AM + DM}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1$$

Chứng minh tương tự ON. $\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right) = 1$

$$\text{từ đó có } (OM + ON) \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right) = 2 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$$

c) Từ $\triangle CBH \sim \triangle EAH$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta CBH}}{S_{\Delta EAH}} = \left(\frac{BC}{AE}\right)^2, \text{ mà } \frac{S_{\Delta CBH}}{S_{\Delta EAH}} = 4 \text{ (gt)} \Rightarrow \left(\frac{BC}{AE}\right)^2 = 4 \text{ nên } BC^2 = (2AE)^2$$

$\Rightarrow BC = 2AE \Rightarrow E$ là trung điểm của AB , F là trung điểm của AD

Chứng minh được $S_{AOD} = S_{BOC}$

$$\Rightarrow S_{AOB} \cdot S_{DOC} = (S_{AOD})^2$$

Thay số để có $2015^2 \cdot 2016^2 = (S_{AOD})^2 \Rightarrow S_{AOD} = 2015 \cdot 2016$

Do đó $S_{ABCD} = 2015^2 + 2 \cdot 2015 \cdot 2016 + 2016^2 = (2015 + 2016)^2 = 4031^2$ (đơn vị DT)

Bài 194: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia đối của tia HB lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E .

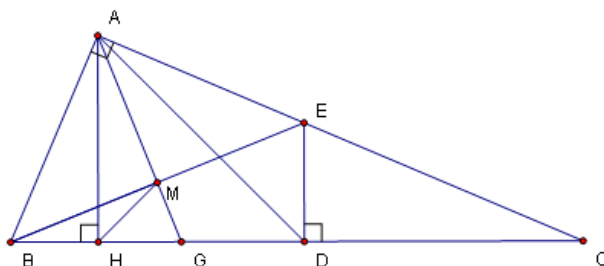
1. Chứng minh $CD \cdot CB = CA \cdot CE$

2. Tính số đo góc BEC .

3. Gọi M là trung điểm của đoạn BE . Tia AM cắt BC tại G .

Chứng minh:
$$\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$$

Lời giải



a) Xét ΔABC và ΔDEC

Có $\angle BAC = \angle EDC = 90^\circ$

$\angle C$ chung

$\Rightarrow \Delta ABC$ đồng dạng với ΔDEC (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CE}$$

$$\Rightarrow CD \cdot CB = CA \cdot CE \text{ (Đpcm)}$$

b) Xét ΔADC và ΔBEC có:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB} \text{ (Chứng minh trên)}$$

$\angle C$ chung

$\Rightarrow \Delta ADC$ đồng dạng với ΔBEC (c.g.c)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Rightarrow \angle BEC = \angle ADC \text{ (cặp góc tương ứng)} \quad (1)$$

Lại có: $HA = HD$ (gt)

$\Rightarrow \Delta AHD$ vuông cân tại H

$$\Rightarrow \angle ADH = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ADC = 135^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle BEC = 135^\circ$

c) Ta có: $\angle BEC = 135^\circ$ (cm ý b)

Mà $\angle BEC + \angle BEA = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle BEA = 45^\circ$$

$\Rightarrow \Delta ABE$ vuông cân tại A .

Mà M là trung điểm của BE nên tia AM là tia phân giác của góc BAC

Suy ra: $\frac{GB}{GC} = \frac{AB}{AC}$ (t/c đường phân giác của tam giác) (3)

Mà ΔABC đồng dạng với ΔDEC (cm ý a)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{ED}{DC} \quad (4)$$

Lại có $ED \parallel AH$ (Cùng vuông góc với BC)

$$\Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{ED}{DC} \text{ (hệ quả định lý Talet)}$$

Mặt khác $AH = HD$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{ED}{DC} = \frac{HD}{HC} \quad (5)$$

$$\text{Từ (3), (4) và (5)} \Rightarrow \frac{GB}{GC} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow \frac{GB}{GB+GC} = \frac{HD}{HD+HC} \Rightarrow \frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH+HC}$$

Bài 195: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), kẻ đường cao AH và đường trung tuyến AM ($H, M \in BC$). Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC .

1. Chứng minh rằng:

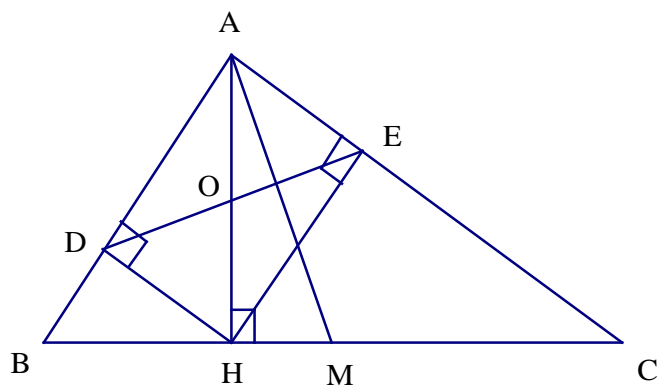
a) $DE^2 = BH \cdot HC$.

b) $AH^2 = AD \cdot DB + AE \cdot EC$

c) DE vuông góc với AM .

2. Giả sử diện tích tam giác ABC bằng 2 lần diện tích tứ giác $ADHE$. Chứng minh tam giác ABC vuông cân.

Lời giải



1.

a) Chứng minh: $DE^2 = BH.HC$.Xét $\triangle AHB$ và $\triangle CHA$ Có $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{CAH}$ (vì cùng phụ với \widehat{BAH})

$$\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle CHA \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA} \Rightarrow AH^2 = BH.CH$$

Lại có $AH \perp BC, HE \perp AC, HD \perp AB$ nên $\widehat{D} = \widehat{H} = \widehat{E} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow DE = AH$$

$$\Rightarrow DE^2 = DH.CH$$

b. Chứng minh: $AH^2 = AD.DB + AE.EC$ Chứng minh $\triangle HDB \sim \triangle ADH \Rightarrow HD^2 = AD.DB$ Chứng minh $\triangle AHE \sim \triangle ACH \Rightarrow HE^2 = AE.EC$

Mà tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật nên $DH = AE$. Do đó $HD^2 + HE^2 = AE^2 + HE^2 = AH^2 = AD.DB + AE.EC$ (Định lý Pytago áp dụng vào tam giác vuông AEH).

c) Chứng minh: $DE \perp AM$.Gọi O là giao điểm của AH và DE , Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật nên

$$OA = OE \Rightarrow \triangle OAE \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{HAE} = \widehat{AED}$$

 $\triangle ABC$ vuông tại A , có M là trung điểm của BC nên $MA = MB = MC \Rightarrow \triangle MAC$ cân tại M

$$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA}$$

$$\Rightarrow \widehat{AED} + \widehat{MAC} = \widehat{HAE} + \widehat{MCA} = 90^\circ \Rightarrow DE \perp AM$$

$$2. \text{ Theo giả thiết } S_{ABC} = 2S_{ADHE} = 4S_{ADE} \text{ hay } \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

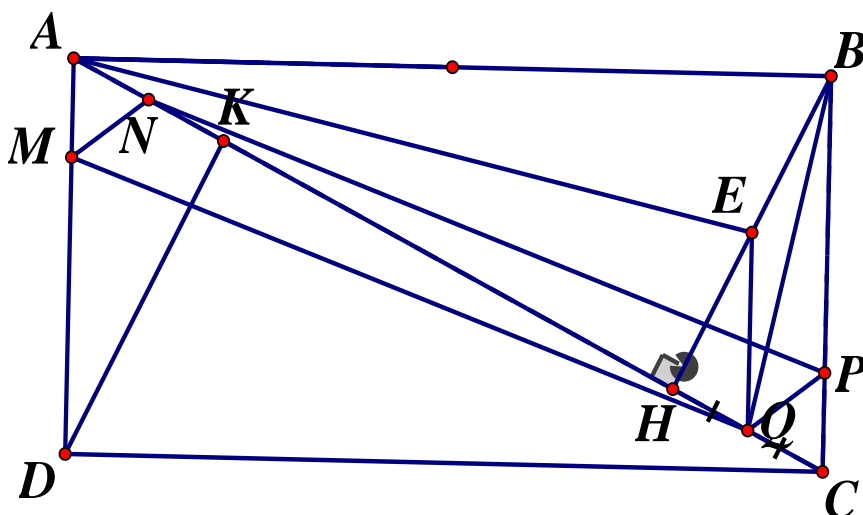
$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{S_{AED}}{S_{ABC}} &= \frac{AE \cdot AD}{AB \cdot AC} = \frac{(AE \cdot AC) \cdot (AD \cdot AB)}{(AB \cdot AC)^2} = \frac{AH^4}{(AB \cdot AC)^2} \\ &= \frac{AH^4}{(AH \cdot BC)^2} = \frac{AH^2}{BC^2} \leq \frac{AM^2}{BC^2} = \frac{1}{4} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AH^2}{BC^2} = \frac{AM^2}{BC^2} \Leftrightarrow AH = AM \Leftrightarrow H \equiv M$ nên $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

Bài 196: Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 2AD$. Trên cạnh AD lấy điểm M , trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $AM = CP$. Kẻ BH vuông góc với AC tại H . Gọi Q là trung điểm của CH , đường thẳng kẻ qua P song song với MQ cắt AC tại N .

- Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành
- Khi M là trung điểm của AD . Chứng minh BQ vuông góc với NP
- Đường thẳng AP cắt DC tại điểm F . Chứng minh rằng $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{4AF^2}$

Lời giải



- Chứng minh được $DH \parallel BK$ (1)
Chứng minh được $\triangle AHD = \triangle CKB \Rightarrow DH = BK$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.
- Gọi E là trung điểm BK , chứng minh được QE là đường trung bình $\triangle KBC$ nên

$$QE \parallel BC \Rightarrow QE \perp AB \text{ (vì } BC \perp AB) \text{ và } QE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$$

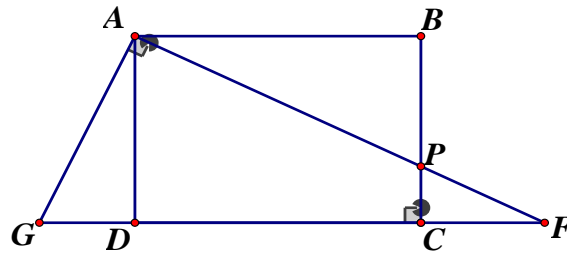
Chứng minh $AM = QE$ và $AM \parallel QE \Rightarrow AMQE$ là hình hành

Chứng minh $AE \parallel NP \parallel MQ$ (3).

Xét $\triangle AQB$ có BK và QE là hai đường cao của tam giác nên E là trực tâm của tam giác nên AE là đường cao thứ ba của tam giác $AE \perp BQ \Rightarrow BQ \perp NP$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

c)



Vẽ tia Ax vuông góc với AF . Gọi giao của Ax với CD là G .

Chứng minh $\widehat{GAD} = \widehat{BAP}$ (cùng phụ với \widehat{PAD}) $\Rightarrow \triangle ABP$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AP}{AG} = \frac{AB}{AD} = 2 \Rightarrow AG = \frac{1}{2}AP$$

Ta có: $\triangle AGF$ vuông tại A có $AD \perp GF$ nên $AG \cdot AF = AD \cdot GF$ ($= 2S_{\triangle AGF}$)

$$\Rightarrow AG^2 \cdot AF^2 = AD^2 \cdot GF^2 \quad (1)$$

Ta chia hai vế của (1) cho $AD^2 \cdot AG^2 \cdot AF^2$ mà $AG^2 + AF^2 = GF^2$ (đl Pytago)

$$\Rightarrow \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AG^2} + \frac{1}{AF^2} \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}AP\right)^2} + \frac{1}{AF^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{AB^2} = \frac{4}{AP^2} + \frac{1}{AF^2} \Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AP^2} + \frac{1}{4AF^2}$$

Bài 197: Cho tam giác ABC vuông tại A . Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AC . Từ C vẽ một đường thẳng vuông góc với tia BM , đường thẳng này cắt tia BM tại D , cắt tia BA tại E .

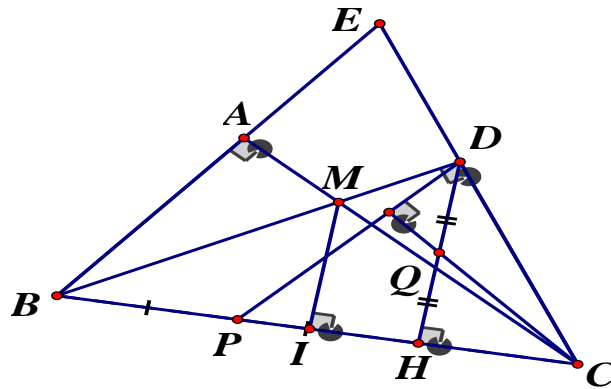
a) Chứng minh : $EA \cdot EB = ED \cdot EC$

b) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh AC thì tổng $BM \cdot BD + CM \cdot CA$ có giá trị không đổi

c) Kẻ $DH \perp BC$ ($H \in BC$). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BH, CH .

Chứng minh $CQ \perp PD$

Lời giải



d) Chứng minh $\triangle EBD \sim \triangle ECA (g-g) \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{ED}{EA} \Rightarrow EA \cdot EB = ED \cdot EC$

e) Kẻ $MI \perp BC (I \in BC)$. Ta có: $\triangle BIM \sim \triangle BDC (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BI}{BD} \Rightarrow BM \cdot BD = BI \cdot BC \quad (1)$$

Tương tự: $\triangle ACB \sim \triangle ICM (g-g) \Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{CI}{CA} \Rightarrow CM \cdot CA = CI \cdot BC \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BM \cdot BD + CM \cdot CA = BI \cdot BC + CI \cdot BC = BC \cdot (BI + CI) = BC^2$

(Không đổi)

f) $\triangle BHD \sim \triangle DHC (g.g)$

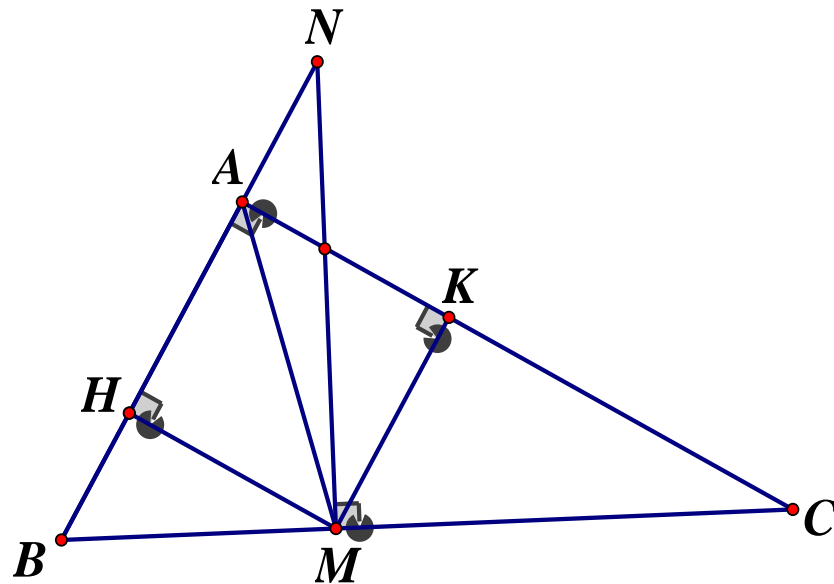
$$\Rightarrow \frac{BH}{DH} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{2BP}{2DQ} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BP}{DQ} = \frac{BD}{DC}$$

Chứng minh được: $\triangle DPB \sim \triangle CQD (g.g) \Rightarrow \widehat{BDP} = \widehat{DCQ}$

Mà $\widehat{BDP} + \widehat{PDC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DCQ} + \widehat{PDC} = 90^\circ \Rightarrow CQ \perp PD$

Bài 198: Cho tam giác ABC vuông ở A có AM là phân giác ($M \in BC$). Đường thẳng qua M và vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại N. Chứng minh rằng $MN = MC$

Lời giải



Kẻ $MH \perp AB$ tại H , $MK \perp AC$ tại $K \Rightarrow AHMK$ là hình vuông $\Rightarrow MH = MK$ (1)

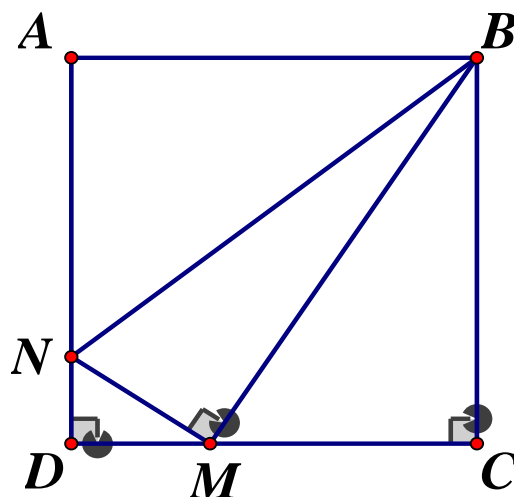
Ta có: $\widehat{MCA} = \widehat{MNA}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle MHN = \triangle MKC$ (ch – cg) $\Rightarrow MN = MC$

Bài 199: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 20cm. Trên cạnh CD lấy điểm M . Đường thẳng vuông góc với BM tại M cắt AD tại N .

- Cho $MC = 15$ cm. Tính diện tích tam giác BMN
- Xác định vị trí của M trên cạnh CD để ND có độ dài lớn nhất.

Lời giải



- Hai tam giác vuông BCM và MDN có:

$$\widehat{CBM} = \widehat{DMN} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BMC})$$

$$\Rightarrow \triangle BCM \sim \triangle MDN \Rightarrow \frac{ND}{MC} = \frac{MD}{BC} \quad (*)$$

$$\Rightarrow ND = \frac{MC \cdot MD}{BC} = \frac{15 \cdot (20 - 15)}{20} = 3,75 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow AN = AD - ND = 20 - 3,75 = 16,25 \text{ (cm)}$$

$$\text{Ta có: } S_{\triangle BMN} = S_{ABCD} - S_{\triangle BCM} - S_{\triangle DMN} - S_{\triangle ABN}$$

$$= 20^2 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3,75 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 16,25 = 78,125 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{b) Đặt } MC = x \text{ (} 0 \leq x \leq 20 \text{)}$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow ND = \frac{MC \cdot MD}{BC} = \frac{x \cdot (20 - x)}{20} = \frac{20x - x^2}{20} = 5 - \frac{(x - 10)^2}{20} \leq 5$$

\Rightarrow Độ dài ND lớn nhất là $ND = 5 \text{ cm}$ khi $x = 10$ hay M là trung điểm của CD

Vậy để độ dài ND lớn nhất thì vị trí của M là trung điểm của CD.

Bài 200: Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O. M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC ($M \neq B, C$)

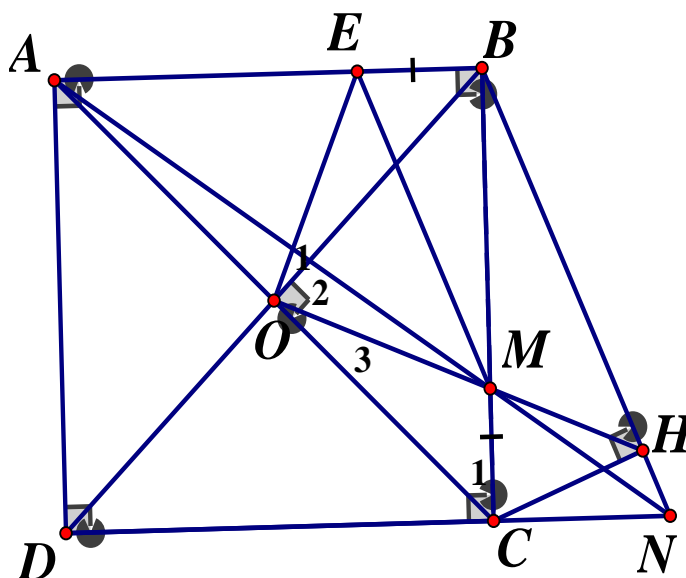
. Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$.

a) Chứng minh : $\triangle OEM$ vuông cân

b) Chứng minh: $ME \parallel BN$

c) Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét $\triangle OEB$ và $\triangle OMC$

Vì ABCD là hình vuông nên ta có: $OB = OC$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Và $\widehat{B_1} = \widehat{C_1} = 45^\circ$, $BE = CM(gt) \Rightarrow \triangle OEB = \triangle OMC(c.g.c)$

$\Rightarrow OE = OM$ và $\widehat{O_1} = \widehat{O_3}$

Lại có: $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = \widehat{BOC} = 90^\circ$ vì tứ giác ABCD là hình vuông

$\Rightarrow \widehat{O_2} + \widehat{O_1} = \widehat{EOM} = 90^\circ$ kết hợp với $OE = OM \Rightarrow \triangle OEM$ vuông cân tại O

b) Từ giả thiết tứ giác ABCD là hình vuông $\Rightarrow AB // CD$ và $AB = CD$

+) $AB // CD \Rightarrow AB // CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$ (định lý Ta let) (*)

Mà $BE = CM(gt)$ và $AB = CD \Rightarrow AE = BM$ thay vào (*)

Ta có: $\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow ME // BN$ (Ta let đảo)

c) Gọi H' là giao điểm của OM và BN

Từ $ME // BN \Rightarrow \widehat{OME} = \widehat{OH'E}$ (cặp góc so le trong)

Mà $\widehat{OME} = 45^\circ$ vì $\triangle OEM$ vuông cân tại O

$\Rightarrow \widehat{MH'B} = 45^\circ = \widehat{C_1} \Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle BMH'(g.g)$

$\Rightarrow \frac{OM}{OB} = \frac{MH'}{MC}$, kết hợp $\widehat{OMB} = \widehat{CMH'}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle OMB \sim \triangle CMH'(c.g.c) \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{MH'C} = 45^\circ$

Vậy $\widehat{BH'C} = \widehat{BH'M} + \widehat{MH'C} = 90^\circ \Rightarrow CH' \perp BN$

Mà $CH \perp BN (H \in BN) \Rightarrow H \equiv H'$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng (đpcm)

Bài 201: Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Các đường cao AE, BF, CG cắt nhau tại H.

Gọi M là trung điểm của BC, qua H vẽ đường thẳng a vuông góc với HM, a cắt AB, AC lần lượt tại I và K

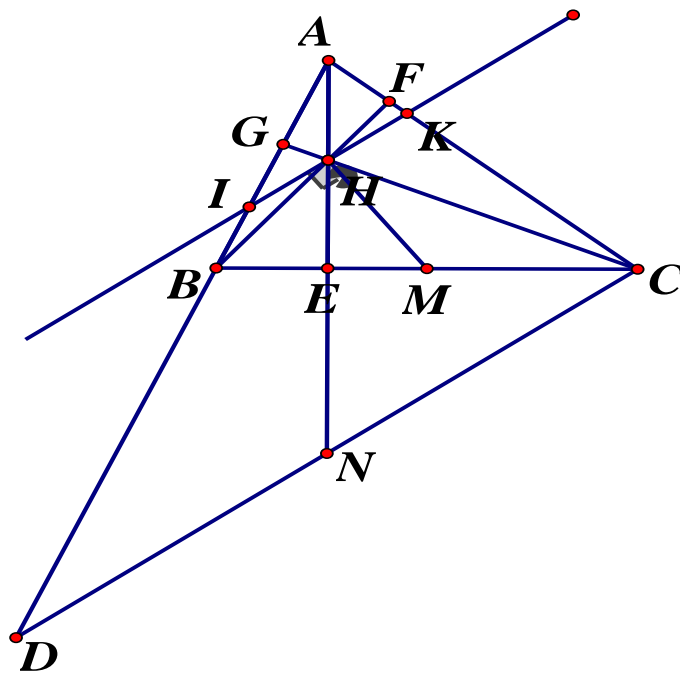
a) Chứng minh tam giác ABC đồng dạng với tam giác EFC

b) Qua C kẻ đường thẳng b song song với đường thẳng IK, b cắt AH, AB theo thứ tự tại N và

D. Chứng minh $NC = ND, HI = HK$

c) Chứng minh $\frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG} > 6$

Lời giải



a) Ta có $\triangle AEC \sim \triangle BFC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CB}$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle EFC$ có $\frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CB}$, \hat{C} chung

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EFC$ (c.g.c)

b) Vì $CN \parallel IK$, $HM \perp IK \Rightarrow HM \perp CN \Rightarrow M$ là trực tâm $\triangle HNC$

$\Rightarrow MN \perp CH$ mà $CH \perp AD$ (H là trực tâm $\triangle ABC$) $\Rightarrow MN \parallel AD$

Do M là trung điểm $BC \Rightarrow NC = ND$

$\frac{IH}{DN} = \frac{AH}{AN}$ (Vì $IH \parallel DN$) $\frac{HK}{CN} = \frac{AH}{AN}$ (Vì $KH \parallel CN$)
 $\Rightarrow IH = IK$

c) Ta có: $\frac{AH}{HE} = \frac{S_{AHC}}{S_{CHE}} = \frac{S_{ABH}}{S_{BHE}} = \frac{S_{AHC} + S_{ABH}}{S_{CHE} + S_{BHE}} = \frac{S_{AHC} + S_{ABH}}{S_{BHC}}$

Tương tự ta có: $\frac{BH}{HF} = \frac{S_{BHC} + S_{BHA}}{S_{AHC}}; \frac{CH}{HG} = \frac{S_{BHC} + S_{AHC}}{S_{BHA}}$

$\Rightarrow \frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG} = \frac{S_{AHC}}{S_{BHC}} + \frac{S_{ABH}}{S_{BHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHA}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{BHA}} + \frac{S_{AHC}}{S_{BHA}} \geq 6$

Dấu "=" xảy ra khi $\triangle ABC$ đều mà theo gt $AB < AC$ nên không xảy ra dấu bằng.

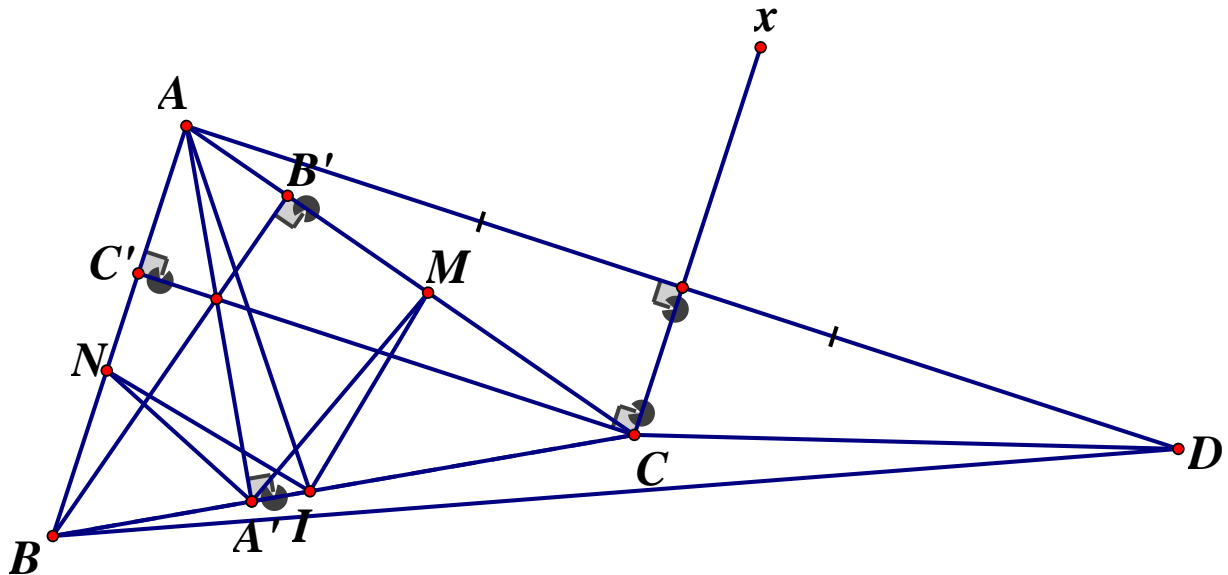
Bài 202: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC' , H là trực tâm.

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$

- b) Gọi AI là phân giác của tam giác ABC ; IM, IN thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB . Chứng minh rằng: $AN.BI.CM = BN.IC.AM$

c) Chứng minh rằng: $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$

Lời giải



a) $\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}HA'.BC}{\frac{1}{2}AA'.BC} = \frac{HA'}{AA'}$

Tương tự: $\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'}; \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}$

$$\Rightarrow \frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1$$

- b) Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC :

$$\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI}$$

$$\Rightarrow \frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1$$

$$\Rightarrow BI.AN.CM = BN.IC.AM$$

- c) Vẽ $Cx \perp CC'$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx

Chứng minh được góc BAD vuông, $CD = AC, AD = 2.CC'$

Xét 3 điểm B, C, D ta có: $BD \leq BC + CD$

$$\Delta BAD \text{ vuông tại } A \text{ nên: } AB^2 + AD^2 = BD^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AD^2 \leq (BC + CD)^2$$

$$AB^2 + 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2$$

$$4CC'^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$$

Tương tự:

$$4AA'^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$$

$$4BB'^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$$

$$\text{Chứng minh được: } 4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \leq (AB + BC + AC)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(AB + BC + AC)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow BC = AC, AC = AB, AB = BC \Leftrightarrow AB = AC = BC \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 203: 1) Cho hình vuông $ABCD$, gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C , dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB , d cắt AH tại E . Đường thẳng AH cắt DC tại F .

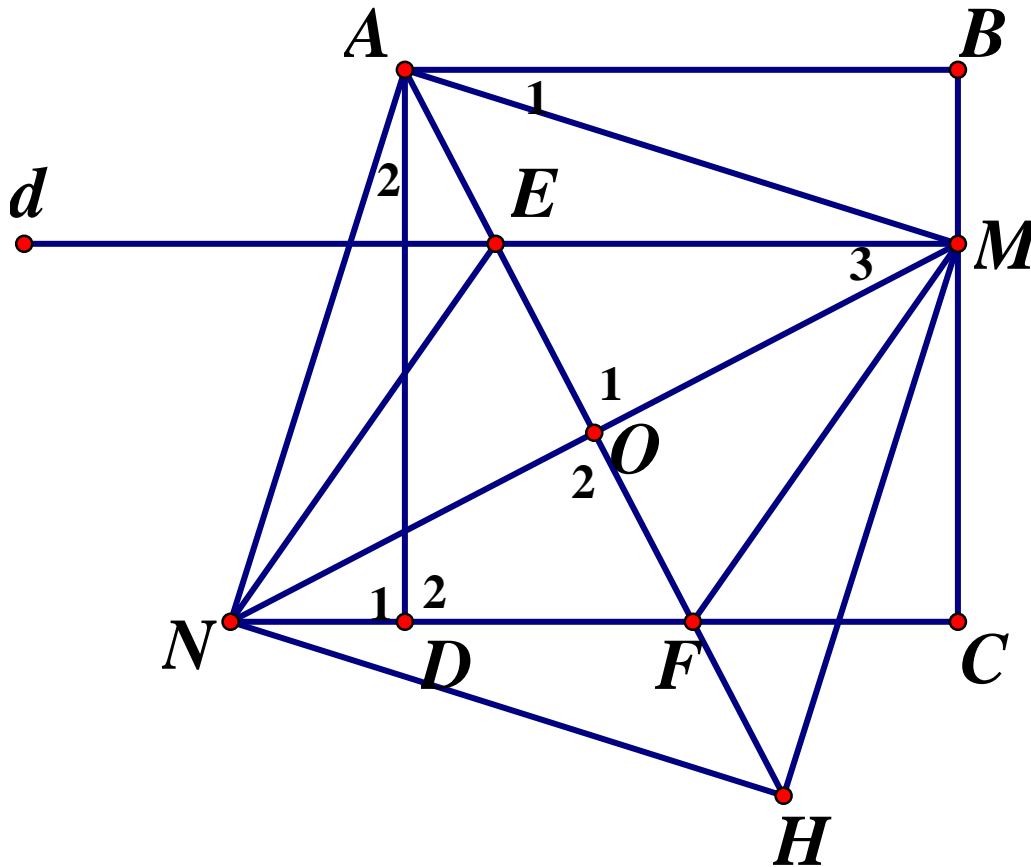
d) Chứng minh rằng $BM = ND$.

e) Tứ giác $EMFN$ là hình gì

f) Chứng minh chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi trên BC

2) Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ, \widehat{ABC} = 20^\circ$. Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{ABE} = 10^\circ$ và $\widehat{ACF} = 30^\circ$. Tính \widehat{CFE}

Lời giải



4.1

a) Do ABCD là hình vuông nên $\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{MAD} = 90^\circ (1)$

mà AMHN là hình vuông $\Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{MAD} = 90^\circ (2)$

Từ (1); (2) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

Do đó, $\triangle AND = \triangle AMB (c.g.c) \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D_1} = 90^\circ$ và $BM = ND$

b) Do ABCD là hình vuông $\Rightarrow \widehat{D_2} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow N, D, C$ thẳng hàng

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AH, MN của hình vuông AMHN.

$\Rightarrow O$ là tâm đối xứng của hình vuông AMHN

$\Rightarrow AH$ là đường trung trực đoạn MN, mà $E, F \in AH$

$\Rightarrow EN = EM$ và $FM = FN$ (3)

$\triangle EOM = \triangle FON \left(OM = ON; \widehat{N_1} = \widehat{M_3} \right) \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow EM = FN$ (4)

Từ (3);(4) $\Rightarrow EM = NE = NF = FM \Rightarrow MEMF$ là hình thoi (5)

c) Từ (5) suy ra $FM = FN = FD + DN$

Mà $DN = MB \Rightarrow MF = DF + BM$

Gọi chu vi tam giác MCF là p và cạnh hình vuông là a

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= MC + CF + MF = MC + CF + BM + DF \text{ (vì } MF = DF + MB) \\ &= (MC + MB) + (CF + FD) = BC + CD = a + a = 2a \end{aligned}$$

Do đó, chu vi tam giác MCF không đổi khi M thay đổi trên BC

4.2

Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ, \widehat{ABC} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 70^\circ$

$\triangle ACF$ có $\widehat{CAF} = 90^\circ, \widehat{ACF} = 30^\circ \Rightarrow FC = 2.AF$

Gọi D là trung điểm của BC và G là điểm trên AB sao cho $GD \perp BC$.

$$\text{Khi đó, } \triangle ABC \sim \triangle DBG \Rightarrow \frac{BD}{BG} = \frac{BA}{BC}$$

$$\widehat{GCB} = \widehat{GBC} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{GCF} = 20^\circ$$

Do đó CG và BE lần lượt là tia phân giác của \widehat{BCF} và \widehat{ABC} nên:

$$\frac{FC}{FG} = \frac{BC}{BG}; \frac{BA}{BC} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{Do đó, } \frac{AF}{FG} = \frac{\frac{1}{2}FC}{FG} = \frac{\frac{1}{2}BC}{BG} = \frac{BD}{BG} = \frac{BA}{BC} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AF}{FG} = \frac{AE}{EC}$$

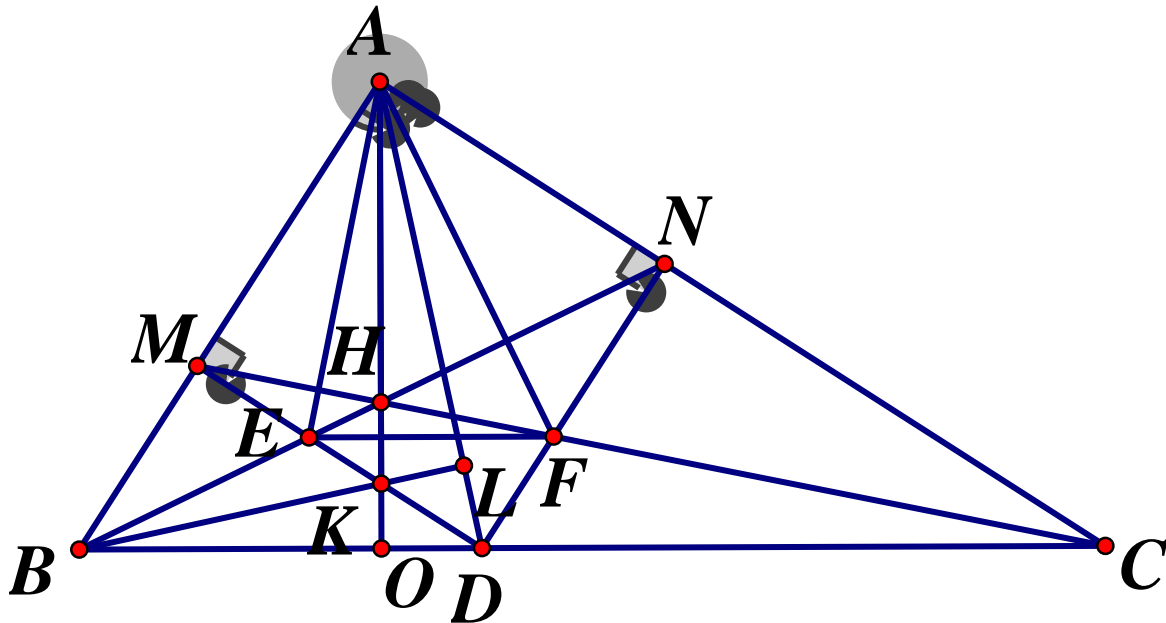
Từ đó suy ra $CG \parallel EF$ (Định lý Talet đảo) $\Rightarrow \widehat{CFE} = \widehat{GCF} = 20^\circ$

Bài 204: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có AD là tia phân giác của \widehat{BAC} . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC , E là giao điểm của BN và DM , F là giao điểm của CM và DN .

- 1) Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông và $EF \parallel BC$.
- 2) Gọi H là giao điểm của BN và CM . Chứng minh $\triangle ANB$ đồng dạng với $\triangle NFA$ và H là trực tâm $\triangle AEF$

- 3) Gọi giao điểm của AH và DM là K , giao điểm của AH và BC là O , giao điểm của BK và AD là I . Chứng minh: $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} > 9$

Lời giải



1) *Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông

+) Chứng minh $\widehat{AMD} = 90^\circ; \widehat{AND} = 90^\circ; \widehat{MAN} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $AMDN$ là hình chữ nhật

+) Hình chữ nhật $AMDN$ có AD là phân giác của \widehat{MAN} nên tứ giác $AMDN$ là hình vuông.

***Chứng minh $EF \parallel BC$**

+) Chứng minh: $\frac{FM}{FC} = \frac{DB}{DC}$ (1)

Chứng minh: $\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MA}$ (2)

Chứng minh $AM = DN \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MB}{DN}$ (3)

Chứng minh $\frac{MB}{DN} = \frac{EM}{ED}$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\frac{EM}{ED} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow EF \parallel BC$

2) Chứng minh $\triangle ANB \sim \triangle NFA$

Chứng minh $AN = DN$. suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB}$ (5)

Chứng minh $\frac{DN}{AB} = \frac{CN}{CA}$ (6)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Chúng minh $\frac{CN}{CA} = \frac{FN}{AM}$ (7)

Chúng minh $AM = AN$. Suy ra $\frac{FN}{AM} = \frac{FN}{AN}$ (8)

Từ (5) (6) (7) (8) suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{FN}{AN} \Rightarrow \triangle ANB \sim \triangle NFA$ (c.g.c)

***chứng minh H là trực tâm tam giác AEF**

Vì $\triangle ANB \sim \triangle NFA$ nên $\widehat{NBA} = \widehat{FAN}$

Mà $\widehat{BAF} + \widehat{FAN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NBA} + \widehat{BAF} = 90^\circ$

Suy ra $EH \perp AF$, Tương tự: $FH \perp AE$, suy ra H là trực tâm $\triangle AEF$

3) Đặt $S_{AKD} = a, S_{BKD} = b, S_{AKB} = c$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{S_{ABD}}{S_{AKD}} + \frac{S_{ABD}}{S_{BKD}} + \frac{S_{ABD}}{S_{AKB}} &= \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \end{aligned}$$

Theo định lý AM-GM ta có: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

Tương tự: $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$; $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$

Suy ra $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} \geq 9$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABD$ là tam giác đều, suy ra trái với giả thiết.

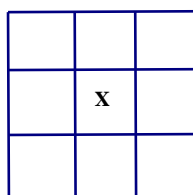
Chuyên đề 13: TOÁN RỜI RẠC

Qua Các Đề Thi HSG Môn Toán Lớp 8

A. Bài toán

Bài 1: Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24

Bài 2: Hình vuông có 3×3 ô (như hình bên), chứa 9 số mà tổng các số ở mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo bằng nhau được gọi là hình vuông kỳ diệu. Chứng minh rằng số ở tâm (x) của một hình vuông kỳ diệu bằng trung bình cộng của hai số còn lại cùng hàng, hoặc cùng cột, hoặc cùng đường chéo.



Bài 3: Trong bảng ô vuông kích thước 8×8 gồm 64 ô vuông đơn vị, người ta đánh dấu 13 ô bất kỳ. Chứng minh rằng với mọi cách đánh dấu luôn có ít nhất 4 ô được đánh dấu không có điểm chung (hai ô có điểm chung là hai ô có chung đỉnh hoặc chung cạnh).

Bài 4: Một giải bóng chuyền có 9 đội bóng tham gia thi đấu vòng tròn 1 lượt (hai đội bất kỳ chỉ thi đấu với nhau 1 trận). Biết đội thứ nhất thắng a_1 trận và thua b_1 trận, đội thứ 2 thắng a_2 trận và thua b_2 trận, ..., đội thứ 9 thắng a_9 trận và thua b_9 trận.

Chứng minh rằng $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_9^2$

Bài 5: Làm thế nào để đem được 6 lít nước từ sông về nếu trong tay chỉ có 2 cái can, một can có dung tích 4 lít, một can có dung tích 9 lít và không can nào có vạch chia dung tích?

Bài 6: Trong một đề thi có 3 bài toán A, B, C . Có 25 học sinh mỗi người đều đã giải được ít nhất một trong 3 bài đó. Biết rằng:

- Trong số thí sinh không giải được bài A thì số thí sinh đã giải được bài B nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được bài C
- Số thí sinh chỉ giải được bài A nhiều hơn số thí sinh giải được bài A và thêm bài khác là 1 người
- Số thí sinh chỉ giải được bài A bằng số thí sinh chỉ giải được bài B cộng với số thí sinh chỉ giải được bài C.

Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được bài B?

Bài 7: Trong lớp học bạn An khi đã hoàn thành bài tập mà giáo viên giao cho thì đã giết thời gian bằng cách liệt kê ra một bảng các số nguyên. Bạn ấy bắt đầu ghi ra một số nguyên nào đó; để có số tiếp theo, An đã cộng hoặc nhân các chữ số của số đứng liền trước. Cứ tiếp tục như thế, và rồi nhận ra rằng các số mình ghi đều là số lẻ. Hỏi có bao nhiêu số đầu tiên An có thể chọn, biết rằng nó không quá 6 chữ số.

Bài 8: Cho hình vuông $ABCD$ và 9 đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông $ABCD$ thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 3 đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Bài 9: Cho hình vuông $ABCD$ có 13 đường thẳng bất kỳ có cùng tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích là $\frac{2}{5}$. Chứng minh rằng có ít nhất 4 đường thẳng trong 13 đường thẳng đó cùng đi qua một điểm.

Bài 10: Cho đa giác đều gồm 1999 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.

B.Lời giải

Bài 1: Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24

Lời giải

Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

Vì $n-1; n; n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3.

Do đó $(n^3 - n) : 8 \quad (2)$

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1); (2) suy ra $(n^3 - n) : 24 \quad (dpcm)$

Bài 2:

Hình vuông có 3×3 ô (như hình bên), chứa 9 số mà tổng các số ở mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo bằng nhau được gọi là hình vuông kỳ diệu. Chứng minh rằng số ở tâm (x) của một hình vuông

a	b	c
d	e	f
g	h	i

kỳ diệu bằng trung bình cộng của hai số còn lại cùng hàng, hoặc cùng cột, hoặc cùng đường chéo.

	x	

Lời giải

Giả sử hình vuông kỳ diệu điền các số $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ như hình vẽ

Đặt $S = a + b + c + d + e + f + g + h + i$

Suy ra $d + e + f = b + e + h = a + e + i = c + e + g = \frac{S}{3} \quad (1)$

Suy ra $(d + e + f) + (b + e + h) + (a + e + i) + (c + e + g) = \frac{4S}{3}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Rightarrow S + 3e = \frac{4S}{3} \Rightarrow e = \frac{S}{9} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $d + f = b + h = a + i = c + g = \frac{2S}{9} = 2e$ (đpcm)

Bài 3:

Trong bảng ô vuông kích thước 8×8 gồm 64 ô vuông đơn vị, người ta đánh dấu 13 ô bất kỳ. Chứng minh rằng với mọi cách đánh dấu luôn có ít nhất 4 ô được đánh dấu không có điểm chung (hai ô có điểm chung là hai ô có chung đỉnh hoặc chung cạnh).

Lời giải

Chi 64 ô vuông của bảng 8×8 thành 4 loại như hình vẽ (các ô cùng loại được đánh số giống nhau).

Khi đó theo cách chia này rõ ràng các ô trong cùng loại sẽ không có điểm chung.

Khi đánh dấu 13 điểm bất kỳ, thì 13 điểm này sẽ thuộc 4 loại ô vừa chia. Vì $13 = 4 \cdot 3 + 1$ nên theo nguyên lý Dirichle sẽ tồn tại ít nhất 4 ô thuộc cùng một loại, khi đó 4 ô này sẽ không có điểm chung. Suy ra đpcm.

	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4

Bài 4:

Một giải bóng chuyên có 9 đội bóng tham gia thi đấu vòng tròn 1 lượt (hai đội bất kỳ chỉ thi đấu với nhau 1 trận). Biết đội thứ nhất thắng a_1 trận và thua b_1 trận, đội thứ 2 thắng a_2 trận và thua b_2 trận, ..., đội thứ 9 thắng a_9 trận và thua b_9 trận.

Chứng minh rằng $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_9^2$

Lời giải

Mỗi đội bóng thi đấu với 8 đội bóng khác và hai đội bất kỳ chỉ gặp nhau 1 trận nên mỗi đội sẽ thi đấu 8 trận $\Rightarrow a_i + b_i = 8$ (với $i = 1; 2; 3; \dots; 8$)

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 = (8 - a_1)^2 + (8 - a_2)^2 + (8 - a_3)^2 + (8 - a_9)^2$$

$$\Leftrightarrow 16(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9) = 576 \quad (1)$$

Mặt khác, tổng số trận thắng của các đội bằng tổng số trận đấu nên :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài 5: Làm thế nào để đem được 6 lít nước từ sông về nếu trong tay chỉ có 2 cái can, một can có dung tích 4 lít, một can có dung tích 9 lít và không can nào có vạch chia dung tích ?

Lời giải

Ký hiệu $(a; b)$ là trạng thái can 4 lít có a lít với $0 \leq a \leq 4$ và can 9 lít có b lít với $0 \leq b \leq 9$. Khi đó việc lấy được 6 lít nước từ sông được diễn tả qua các trạng thái sau:

$$(0; 0) \Rightarrow (0; 9) \Rightarrow (4; 5) \Rightarrow (0; 5) \Rightarrow (4; 1) \Rightarrow (0; 1) \Rightarrow (1; 9) \Rightarrow (4; 6)$$

Bài 6:

Trong một đề thi có 3 bài toán A, B, C . Có 25 học sinh mỗi người đều đã giải được ít nhất một trong 3 bài đó. Biết rằng:

- Trong số thí sinh không giải được bài A thì số thí sinh đã giải được bài B nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được bài C
- Số thí sinh chỉ giải được bài A nhiều hơn số thí sinh giải được bài A và thêm bài khác là 1 người
- Số thí sinh chỉ giải được bài A bằng số thí sinh chỉ giải được bài B cộng với số thí sinh chỉ giải được bài C.

Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được bài B?

Lời giải

Gọi a là số học sinh chỉ giải được bài A, b là số thí sinh chỉ giải được bài B, c là số thí sinh chỉ giải được bài C, d là số thí sinh giải được 2 bài B và C nhưng không giải được bài A. Khi đó số thí sinh giải được bài A và thêm ít nhất một trong hai bài B và C là: $25 - a - b - c - d$

Theo bài ra ta có:

$$b + d = 2(c + d) \quad a = 1 + 25 - a - b - c - d \quad \text{và} \quad a = b + c$$

$$\text{Từ các đẳng thức trên ta có: } \begin{cases} 4b + c = 26 \\ d = b - 2c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ c = 2 \end{cases}$$

Bài 7: Trong lớp học bạn An khi đã hoàn thành bài tập mà giáo viên giao cho thì đã giết thời gian bằng cách liệt kê ra một bảng các số nguyên. Bạn ấy bắt đầu ghi ra một số nguyên nào đó; để có số tiếp theo, An đã cộng hoặc nhân các chữ số của số đứng liền trước. Cứ tiếp tục như thế, và rồi nhận ra rằng các số mình ghi đều là số lẻ. Hỏi có bao nhiêu số đầu tiên An có thể chọn, biết rằng nó không quá 6 chữ số.

Lời giải

Ta gọi số đầu tiên thỏa mãn đề bài là số chấp nhận được. Các chữ số của số chấp nhận đều phải là số lẻ, vì nếu không tích của chúng sẽ chẵn

Như vậy có 5 số chấp nhận được có 1 chữ số

Không thể có số chấp nhận được gồm 2 chữ số vì thế thì tổng hoặc tích các chữ số của chúng sẽ là số chẵn. Tương tự như vậy số chấp nhận được cũng không thể có 4 hoặc 6 chữ số.

Ta xét các số chấp nhận được gồm ba chữ số (tổng và tích các chữ số của các số chấp nhận được gồm ba chữ số này phải là số lẻ, và chúng không thể có hai chữ số, nên và tổng và tích các chữ số không thể vượt quá 9. Như vậy số chấp nhận được gồm 3 chữ số có thể:

Hoặc là gồm 3 chữ số 1,

Hoặc là gồm hai chữ số 1, số còn lại là 1 trong 3 chữ số 3,5,7

Hoặc gồm 1 chữ số 1 và 2 chữ số 3

Do đó có $1 + 9 + 3 = 13$ số chấp nhận được có 3 chữ số.

Tương tự như thế, ta tính được số chấp nhận được gồm 5 chữ số. Tổng các chữ số không vượt quá 45 và là số chấp nhận được nên tích không vượt quá 9, khả năng xảy ra là :

Hoặc gồm 5 chữ số 1

Hoặc gồm 4 chữ số 1 và một chữ số 3

Hoặc gồm 4 chữ số 1 và một chữ số 5

Hoặc gồm ba chữ số 1 và hai chữ số 3

Do đó số các số chấp nhận được gồm 5 chữ số:

$$1 + 5 + 5 + 10 = 21 \text{ số}$$

Vậy số các số thỏa mãn đề bài là: $5 + 13 + 21 = 39$ số

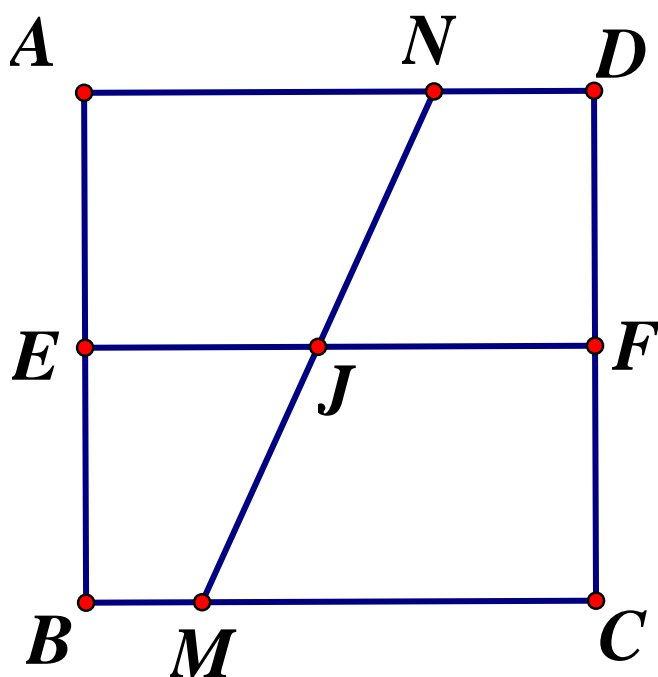
Bài 8: Cho hình vuông $ABCD$ và 9 đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông $ABCD$ thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 3 đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Lời giải

Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông, bởi vì nếu thế chúng chia hình vuông thành một tam giác và ngũ giác (chứ không phải chia hình vuông thành hai tứ giác)

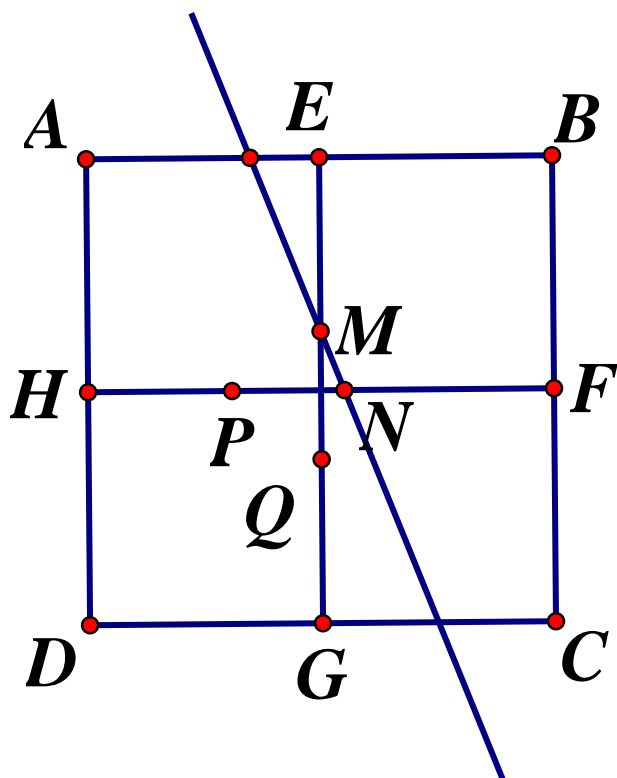
Do đó, mỗi đường thẳng (trong số chín đường thẳng) đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và không đi qua một đỉnh nào của hình vuông cả.

Giả sử một đường thẳng cắt hai cạnh đối BC và AD tại các điểm M và N



Bài 9: Cho hình vuông ABCD có 13 đường thẳng bất kỳ có cùng tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác có tỉ số diện tích là $\frac{2}{5}$. Chứng minh rằng có ít nhất 4 đường thẳng trong 13 đường thẳng đó cùng đi qua một điểm.

Lời giải



Đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác nên đường thẳng phải cắt hai cạnh đối của hình vuông và không đi qua đỉnh hình vuông. E, F, G, H là trung điểm AB, BC, CD, DA

Xét một đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác, cắt HF tại N

Nên tỉ số diện tích hai tứ giác tạo thành bằng $\frac{NF}{NH}$.

Nếu tỉ số diện tích hai tứ giác tạo thành là $\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{NH}{NF} = \frac{2}{5}$. Như vậy N cố định và có 4 điểm vai trò

như điểm N là M, N, P, Q như hình vẽ

Có 13 đường thẳng mỗi đường phải đi qua 1 trong 4 điểm phân biệt M, N, P, Q

$13 = 3.4 + 1$ Theo nguyên tắc Dirichle sẽ tồn tại ít nhất 4 đường thẳng cùng đi qua một điểm trong 4 điểm M, N, P, Q .

Bài 10: Cho đa giác đều gồm 1999 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.

Lời giải

Ta có đa giác 1999 cạnh nên có 1999 đỉnh. Do đó phải tồn tại 2 đỉnh kề nhau là P và Q được sơn bởi cùng một màu – màu đỏ (Theo nguyên lý Dirichle)

Vì đa giác đã cho là đa giác đều có số đỉnh lẻ, nên phải tồn tại một đỉnh nào đó nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PQ . Giả sử đỉnh đó là A .

Nếu A tô màu đỏ thì ta có tam giác APQ là tam giác cân có 3 đỉnh A, P, Q được tô cùng màu đỏ.

Nếu A tô màu xanh, lúc đó gọi B và C là các đỉnh khác của đa giác kề với P và Q .

Nếu cả hai đỉnh B và C được tô màu xanh thì tam giác ABC cân và có 3 đỉnh cùng tô màu xanh.

Nếu ngược lại, một trong hai đỉnh B và C mà tô màu đỏ thì tam giác BPQ hoặc tam giác CPQ là tam giác cân có 3 đỉnh được tô màu đỏ.

Chuyên đề 14: CÁC DẠNG KHÁC

Qua Các Đề Thi HSG Môn Toán Lớp 8

A. Bài toán

Bài 1: Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một ô tô đi từ A đến B. Cùng một lúc ô tô thứ hai đi từ B đến A với vận tốc bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc ô tô thứ nhất. Sau 5 giờ chúng gặp nhau. Hỏi mỗi ô tô đi cả quãng đường AB thì mất bao lâu?

Bài 2: Một khối 8 có $\frac{2}{3}$ số học sinh đội tuyển Toán bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh đội tuyển Anh và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh đội tuyển Văn. Đội tuyển Văn có số học sinh ít hơn tổng số học sinh của hai đội tuyển kia là 38 học sinh. Tính số học sinh của mỗi đội tuyển ?

Bài 3: Trong một đề thi có 3 Câu toán A, B, C. Có 25 học sinh mỗi người đều đã giải được ít nhất một trong 3 Câu đó. Biết rằng:

- Trong số thí sinh không giải được Câu A thì số thí sinh đã giải được Câu B nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được Câu C
- Số thí sinh chỉ giải được Câu A nhiều hơn số thí sinh giải được Câu A và thêm Câu khác là 1 người
- Số thí sinh chỉ giải được Câu A bằng số thí sinh chỉ giải được Câu B cộng với số thí sinh chỉ giải được Câu C.

Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được Câu B?

Bài 4: Để tham gia ngày chạy Olympic vì sức khỏe toàn dân, trường A đã nhận được một số chiếc áo và chia đều cho các lớp. Biết rằng theo thứ tự, lớp thứ nhất nhận được 4 áo và $\frac{1}{9}$ số còn lại, rồi đến lớp thứ n (n = 2; 3; 4...) nhận được 4n áo và $\frac{1}{9}$ số áo còn lại. Cứ như thế các lớp đã nhận hết số áo. Hỏi trường A đã nhận được bao nhiêu chiếc áo ?

Bài 5: Cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2018}$ là 2018 số thực thoả mãn $a_k = \frac{2k+1}{(k^2+k)^2}$, với $k = 1, 2, 3, \dots, 2018$.

Tính $S_{2018} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2017} + a_{2018}$

Bài 6: Rút gọn:

- a) $M = 90 \cdot 10^k - 10^{k+2} + 10^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$;
- b) $N = (20^2 + 18^2 + \dots + 2^2) - (19^2 + 17^2 + \dots + 1^2)$.

Bài 7: a) So sánh hai số $A = 3^{32} - 1$ và $B = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$

b) $C = \frac{2019-2018}{2019+2018}$ và $D = \frac{2019^2-2018^2}{2019^2+2018^2}$

Bài 8: Thực hiện phép tính:

$$a) A = \frac{1+2.3^6}{2^3.3^6 - 2^3.5^3} - \frac{1+3^6}{8(9^3-125)} - \frac{5^3}{18^3-10^3}.$$

$$b) B = \frac{x^3y + xy^3 + xy}{x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 + x + y}$$

Bài 9: a) Xác định $n \in \mathbb{N}$ để $A = \frac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên;

$$b) \text{ Tính tổng } S(n) = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \dots + \frac{1}{(3n-1).(3n+2)}$$

Bài 10: a) Tìm số tự nhiên n khác 0, biết: $\left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{2017}{6045}.$

$$b) \text{ Tính: } M = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right)$$

Bài 11: So sánh A và B , biết: $A = (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2017}$; $B = (2017^{2017} + 2016^{2017})^{2016}.$

Bài 12: Tìm một số có 8 chữ số: $\overline{a_1a_2\dots a_8}$ thỏa mãn 2 điều kiện a và b sau:

$$a) \overline{a_1a_2a_3} = (\overline{a_7a_8})^2 \quad b) \overline{a_4a_5a_6a_7a_8} = (\overline{a_7a_8})^3$$

Bài 13: Một số gồm 4 chữ số giống nhau chia cho một số gồm 3 chữ số giống nhau thì được thương là 16 và số dư là một số r nào đó

Nếu số bị chia và số chia đều bớt đi một chữ số thì thương không đổi và số dư giảm bớt 200.

Tìm các số đó

Bài 14: Cho $a + b = 2$ và $a^2 + b^2 = 20$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^3 + b^3$

Bài 15: Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Tính giá trị của biểu thức $N = a^4 + b^4 + c^4$

Bài 16: Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây:

$$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q \text{ biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên}$$

(những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)

Bài 17: Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

Bài 18:

$$a) \text{ Chứng minh : } (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$$

$$b) \text{ Cho: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \text{ và } x + y + z = xyz \text{ (} x, y, z \neq 0 \text{)}$$

Chứng minh $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 2$

Bài 19: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$

Bài 20: Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Bài 21:

Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

Bài 22: Chứng minh rằng nếu $\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$ với $x \neq y; xyz \neq 0; yz \neq 1; xz \neq 1$

Thì $xy + xz + yz = xyz(x + y + z)$

Bài 23: Cho $a > b > 0$ thỏa mãn $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a-b}{a+b}$

Bài 24: Rút gọn biểu thức: $A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 999^2 - 1000^2$

Bài 25: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản

Bài 26: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Bài 27: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính: $a^{2011} + b^{2011}$

Bài 28: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Bài 29: Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $4m$ thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp $8m$ dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp $12m$ dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc $2m / \text{giây}$. Tính khoảng cách từ A đến B.

Bài 30: Tìm giá trị của m để cho phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm số gấp ba nghiệm số của phương trình: $(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 31: Cho $a < b < c < d$ và $x = (a+b)(c+d)$, $y = (a+c)(b+d)$, $z = (a+d)(b+c)$.

Sắp xếp theo thứ tự giảm dần của x, y, z

Bài 32: Thực hiện các phép tính:

a)
$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

b)
$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{49.51}$$

Bài 33: Thực hiện phép tính

a) $9^8 \cdot 2^8 - (18^4 - 1)(18^4 + 1)$

b) $(2x - 1)^2 + 2(2x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2$

c) $\left(2x + 1 - \frac{1}{1-2x}\right) : \left(2 - \frac{4x}{2x-1}\right)$

Bài 34: Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình

Một tổ sản xuất lập kế hoạch sản xuất, mỗi ngày sản xuất được 50 sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ đó sản xuất được 57 sản phẩm. Do đó đã hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và thực hiện trong bao nhiêu ngày

Bài 35: Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó

Bài 36: Khi xây dựng bể bơi, để thay nước thường xuyên cho bể người ta đặt một vòi nước chảy vào bể và một vòi chảy ra ở lưng chừng bể. Khi bể cạn, nếu mở cả hai vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước. Còn nếu đóng vòi chảy ra và mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ 30 phút thì đầy bể. Biết vòi chảy vào mạnh hơn gấp 2 lần vòi chảy ra.

a. Tính thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra.

b. Nếu chiều cao của bể là 2m thì khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là bao nhiêu?

Bài 37: Tìm x, y biết :

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=0 \text{ và } (x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=16$$

Bài 38: a) Tìm số có hai chữ số mà bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

b) Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng nếu cộng ba tích, mỗi tích của hai trong ba số đó thì được 26.

c) Tìm bốn số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tích của chúng bằng 120

Bài 39: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh tam giác đều.

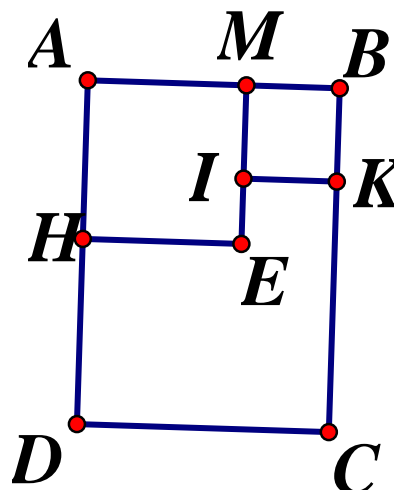
Bài 40: Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây:

$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$ biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên (những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)

Bài 41: Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Một trường học được xây dựng trên khu đất hình chữ nhật ABCD có

$AB = 50m$, $BC = 200m$. Ở phía chiều rộng AB tiếp giáp đường chính, người ra sử dụng hai lô đất hình vuông $AMEH$, $BMIK$ để xây dựng phòng làm việc và nhà để xe. Diện tích còn lại để xây phòng học và các công trình khác (như hình vẽ). Tính diện tích lớn nhất còn lại để xây phòng học và các công trình khác.



B.Lời giải

Bài 1: Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một ô tô đi từ A đến B. Cùng một lúc ô tô thứ hai đi từ B đến A với vận tốc bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc ô tô thứ nhất. Sau 5 giờ chúng gặp nhau. Hỏi mỗi ô tô đi cả quãng đường AB thì mất bao lâu?

Lời giải

- Chọn ẩn và đặt điều kiện đúng
- Biểu thị được mỗi đại lượng theo ẩn và số liệu đã biết.
- Lập được phương trình.
- Giải đúng phương trình.
- Đối chiếu và trả lời đúng thời gian của một ô tô – Lập luận, tính và trả lời đúng thời gian của ô tô còn lại.

Bài 2:

Một khối 8 có $\frac{2}{3}$ số học sinh đội tuyển Toán bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh đội tuyển Anh và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh đội tuyển Văn. Đội tuyển Văn có số học sinh ít hơn tổng số học sinh của hai đội tuyển kia là 38 học sinh. Tính số học sinh của mỗi đội tuyển ?

Lời giải

Gọi số học sinh đội tuyển Toán, Anh, Văn thứ tự là x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}$)

$$\text{Ta có: } \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{(x+y)-z}{(18+16)-15} = \frac{38}{19} = 2$$

Tính đúng $x = 36; y = 32; z = 30$ và kết luận

Bài 3:

Trong một đề thi có 3 Câu toán A, B, C. Có 25 học sinh mỗi người đều đã giải được ít nhất một trong 3 Câu đó. Biết rằng:

- Trong số thí sinh không giải được Câu A thì số thí sinh đã giải được Câu B nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được Câu C
- Số thí sinh chỉ giải được Câu A nhiều hơn số thí sinh giải được Câu A và thêm Câu khác là 1 người
- Số thí sinh chỉ giải được Câu A bằng số thí sinh chỉ giải được Câu B cộng với số thí sinh chỉ giải được Câu C.

Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được Câu B?

Lời giải

Gọi a là số học sinh chỉ giải được Câu A, b là số thí sinh chỉ giải được Câu B, c là số thí sinh chỉ giải được Câu C, d là số thí sinh giải được 2 Câu B và C nhưng không giải được Câu A. Khi đó số thí sinh giải được Câu A và thêm ít nhất một trong hai Câu B và C là : $25 - a - b - c - d$

Theo Câu ra ta có:

$$b + d = 2(c + d) \quad a = 1 + 25 - a - b - c - d \quad \text{và} \quad a = b + c$$

$$\text{Từ các đẳng thức trên ta có: } \begin{cases} 4b + c = 26 \\ d = b - 2c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy số thí sinh chỉ giải được Câu B là 6 thí sinh.

Bài 4: Để tham gia ngày chạy Olympic vì sức khỏe toàn dân, trường A đã nhận được một số chiếc áo và chia đều cho các lớp. Biết rằng theo thứ tự, lớp thứ nhất nhận được 4 áo và $\frac{1}{9}$ số còn lại, rồi

đến lớp thứ n ($n = 2; 3; 4; \dots$) nhận được $4n$ áo và $\frac{1}{9}$ số áo còn lại. Cứ như thế các lớp đã nhận hết số áo.

Hỏi trường A đã nhận được bao nhiêu chiếc áo ?

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Gọi số lớp của trường A được nhận áo là

Vì lớp thứ x nhận áo cuối cùng và số áo được phát hết nên số áo lớp thứ x nhận được là $4x$.

Lớp thứ $x - 1$ nhận số áo là :

$$4(x-1) + \frac{1}{8} \cdot 4x = 4,5x - 4$$

Vì số áo các lớp nhận được như nhau nên ta có phương trình:

$$4,5x - 4 = 4x \Leftrightarrow x = 8$$

Suy ra số áo mỗi lớp nhận được: $4 \cdot 8 = 32$ (áo)

Suy ra số áo trường A nhận được: $32 \cdot 8 = 256$ (áo)

Bài 5: Cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2018}$ là 2018 số thực thỏa mãn $a_k = \frac{2k+1}{(k^2+k)^2}$, với $k = 1, 2, 3, \dots, 2018$.

Tính $S_{2018} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2017} + a_{2018}$

Lời giải

$$\text{Ta có : } a_k = \frac{2k+1}{(k^2+k)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

Do đó, $S_{2018} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2017} + a_{2018}$

$$= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2018^2} - \frac{1}{2019^2} \right) = \frac{2019^2 - 1}{2019^2}$$

Bài 6: Rút gọn:

a) $M = 90 \cdot 10^k - 10^{k+2} + 10^{k+1}, k \in N;$

b) $N = (20^2 + 18^2 + \dots + 2^2) - (19^2 + 17^2 + \dots + 1^2).$

Lời giải

a) $M = 90 \cdot 10^k - 10^{k+2} + 10^{k+1}, k \in N;$

$$= 90 \cdot 10^k - 100 \cdot 10^k + 10 \cdot 10^k = 0$$

b) $N = (20^2 + 18^2 + \dots + 2^2) - (19^2 + 17^2 + \dots + 1^2)$

$$= (20^2 - 19^2) + (18^2 - 17^2) + \dots + (2^2 - 1^2)$$

$$= (20+19)(20-19) + (18+17)(18-17) + \dots + (2+1)(2-1)$$

$$= 20 + 19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1 = 210$$

Bài 7: a) So sánh hai số $A = 3^{32} - 1$ và $B = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$

b) $C = \frac{2019-2018}{2019+2018}$ và $D = \frac{2019^2-2018^2}{2019^2+2018^2}$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

a) Ta có: $B = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$

$$\Leftrightarrow B.(3-1) = (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = (3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = (3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = (3^8-1)(3^8+1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = (3^{16}-1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = 3^{32} - 1 = A$$

Vậy, $A = 2.B$

b) C/m BĐT phụ: $\frac{x-y}{x+y} = \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} < \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ với $x > y > 0$

Xem $x = 2019$ và $y = 2018$ suy ra $C < D$

Bài 8: Thực hiện phép tính:

$$a) A = \frac{1+2.3^6}{2^3.3^6-2^3.5^3} - \frac{1+3^6}{8(9^3-125)} - \frac{5^3}{18^3-10^3}.$$

$$b) B = \frac{x^3y + xy^3 + xy}{x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 + x + y}$$

Lời giải

Thực hiện phép tính:

$$\begin{aligned} a) A &= \frac{1+2.3^6}{2^3.3^6-2^3.5^3} - \frac{1+3^6}{8(9^3-125)} - \frac{5^3}{18^3-10^3} = \frac{1+2.3^6}{2^3(3^6-5^3)} - \frac{1+3^6}{2^3(3^6-5^3)} - \frac{5^3}{2^3(3^6-5^3)} \\ &= \frac{1+2.3^6-1-3^6-5^3}{2^3(3^6-5^3)} = \frac{3^6-5^3}{2^3(3^6-5^3)} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) B &= \frac{x^3y + xy^3 + xy}{x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 + x + y} \\ &= \frac{xy(x^2 + y^2 + 1)}{(x+y)(x^2 + y^2 + 1)} = \frac{xy}{x+y} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy, } B = \frac{xy}{x+y}, x \neq -y$$

Bài 9: a) Xác định $n \in \mathbb{N}$ để $A = \frac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên;

b) Tính tổng $S(n) = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \dots + \frac{1}{(3n-1).(3n+2)}$

Lời giải

a) Xác định $n \in N$ để $A = \frac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên

Để $A = \frac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên

$$\Rightarrow (5n-11):(4n-13) \Rightarrow 4(5n-11):(4n-13)$$

$$\Rightarrow [5(4n-13)+21]:(4n-13) \Rightarrow 21:(4n-13)$$

$$\Rightarrow (4n-13) \in U(21) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21\}$$

Lập bảng :

$4n-13$	-21	-7	-3	-1	1	3	7	21
$4n$	-8	6	10	12	14	16	20	34
n	-2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	5	$\frac{17}{2}$

Vì $n \in N$ nên chọn $n \in \{3; 4; 5\}$

Thử lại:

+ Với $n = 3$, ta có: $A = \frac{5.3-11}{4.3-13} = -4 \notin N$ (Loại)

+ Với $n = 4$, ta có: $A = \frac{5.4-11}{4.4-13} = 3 \in N$ (Nhận)

+ Với $n = 5$, ta có: $A = \frac{5.5-11}{4.5-13} = 2 \in N$ (Nhận)

KL : $n \in \{4; 5\}$

b) Tính tổng $S(n) = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \dots + \frac{1}{(3n-1).(3n+2)}$

Ta có: $S(n) = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \dots + \frac{1}{(3n-1).(3n+2)} = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \dots + \frac{3}{(3n-1).(3n+2)} \right]$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{n}{2(3n+2)}$$

Bài 10: a) Tìm số tự nhiên n khác 0, biết: $\left(1 - \frac{2}{2.3}\right) \left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{2017}{6045}$.

b) Tính: $M = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right)$

Lời giải

a) Tìm số tự nhiên n khác 0, biết: $\left(1 - \frac{2}{2.3}\right) \left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{2017}{6045}$.

Ta có: $\left(1 - \frac{2}{2.3}\right) \left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{4}{2.3} \cdot \frac{10}{3.4} \cdot \frac{18}{4.5} \dots \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)}$
 $= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \dots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1.2.3.4 \dots (n-1)}{2.3.4 \dots n} \cdot \frac{4.5.6 \dots (n+2)}{3.4.5 \dots (n+1)} = \frac{n+2}{3n}$

Khi đó, ta có: $\frac{n+2}{3n} = \frac{2017}{6045} \Leftrightarrow n = 2015$

Vậy, $n = 2015$.

b) Ta có: $M = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right)$
 $= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{1.3}\right) \left(\frac{9}{2.4}\right) \left(\frac{16}{3.5}\right) \dots \left(\frac{2017.2019+1}{2017.2019}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2.2}{1.3}\right) \left(\frac{3.3}{2.4}\right) \left(\frac{4.4}{3.5}\right) \dots \left(\frac{2018.2018}{2017.2019}\right)$
 $= \frac{2.3 \dots 2018}{2.3.4 \dots 2017} \cdot \frac{2.3 \dots 2018}{2.3.4 \dots 2019} = 2018 \cdot \frac{1}{2019} = \frac{2018}{2019}$

Vậy, $M = \frac{2018}{2019}$.

Bài 11: So sánh A và B , biết: $A = (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2017}$; $B = (2017^{2017} + 2016^{2017})^{2016}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2017} = (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2016} \cdot (2017^{2016} + 2016^{2016}) \\ &> (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2016} \cdot 2017^{2016} \\ &= \left[(2017^{2016} + 2016^{2016}) \cdot 2017 \right]^{2016} \\ &> (2017^{2017} + 2016^{2016} \cdot 2016)^{2016} \\ &= (2017^{2017} + 2016^{2017})^{2016} = B \end{aligned}$$

Bài 12: Tìm một số có 8 chữ số: $\overline{a_1 a_2 \dots a_8}$ thỏa mãn 2 điều kiện a và b sau:

a) $\overline{a_1 a_2 a_3} = (\overline{a_7 a_8})^2$

b) $\overline{a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = (\overline{a_7 a_8})^3$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta có: $\overline{a_1a_2a_3} = (\overline{a_7a_8})^2$ (1) $\overline{a_4a_5a_6a_7a_8} = (\overline{a_7a_8})^3$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 22 \leq \overline{a_7a_8} \leq 31$

$$\Rightarrow (\overline{a_7a_8})^3 = \overline{a_4a_5a_600} + \overline{a_7a_8} \Leftrightarrow (\overline{a_7a_8})^3 - \overline{a_7a_8} = \overline{a_4a_5a_600}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{a_7a_8} - 1)\overline{a_7a_8}(\overline{a_7a_8} + 1) = 4.25.\overline{a_4a_5a_6}$$

Do $(\overline{a_7a_8} - 1); \overline{a_7a_8}; (\overline{a_7a_8} + 1)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có 3 khả năng:

a) $\overline{a_7a_8} = 24 \Rightarrow \overline{a_1a_2a_3\dots\dots a_8}$ là số 57613824

b) $\overline{a_7a_8} - 1 = 24 \Rightarrow \overline{a_7a_8} = 25 \Rightarrow$ số đó là 62515625

c) $\overline{a_7a_8} = 26 \Rightarrow$ không thỏa mãn

Bài 13: Một số gồm 4 chữ số giống nhau chia cho một số gồm 3 chữ số giống nhau thì được thương là 16 và số dư là một số r nào đó

Nếu số bị chia và số chia đều bớt đi một chữ số thì thương không đổi và số dư giảm bớt 200.

Tìm các số đó

Lời giải

Ta có: $\overline{aaaa} = 16\overline{bbb} + r$ $\overline{aaa} = 16\overline{bb} + (r - 200)$

Với $200 \leq r < \overline{bbb}$

Trừ các đẳng thức ta có:

$$1000a = 1600b + 200 \Leftrightarrow 5a = 8b + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$$

Ta có các số 5555 và 333 thỏa mãn.

Bài 14: Cho $a + b = 2$ và $a^2 + b^2 = 20$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^3 + b^3$

Lời giải

$$\text{Từ } a^2 + b^2 = 20 \Rightarrow (a + b)^2 - 2ab = 20 \Rightarrow ab = -8$$

$$M = a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 2^3 - 3.(-8).2 = 56$$

Bài 15: Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Tính giá trị của biểu thức $N = a^4 + b^4 + c^4$

Lời giải

$$\text{Từ } a^2 + b^2 + c^2 = 14 \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 196$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta lại có: $a + b + c = 0 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 0$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = -7$$

$$\Rightarrow (ab + bc + ca)^2 = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 49$$

$$\text{Do đó: } N = a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 196 - 2.49 = 98$$

Bài 16: Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây:

$$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q \text{ biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên}$$

(những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)

Lời giải

$$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$$

$$\text{Vì } q \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} q = 4 \\ q = 9 \end{cases} \Rightarrow a, d \text{ phải là những số thuộc } \{1; 4; 5; 6; 9\}, a, d \neq 0$$

$$\text{Do } \overline{abcd} = \overline{dcba} \times q \text{ nên } d < 3 \Rightarrow d = 1$$

Giả sử $q = 4$ khi đó $\overline{1cba}.4 = \overline{abc1}$ (vô lý) vì $\overline{1cba}.4$ phải là một số chẵn nên $q = 9$

Với $q = 9$ ta có: $\overline{1cba} \times 9 = \overline{abc1}$ suy ra $a = 9, c < 2$ vì tích $\overline{1cba} \times 9$ là số có 4 chữ số nên ta lại có $c \neq d$ tức là $c \neq 1 \Rightarrow c = 0$

Ta thấy $\overline{abcd} = \overline{9b01} = \overline{10b9} \times 9$ vậy $\overline{9b01}$ là số chia hết cho 9 nên $b = 8$

Tóm lại ta có: $9801 : 1089 = 9$

Bài 17: Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

Lời giải

$$A = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18$$

Bài 18:

$$\text{a) Chứng minh: } (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$$

b) Cho: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và $x + y + z = xyz$ ($x, y, z \neq 0$)

Chứng minh $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 2$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} VT &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd \\ &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = VP \end{aligned}$$

b) Bình phương 2 vế ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2z}{xyz} + \frac{2y}{xyz} + \frac{2x}{xyz} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2(x+y+z)}{xyz} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2xyz}{xyz} &= 4 \quad (x+y+z=xyz) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} &= 2 \quad (đpcm) \end{aligned}$$

Bài 19: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$

Lời giải

Ta có: $\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\Rightarrow B = \dots = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

Bài 20: Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Lời giải

Ta có $a + b + c = 0$ thì :

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 = -c^3 - 3ab(-c) + c^3 = 3abc$$

$$(\text{vì } a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c)$$

$$\text{Theo giả thiết } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} \\ &= xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3 \end{aligned}$$

Bài 21:

Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức : } P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$$

Lời giải

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2}{b^2 + 2ac} = \frac{b^2}{(b-a)(b-c)}; \quad \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \\ &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1 \end{aligned}$$

Bài 22: Chứng minh rằng nếu $\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$ với $x \neq y; xyz \neq 0; yz \neq 1; xz \neq 1$

$$\text{Thì } xy + xz + yz = xyz(x + y + z)$$

Lời giải

$$\text{Từ gt } \Rightarrow (x^2 - yz)y(1 - xz) = x(1 - yz)(y^2 - xz)$$

$$\Leftrightarrow x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z^2 = xy^2 - x^2z - xy^3z + x^2yz^2$$

$$\Leftrightarrow x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z^2 - xy^2 + x^2z + xy^3z - x^2yz^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x - y) + xyz(yz + y^2 - xz - x^2) + z(x^2 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x - y) + xyz(x - y)(x + y + z) + z(x - y)(x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)[xy - xyz(x + y + z) + xz + yz] = 0$$

Do $x - y \neq 0$ nên $xy + xz + yz - xyz(x + y + z) = 0$

Hay $xy + xz + yz = xyz(x + y + z)$ (đpcm)

Bài 23: Cho $a > b > 0$ thỏa mãn $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a-b}{a+b}$

Lời giải

$$\text{Xét } P^2 = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{3a^2 + 3b^2 - 6ab}{3a^2 + 3b^2 + 6ab} = \frac{4ab}{16ab} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vì } a > b > 0 \Rightarrow P > 0 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

Bài 24: Rút gọn biểu thức: $A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 999^2 - 1000^2$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \dots + (999^2 - 1000^2) \\ &= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \dots + (999-1000)(999+1000) \\ &= -(1+2+3+4+\dots+999+1000) \\ &= -500.1001 = -500500 \end{aligned}$$

Bài 25: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản

Lời giải

Gọi $d = \text{UCLN}(21n+4; 14n+3)$ với $d \in \mathbb{N}, d \geq 1$

Ta có: $21n+4 \vdots d$ và $14n+3 \vdots d$

Khi đó $2(21n+4) \vdots d$ và $3(14n+3) \vdots d$

Hay $42n+8 \vdots d$ và $42n+9 \vdots d$

$$\Rightarrow (42n+9 - 42n-8) \vdots d \text{ hay } 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n

Bài 26: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Lời giải

Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$, rút gọn suy ra đpcm

Bài 27: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính: $a^{2011} + b^{2011}$

Lời giải

$$(a^{2001} + b^{2001})(a+b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a+1) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } a=1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b=1(tm) \\ b=0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vì } b=1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a=1(tm) \\ a=0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a=1; b=1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

Bài 28: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0$$

$$\Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\frac{cxy + bxz + ayz}{abc} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (đpcm)}$$

Bài 29: Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $4m$ thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp $8m$ dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp $12m$ dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc $2m$ / giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

Lời giải

Gọi x là số lần đi ($x \in \mathbb{N}, x > 0$), số lần dừng là $x - 1$

Thời gian đi

$$\begin{aligned} \frac{4}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} + \dots + \frac{4x}{2} &= 2 + 4 + 6 + \dots + 2x \\ &= 2(1 + 2 + 3 + \dots + x) = x(x + 1) \end{aligned}$$

Thời gian dừng:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (x - 1) = \frac{(x - 1 + 1)(x - 1)}{2} = \frac{x(x - 1)}{2}$$

Lập được phương trình

$$\frac{x(x - 1)}{2} + x(x + 1) = 155 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 310 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (tm)} \\ x = \frac{-31}{3} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Khoảng cách AB là $10 \cdot (10 + 1) \cdot 2 = 220(m)$

Bài 30: Tìm giá trị của m để cho phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm số gấp ba nghiệm số của phương trình: $(x + 1)(x - 1) - (x + 2)^2 = 3$

Lời giải

$$(x + 1)(x - 1) - (x + 2)^2 = 3 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 - x^2 - 4x - 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow -4x = 8 \Leftrightarrow x = -2$$

Để phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm gấp ba lần nghiệm của phương trình

$$(x + 1)(x - 1) - (x + 2)^2 = 3 \text{ hay } x = -6$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta có:

$$6.(-6) - 5m = 3 + 3m.(-6)$$

$$\Leftrightarrow -5m + 18m = 39 \Leftrightarrow 13m = 39 \Leftrightarrow m = 3$$

Vậy $m = 3$

Bài 31: Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm 5 km/h thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó.

Lời giải

Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(\text{km})$ ($x > 0$)

$$\text{Vận tốc dự định của người đi xe gắn máy là: } \frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10} (\text{km/h}) \quad 3\text{h}20' = 3\frac{1}{3}(\text{h})$$

$$\text{Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên } 5\text{ km/h} \text{ là: } \frac{3x}{10} + 5 (\text{km/h})$$

$$\text{Theo đề bài ta có phương trình: } \left(\frac{3x}{10} + 5 \right) \cdot 3 = x \Leftrightarrow x = 150 (\text{km})$$

Vậy khoảng cách giữa A và B là 150 km

$$\text{Vận tốc dự định là: } \frac{3 \cdot 150}{10} = 45 (\text{km/h})$$

Bài 32: Cho $a < b < c < d$ và $x = (a+b)(c+d)$, $y = (a+c)(b+d)$, $z = (a+d)(b+c)$.

Sắp xếp theo thứ tự giảm dần của x, y, z

Lời giải

$$\text{Xét hiệu } x - y = (a+b)(c+d) - (a+c)(b+d) = (d-a)(b-c)$$

$$\text{Vì } b > a, b < c \text{ nên } (d-a)(b-c) < 0. \text{ Suy ra } x < y \quad (1)$$

$$\text{Xét hiệu } y - z = (a+c)(b+d) - (a+d)(b+c) = (a-b)(d-c)$$

$$\text{Vì } b > a, c < d \text{ nên } (a-b)(d-c) < 0. \text{ Suy ra } y < z \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta sắp xếp theo thứ tự giảm dần là $z > y > x$

Bài 33: Thực hiện các phép tính:

$$\text{a) } \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$\text{b) } \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{49.51}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

$$a) \quad A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$= \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$= \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$= \frac{16}{1-x^{16}}$$

$$b) B = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{49.51}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{51}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{51}\right) = \frac{25}{51}$$

Bài 34: Thực hiện phép tính

$$a) 9^8 \cdot 2^8 - (18^4 - 1)(18^4 + 1)$$

$$b) (2x - 1)^2 + 2(2x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2$$

$$c) \left(2x + 1 - \frac{1}{1-2x}\right) : \left(2 - \frac{4x}{2x-1}\right)$$

Lời giải

$$a/ = 18^8 - (18^8 - 1)$$

$$= 18^8 - 18^8 + 1 = 1$$

$$b/ = [(2x-1) + (x+1)]^2$$

$$= (3x)^2 = 9x^2$$

$$c/ = \left(2x + 1 + \frac{1}{2x-1}\right) : \left(2 - \frac{4x}{2x-1}\right) = \frac{4x^2 - 1 + 1}{2x-1} : \frac{4x - 2 - 4x}{2x-1}$$

$$= \frac{4x^2}{2x-1} : \frac{-2}{2x-1} = -2x^2$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 35: Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình

Một tổ sản xuất lập kế hoạch sản xuất, mỗi ngày sản xuất được 50 sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ đó sản xuất được 57 sản phẩm. Do đó đã hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và thực hiện trong bao nhiêu ngày

Lời giải

Gọi số ngày tổ dự định sản xuất là : x ngày ($x \in \mathbb{N}^*, x > 1$)

Vậy số ngày tổ đã thực hiện $x - 1$ (ngày)

Số sản phẩm làm theo kế hoạch là : $50x$ (sản phẩm)

Số sản phẩm thực hiện là : $57.(x - 1)$ (sản phẩm)

Theo đề bài ta có phương trình : $57(x - 1) - 50x = 13$

$$\Leftrightarrow 57x - 57 - 50x = 13 \Leftrightarrow 7x = 70 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số ngày dự định sản xuất là 10 ngày

Số sản phẩm phải làm theo kế hoạch là : $50.10 = 500$ (sản phẩm)

Bài 36: Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó

Lời giải

Gọi tử số của phân số cần tìm là x thì mẫu số của phân số cần tìm là $x + 11$. Phân số cần tìm là

$$\frac{x}{x+11} \quad (x \neq -11)$$

Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số 4 đơn vị ta được phân số $\frac{x-7}{x+15} \quad (x \neq -15)$

Theo bài ta có phương trình $\frac{x}{x+11} = \frac{x+15}{x-7} \Leftrightarrow x = -5 \text{ (t/m)}$

Vậy phân số cần tìm là $-\frac{5}{6}$

Bài 37: Khi xây dựng bể bơi, để thay nước thường xuyên cho bể người ta đặt một vòi nước chảy vào bể và một vòi chảy ra ở lưng chừng bể. Khi bể cạn, nếu mở cả hai vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước. Còn nếu đóng vòi chảy ra và mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ 30 phút thì đầy bể. Biết vòi chảy vào mạnh hơn gấp 2 lần vòi chảy ra.

a. Tính thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra.

b. Nếu chiều cao của bể là 2m thì khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là bao nhiêu?

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

a) Gọi thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mực nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là x giờ

Trong 1 giờ vòi chảy vào bể được $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ bể

Trong 1 giờ vòi chảy ra được $\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$ bể

Nếu mở cả hai vòi, lượng nước chảy vào bể trong một giờ được $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Trong x giờ đầu, chỉ có vòi chảy vào làm việc nên lượng nước chảy vào bể là $\frac{2}{3}x$ bể

Trong 2 giờ 42 phút – x giờ (tức là 2,7 giờ - x giờ) còn lại, cả hai vòi làm việc nên lượng nước chảy vào bể là $\frac{1}{3}(2,7 - x)$

Ta có phương trình: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(2,7 - x) = 1$

Do đó $x = 0,3$. Thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mực nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là 0,3 giờ

b) Theo đề bài, nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 1,5 giờ thì mực nước cao 2m. Vậy nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 0,3 giờ thì mực nước cao $\frac{2m \cdot 0,3}{1,5} = 0,4m$

Khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là 0,4 m

Bài 38: Tìm x, y biết :

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=0 \text{ và } (x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=16$$

Lời giải

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=0 \text{ và } (x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=16$$

Ta có: $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=0 \Leftrightarrow x^3+8y^3=0(1)$

và $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=16 \Leftrightarrow x^3-8y^3=16(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $2x^3=16 \Leftrightarrow x=2$.

Thay $x=2$ vào (1) suy ra $y=-1$.

Vậy, $x=2$ và $y=-1$.

Bài 39: a) Tìm số có hai chữ số mà bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

b) Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng nếu cộng ba tích, mỗi tích của hai trong ba số đó thì được 26.

c) Tìm bốn số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tích của chúng bằng 120

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

a) Số cần tìm có dạng \overline{ab} , với $a, b \in N; 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$

Theo đề bài ta có: $\overline{ab}^2 = (a+b)^3 \Leftrightarrow (10a+b)^2 = (a+b)^3 \quad (1)$

Hệ thức (1) chứng tỏ \overline{ab} phải là một số lập phương và $(a+b)$ phải là một số chính phương.

Do $10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$

+Nếu $\overline{ab} = 27 \Leftrightarrow a+b = 9 = 3^2$ (chính phương)

+Nếu $\overline{ab} = 64 \Leftrightarrow a+b = 10$ (không chính phương nên loại)

Vậy, số cần tìm là $\overline{ab} = 27$.

b) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $(x-1), x, (x+1)$ (ĐK : $x \geq 1, x \in N$)

Ta có : $(x-1)x + x(x+1) + (x-1)(x+1) = 26 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 26 \Leftrightarrow x = 3$ (Vì $x \geq 1, x \in N$)

Vậy, ba số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 2, 3, 4.

c) Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là $(x-1), x, (x+1), (x+2)$ (ĐK : $x \geq 2, x \in Z$)

Ta có : $(x-1)x(x+1)(x+2) = 120 \Leftrightarrow [x(x+1)][(x-1)(x+2)] = 120$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x)[(x^2 + x) - 2] = 120 \Leftrightarrow (x^2 + x) - 2(x^2 + x) + 1 = 121$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x - 1)^2 = 11^2$$

Vì $x \geq 2, x \in Z$ nên $x^2 + x - 1 = 11 \quad (x-3)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 3$ (Vì $x+4 > 0$)

Vậy, bốn số nguyên dương liên tiếp phải tìm là 2, 3, 4, 5

Bài 40: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh tam giác đều

Lời giải

$$a) \text{ C/m: } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$+) \text{ Từ giả thiết suy ra : } (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \quad (a+b+c > 0)$$

$$\text{Biến đổi được kết quả: } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c \Rightarrow \text{Tam giác đó là đều (đpcm)}$$

Bài 41: Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây:

$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$ biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên (những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)

Lời giải

$$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$$

$$\text{Vì } q \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} q = 4 \\ q = 9 \end{cases} \Rightarrow a, d \text{ phải là những số thuộc } \{1; 4; 5; 6; 9\}, a, d \neq 0$$

$$\text{Do } \overline{abcd} = \overline{dcba} \times q \text{ nên } d < 3 \Rightarrow d = 1$$

Giả sử $q = 4$ khi đó $\overline{1cba} \cdot 4 = \overline{abc1}$ (vô lý) vì $\overline{1cba} \cdot 4$ phải là một số chẵn nên $q = 9$

Với $q = 9$ ta có: $\overline{1cba} \times 9 = \overline{abc1}$ suy ra $a = 9, c < 2$ vì tích $\overline{1cba} \times 9$ là số có 4 chữ số nên ta lại có $c \neq d$ tức là $c \neq 1 \Rightarrow c = 0$

Ta thấy $\overline{abcd} = \overline{9b01} = \overline{10b9} \times 9$ vậy $\overline{9b01}$ là số chia hết cho 9 nên $b = 8$

Tóm lại ta có: $9801 : 1089 = 9$

Bài 42: Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Lời giải

$$a^3 - 3ab^2 = 5 \Rightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25$$

$$b^3 - 3a^2b = 10 \Rightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100$$

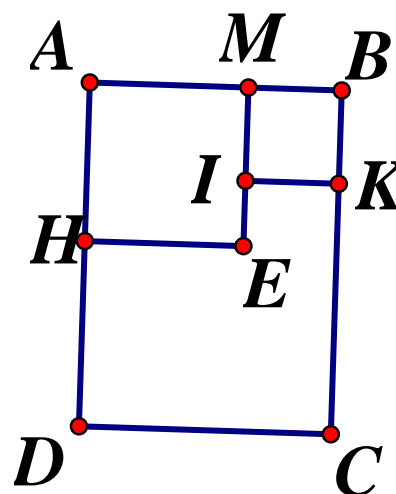
$$\Rightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 125$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)^3 = 5^3 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2018} = \frac{5}{2018}$$

Một trường học được xây dựng trên khu đất hình chữ nhật ABCD có

$AB = 50m, BC = 200m$. Ở phía chiều rộng

AB tiếp giáp đường chính, người ra sử dụng hai lô đất hình vuông AMEH, BMIK để xây dựng phòng làm việc và nhà để xe. Diện tích còn lại để xây phòng học và các công trình khác (như hình vẽ). Tính diện tích lớn nhất còn lại để xây phòng học và các công trình khác.



Lời giải

$$\text{Đặt : } AM = a, MB = b \Rightarrow (a + b)^2 = 50^2$$

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 = 50^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 1250$$

$$\text{Diện tích nhỏ nhất } S_{AMEH} + S_{BIMK} = 1250(m^2)$$

$$\text{Diện tích lớn nhất còn lại: } 10000 - 1250 = 8750(m^2)$$