

CHƯƠNG 1 TỨ GIÁC

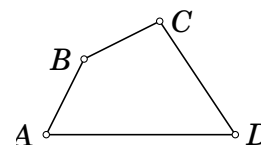
BÀI 1. TỨ GIÁC

A. ĐỊNH NGHĨA

1. Tứ giác

Định nghĩa 1.

Tứ giác $ABCD$ là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA , trong đó bất kì đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.



2. Tứ giác lồi

Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác.

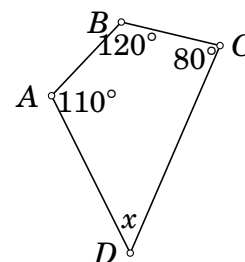
B. TÍNH CHẤT

Tính chất 1. Tổng các góc của một tứ giác bằng 360° .

VÍ DỤ 1. Tìm x trong các hình bên dưới

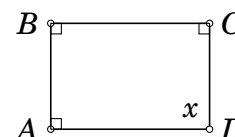
①

.....
.....
.....
.....



②

.....
.....
.....
.....



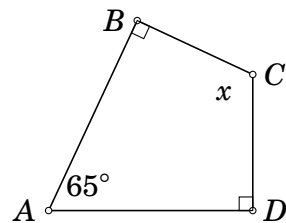
③

.....

.....

.....

.....



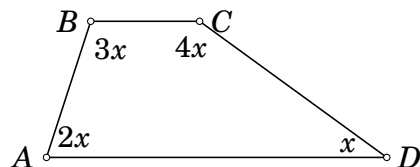
④

.....

.....

.....

.....



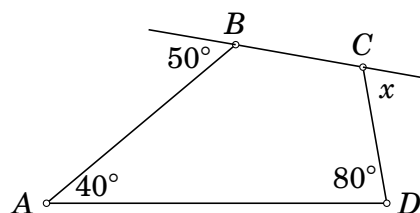
⑤

.....

.....

.....

.....



VÍ DỤ 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = AD$, $CB = CD$.

- ① Chứng minh rằng AC là đường trung trực của đoạn BD .
- ② Biết góc $\widehat{C} = 100^\circ$, $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính góc \widehat{B} và \widehat{D} .

[illegible]

VÍ DỤ 3. Cho tứ giác $ABCD$ có $B + D = 180^\circ$ và $CB = CD$. Chứng minh rằng AC là phân giác của góc A .

.....

.....

VÍ DỤ 4. Trong mặt phẳng cho 4 điểm bất kì sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng ta luôn tìm được một tam giác có đỉnh là ba điểm trong bốn điểm đã cho và có ít nhất một góc có số đo không lớn hơn 45° .

C. BÀI TẬP

BÀI 1. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} + \widehat{C} = 200^\circ$, $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$, $\widehat{D} + \widehat{C} = 120^\circ$.

① Tính các góc của tứ giác.

② Các tia phân giác của góc \widehat{A} và \widehat{B} cắt nhau tại I . Chứng minh rằng $\widehat{AIB} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$.

BÀI 2. Cho tứ giác $ABCD$ biết $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} : \widehat{D} = 1 : 2 : 3 : 4$.

① Tính các góc của tứ giác;

② Chứng minh $AB \parallel CD$;

③ Gọi giao điểm của AD và BC là E . Tính các góc của $\triangle CDE$.

BÀI 3. Tứ giác $ABCD$ có $AB = BC$, $AD = DC = AC$ và $\widehat{A} = 105^\circ$. Tính các góc còn lại của tứ giác.

BÀI 4. Cho tứ giác $ABCD$, biết hai đường thẳng AD và BC cắt nhau ở E , hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại F . Các tia phân giác của góc E và góc F cắt nhau ở I . Tính góc \widehat{EIF} theo góc A và góc C của tứ giác $ABCD$.

BÀI 5. Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} - \widehat{B} = 50^\circ$. Các tia phân giác của góc C và D cắt nhau tại I và $\widehat{CDI} = 115^\circ$. Tính các góc A và B .

BÀI 6. Cho tứ giác $ABCD$, E là giao điểm của các đường thẳng AB và CD , F là giao điểm của các đường thẳng BC và AD . Các tia phân giác của các góc E và F cắt nhau ở I . Chứng minh rằng

① Nếu $\widehat{BAD} = 130^\circ$, $\widehat{BCD} = 50^\circ$ thì IE vuông góc với IF .

② Góc \widehat{EIF} bằng nửa tổng của một trong hai cặp góc đối đỉnh của tứ giác $ABCD$.

BÀI 7. Chứng minh rằng nếu M là giao điểm các đường chéo của tứ giác $ABCD$ thì $MA + MB + MC + MD$ nhỏ hơn chu vi nhưng lớn hơn nửa chu vi tứ giác.

BÀI 8. So sánh độ dài cạnh AB và đường chéo AC của tứ giác $ABCD$ biết rằng chu vi tam giác ABD nhỏ hơn hoặc bằng chu vi tam giác ACD .

BÀI 9. Tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo, $AB = 6$, $OA = 8$, $OB = 4$, $OD = 6$. Tính độ dài AD .

BÀI 10. Cho năm điểm trên mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng bao giờ cũng có thể chọn ra được bốn điểm là đỉnh của một tứ giác lồi.

BÀI 2. HÌNH THANG

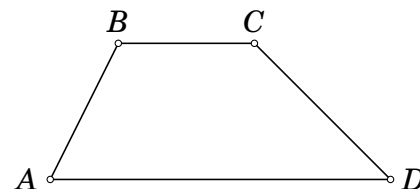
A. LÝ THUYẾT

1. Hình thang

Định nghĩa 1.

Là tứ giác có hai cạnh đối song song.

Trong trường hợp hai đáy có độ lớn khác nhau thì ta còn phân biệt đáy lớn, đáy bé.



Tính chất 1. Trong một hình thang:

- ☑ Nếu hai cạnh bên song song với nhau thì hai đáy bằng nhau.
- ☑ Nếu hai đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.
- ☑ Tổng hai góc kề với cạnh bên bằng 180° .

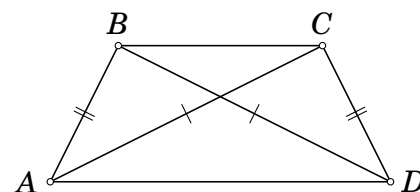
Hình thang có một góc vuông được gọi là hình thang vuông.

2. Hình thang cân

Là hình thang có hai góc ở đáy bằng nhau.

Trong một hình thang cân ta có:

- ☑ Hai cạnh bên bằng nhau.
- ☑ Hai đường chéo bằng nhau.



Tính chất 2. Một tứ giác là hình thang cân khi và chỉ khi tứ giác đó là hình thang và có hai đường chéo bằng nhau hoặc có hai góc ở đáy bằng nhau.

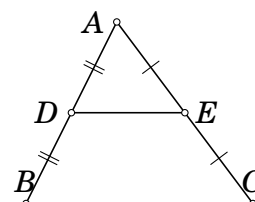
3. Đường trung bình của tam giác

Định nghĩa 2. Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

Tính chất 3.

Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

Trong tam giác ABC có D, E là trung điểm các cạnh AB và AC . Khi đó $DE \parallel BC$ và $DE = \frac{1}{2}BC$.



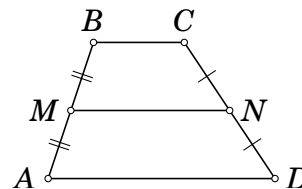
4. Đường trung bình của hình thang

Định nghĩa 3. Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.

Tính chất 4.

Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.

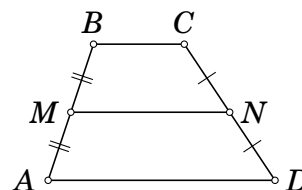
Cho hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$) và M là trung điểm AB . Khi đó, nếu $MN \parallel BC$ thì N là trung điểm CD .



Tính chất 5.

Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

Cho hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$) và M, N lần lượt là trung điểm AB và CD . Khi đó $MN \parallel BC \parallel AD$ và $MN = \frac{AD + BC}{2}$.



B. VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD .

Biết $MN = \frac{AD + BC}{2}$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thang.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Nhận xét. Ta có thể tổng quát bài toán trên như sau:

Cho tứ giác $ABCD$ có M, N là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng $MN \leq \frac{AD + BC}{2}$.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ các đường phân giác BD và CE . Chứng minh rằng $BEDC$ là hình thang cân.

.....

.....

VÍ DỤ 3. Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $A - D = 20^\circ$, $B = 2C$. Tính các góc của hình thang.

VÍ DỤ 4. Cho hình thang $ABCD$ ($BC \parallel AD$), biết $BC + AD = AB$. Chứng minh rằng các tia phân giác của góc A và góc B cắt nhau tại trung điểm của cạnh CD .

VÍ DỤ 5. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Các tia phân giác của góc A và D cắt nhau ở I , của góc B và góc C cắt nhau ở J . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh bốn điểm M, N, I, J thẳng hàng.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VÍ DỤ 6. Cho hình thang cân, đáy nhỏ AB , đáy lớn CD và O là giao điểm của hai đường chéo. Biết $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Gọi M, N là hình chiếu của B và C lên AC và BD , P là trung điểm cạnh BC . Chứng minh tam giác MNP là tam giác đều.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VÍ DỤ 7. Cho tam giác ABC có $BC = a$, các đường trung tuyến BD, CE . Lấy các điểm M, N trên cạnh BC sao cho $BM = MN = NC$. Gọi I là giao điểm của AM và BD , K là giao điểm của AN và CE . Tính độ dài IK .

.....

.....

VÍ DỤ 8. Một hình thang cân có đường cao bằng nửa tổng hai đáy. Chứng minh rằng hai đường chéo của hình thang vuông góc với nhau.

C. BÀI TẬP

BÀI 1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\widehat{A} - \widehat{D} = 20^\circ$, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Tính các góc của hình thang.

BÀI 2. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Biết $\widehat{A} = 3\widehat{D}$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$. Tính các góc của hình thang.

BÀI 3. Tứ giác $ABCD$ có $BC = CD$ và BD là tia phân giác của góc \widehat{D} . Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang.

BÀI 4. Hình thang vuông $ABCD$ có $A = D = 90^\circ$, $C = 45^\circ$. Biết đường cao bằng 4 cm và $AB + CD = 10$ cm. Tính hai đáy của hình thang.

BÀI 5. Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có E là trung điểm của BC , $\widehat{AED} = 90^\circ$. Chứng minh rằng DE là tia phân giác của góc D .

BÀI 6. Hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có đường chéo BD chia hình thang thành hai tam giác cân ABD cân tại A và tam giác BCD cân tại D . Tính các góc của hình thang cân đó.

BÀI 7. Trên đoạn thẳng AB lấy một điểm M ($MA > MB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ AB , vẽ tam giác đều AMC , BMD . Gọi E, F, I, K theo thứ tự là trung điểm của CM, CB, DM, DA . Chứng minh rằng $EFIK$ là hình thang cân và $KF = \frac{1}{2}CD$.

BÀI 8. Cho điểm M nằm bên trong tam giác đều ABC . Chứng minh rằng trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC đoạn lớn nhất nhỏ hơn tổng hai đoạn kia.

BÀI 9. Cho tam giác ABC , trọng tâm G .

- ① Vẽ đường thẳng d đi qua G , cắt các đoạn thẳng AB, AC . Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B, C trên d . Tìm mối liên hệ giữa các độ dài AA', BB', CC' .
- ② Nếu đường thẳng d nằm ngoài tam giác ABC và G' là hình chiếu của G trên d thì các độ dài AA', BB', CC', GG' có liên hệ gì?

BÀI 10. Trên đoạn thẳng AB lấy các điểm M và N (M nằm giữa A và N). Vẽ về một phía của AB các tam giác đều AMD, MNE, BNF . Gọi G là trọng tâm của tam giác DEF . Chứng minh rằng khoảng cách từ G đến AB không phụ thuộc vào vị trí của điểm M, N trên đoạn AB .

BÀI 11. Tứ giác $ABCD$ có E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC .

- ① Chứng minh rằng $EF \leq \frac{AB + CD}{2}$.
- ② Tứ giác $ABCD$ có điều kiện gì thì $EF = \frac{AB + CD}{2}$.

BÀI 12. Tứ giác $ABCD$ có $AB = CD$. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm của hai đường chéo tạo với AB và CD các góc bằng nhau.

BÀI 13. Trong tứ giác $ABCD$, gọi A', B', C', D' thứ tự là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC . Chứng minh rằng bốn đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy.

BÀI 14. Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H , M là trung điểm BC . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với HM cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F .

- ① Trên tia đối của tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HC$. Chứng minh rằng E là trực tâm của tam giác DBH .
- ② Chứng minh rằng $HE = HF$.

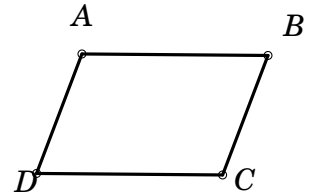
BÀI 3. HÌNH BÌNH HÀNH

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.

Nhận xét: Từ định nghĩa ta thấy: Hình bình hành là hình thang có hai cạnh bên song song với nhau.



2. Tính chất

Định lý 1. Trong hình bình hành ta có

- ☑ Các cạnh đối bằng nhau ($AB = CD$, $AD = BC$)
- ☑ Các góc đối bằng nhau ($\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$).
- ☑ Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết

Để chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình bình hành ta có các cách sau

- ☑ **Cách 1 (Về cạnh):** Chứng minh tứ giác có các cạnh đối song song.

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow ABCD \text{ là hình bình hành.}$$

- ☑ **Cách 2 (về cạnh):** Chứng minh tứ giác có các cạnh đối bằng nhau

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \end{array} \right\} \Rightarrow ABCD \text{ là hình bình hành.}$$

- ☑ **Cách 3 (về cạnh):** Chứng minh tứ giác có một cặp cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{array} \right\} \text{ hoặc } \left. \begin{array}{l} AD \parallel BC \\ AD = BC \end{array} \right\} \Rightarrow ABCD \text{ là hình bình hành.}$$

- ☑ **Cách 4 (về góc):** Chứng minh tứ giác có hai cặp góc đối bằng nhau

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow ABCD \text{ là hình bình hành.}$$

☑ **Cách 5 (về đường chéo):** Chứng minh tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

$$\left. \begin{array}{l} AC \text{ cắt } BD \text{ tại } O \\ O \text{ là trung điểm của } AC \\ O \text{ là trung điểm của } BD \end{array} \right\} \Rightarrow ABCD \text{ là hình bình hành.}$$

B. VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $AD = CE$. Gọi I là trung điểm DE , K là giao điểm của AI và BC . Chứng minh rằng $ADKE$ là hình bình hành.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H và O là giao điểm của ba đường trung trực, M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $AH = 2OM$.

VÍ DỤ 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB, CD lấy các điểm E, F sao cho $AE = CF$; trên các cạnh AD, BC lấy các điểm H, G sao cho $BG = DH$. Chứng minh rằng AC, EF, GH đồng quy.

VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC . Ở phía ngoài tam giác vẽ các tam giác ABD, ACE vuông cân tại A . Vẽ hình bình hành $ADIE$. Chứng minh rằng

① $IA = BC$

② $IA \perp BC$.

VÍ DỤ 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Biết rằng phân giác góc A và B cắt nhau tại E nằm trên CD . Chứng minh rằng $AB = 2AD$.

VÍ DỤ 7. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D có $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu của D lên AC , M là trung điểm HC . Chứng minh rằng $\widehat{BMD} = 90^\circ$.

C. BÀI TẬP

BÀI 1. Cho tứ giác $ABCD$, E là trung điểm của AB , F là trung điểm CD . Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AF, CE, BF, DE . Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

BÀI 2. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của điểm O qua M, N, P . Chứng minh rằng tứ giác $AB'A'B$ là hình bình hành.

BÀI 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, AD . O là một điểm nằm trong tứ giác. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là điểm đối xứng với điểm O qua các điểm O_1, O_2, O_3, O_4 . Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

BÀI 4. Chứng minh rằng: Nếu một tứ giác có các đường chéo và các đoạn thẳng nối trung điểm của các cặp cạnh đối đồng quy thì tứ giác đó là một hình bình hành.

BÀI 5. Cho tam giác ABC , các trung tuyến BM và CN cắt nhau ở G . P là điểm đối xứng của điểm M qua G . Gọi Q là điểm đối xứng của điểm N qua G . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

BÀI 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên đoạn AC lấy các điểm E, F sao cho $AE = EF = FC$. Gọi M là giao điểm của DE với AB , N là giao điểm của BF với CD . Chứng minh rằng $EMFN$ là hình bình hành.

BÀI 7. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), DC là đáy lớn AH là đường cao, M, N là trung điểm hai cạnh bên AD và BC .

- ① Chứng minh $MNCH$ là hình bình hành
- ② Nếu $AH = 5\text{cm}$. Tính đường trung bình của hình thang $ABCD$ trên.

BÀI 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD .

- ① Tứ giác $DEBF$ là hình gì ? Vì Sao ?
- ② Chứng minh rằng các đường thẳng AC, BD, EF cùng cắt nhau tại một điểm.
- ③ Gọi giao điểm của AC với DE và BF theo thứ tự là M và N . Chứng minh rằng tứ giác $EMFN$ là hình bình hành.

BÀI 9. Cho hình bình hành $ABCD$ ($AB > CD$). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Một đường thẳng tùy ý qua O cắt AB, CD theo thứ tự tại M và N . Chứng minh rằng

① $OM = ON$.

② $DMBN$ là hình bình hành.

BÀI 10. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$ và $AB = 2AD$.

① Chứng minh rằng tia phân giác của góc D cắt cạnh AB tại điểm E là trung điểm của AB .

② Chứng minh AD vuông góc với AC .

BÀI 11. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tam giác đều ABE và ADF nằm ngoài hình bình hành.

① Chứng minh rằng tam giác EFC là tam giác đều.

② Gọi M, I, K theo thứ tự là trung điểm của BD, AF, AE . Tính \widehat{IMK} .

BÀI 12. Cho tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E là điểm đối xứng với A qua B, F là giao điểm của DE với BC, G là giao điểm của OE với BC, H là giao điểm của OF với CE . Chứng minh rằng A, G, H thẳng hàng.

BÀI 13. Cho hình bình hành $ABCD$ và đường thẳng d nằm ngoài hình bình hành đó. Gọi A', B', C', D' lần lượt là hình chiếu của các điểm A, B, C, D lên đường thẳng d . Chứng minh rằng $AA' + CC' = BB' + DD'$.

BÀI 14. Cho hình bình hành $ABCD$ trong đó có $AD = 2AB$. Kẻ CE vuông góc với AB . Gọi M là trung điểm của AD . Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = 2\widehat{AEM}$.

BÀI 15. Cho tam giác ABC đều, điểm M thuộc cạnh BC . Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB, E là điểm đối xứng với M qua AC . Vẽ hình bình hành $MDNE$. Chứng minh rằng $AN \parallel BC$.

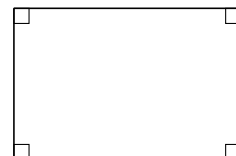
BÀI 16. Cho tam giác ABC . Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc tia đối của các tia BA, CA sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD . Qua O kẻ đường thẳng song song với tia phân giác góc A , đường thẳng này cắt AC tại K . Chứng minh rằng $AB = CK$.

BÀI 4. HÌNH CHỮ NHẬT

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông



2. Tính chất

Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành và hình thang cân.

Ngoài ra hình chữ nhật còn có tính chất sau:

Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

B. DẤU HIỆU NHẬT BIẾT

Một tứ giác là hình chữ nhật nếu:

- ☑ Tứ giác có ba góc vuông
- ☑ Hình thang cân có một góc vuông
- ☑ Hình bình hành có một góc vuông
- ☑ Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau

1. Áp dụng vào tam giác

- ☑ Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền
- ☑ Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

C. CÁC VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC , đường cao AH . Gọi I là trung điểm của AC , E là điểm đối xứng với H qua I . Chứng minh rằng tứ giác $AHCE$ là hình chữ nhật.

VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Các tia phân giác của các góc A, B, C, D cắt nhau như trên hình bên. Chứng minh rằng $EFGH$ là hình chữ nhật.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác nhọn ABC , O là trực tâm của tam giác. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA còn R, S, T lần lượt là trung điểm của các đoạn OA, OB, OC .

- ① Chứng minh tứ giác $MPTS$ là hình chữ nhật.
- ② Chứng minh rằng 3 đoạn RN, MT, SP bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

VÍ DỤ 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M là điểm đối xứng với B qua C . Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên DM . Chứng minh rằng $AH \perp CH$.

VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC cân tại A . Từ một điểm D trên đáy BC , ta vẽ đường thẳng vuông góc với BC , cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F . Vẽ các hình chữ nhật $BDEH, CDFK$. Chứng minh rằng A là trung điểm của HK .

VÍ DỤ 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ ($AB < BC$). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BD ; M, N lần lượt là trung điểm của BH và CD . Chứng minh rằng $AM \perp MN$.

D. BÀI TẬP

BÀI 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $AD = \frac{1}{2}AC$ và $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAC}$.

Chứng minh rằng hình bình hành $ABCD$ là hình chữ nhật.

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo, H là hình chiếu vuông góc của A lên OD . Biết $\widehat{DAH} = \widehat{HAO} = \widehat{OAB}$, chứng minh rằng $ABCD$ là hình chữ nhật.

BÀI 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 2AB$. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC . Biết rằng $\widehat{AMB} = \widehat{AMD}$. Tính số đo \widehat{AMB} .

BÀI 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên tia đối của các tia CB và DA lấy tương ứng hai điểm E và F sao cho $CE = DF = CD$. Từ F kẻ đường thẳng vuông góc với AE cắt CD tại H . Chứng minh tam giác CHB là tam giác vuông cân.

BÀI 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và điểm E thuộc đường chéo AC . Qua E kẻ đường thẳng song song với BD cắt AD , CD lần lượt tại M và N . Vẽ hình chữ nhật $MDNF$. Chứng minh:

① DF song song với AC .

② E là trung điểm của BF .

BÀI 6. Cho tam giác ABC cân tại A có AH là đường cao. Dựng hình chữ nhật $AHCK$. Gọi I là hình chiếu của H trên AC . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của IC và AK . Chứng minh rằng MN vuông góc với BI .

BÀI 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là hình chiếu của B trên AC . Gọi E, F, M lần lượt là trung điểm của AB, DH, BH . Chứng minh rằng $AM \perp EF$.

BÀI 8. Từ đỉnh B của hình bình hành $ABCD$ ($\widehat{B} > 90^\circ$) vẽ hai đường cao $BK \perp AD$ và $BH \perp CD$. Biết rằng $KH = 12$ cm; $BD = 13$ cm. Tính khoảng cách từ B đến trực tâm của tam giác BKH .

BÀI 9. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi O là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Vẽ $OD \perp AC$, $OE \perp BC$ và $OF \perp BA$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $S = OD^2 + OE^2 + OF^2$.

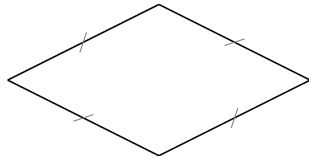
BÀI 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và điểm M nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh rằng $MA + MB + MC + MD \leq AB + AC + AD$.

BÀI 5. HÌNH THOI

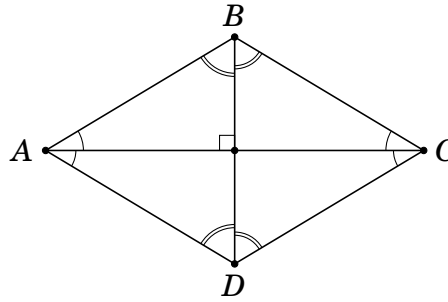
A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau (h.1).



Hình 1



Hình 2

2. Tính chất

Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.

Trong hình thoi (h.2)

- a) Hai đường chéo vuông góc với nhau
- b) Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi

3. Dấu hiệu nhận biết

Một tứ giác là hình thoi khi

- ① Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau
- ② Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau
- ③ Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau
- ④ Hình bình hành có một đường chéo là phân giác của một góc.

B. CÁC VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình thoi.

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB lấy điểm D , cạnh AC lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, CD, DE, EB . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

VÍ DỤ 3. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 36^\circ$. Phân giác BD và đường cao AH cắt nhau tại I . Tia phân giác góc \widehat{ADB} cắt AH tại O . Gọi E là giao điểm của BO và AC ; F là giao điểm của CI và DO . Chứng minh các tứ giác $BCEF$ và $BDAF$ là các hình thoi.

VÍ DỤ 4. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Trên các cạnh AB, BC lấy các điểm M, N sao cho $BM = CN$. Chứng minh rằng tam giác DMN đều.

VÍ DỤ 5. Cho tam giác ABC có $AB < AC$; AK là đường phân giác. Trên cạnh AC của tam giác lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Gọi Q là trung điểm của AC , N là trung điểm của BD . Chứng minh rằng $AK \perp NQ$.

C. BÀI TẬP

BÀI 1. Cho tam giác đều ABC , đường cao AD . M là điểm nằm giữa B và D . Gọi N là trung điểm đoạn thẳng AM . Vẽ $ME \perp AB$ tại E , $MF \perp AC$ tại F . Chứng minh rằng $DEMF$ là hình thoi.

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau ở O . Hai đường thẳng d_1 và d_2 cùng đi qua O và vuông góc với nhau. Đường thẳng d_1 cắt các cạnh AB và CD ở M và P . Đường thẳng d_2 cắt các cạnh BC và AD ở N và Q . Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

BÀI 3. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là giao điểm các đường phân giác của tam giác OAB, OBC, OCD, ODA .

- ① Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.
- ② Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thoi thì tứ giác $MNPQ$ là hình gì ? Vì sao ?

BÀI 4. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$ và các cặp cạnh đối không song song. Gọi M là giao điểm đường thẳng AB và CD ; N là giao điểm của đường thẳng BC và AD . Đường phân giác của \widehat{AMD} cắt cạnh AD và BC lần lượt tại E và F ; đường phân giác của góc \widehat{ANB} cắt cạnh AB và CD lần lượt tại G và H . Chứng minh rằng tứ giác $EHFG$ là hình thoi.

BÀI 5. Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = AC$. Kẻ $AE \perp BC$, $AF \perp CD$.

- ① Chứng minh tam giác AEF là tam giác đều.
- ② Biết $AB = 4\text{cm}$. Tính độ dài các đường chéo của hình thoi.

BÀI 6. Cho hình thoi $ABCD$, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ O đến AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $EFGH$ là hình chữ nhật.

BÀI 7. Cho P là một điểm chuyển động trong tam giác ABC sao cho $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$. Hạ $PM \perp AB$; $PN \perp AC$ ($M \in AB$; $N \in AC$). Gọi K, S là hai đỉnh khác của hình thoi $KMSN$. Chứng minh KS đi qua một điểm cố định.

BÀI 8. Trên cạnh AB và CD của hình thoi $ABCD$ lấy các điểm P và Q sao cho $AP = \frac{1}{3}AB$ và $CQ = \frac{1}{3}CD$. Gọi I là giao điểm của PQ và AD ; K là giao điểm của DP và BI . Chứng minh rằng

- ① $\triangle BID$ vuông.
- ② $BK = IK$.

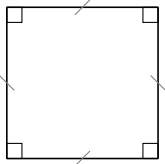
BÀI 9. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh là 2 cm; $\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{B}$. Trên cạnh AD, DC lần lượt lấy $H; K$ sao cho $\widehat{HBK} = 60^\circ$.

- ① Chứng minh $DH + DK$ không đổi.
- ② Xác định vị trí điểm H, K để độ dài HK ngắn nhất.

BÀI 6. HÌNH VUÔNG

A. ĐỊNH NGHĨA

Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau



B. TÍNH CHẤT

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

C. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT

Một tứ giác là hình vuông khi tứ giác đó là

- ① hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau
- ② hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau
- ③ hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác của một góc
- ④ hình thoi có một góc vuông
- ⑤ hình thoi có hai đường chéo bằng nhau

D. CÁC VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , phân giác trong AD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên AB, AC . Chứng minh rằng $AEDF$ là hình vuông.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

VÍ DỤ 2. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông $ABCD$ lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ$. Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình vuông.

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ ra phía ngoài của hình bình hành các hình vuông $ABEF$, $BCPQ$, $CDMN$, $ADHK$. Gọi O_1 , O_2 , O_3 , O_4 lần lượt là tâm của các hình vuông đó. Chứng minh tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

VÍ DỤ 4. Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AB , BC , CD , DA lấy các điểm M , P , N , Q sao cho $MN \perp PQ$. Chứng minh rằng $MN = PQ$.

VÍ DỤ 5. Trên các cạnh BC , CD của hình vuông $ABCD$ với $AB = 1$, ta lấy các điểm M , N tương ứng sao cho chu vi tam giác MCN bằng 2. Tính góc \widehat{MAN} .

VÍ DỤ 6. Gọi M là điểm bất kì trên đoạn thẳng AB . Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMCD$, $BMEF$.

- ① Chứng minh rằng $AE \perp BC$.
- ② Gọi H là giao điểm của AE và BC . Chứng minh rằng ba điểm D , H , F thẳng hàng.
- ③ Chứng minh rằng đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M chuyển động trên đoạn thẳng AB cố định.

VÍ DỤ 7. Cho tam giác nhọn ABC . Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông $ABDE$ và $ACGF$. Gọi M là trung điểm của BC . Gọi $O_1; O_2$ lần lượt là tâm hai hình vuông nói trên. Chứng minh rằng ΔMO_1O_2 là tam giác vuông.

E. BÀI TẬP

BÀI 1. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ADC} + \widehat{BCD} = 90^\circ$ và $AD = BC$. Gọi I, N, J, M lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD . Chứng minh tứ giác $INJM$ là hình vuông.

BÀI 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Gọi M là giao điểm của AF và DE , N là giao điểm của BF và CE . Chứng minh rằng tứ giác $EMFN$ là hình vuông.

BÀI 3. Cho tam giác ABC . Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông $ABCD$ và $ACEF$. Gọi Q, N lần lượt là giao điểm các đường chéo của $ABCD$ và $ACEF$; M, P lần lượt là trung điểm BC và DF . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

BÀI 4. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ADC} + \widehat{BCD} = 90^\circ$ và $AD = BC$. Gọi I, N, J, M lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD . Chứng minh tứ giác $INJM$ là hình vuông.

BÀI 5. Cho hình vuông $A'B'C'D'$ nằm trong hình vuông $ABCD$ sao cho thứ tự các đỉnh theo cùng một chiều như nhau (tức là nếu vẽ hai đường tròn, mỗi đường tròn đi qua các đỉnh của một hình vuông, thì chiều đi trên đường tròn từ A lần lượt B, C, D và từ A' lần lượt qua B', C', D' là như nhau). Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' là đỉnh của một hình vuông.

BÀI 6. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh các AD, DC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AE = DF$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF, BF . Chứng minh rằng $MN \perp AF$.

BÀI 7. Cho tam giác ABC . Vẽ ra phía ngoài của tam giác các hình vuông $BCDE, ACFG, ABKH$ và các hình bình hành $BEQK, CDPF$. Chứng minh tam giác APQ là tam giác vuông cân.

BÀI 8. Cho tam giác ABC . Về phía ngoài của tam giác vẽ hai hình vuông $ABEF$ và $ACGH$. Chứng minh rằng các đường thẳng BG và CE cắt nhau tại một điểm trên đường cao AD của tam giác ABC .

BÀI 9. Cho hình bình hành $ABCD$, dựng ra phía ngoài các hình vuông $ABMN$ và $BCEF$. Chứng minh rằng $MF = BD$ và $BD \perp MF$.

BÀI 10. Cho hình vuông $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BO và CD . Chứng minh rằng AM vuông góc với MN .

BÀI 11. Cho K và L tương ứng là các điểm nằm trên các cạnh AB và BC của hình vuông $ABCD$ sao cho $KB = LC$. Gọi P là giao điểm của AL và CK . Chứng minh rằng DP vuông góc với KL .

BÀI 12. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh $AB; AD$ lần lượt lấy điểm I và E sao cho $AE = AI$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đoạn DI . Chứng minh HC vuông góc với HE .

BÀI 13. Cho tứ giác $ABCD$. Dựng ra phía ngoài tứ giác các hình vuông $ABEF; BCGH; ADRS$. Gọi $O_1; O_2; O_3; O_4$ lần lượt là tâm các hình vuông trên.

Chứng minh rằng: $O_1O_3 = O_2O_4; O_1O_3 \perp O_2O_4$.

BÀI 14. Cho hình vuông $ABCD$. Các điểm E, F lần lượt thuộc cạnh AB, BC sao cho $EF = AE + CF$. Dựng hình chữ nhật $EBFG$. Gọi AC cắt EG tại M và DE cắt FG tại N . Dựng $MP \perp AD (P \in AD)$. Chứng minh rằng $NP \parallel AC$.

BÀI 15.

Trong hình vẽ bên, các điểm K, L, M, N chia cạnh BC của hình vuông $ABCD$ thành 5 đoạn bằng nhau ($BK = KL = LM = MN = NC$). Lấy E trên cạnh AD sao cho $AE = BK$. Tính tổng $\widehat{AKE} + \widehat{ALE} + \widehat{AME} + \widehat{ANE} + \widehat{ACE}$.

