

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 9 – PHÂN SỐ

CHỦ ĐỀ 7: BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN PHÂN SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

I. Khái niệm bất đẳng thức

1. Định nghĩa : Số a gọi là lớn hơn số b , ký hiệu $a > b$ nếu $a - b$ là một số dương, tức là $a - b > 0$. Khi đó ta cũng ký hiệu $b < a$

Ta có: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

Nếu $a > b$ hoặc $a = b$, ta viết $a \geq b$. Ta có: $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$

2. Quy ước :

- Khi nói về một bất đẳng thức mà không chỉ rõ gì hơn thì ta hiểu rằng đó là một bất đẳng thức đúng.
- Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng

II. Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

1. Tính chất 1:
$$\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$$

2. Tính chất 2: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

Từ đó ta suy ra

$$a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$$

$$a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$$

3. Tính chất 3:
$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$$

4. Tính chất 4:
$$a > b \Rightarrow \begin{cases} ac > bc & \text{nếu } c > 0 \\ ac < bc & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra

$$a > b \Leftrightarrow -a < -b$$

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} > \frac{b}{c} & \text{nếu } c > 0 \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$$

5. Tính chất 5:

$$a > b > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

6. Tính chất 6:

7. Tính chất 7: $a > b > 0, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a^n > b^n$

8. Tính chất 8: Nếu a và b là hai số dương thì : $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

Nếu a và b là hai số không âm thì : $a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng 1: TỔNG LŨY THỪA

I. Phương pháp giải

So sánh các số hạng trong tổng với các số hạng trong tổng liên tiếp để tìm mối quan hệ. Nếu muốn chứng minh lớn hơn một giá trị K nào đó, ta cần so sánh với số hạng có mẫu lớn hơn và ngược lại

I. Bài toán

Bài 1: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2020^2} < 1$

Lời giải:

Ta thấy bài toán có dạng tổng các lũy thừa bậc hai, nên ta sẽ phân tích tổng A như sau:

$$A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{2018.2019} + \frac{1}{2019.2020}$$

Đến đây ta sẽ so sánh với phân số có mẫu nhỏ hơn, vì yêu cầu bài toán là chứng minh nhỏ hơn.

$$A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2019.2019} + \frac{1}{2019.2020}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \right) + \left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} \right)$$

$$A < \frac{1}{1} - \frac{1}{2020} < 1$$

Bài 2: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải:

Ở bài toán này, ta phải chứng minh hai chiều, chiều thứ nhất ta cần chứng minh:

$$A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} \quad \text{và chứng minh} \quad A > \frac{1}{6}$$

Ta có:
$$A = \frac{1}{5.5} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{7.7} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101}$$

$$A > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505} \quad \text{đến đây, ta sẽ so sánh } \frac{96}{505} \quad \text{với} \quad \frac{1}{6} \quad \text{nghư sau:}$$

Ta có:
$$\frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6} \quad \text{bằng cách ta nhân cả tử và mẫu của phân số } \frac{1}{6} \quad \text{với 96 để được hai phân số}$$

cùng tử rồi so sánh khi đó ta có:
$$A > \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6} \quad (1)$$

Chiều thứ hai, ta cần chứng minh:
$$A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

Ta làm tương tự như sau:

$$A = \frac{1}{5.5} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{7.7} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:
$$\frac{1}{6} < A < \frac{1}{4}$$

Bài 3: Chứng tỏ rằng:
$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{3}{4}$$

Lời giải:

Ta biến đổi:

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{99.99} + \frac{1}{100.100} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{3}{4} - \frac{1}{100} < \frac{3}{4}$$

Bài 4: Chứng tỏ rằng:
$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$$

Lời giải:

Nhận thấy bài này là tổng lũy thừa mà cơ số ở mẫu là các số chẵn nên ta sẽ đưa về tổng lũy thừa mà cơ số ở mẫu là các số tự nhiên liên tiếp như sau:

$$A = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) < \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{200} < \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{100}{2^{100}} < 2$$

Bài 5: Chứng tỏ rằng:

Lời giải:

Nhận thấy bài này có dạng tổng các phân số có mẫu là các lũy thừa cùng cơ số nên ta sẽ thực hiện phép tính tổng A

Việc tính chính xác được tổng A sẽ giảm bớt sự sai số, tuy nhiên không phải tổng nào cũng có thể tính được.

Ta tính tổng A như sau:
$$2A = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{99}{2^{98}} + \frac{100}{2^{99}}$$

Sau đó lấy $2A$ trừ A theo vế và nhóm các phân số có cùng mẫu ta được:

$$A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}}, \text{ đặt } B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \text{ và tính tổng } B \text{ theo cách như trên}$$

ta được: $B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{99}}$, thay vào A ta được:
$$A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}} < 2$$

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$$

Bài 6: Chứng tỏ rằng:

Lời giải:

Tính tương tự như bài 5, ta có:
$$2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}},$$

Đặt $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$, và tính B rồi thay vào tổng A ta được

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{99}}$$

$$\Rightarrow 2A = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 2A < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

Bài 7: Chứng tỏ rằng:

Lời giải:

Ta có:
$$A = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Bài 8: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải:

Ta có:
$$A = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{4}$$

Bài 9: So sánh $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$ với $\frac{1}{2}$

Lời giải:

$$A = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{2}$$

Bài 10: Chứng minh rằng với số tự nhiên $n > 2$ thì $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ không là số tự nhiên

Lời giải:

Ta có:
$$A < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} < 2$$

. Mặt khác ta thấy $A > 1$

Vậy ta có: $1 < A < 2$.

Bài 11: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < \frac{2020}{2021}$

Lời giải:

$$A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2020.2021} = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$

Bài 12 : Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{4} < \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}} < \frac{1}{3}$

Lời giải:

Đặt $A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}}$

$$4A = 1 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2005}} \right) - \frac{2016}{5^{2016}}$$

Đặt $B = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{2005}}$

Ta có:

$$4B = 1 - \frac{1}{5^{2015}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^{2015}}, \text{ thay vào } A \text{ ta được:}$$

$$4A = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 5^{2015}} - \frac{2016}{5^{2016}} < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow A < \frac{5}{16} < \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{2016}{5^{2016}} > \frac{1}{5} + \frac{2}{25} = \frac{7}{25} > \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra ĐPCM

$$\text{Bài 13 : Chứng tỏ rằng: } A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$$

Lời giải:

$$\text{Tính tổng } A, \text{ ta được: } 4A = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}}\right) - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\text{Đặt } B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}}$$

$$B = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{99}}$$

$$\Rightarrow 4A = \frac{3}{4} - \frac{1}{3^{99} \cdot 4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A < \frac{3}{16}$$

$$\text{Bài 14 : Chứng tỏ rằng: } A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2 \cdot 10^2} = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2}\right)$$

$$A = 1 - \frac{1}{10^2} < 1$$

$$\text{Bài 15 : Chứng tỏ rằng: } A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4019}{2009^2 \cdot 2010^2} < 1$$

Lời giải:

Ta có:
$$A = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2010^2 - 2009^2}{2009^2 \cdot 2010^2}$$

$$A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2009^2} - \frac{1}{2010^2} = 1 - \frac{1}{2010^2} < 1$$

Bài 16: Chứng tỏ rằng:
$$S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{2020}} - \frac{1}{2^{2022}} < \frac{1}{5}$$

Lời giải:

$$\frac{1}{2^2} S = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^{10}} + \dots + \frac{1}{2^{2022}} - \frac{1}{2^{2024}}$$

$$\Rightarrow S + \frac{S}{4} = \frac{5S}{4} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2024}} < \frac{1}{4} \Rightarrow S < \frac{1}{5}$$

Bài 17: Chứng tỏ rằng:
$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} < \frac{1}{2}$$

Lời giải:

$$\frac{1}{3} B = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}}$$

$$\Rightarrow B - \frac{1}{3} B = \frac{2B}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{2021}} < \frac{1}{3}$$

Hay
$$B < \frac{1}{2}$$

Bài 18: Chứng tỏ rằng:
$$M = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}}$$
 có giá trị không nguyên

Lời giải:

Ta có:
$$M = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}} > 0 \quad (1)$$

Ta có
$$M = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}}$$

$$\Rightarrow 3M = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2021}{3^{2020}}$$

$$\Rightarrow 3M - M = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2021}{3^{2020}} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}} \right)$$

$$\Rightarrow 2M = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} - \frac{2021}{3^{2021}}$$

Đặt
$$N = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} \Rightarrow 3N = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2019}}$$

$$\Rightarrow 3N - N = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2019}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}}\right)$$

$$\Rightarrow 2N = 1 - \frac{1}{3^{2020}} \Rightarrow N = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2020}}$$

$$\Rightarrow 2M = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2020}} - \frac{2021}{3^{2021}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2020}} - \frac{2021}{3^{2021}} < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow M < \frac{3}{4} < 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0 < M < 1$

Vậy $M = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}}$ không có giá trị nguyên

19: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2} < \frac{1003}{2008}$

Bài

Lời giải:

$$A < \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 6} + \frac{2}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{2}{2006 \cdot 2008} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}$$

$$S = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{3}{n(n+3)} < 1$$

Bài 20: Chứng tỏ rằng:

Lời giải:

$$S = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) = 1 - \frac{1}{n+3} < 1$$

$$B = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots - \frac{1}{2021^2} > \frac{1}{2021}$$

Bài 21: Chứng tỏ rằng:

Lời giải:

$$B = 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2}\right),$$

Đặt $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2}$ ta có:

$$A < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021} < 1 - \frac{1}{2021}$$

$$\Rightarrow -A > -1 + \frac{1}{2021}$$

$$B > 1 - A = 1 - 1 + \frac{1}{2021}$$

$$\Rightarrow B > \frac{1}{2021}$$

Bài 22: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2^{2020}} < 0,2$

Lời giải:

Đặt $A = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2^{2020}}$

Ta có: $\frac{1}{4}A = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} - \dots + \frac{1}{2^{2020}} - \frac{1}{2^{2022}}$

$$\Rightarrow A + \frac{1}{4}A = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2022}} < \frac{1}{4}$$

$$\frac{5A}{4} < \frac{1}{4} \Rightarrow A < \frac{1}{5} = 0,2$$

Bài 23: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$ thì $\frac{1}{4} < A < \frac{4}{9}$

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{5.5} + \dots + \frac{1}{50.50} > \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{50.51} = \frac{1}{3} - \frac{1}{51} = \frac{48}{153} > \frac{48}{192} = \frac{1}{4}$

Mặt khác:

$$A = \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{5.5} + \dots + \frac{1}{50.50} < \frac{1}{9} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{49.50} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{50} = \frac{191}{450} < \frac{200}{450} = \frac{4}{9}$$

Vậy $\frac{1}{4} < A < \frac{4}{9}$

Bài 24: Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$, chứng tỏ rằng: $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$

Lời giải:

Ta có $A = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$

$$A = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{75} \right) + \left(\frac{1}{76} + \frac{1}{77} + \dots + \frac{1}{100} \right)$$

TH1: $A > \frac{1}{75} \cdot 25 + \frac{1}{100} \cdot 25 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

$$\text{TH2: } A < \frac{1}{50} \cdot 25 + \frac{1}{75} \cdot 25 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Dạng 2: TỔNG PHÂN SỐ TỰ NHIÊN

I. Phương pháp giải.

Với tổng phân số tự nhiên, với chương trình lớp 6 ta nên cho học sinh làm theo cách nhóm đầu cuối và so sánh giữa các nhóm với nhau, để tạo ra các ngoặc có cùng tử, rồi so sánh bình thường.

II. Bài toán.

Bài 1: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100} + \frac{1}{144} + \frac{1}{196} < \frac{1}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100} + \frac{1}{144} + \frac{1}{196}$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{14^2}$$

$$= \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{7^2} \right)$$

$$< \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{6 \cdot 7} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(2 - \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{28} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100} + \frac{1}{144} + \frac{1}{196} < \frac{1}{2}$$

Bài 2: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \frac{1}{41} + \frac{1}{61} + \frac{1}{85} + \frac{1}{113} < \frac{1}{2}$

Lời giải:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \frac{1}{41} + \frac{1}{61} + \frac{1}{85} + \frac{1}{113} < \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

Bài 3: Cho $A = \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{11}{15} < A < \frac{3}{2}$

Lời giải:

Ta có
$$\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} = \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right)$$

$$< \underbrace{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{20}}_{20 \text{ số hạng}} + \underbrace{\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}}_{20 \text{ số hạng}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Ta có
$$\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} = \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right)$$

$$> \underbrace{\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}}_{20 \text{ số hạng}} + \underbrace{\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60}}_{20 \text{ số hạng}} = 20 \cdot \frac{1}{40} + 20 \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = \frac{25}{30} > \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$$

Vậy
$$\frac{11}{15} < \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} < \frac{3}{2}$$

Bài 4: Chứng tỏ rằng:
$$\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$$

Lời giải:

Nhóm thành 2 ngoặc. Khi đó ta có:

$$VT = \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \frac{1}{63} + \dots + \frac{1}{80} \right)$$

$$\Rightarrow VT > \left(\underbrace{\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60}}_{20 \text{ số hạng}} \right) + \left(\underbrace{\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80}}_{20 \text{ số hạng}} \right)$$

$$= \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Bài 5: So sánh A và B biết:
$$A = \frac{2018}{2019} + \frac{2019}{2020} + \frac{2020}{2018} \quad \text{và} \quad B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$$

Lời giải:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2019} \right) + \left(1 - \frac{1}{2020} \right) + \left(1 + \frac{2}{2018} \right)$$

$$= 3 + \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \right) + \left(\frac{1}{2018} - \frac{1}{2020} \right) > 3$$

$$B = \left(\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{12} \right) + \left(\frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{17} \right) < \frac{5}{3} + \frac{5}{8} + \frac{5}{10} < 3$$

Vậy $A > B$

Bài 6: Cho $M = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{17}$, chứng tỏ rằng: $M < 2$.

Lời giải:

Ta có: $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} < \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$

và $\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{17} < \frac{1}{8} \cdot 8 = 1$

Vậy $M < 2$

Bài 7: Cho $S = \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} + \frac{3}{13} + \frac{3}{14}$. Chứng tỏ rằng: $1 < S < 2$.

Lời giải:

$$S = \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} + \frac{3}{13} + \frac{3}{14} > \frac{3}{15} + \frac{3}{15} + \frac{3}{15} + \frac{3}{15} + \frac{3}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

Suy ra $S > 1$.

$$S = \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} + \frac{3}{13} + \frac{3}{14} < \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{15}{10} = 1,5 < 2$$

Suy ra $S < 2$.

Vậy $1 < S < 2$.

Bài 8: Cho $S = \frac{5}{20} + \frac{5}{21} + \frac{5}{22} + \dots + \frac{5}{49}$. Chứng tỏ rằng: $3 < S < 8$.

Lời giải:

Tổng trên có 30 số hạng:

Ta có: $S > \frac{5}{50} + \frac{5}{50} + \dots + \frac{5}{50} = 30 \cdot \frac{5}{50} = 3$

Suy ra $S > 3$.

Ngược lại: $S < \frac{5}{20} + \frac{5}{20} + \frac{5}{20} + \dots + \frac{5}{20} = 30 \cdot \frac{5}{20}$

Suy ra $S < 8$.

Bài 9: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$ thì $\frac{5}{8} < A < \frac{3}{4}$

Lời giải:

Ta thấy tổng A có 100 số, như vậy ta sẽ nhóm thành 50 ngoặc, mỗi ngoặc sẽ có hai phân số, gồm một phân số đứng đầu và một phân số đứng cuối, cứ như vậy dồn sâu vào trong tổng.

$$A = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{200} \right) + \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{199} \right) + \dots + \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{151} \right) = \frac{301}{101.200} + \frac{301}{102.199} + \dots + \frac{301}{150.151} \quad (50 \text{ ngoặc})$$

$A = 301 \left(\frac{1}{101.200} + \frac{1}{102.199} + \dots + \frac{1}{150.151} \right)$, lúc này ta sẽ so sánh tất cả với chung một phân số đầu hoặc cuối,

TH1: Ta chứng minh $A > \frac{5}{8}$ thì ta có:

$$A > 301 \cdot \left(\frac{1}{150.151} + \frac{1}{150.151} + \dots + \frac{1}{150.151} \right) = 301 \cdot \frac{50}{150.151} = \frac{301}{453} > \frac{300}{453} > \frac{300}{480} = \frac{5}{8} \quad (1)$$

TH2: Ta chứng minh $A < \frac{3}{4}$ ta có:

$$A < 301 \cdot \left(\frac{1}{101.200} + \frac{1}{101.200} + \dots + \frac{1}{101.200} \right) = 301 \cdot \frac{50}{101.200} = \frac{301}{404} < \frac{303}{404} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{5}{8} < A < \frac{3}{4}$.

Bài 10: Chứng tỏ rằng: $\frac{7}{12} < \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}$

Lời giải:

Nhận thấy tổng $A = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}$ chính là tổng bài 9

Nên ta chứng minh được $A > \frac{5}{8}$, mà $\frac{5}{8} > \frac{7}{12} \Rightarrow A > \frac{7}{12}$.

Bài 11: Cho $A = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{70}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{4}{3} < A < \frac{5}{2}$.

Lời giải:

Thấy rằng tổng A có 60 số hạng

TH1: Ta chứng minh $A > \frac{4}{3}$ bằng cách nhóm hai số một ngoặc thông thường

Ta có: $A = \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{70} \right) + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{69} \right) + \dots + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{41} \right) = \frac{81}{11.70} + \frac{81}{12.69} + \dots + \frac{81}{40.41} \quad (30 \text{ ngoặc})$

$$A > \frac{81}{40.41} + \frac{81}{40.41} + \dots + \frac{81}{40.41} = \frac{81.30}{40.41} = \frac{243}{164} > \frac{240}{164} > \frac{240}{180} = \frac{4}{3}$$

TH2: Tuy nhiên để chứng minh $A < \frac{5}{2}$, nếu chúng ta làm như trên thì sẽ không chứng minh được

Lý do: vì việc chứng minh nhỏ hơn mà chúng ta so sánh lớn hơn lượng dư thừa, dẫn đến tổng A

lớn hơn $\frac{5}{2}$, do đó để giảm bớt lượng dư, tùy vào bài toán, chúng ta nên nhóm thành 6 ngoặc.

$$A = \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{20} \right) + \left(\frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{30} \right) + \left(\frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \dots + \frac{1}{70} \right)$$

$$A < \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{21} \right) + \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{31} \right)$$

10 số hạng 10 số hạng 10 số hạng

$$+ \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{41} \right) + \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{51} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{61} + \dots + \frac{1}{61} \right)$$

10 số hạng 10 số hạng 10 số hạng

$$A < \frac{10}{11} + \frac{10}{21} + \frac{10}{31} + \frac{10}{41} + \frac{10}{51} + \frac{10}{61} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) < 2 + 0,5 = \frac{5}{2}$$

Bài 12: Cho $S = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{60}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}$

Lời giải:

Nhóm tổng S thành ba ngoặc làm tương tự bài 11 ta có

$$S = \left(\frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{40} \right) + \left(\frac{1}{41} + \dots + \frac{1}{50} \right) + \left(\frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{60} \right)$$

$$< \frac{10}{31} + \frac{10}{41} + \frac{10}{51} < \frac{10}{30} + \frac{10}{40} + \frac{10}{50} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{4}{5}$$

$$\text{Mặt khác: } S > \frac{10}{40} + \frac{10}{50} + \frac{10}{60} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} > \frac{3}{5}$$

$$\text{Suy ra } \frac{3}{5} < S < \frac{4}{5}.$$

Bài 13: Cho $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99}$. Chứng tỏ rằng: $0,2 < A < 0,4$

Lời giải:

Tách tổng A thành:

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} \right) = \frac{13}{60} + \dots > \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$\text{Và: } A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) - \dots - \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{98} \right) - \frac{1}{99} < \frac{2}{5} = 0,4$$

Bài 14: Chứng tỏ rằng: $\frac{3}{5} < \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \dots + \frac{1}{4006} < \frac{3}{4}$

Lời giải:

Thấy rằng tổng A có 2003 số hạng, số hạng ở giữa là $\frac{1}{3005}$

$$\text{TH1: } A = \left(\frac{1}{2004} + \frac{1}{4006} \right) + \left(\frac{1}{2005} + \frac{1}{4005} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3004} + \frac{1}{3006} \right) + \frac{1}{3005}$$

$$= 6010 \left(\frac{1}{2004 \cdot 4006} + \frac{1}{2005 \cdot 4005} + \dots + \frac{1}{3004 \cdot 3006} \right) + \frac{1}{3005}$$

$$A > 6010 \cdot \frac{1}{3004 \cdot 3006} \cdot 1001 + \frac{1}{3005} > \frac{6010 \cdot 1001}{3005 \cdot 3005} + \frac{1}{3005} > \frac{2002}{3005} > \frac{1803}{3005} = \frac{3}{5}$$

$$\text{TH2: } A < 6010 \cdot \frac{1}{2004 \cdot 4006} \cdot 1001 + \frac{1}{3005} = \frac{6012 \cdot 1001}{2004 \cdot 4006} = \frac{3003}{4006} < \frac{3003}{4004} = \frac{3}{4}$$

Bài 15: Cho $A = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{3}{5} < A < \frac{31}{40}$

Lời giải:

Tổng A có 50 số hạng

$$\text{Ta có: } A = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{99} \right) + \dots + \left(\frac{1}{75} + \frac{1}{76} \right) \quad (25 \text{ ngoặc})$$

$$= 151 \left(\frac{1}{51 \cdot 100} + \frac{1}{52 \cdot 99} + \dots + \frac{1}{75 \cdot 76} \right)$$

$$A < \frac{151 \cdot 25}{51 \cdot 100} = \frac{151}{204} < \frac{155}{204} < \frac{155}{200} = \frac{31}{40} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } A > 151 \cdot \frac{25}{75 \cdot 76} = \frac{151}{228} > \frac{150}{228} > \frac{150}{250} = \frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \frac{3}{5} < A < \frac{31}{40}$$

Bài 16: Cho $A = \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{80}$. Chứng tỏ rằng: $1 < A < 2$.

Lời giải:

$$\text{Tổng } A \text{ có 60 số hạng: } A = \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{80} \right) + \left(\frac{1}{22} + \frac{1}{79} \right) + \dots + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{51} \right) \quad (30 \text{ ngoặc})$$

$$A = 101 \left(\frac{1}{21 \cdot 80} + \frac{1}{22 \cdot 79} + \dots + \frac{1}{50 \cdot 51} \right) < 101 \cdot \frac{30}{21 \cdot 80} = \frac{303}{168} = \frac{101}{56} < \frac{112}{56} = 2$$

$$\text{Mặt khác: } A > 101 \cdot \frac{30}{50 \cdot 51} = \frac{303}{255} > 1$$

Suy ra $1 < A < 2$

Bài 17: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500} > 48$

Lời giải:

Nhận thấy các mẫu của tổng A là bình phương của các số tự nhiên liên tiếp, còn tử số kém mẫu số là 1 nên ta tách A như sau:

$$A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{2500}\right) = 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right)$$

$$\text{Mà } B = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right) < 1$$

$$\Rightarrow -B > -1 \Rightarrow A = 49 - B > 49 - 1 = 48.$$

Vậy $A > 48$.

Bài 18: Chứng tỏ rằng: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2020} - 1} > 1010$

Lời giải:

Nhận thấy tổng A có phân số cuối có dạng $\frac{1}{2^n}$, nên muốn chứng minh tổng A lớn hơn 1 số ta nhóm sao cho phân số có dạng $\frac{1}{2^n}$ ở cuối ngoặc:

$$\text{Ta có: } A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2019} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{2020}}\right) - \frac{1}{2^{2020}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2020}} + \dots + \frac{1}{2^{2020}}\right) - \frac{1}{2^{2020}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2019} \cdot \frac{1}{2^{2020}} - \frac{1}{2^{2020}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2020}} = 1 + 2020 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2020}} = \frac{2020}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{2020}}\right) > 1010$$

Bài 19: Cho: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{100} - 1}$. Chứng tỏ rằng: $A > 50$ và $A < 100$

Lời giải:

Nhận thấy tổng A giống với bài 10, muốn chứng minh lớn hơn ta để phân số dạng $\frac{1}{2^n}$ ở cuối ngoặc:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{100}} - \frac{1}{2^{100}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{100}} = \frac{100}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{100}}\right) > 50$$

Mặt khác muốn chứng minh $A < 100$, ta nhóm sao cho phân số có dạng $\frac{1}{2^n}$ nằm ở đầu ngoặc:

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100} - 1}\right)$$

$$A < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{99} \cdot \frac{1}{2^{99}}$$

$$= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 100$$

Vậy $A < 100$

Lời giải:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{64} > 4$$

Chứng tỏ rằng:

Lời giải:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^5 + 1} + \dots + \frac{1}{2^6}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^5 \cdot \frac{1}{2^6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 4$$

Bài 21: Cho $A = \frac{455}{1} + \frac{454}{2} + \frac{453}{3} + \dots + \frac{2}{454} + \frac{1}{455}$. So sánh A với 2007

Lời giải:

$$A = \left(\frac{454}{2} + 1\right) + \left(\frac{453}{3} + 1\right) + \dots + \left(\frac{1}{455} + 1\right) + 1$$

Ta có:

$$= \frac{456}{2} + \frac{456}{3} + \dots + \frac{456}{455} + \frac{456}{456} = 456 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{456}\right) = 456.B$$

Xét

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{456}$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^7 + 1} + \dots + \frac{1}{2^8}\right) + \left(\frac{1}{257} + \frac{1}{258} + \dots + \frac{1}{456}\right)$$

$$> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^8}\right) + \left(\frac{1}{456} + \dots + \frac{1}{456}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \dots + \frac{2^7}{2^8} + \frac{200}{456}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \right) + \frac{200}{456}$$

$$= 4 + \frac{200}{456} = \frac{2024}{456}$$

Khi đó: $A > 456 \cdot \frac{2024}{456} = 2024 > 2007$

Bài 22: Chứng tỏ rằng luôn tồn tại số tự nhiên n để: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 1000$

Lời giải:

Chọn $n = 2^{2000}$ Khi đó: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{2000}} > \frac{2000}{2} = 1000$

Bài 23: Cho $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$. So sánh B với 50.

Lời giải:

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{98} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 2^{98} \cdot \frac{1}{2^{99}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{99}{2} > 50$$

Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2} > 1$

Bài 24:

Lời giải:

$$A = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

Ta có $n^2 - (n+1) + 1 = n^2 - n$ số hạng do đó:

$$A > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{1}{n} + 1 - \frac{n}{n^2} = 1$$

Vậy $A > 1$.

Bài 25: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{144} > 1$

Lời giải:

Tổng này là một trường hợp của Bài 15: Áp dụng cách làm Bài 15 ta có:

$$A = \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{12^2} \right) > \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{12^2} = \frac{1}{12} + \frac{12^2 - 12}{12^2} = 1$$

Bài 26: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{36} > 1$

Lời giải:

Tương tự tổng này có dạng của bài 15, nên ta có:

$$A = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{6^2} \right) > \frac{1}{6} + \frac{6^2 - 6}{6^2} = 1 \Rightarrow A > 1$$

Dạng 3: TÍCH CỦA MỘT DÃY

I. Phương pháp giải.

Với dạng tích ta sử dụng tính chất: $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$ với $m > 0$ và ngược lại

II. Bài toán.

Bài 1: Cho $A = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \dots \frac{200}{199}$. Chứng tỏ rằng: $14 < A < 20$

Lời giải:

Ta thấy: Phân số $\frac{n+1}{n} > 1 \Rightarrow \frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$ nên ta có:

$$A > \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \dots \frac{201}{200} \text{ khi đó:}$$

$$A^2 > \frac{(2.4.6\dots 200)(3.5.7\dots 201)}{(1.3.5\dots 199)(2.4.6\dots 200)}$$

$$\Rightarrow A^2 > 201 > 196 = 14^2 \Rightarrow A > 14$$

Mặt khác: $\frac{n+1}{n} < \frac{n}{n-1}$ nên ta có:

$$A < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \dots \frac{199}{198} \text{ khi đó:}$$

$$A^2 < \frac{(2.4.6\dots 200)(2.3.5.7\dots 199)}{(1.2.4.6\dots 198)(1.3.5.7\dots 199)}$$

$$\Rightarrow A^2 < 200.2 = 20^2 \Rightarrow A < 20$$

Bài 2: Cho $A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{208}{210}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{25}$

Lời giải:

Ta thấy A có dạng $\frac{n}{n+2} < 1 \Rightarrow \frac{n}{n+2} < \frac{n-1}{n+1} < \frac{n-1}{n}$,

$$A < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{207}{208} \Rightarrow A^2 < \frac{(1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 208)(1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 207)}{(3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 210)(3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 208)}$$

$$\Rightarrow A^2 < \frac{1}{3 \cdot 210} = \frac{1}{630} < \frac{1}{625} \Rightarrow A < \frac{1}{25}$$

Bài 3: Cho $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{15} < A < \frac{1}{10}$

Lời giải:

A có dạng $\frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$ khi đó ta có:

$$A < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{100}{101} \text{ khi đó:}$$

$$A^2 < \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99)(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 100)}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 100)(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 101)} \Rightarrow A^2 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100} \Rightarrow A < \frac{1}{10}$$

Mặt khác:

$$A > \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{98}{99} \Rightarrow A^2 > \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99)(1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 98)}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 100)(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 99)} = \frac{1}{200}$$

$$\Rightarrow A^2 > \frac{1}{200} > \frac{1}{225} = \frac{1}{15^2} \Rightarrow A > \frac{1}{15}$$

Bài 4: Chứng minh rằng $A = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdot \dots \cdot \frac{244}{246} < \frac{1}{27}$

Lời giải:

$$A < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdot \dots \cdot \frac{243}{244}$$

$$\Rightarrow A^2 < \frac{(1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 244)(1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 243)}{(3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 246)(3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 244)}$$

$$\Rightarrow A^2 < \frac{1}{3 \cdot 246} = \frac{1}{738} < \frac{1}{27^2}$$

Suy ra $A < \frac{1}{27}$

Vậy $A < \frac{1}{27}$.

Bài 5: Chứng tỏ rằng: $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{199}{200}$. Chứng minh rằng $P^2 < \frac{1}{201}$

Lời giải:

Ta có: $P < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{200}{201}$

$$\Rightarrow P^2 < \frac{(1.3.5.....199)(2.4.6...200)}{(2.4.6.....200)(3.5.7.9.....201)}$$

$$\Rightarrow P^2 < \frac{1}{201}$$

$$\text{Vậy } P^2 < \frac{1}{201}$$

Bài 6: Cho $S = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \dots \frac{200}{199}$. Chứng tỏ rằng: $101 < S^2 < 400$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } S < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{199}{198}$$

$$S^2 < \frac{(2.4.6....200)(2.3.5...199)}{(1.3.5.7...199)(1.2.4.6...198)} = 400$$

$$\text{Mặt khác: } S > \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \dots \frac{201}{200}$$

$$\Rightarrow S^2 > \frac{(2.4.6.....200)(3.5.7....201)}{(1.3.5.....199)(2.4.6....200)} = 201 > 101$$

$$\text{Vậy } 101 < S^2 < 400$$

Bài 7: Cho $A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$. So sánh A với $-\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Ta thấy tích A gồm 99 số âm:

$$A = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{1}{9} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{10000} - 1\right)$$

$$= - \left(\frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \dots \frac{99.101}{100.100} \right) = - \frac{101}{200}$$

$$\text{Mà: } \frac{101}{200} > \frac{1}{2} \Rightarrow - \frac{101}{200} < - \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } A < - \frac{1}{2}$$

Dạng 4: BẤT ĐẲNG THỨC CHỮ

I. Phương pháp giải

Với chương trình lớp 6 các dạng bài toán chứng minh bất đẳng thức chữ, ta thường sử dụng tính

chất: $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}, m > 0$ hoặc ngược lại và đưa về cùng mẫu.

II. Bài toán

Bài 1: Cho $a, b, c > 0$, chứng tỏ rằng: $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ có giá trị không nguyên

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$$

$$\frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}$$

$$\frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$$

$$\frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$$

$$\frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}$$

$$\frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} < M < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{a+b+c}, \text{ hay } 1 < M < 2,$$

Vậy M không có giá trị nguyên

Bài 2: Cho x, y, z, t là số tự nhiên khác 0, chứng minh rằng:

$$M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t} \text{ có giá trị không nguyên}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{x}{x+y+z} > \frac{x}{x+y+z+t}$$

$$\frac{y}{x+y+t} > \frac{y}{x+y+z+t}$$

$$\frac{z}{y+z+t} > \frac{z}{x+y+z+t}$$

$$\frac{t}{x+z+t} > \frac{t}{x+y+z+t}$$

Cộng theo vế ta được: $M > 1$.

Mặt khác

$$\frac{x}{x+y+z} < \frac{x+t}{x+y+z+t}$$

$$\frac{y}{x+y+t} < \frac{y+z}{x+y+z+t}$$

$$\frac{z}{y+z+t} < \frac{z+x}{x+y+z+t}$$

$$\frac{t}{x+z+t} < \frac{t+y}{x+y+z+t}$$

Cộng theo vế ta được: $M < 2$.

Suy ra $1 < M < 2$, Vậy M không có giá trị nguyên

Bài 3: Cho a, b, c là các số dương, và tổng hai số luôn lớn hơn số còn lại.

Chứng tỏ rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Lời giải:

Chúng ta có thể làm theo cách ở trên, hoặc làm theo cách thứ hai như sau:

Giả sử: $a \geq b \geq c \Rightarrow a+b > a+c > b+c$

Khi đó:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+c}$$

$$\frac{b}{c+a} < \frac{b}{b+c}$$

$$\frac{c}{a+b} < \frac{c}{b+c}$$

Cộng theo vế ta được: $VT < \frac{a+b+c}{b+c} = 1 + \frac{a}{b+c} < 1+1=2$

Bài 4: Cho $a, b, c, d > 0$ và $A = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}$, chứng tỏ rằng: $2 < A < 3$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} < \frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$$

$$\frac{b+c}{a+b+c+d} < \frac{b+c}{b+c+d} < \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c+d}{a+b+c+d} < \frac{c+d}{c+d+a} < \frac{c+d+b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d+a}{a+b+c+d} < \frac{d+a}{a+b+d} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d}$$

Cộng theo vế ta được: $2 < A < 3$.

Bài 5: Cho các số x, y, z nguyên dương, chứng tỏ rằng: $1 < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$

Lời giải:

Ngoài hai cách như trên, ta cũng có thể hướng dẫn học sinh làm theo cách như sau:

Ta có: $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} > 1$, tương tự ta cũng có: $\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} > 1$

Mà $\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \right) + \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} \right) = 3$ Nên $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$

Bài 6: Cho các số x, y, z nguyên dương, chứng tỏ rằng: $1 < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$.

Lời giải:

Ta có: $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} > 1$, tương tự ta cũng có: $\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} > 1$

Mà $\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \right) + \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} \right) = 3$ nên $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$

Vậy $1 < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$.

Bài 7: Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, chứng tỏ rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$.

Lời giải:

$0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a-1 \leq 0 \\ b-1 \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0$

$\Rightarrow ab - a - b + 1 \geq 0$

$\Rightarrow ab+1 \geq a+b \Rightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b}, (c \geq 0)$

Mà $\frac{c}{a+b} \leq \frac{2c}{a+b+c}, (c \geq 0) \Rightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2c}{a+b+c}$.

Chúng minh tương tự ta có: $\frac{b}{ac+1} \leq \frac{2b}{a+b+c}$ và $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{2a}{a+b+c}$.

Cộng theo vế ta được: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$.

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Cho $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$, chứng tỏ rằng: $A < 2$.

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \dots + \frac{1}{50.50} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50} = 2 - \frac{1}{50} < 2$

Bài 2: Chứng tỏ rằng:

a, $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$

b, $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16}$

Lời giải:

a, Ta có: $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$

$\Rightarrow 2A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$

Nên $2A + A = 3A = 1 - \frac{1}{64} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{3}$

b, Ta có: $3A + A = 4A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \dots - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$

Đặt $B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \dots - \frac{1}{3^{99}} \Rightarrow B = \frac{3}{4} - \frac{1}{3.3^{99}}$, thay vào A ta được:

$4A = \frac{3}{4} - \frac{1}{3^{99}.4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4} \Rightarrow A < \frac{3}{16}$

Bài 3: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

Lời giải:

Đặt $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$

$49A = 1 - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} - \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$

$$50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Bài 4: Chứng tỏ rằng: $1 < \frac{2021}{2020^2 + 1} + \frac{2021}{2020^2 + 2} + \frac{2021}{2020^2 + 3} + \dots + \frac{2021}{2020^2 + 2020} < 2$

Lời giải:

Ta có: $\frac{2021}{2020^2 + 1} < \frac{2021}{2020^2}$, $\frac{2021}{2020^2 + 2} < \frac{2021}{2020^2}$, tương tự như vậy:

$$A < \frac{2021}{2020^2} + \frac{2021}{2020^2} + \dots + \frac{2021}{2020^2} = \frac{2021 \cdot 2020}{2020^2} = \frac{2021}{2020} < 2 \Rightarrow A < 2$$

Mặt khác: $\frac{2021}{2020^2 + 1} > \frac{2021}{2020^2 + 2020}$, $\frac{2021}{2020^2 + 2} > \frac{2021}{2020^2 + 2020}$,

Tương tự như vậy:

$$A > \frac{2021}{2020^2 + 2020} + \frac{2021}{2020^2 + 2020} + \dots + \frac{2021}{2020^2 + 2020} = \frac{2021 \cdot 2020}{2020(2020 + 1)} = \frac{2021 \cdot 2020}{2020(2020 + 1)} = 1$$

Bài 5: Chứng tỏ rằng: $E = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500} > 48$

Lời giải:

$$\begin{aligned} E &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(1 - \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{2500}\right) \\ &= 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}\right) > 48 \end{aligned}$$

Bài 6: Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$, chứng tỏ rằng: $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$

Lời giải:

Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$

Suy ra
$$A = \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{75}\right) + \left(\frac{1}{76} + \frac{1}{77} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

TH1:
$$A > \frac{1}{75} \cdot 25 + \frac{1}{100} \cdot 25 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

TH2:
$$A < \frac{1}{50} \cdot 25 + \frac{1}{75} \cdot 25 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Bài 7: Chứng tỏ rằng: $A = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{18.19.20} < \frac{1}{4}$

Lời giải:

$$2A = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{19.20} \right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4} - \frac{1}{19.40} < \frac{1}{4}$$

Bài 8: Chứng tỏ rằng: $D = \frac{36}{1.3.5} + \frac{36}{3.5.7} + \frac{36}{5.7.9} + \dots + \frac{36}{25.27.29} < 3$

Lời giải:

$$D = 9 \left(\frac{4}{1.3.5} + \frac{4}{3.5.7} + \frac{4}{5.7.9} + \dots + \frac{4}{25.27.29} \right) = 9 \left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{27.29} \right) = 3 - \frac{1}{3.29} < 3$$

Chứng tỏ rằng: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2021}} < 2021$

Bài 9:

Lời giải:

Ta có: $A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2020}} + \dots + \frac{1}{2^{2021} - 1} \right) + \frac{1}{2^{2021}}$

$$A < 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2020} \cdot \frac{1}{2^{2020}} + \frac{1}{2^{2021}}$$

$$< 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \frac{1}{2^{2021}} = 2020 + \frac{1}{2^{2021}} < 2021$$

Bài 10: Chứng tỏ rằng: $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{1999}} > 1000$

Lời giải:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{1998} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{1999}} \right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{1998} \cdot \frac{1}{2^{1999}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1999 > 1000$$

Bài 11: Cho $M = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2}$. So sánh M với $\frac{2020}{2021}$

Lời giải:

Ta có :

$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2.2} < \frac{1}{1.2}$$

$$\frac{1}{3^2} = \frac{1}{3.3} < \frac{1}{2.3}$$

$$\frac{1}{4^2} = \frac{1}{4.4} < \frac{1}{3.4}$$

...

$$\frac{1}{2021^2} = \frac{1}{2021.2021} < \frac{1}{2020.2021}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2020.2021}$$

$$M < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}$$

$$M < 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$

$$\text{Vậy } M < \frac{2020}{2021}$$

Bài 12: Cho $A = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{2021}$, $B = 20$. So sánh A và B.

Lời giải:

Ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \\ \frac{1}{101} < \frac{1}{100} \\ \frac{1}{102} < \frac{1}{100} \\ \dots \\ \frac{1}{2021} < \frac{1}{100} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{2021} < \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100}$$

1922 số hạng 1922 số hạng

$$\Rightarrow A < 1922 \cdot \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1922}{100} < \frac{2000}{100} = 20$$

$$\Rightarrow A < B$$

Vậy $A < B$.

$$S = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{2001!} < 3$$

Bài 13: Chứng tỏ rằng:

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{1}{1!} = 1$$

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{1.2.3.4} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

...

$$\frac{1}{2001!} = \frac{1}{1.2.3...2000.2001} < \frac{1}{2000.2001} = \frac{1}{2000} - \frac{1}{2001}$$

$$S < 1 + 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2000} - \frac{1}{2001}$$

Suy ra

$$\Rightarrow S < 3 - \frac{1}{2001} < 3$$

$$\Rightarrow S < 3 \text{ (đpcm)}$$

Bài 14: Chứng minh rằng: $D = \frac{4}{5.8.11} + \frac{4}{8.11.14} + \frac{4}{11.14.17} + \dots + \frac{4}{302.305.308} < \frac{1}{60}$

Lời giải:

Ta có:

$$D = \frac{4}{5.8.11} + \frac{4}{8.11.14} + \frac{4}{11.14.17} + \dots + \frac{4}{302.305.308}$$

$$\frac{3}{2}D = \frac{6}{5.8.11} + \frac{6}{8.11.14} + \frac{6}{11.14.17} + \dots + \frac{6}{302.305.308}$$

$$\frac{3}{2}D = \frac{11-5}{5.8.11} + \frac{14-8}{8.11.14} + \frac{17-11}{11.14.17} + \dots + \frac{308-302}{302.305.308}$$

$$\frac{3}{2}D = \frac{1}{5.8} - \frac{1}{8.11} + \frac{1}{8.11} - \frac{1}{11.14} + \dots + \frac{1}{302.305} - \frac{1}{305.308}$$

$$\frac{3}{2}D = \frac{1}{5.8} - \frac{1}{305.308}$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{60} - \frac{2}{3.305.308}$$

$$\text{Do } \frac{2}{3.305.308} > 0 \Rightarrow D < \frac{1}{60}$$

$$\text{Vậy } D < \frac{1}{60}$$

Bài 15: Cho $a, b, c, d > 0$ và $A = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b}$. Chứng tỏ A không là một số tự nhiên

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}$$

$$\frac{b}{b+c+d} > \frac{b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c}{c+d+a} > \frac{c}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d}{d+a+b} > \frac{d}{a+b+c+d}$$

Cộng vế theo vế ta được $A > 1$

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

$$\frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c}{c+d+a} > \frac{c+b}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d}$$

Cộng vế theo vế ta được $A < 2$

Suy ra $1 < A < 2$. Chứng tỏ A không là một số tự nhiên.

! HẾT

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>